

Релятивистские модели конфайнмента в физике адронов

Гуржав ГАНБОЛД

ЛТФ ОИЯИ

18 июня 2026г.

(по материалам докторской диссертации)

- 1 Введение, актуальность и методология
- 2 Часть 1. Простые модели с аналитическим конфайнментом
- 3 Часть 2. Глюбол и мезон: двухчастичные связанные состояния
- 4 Часть 3. Бегущая константа связи КХД в низкоэнергетической области
- 5 Часть 4. Константа связи Ферми и мезонный массовый спектр
- 6 Часть 5. Радиационные переходы чармониевых состояний
- 7 Часть 6. Сильные распады экзотического состояния $Y(4230)$
- 8 Часть 7. Нарушение симметрии изоспина в сильных распадах $X_2(4014)$

Введение, актуальность и методология

Экспериментальные вызовы современной физики адронов

- LHCb, BESIII, BelleII, COMPASS: открыты десятки **экзотических состояний**, не укладывающихся в простые $q\bar{q}$ -модели [Chen et al., '16; Esposito et al., '17; Brambilla et al., '20].
- ALICE, STAR, NICA (MPD, SPD, BM@N): проверка уравнения состояния кварк-глюонной материи и понимания **механизмов адронизации**.
- BESIII, BelleII: Прецизионные измерения парциальных ширин экзотических адронов [Wang & Zhao, '25] требуют независимого теоретического анализа **внутренней структуры** и дискриминации гипотез (тетракварк, молекула, гибрид, адро-чармоний).
- Например, $Y(4230) (1^{--})$ и $X_2(4014) (2^{++})$ — кандидаты в адронную молекулу [Zhou, '25; Liu et al., '25]; подтверждение означало бы открытие **нового типа сильного взаимодействия на мезонном уровне** [Hong et al., '25].

Важные направления теории

На экспериментальные вызовы развиваются непertурбативные методы:

- **Адронизация:** механизм образования слабосвязанных состояний [Braun-Munzinger et al., '18]; подходы: диффузия тяжёлых кварков [Das et al., '25], модель Намбу–Йона-Лазинио [Hutauruk, '25].
- **Чармонии и тетракварки:** HPQCD - прорыв решёточных вычислений радиационных распадов [HPQCD, '25].
- **Глюболы:** обнаружение станет прямым подтверждением неабелевой природы КХД [Morningstar, '25; Chen et al., '25]. Кандидат $X(2370)$, природа не установлена.
- **Бегущая α_s :** поведение в ИК-области — дискуссии. Голографические [Usova, '24] и решёточные методы указывают на ИК-неподвижную точку [de Teramond et al., '25; Zwicky, '25]. Голографические модели — трудности с линейным потенциалом Вильсона [Diles, '25; Arefeva et al., '24].

Проблема непертурбативной КХД

На масштабах $\lesssim 1$ ГэВ теория возмущений неприменима. Явления конфайнмента и спонтанного нарушения киральной симметрии не имеют общепринятого аналитического описания.

Ограничения существующих подходов

- Потенциальные модели: нерелятивистские, теряют спиновую структуру.
- Решёточная КХД: точна, но не всегда даёт аналитическую картину динамики.
- Голографические методы: сталкиваются с трудностями при воспроизведении линейного потенциала Вильсона [Diles, '25; Arefeva et al., '24].

Мотивация

- **Проблема:** Нелинейная природа КХД затрудняет прямое описание конфайнмента и адронизации.
- **Гипотеза:** Пропагаторы кварков и глюонов в ИК-области существенно отличаются от свободных и могут реализовывать *аналитический конфайнмент* (АК).
- **Идея главы:** Исследовать «чистые» эффекты АК в простых релятивистских моделях юкавского типа, исключив усложнения, связанные со спином, цветом и ароматом.
- Модели с АК из литературы: Модель конфайнмента кварков [Efimov & Ivanov, '93], подход с самодуальным вакуумным полем [Leutwyler, '80/'81; Finjord, '82; Efimov & Nedelko, '95].

Три базовых принципа модели

- 1 **Концепция АК:** Пропагаторы кварков и глюонов в виде целых аналитических функций.
- 2 **Условие композитности:** $Z_H = 0$ [Salam, '62; Weinberg, '63].
- 3 **Уравнение Бете–Солпитера:** Решение в лестничном приближении.

Концепция АК

- Пропагаторы кварков и глюонов — целые аналитические функции в p^2 -плоскости (напр., $D(p) \sim \exp(p^2/\Lambda^2)$).
- Автоматический запрет рождения свободных цветных объектов: частицы существуют только в виртуальном состоянии.
- **Следствие:** Кварки и глюоны ненаблюдаемы, реализуется конфайнмент.

Формализм УБС

- Релятивистское обобщение уравнения Шрёдингера.
- Учёт запаздывающих взаимодействий и виртуальных пар.
- Явная ковариантность амплитуд.
- Лестничное приближение.

Цель и задачи исследования

Цель:

Построение самосогласованной релятивистской модели с на основе синтеза АК и УБС (МВ, МСК, МИК); и развитие КМКК; и применение единого формализма для описания обычных и экзотических адронов и проверки непертурбативной КХД.

Задачи:

- 1 Исследование АК (МВ, МСК): конфайнмент, траектории Редже, глюболы в слабой связи.
- 2 Построение МИК с учетом спиновых и цветовых степеней свободы кварков и глюонов. Оценка массы скалярного глюбола и вычисление спектра мезонов.
- 3 Восстановление в МИК $\hat{\alpha}_s(M)$ в ИК-области по спектру лёгких и странных мезонов; определение ИК-неподвижной точки.
- 4 Метод генерации масс через условие $Z_H = 0$ и критерий гладкости Ферми связи (КМКК); спектр масс мезонов от π до B_c .
- 5 Радиационные переходы в семействе чармоний.
- 6 Трёхчастичные распады $Y(4230)$, отношение ветвей.
- 7 Нарушение изоспиновой симметрии в распаде $X_2(4014)$.

Часть 1. Простые модели с аналитическим конфайнментом

- G. V. Efimov, G. Ganbold, "*Meson Spectrum and Analytic Confinement*", Phys. Rev. D **65** (2002) 054012.
- G. Ganbold, "*Hadron Spectra and Regge Trajectories*", AIP Conference Proc. **717** (2004) 285–290.
- G. Ganbold, "*Light and Heavy Mesons, Glueballs and Analytic Confinement*", AIP Conference Proc. **796** (2005) 127–132.
- G. Ganbold, "*A Quantum Field Approach to Meson and Glueball Spectra*", E. Conf. C070910, **228** (2007) 98–105.
- G. Ganbold, "*Analytic confinement: the glueball and meson masses, and the weak decay constants*", Proceedings of Science, PoS (Confinement 08) **085** (2008) 1.

Определение

Пропагаторы конфайнмированных частиц являются **целыми аналитическими функциями** в комплексной p^2 -плоскости.

- **Следствие:** Кварки и глюоны существуют только в виртуальных состояниях и не могут быть рождены как свободные частицы [Efimov & Ivanov, '93; Ahlig et al., '01].
- Мы применяем этот принцип к скалярным полям $\Phi(x)$ (прототип «кварка») и $\varphi(x)$ (прототип «глюона»).
- Уравнения для свободных полей $S^{-1}(\square)\Phi = 0$ и $D^{-1}(\square)\varphi = 0$ имеют только тривиальные решения $\Phi \equiv 0$, $\varphi \equiv 0$.

Модели юкавского типа с АК

Исходный лагранжиан в евклидовом пространстве:

$$\mathcal{L}(x) = -\Phi^+ S^{-1}(\square)\Phi - \frac{1}{2}\varphi D^{-1}(\square)\varphi - g\Phi^+\Phi\varphi.$$

Рассматриваются две реализации АК:

1 Модель Виртона (гауссовы пропагаторы):

$$\tilde{S}(p^2) = \frac{1}{\Lambda^2} e^{-p^2/\Lambda^2}, \quad \tilde{D}(p^2) = \frac{1}{\Lambda^2} e^{-p^2/\Lambda^2} \quad [\text{Efimov \& Ganbold, '02}].$$

Единственный параметр — масштаб конфайнмента $\Lambda \neq 0$. Аналог релятивистского гармонического осциллятора.

2 Модель скалярного конфайнмента (реалистичные пропагаторы):

$$\tilde{S}(p^2) = \frac{1}{p^2 + m^2} \left(1 - e^{-\frac{p^2 + m^2}{\Lambda^2}} \right),$$
$$\tilde{D}(p^2) = \frac{1}{p^2} \left(1 - e^{-\frac{p^2}{\Lambda^2}} \right) \quad [\text{Ganbold, '04}].$$

При $\Lambda \rightarrow 0$ воспроизводит свободные пропагаторы.

Переход к «адронным» полям: Кварк-адронная дуальность

Функционал Z выражается через поля связанных состояний $B_Q(x)$ [Ganbold, '05]:

$$Z = \int \prod_Q \delta B_Q \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_Q (B_Q G_Q^{-1} B_Q) + W_I[gB] \right\}.$$

Ключевой элемент — ядро "поляризованного оператора" $\alpha \tilde{\Pi}_{QQ'}$:

$$\alpha \tilde{\Pi}_{QQ'}(p) = \iint dy_1 dy_2 U_Q(y_1) \left[g^2 \sqrt{D(y_1)} S(k + \frac{p}{2}) S(k - \frac{p}{2}) \sqrt{D(y_2)} \right] U_{Q'}(y_2).$$

Диагонализация его равносильна решению **уравнения Бете–Солпитера** (УБС) в однобозонном приближении.

Уравнение для масс связанных состояний

Уравнение на собственные значения

$$\int dy' \alpha \tilde{\Pi}_p(y, y') U_Q(y') = E_Q(-p^2) U_Q(y).$$

После диагонализации функция Грина «мезона»:

$$\tilde{G}_Q(p^2) = [1 - E_Q(-p^2)]^{-1}$$

. **Масса** M_Q определяется из условия полюса при $p^2 = -M_Q^2$:

$$1 = E_Q(M_Q^2).$$

Перенормировка волновой функции:

$$Z_Q = -E'_Q(-M_Q^2) > 0, \quad g_Q^{\text{eff}} = g/\sqrt{Z_Q}.$$

Эффективная константа связи **не зависит** от исходной g , так как $E'_Q \sim g^2$.

Модель Виртона: Точное решение

Благодаря гауссовым пропагаторам, ядро факторизуется и диагонализуется аналитически. Собственные значения κ_{nl} [Efimov & Ganbold, '02]:

$$\kappa_{nl} = \kappa_0 \left(\frac{1}{2 + \sqrt{3}} \right)^{2n+l}, \quad \kappa_0 = \left(\frac{8\pi}{\Lambda^2(2 + \sqrt{3})} \right)^2.$$

Спектр масс:

$$M_{nl}^2 = 2\Lambda^2 \ln \frac{\alpha_c}{\alpha} + (2n + l) \cdot 2\Lambda^2 \ln(2 + \sqrt{3}), \quad \alpha_c = (2 + \sqrt{3})^2.$$

Выводы:

- Спектр эквидистантный, траектории Редже строго линейны и параллельны.
- Наклон траектории универсален и определяется только масштабом конфинмента Λ .
- Связанные состояния существуют только при $\alpha < \alpha_c$ (слабая связь).

Модель скалярного конфайнмента: Вариационный подход

Для более реалистичных пропагаторов используется вариационный принцип. Пробная функция для орбитального квантового числа l :

$$\Psi_{l\{\mu\}}(x, a) = C_l T_{l\{\mu\}}(x) \sqrt{D(x)} e^{-\frac{\Lambda^2}{4} ax^2}.$$

Вариационное уравнение для массы M_l :

$$1 = \frac{\alpha}{l!} \cdot \max_c \left\{ [4c(1-c)]^{l+1} \right. \\ \left. \times \int_0^1 \int_0^1 dt ds e^{(\mathcal{M}_l^2 - \nu^2)(t+s)} R_l(t, s, \chi_l) \right\},$$

где $\mathcal{M}_l = M_l/(2\Lambda)$, $\nu = m/\Lambda$, $\chi_l^2 = \mathcal{M}_l^2(t-s)^2$.

Иллюстрация: Зависимость массы от параметра ν

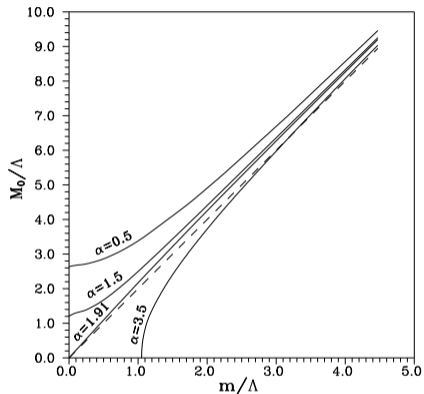


Рис. 1: Масса основного состояния $M_0 = M_0/\Lambda$ как функция массы «кварка» $\nu = m/\Lambda$. Пунктир — линия $M_0 = 2m$. Физическая область ($M_0 \geq 2m$) реализуется при $\alpha < \alpha_c$.

Результаты анализа основного состояния ($l = 0$):

- 1 Критическая константа связи: $\alpha_c \approx 1.9149\dots$ (из условия $\epsilon_0(0, 0) = 1/\alpha_c$).
- 2 При $\alpha \leq \alpha_c$: массы $M_0 \geq 2m$. При $m = 0$ существуют массивные глюболы.
- 3 При $\alpha > \alpha_c$: существование частиц требует $m > m_c$. Глюболы не существуют.

Две фазы модели:

- Слабая связь ($\alpha < \alpha_c$): Физическая картина спектра масс, стабильные состояния.
- Сильная связь ($\alpha > \alpha_c$): Нефизический режим, возможна «аннигиляция» массы.

Вывод: Физически осмысленная адронная спектроскопия реализуется в режиме относительно слабой связи.

Траектории Редже в модели скалярного конфайнмента

Для сравнения с экспериментом выбрано семейство K -мезонов ($l = 0, 1, 2$):

- $K(0.495 \text{ ГэВ})$, $K(1.270/1.400 \text{ ГэВ})$, $K(1.770 \text{ ГэВ})$.

Модель обобщена на случай неравных масс ($m_u \neq m_s$):

$$1 = \frac{\alpha}{l!} \max_c \left\{ [4c(1-c)]^{l+1} \iint dt ds \right. \\ \left. \times e^{-(\nu_u^2 t + \nu_s^2 s) + (t+s)M_l^2} R_l(t, s, \chi_l) \right\}.$$

Определение параметров (по трем точкам траектории):

- Масштаб конфайнмента: $\Lambda \approx 0.4 \div 0.5 \text{ ГэВ}$.
- Константа связи: $\alpha \approx 1.5 \div 1.9$.

Асимптотика ($l \rightarrow \infty$) совпадает с точным решением модели Виртона:

$$M_l^2 \sim l \cdot 2\Lambda^2 \ln(2 + \sqrt{3}).$$

Иллюстрация: Траектория Редже K -мезонов

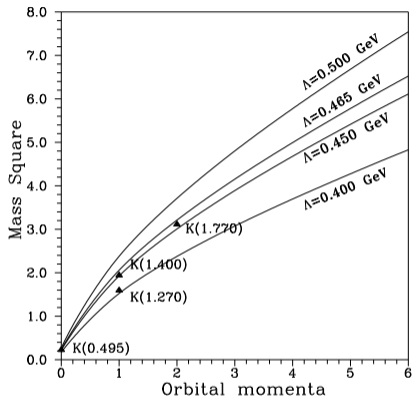


Рис. 2: Траектории Редже при $\alpha = 1.7$ для разных Λ в сравнении с экспериментом (треугольники). Асимптотическая линейность достигается при больших l .

Основные выводы раздела (Простые модели АК)

- 1 **Принципиальная роль АК:** Показано, что целые аналитические пропагаторы автоматически обеспечивают конфайнмент и качественно правильный спектр масс.
- 2 **Линейность траекторий Редже:** Даже в простых моделях без спина и цвета воспроизводятся линейные траектории с универсальным наклоном, определяемым только масштабом конфайнмента Λ .
- 3 **Существование глюоболов:** Безмассовые «глюоны» естественным образом формируют массивные «глюболы» в режиме слабой связи ($\alpha < \alpha_c$).
- 4 **Критическая константа связи:** Обнаружена точка α_c , разделяющая физическую и нефизическую фазы спектра. Физический сценарий реализуется только при относительно слабой связи.
- 5 **Ограничение подхода:** Модели не содержат спиновых, цветовых и киральных степеней свободы, что является предметом дальнейших глав. Введение N цветов уменьшает эффективную константу связи ($\alpha \rightarrow N\alpha_s$).

Часть 2. Глюбол и мезон: двухчастичные связанные состояния

- G. Ganbold, *"Glueballs and mesons: The ground states"*, Phys. Rev. D **79** (2009) 034034.
- G. Ganbold, *"Two-particle Bound States: Mesons and Glueballs"*, Eur. Phys. J. Web of Conf. **3** (2010) 03014.
- G. Ganbold, *"Spectra of Light and Heavy Mesons, Glueball and QCD Effective Coupling"*, E. Conf. C110613 (2011) 268.
- Gurjav Ganbold, *"Hadron Spectrum and Infrared Behavior of QCD Coupling"*, J. Phys.: Conf. Ser. **295** (2011) 012041.
- Gurjav Ganbold, *"Meson Spectrum, Glueball Mass and QCD Effective Coupling within Infrared Confinement"*, Proceedings of Science, PoS (Confinement X) **065** (2013) 1.
- Gurjav Ganbold, *"Infrared Confinement and Meson Spectroscopy"*, Proceedings of Science, PoS (Baldin ISHEPP XXI) **059** (2013) 1.
- Gurjav Ganbold, *"Infrared confinement: Mass-scale dependence of the strong effective coupling, leptonic decay constants and spectrum of mesons, the lowest glueball mass"*, J. Phys.: Conf. Ser. **938** (2018) 012047.

Модель инфракрасного конфайнмента (МИК)

Аналитический конфайнмент (АК)

Предположение о том, что вакуум КХД реализуется **самодуальными** вакуумными глюонными полями, стабильными относительно квантовых флуктуаций [Leutwyler, '80/'81; Finjord, '82; Efimov & Nedelko, '95].

- Кварковые и глюонные пропагаторы в таком вакууме – целые аналитические функции в p^2 .
- Прямое их использование громоздко, но вдохновляет на создание феноменологических моделей.

Уравнение Бете-Солпитера (УБС)

Релятивистский подход к проблеме двухчастичных связанных состояний [Salpeter & Bethe, '51]. Лестничное приближение УБС с феноменологическими потенциалами дает хорошие результаты для адронов [Roberts & Williams, '94].

Цель

- 1 Исследовать более простые системы со сходными с КХД характеристиками
- 2 Объединить концепцию АК и метод УБС в рамках релятивистской феноменологической модели на базе КХД, с учетом спиновых, цветовых и киральных степеней свободы.
- 3 Описать адроны как релятивистские связанные состояния кварков и глюонов с минимальным набором параметров.
- 4 Рассчитать ключевые характеристики адронной физики:
 - ▶ Массу низшего скалярного глюбола.
 - ▶ Спектры масс обычных псевдоскалярных и векторных мезонов.
 - ▶ Константы слабых распадов легких мезонов.
 - ▶ Извлечь зависимость эффективного заряда КХД в низкоэнергетической (пространственно-подобной) области непосредственно из данных адронной спектроскопии.

Краткое описание МИК

Лагранжиан модели [Ganbold, '09/10]

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu}^A - gf^{ABC}\mathcal{A}_\mu^B\mathcal{A}_\nu^C)^2 + \sum_f \bar{q}_f^a [\gamma_\alpha \partial^\alpha - m_f + g\Gamma_C^\alpha \mathcal{A}_\alpha^C]^{ab} q_f^b$$

где \mathcal{A}_α^C – глюон ($\alpha = \{1, \dots, 4\}$); $F_{\mu\nu}^A = \partial^\mu \mathcal{A}_\nu^A - \partial^\nu \mathcal{A}_\mu^A$; f^{ABC} – константы $SU_c(3)$; q_f^a – спинор аромата f , цвета $a = \{1, 2, 3\}$, масса m_f ; g – константа связи, $\Gamma_C^\alpha = i\gamma_\alpha t^C$, t^C – матрицы Гелл-Манна.

Пропагаторы кварка и глюона (в калибровке Фейнмана) [Ganbold, '09]

Целые аналитические функции, моделирующие АК:

$$\tilde{S}_\pm^{ab}(\hat{p}) = \delta^{ab} \frac{i\hat{p} + m_f [1 \pm \gamma_5 \omega(m_f/\Lambda)]}{\Lambda m_f} \exp\left\{-\frac{p^2 + m_f^2}{2\Lambda^2}\right\},$$

$$\tilde{D}_{\mu\nu}^{AB}(p) = \delta^{AB} \frac{\delta_{\mu\nu}}{p^2} \exp\left(-\frac{p^2}{4\Lambda^2}\right),$$

где $\hat{p} = p_\mu \gamma_\mu$, $\omega(z) = (1 + z^2/4)^{-1}$.

Свойства пропагаторов и конденсат

- Взаимодействие спина кварка с фоновым глюонным полем дает $\tilde{S}_{\pm} \sim 1/m_f$ при $m_f \rightarrow 0$ (нулевая мода, или низший уровень Ландау).
- Это приводит к **нетривиальному кварковому конденсату**, указывающему на спонтанное нарушение киральной симметрии:

$$\langle \bar{q}_f q_f \rangle = -\frac{6\Lambda^3}{\pi^2} \exp\left\{-\frac{m_f^2}{2\Lambda^2}\right\} \neq 0$$

- Следствие: расщепление масс $M_V > M_P$ для мезонов из одинаковых кварков.

Параметры модели

Минимальный набор: константа связи α_s , масштаб конфайнмента Λ , массы кварков m_{ud}, m_s, m_c, m_b ($m_u = m_d = m_{ud}$).

Континуальные интегралы для связанных состояний

- Статистическая сумма ($Z(0) = 1$):

$$Z(g) = \int \mathcal{D}\bar{q}\mathcal{D}q \int \mathcal{D}\mathcal{A} \exp \left\{ - \int dx \mathcal{L}[\bar{q}, q, \mathcal{A}] \right\}$$

- Допущение: $\alpha_s = g^2/4\pi \sim 1$ в области адронизации.
- Достаточно **лестничного приближения** для оценки спектров двухкварковых и двухглюонных состояний [Ganbold, '09/10/11].

Вклад ведущего порядка в двухкварковые ($Z_{q\bar{q}}$) и двухглюонные ($Z_{\mathcal{A}\mathcal{A}}$) состояния:

$$Z_{q\bar{q}} = \int \mathcal{D}\bar{q}\mathcal{D}q \exp \left\{ - (\bar{q}S^{-1}q) + \frac{g^2}{2} (\bar{q}\Gamma\mathcal{A}q)(\bar{q}\Gamma\mathcal{A}q)_D \right\},$$

$$Z_{\mathcal{A}\mathcal{A}} = \exp \left\{ - \frac{g}{2} (f\mathcal{A}\mathcal{A}F) \right\}_D, \quad (\bullet)_D \doteq \int \mathcal{D}\mathcal{A} e^{-\frac{1}{2}(\mathcal{A}D^{-1}\mathcal{A})} (\bullet).$$

Формализм: от кварков к мезонам

- 1 Выделение одно-глюонного обмена между цветными би-кварковыми токами:

$$L_2 = \frac{g^2}{2} \sum_{f_1 f_2} \iint dx_1 dx_2 (\bar{q}_{f_1} i\gamma_\mu t^A q_{f_1}) D_{\mu\nu}^{AB} (\bar{q}_{f_2} i\gamma_\nu t^B q_{f_2}). \quad (1)$$

- 2 Преобразование Фирца для разделения каналов (S, P, V, A, T) .
- 3 Переход к координатам центра масс и разложение нелокального тока по ортонормированному базису $\{U_Q\}$.
- 4 Введение (auxiliary) мезонных полей $B_{\mathcal{N}}$ через гауссов интеграл.
- 5 После интегрирования по кварковым переменным получаем:

$$Z_{q\bar{q}} \rightarrow Z_B = \exp \{ \ln [1 + g(B_{\mathcal{N}} V_{\mathcal{N}}) S] \}_B,$$

Анзац адронизации

- Отождествление полей $B_{\mathcal{N}}(x)$ с мезонами (квантовые числа \mathcal{N}).
- Выделение квадратичных конфигураций $\sim B_{\mathcal{N}}^2$ отдельно [Ganbold, '09]:

$$Z_B = \int \prod_{\mathcal{N}} \mathcal{D}B_{\mathcal{N}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{\mathcal{N}\mathcal{N}'} (B_{\mathcal{N}}[\delta^{\mathcal{N}\mathcal{N}'} + \alpha_s \lambda_{\mathcal{N}\mathcal{N}'}] B_{\mathcal{N}'}) - W_{res}[B_{\mathcal{N}}] \right\},$$

где $W_{res}[B_{\mathcal{N}}] \sim O(B_{\mathcal{N}}^3)$ описывает взаимодействия адронов.

- Ядро ведущего порядка (Фурье-образ):

$$\alpha_s \lambda_{JJ'}(p, x, y) = \frac{4g^2 \sqrt{C_J C_{J'}}}{9} \sqrt{D(x)D(y)} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} \left[O_J \tilde{S}(\hat{k} + \xi_1 \hat{p}) O_{J'} \tilde{S}(\hat{k} - \xi_2 \hat{p}) \right].$$

УБС и перенормировка

- Диагонализация ядра на базисе $\{U_{\mathcal{N}}\}$ эквивалентна решению **лестничного уравнения Бете-Солпитера (УБС)**.
- Уравнение для массы мезона $M_{\mathcal{N}}$:

$$1 + \alpha_s \lambda_{\mathcal{N}}(M_{\mathcal{N}}^2) = 0, \quad -p^2 = M_{\mathcal{N}}^2. \quad (2)$$

- Перенормировки [Ganbold, '09/10]:

$$\begin{aligned} (U_{\mathcal{N}}[1 + \alpha_s \lambda_{\mathcal{N}}(-p^2)]U_{\mathcal{N}}) &= (U_{\mathcal{N}}[1 + \alpha_s \lambda_{\mathcal{N}}(M_{\mathcal{N}}^2) \\ &\quad + \alpha_s \dot{\lambda}_{\mathcal{N}}(M_{\mathcal{N}}^2)(p^2 + M_{\mathcal{N}}^2)]U_{\mathcal{N}}) \\ &= (U_R[p^2 + M_{\mathcal{N}}^2]U_R), \quad U_R(x) = \sqrt{\alpha_s \dot{\lambda}_{\mathcal{N}}(M_{\mathcal{N}}^2)} \cdot U_{\mathcal{N}}(x). \end{aligned}$$

Условие нормировки $\dot{\lambda}(M_J) > 0$ выполняется автоматически.

Преимущества формализма

Использование континуального интеграла даёт преимущества перед прямым решением УБС:

- 1 **Кварк-адронная дуальность:** вакуумный функционал представим через кварк-глюонные или адронные переменные.
- 2 **Симметричная форма** ядра УБС позволяет применение вариационных методов.
- 3 **Нормировка** волновой функции связана с ядром УБС.
- 4 Статистическая сумма принимает стандартную форму с кинетическими членами и взаимодействием после перенормировки.

Уравнение для масс мезонов

Масса мезона определяется из условия полюса в S -матрице (уравнение Бете–Солпитера):

$$1 + \alpha_s \lambda_{\mathcal{N}}(M_{\mathcal{N}}^2) = 0.$$

Для решения используется вариационный принцип с пробной функцией основного состояния:

$$U(x, a) \sim \sqrt{D(x)} \cdot \exp \left\{ -\frac{a\Lambda^2 x^2}{4} \right\}.$$

После подстановки пропагаторов получаем вариационное уравнение для масс [Ganbold, '09/13/18]:

$$1 = \frac{\alpha_s C_J \Lambda^2}{3\pi m_1 m_2} \exp \left\{ \frac{M_J^2 (\xi_1^2 + \xi_2^2) - m_1^2 - m_2^2}{2\Lambda^2} \right\} \\ \times \max_{1/4 < a < 1/2} \left\{ \left[\frac{(6a - 1)(1 - 2a)}{a} \right]^2 \times \exp \left[-\frac{aM_J^2 (\xi_1 - \xi_2)^2}{2\Lambda^2} \right] \cdot [\dots] \right\},$$

где $C_J = \{1, 1/2\}$, $\chi_J = \{1, -1\}$ для $J = \{P, V\}$.

Константы слабых распадов

Константа слабого распада f_P определяется из дуальности ток-мезон:

$$if_P p_\mu = \langle 0 | J_A(0) | U_R(p) \rangle.$$

Итоговое выражение для вычислений:

$$f_P = \frac{32 \Lambda \alpha_s \sqrt{2\lambda(M_P^2)}}{3 \pi^{3/2} (m_1 + m_2)} \frac{(1 - 2a_P)(6a_P - 1)}{(1 + 2a_P)^2} \left[1 + \frac{a_P}{1 + 2a_P} \frac{(m_1 - m_2)^2}{m_1 m_2} \right] \\ \times \exp \left[\frac{M_J^2(\xi_1^2 + \xi_2^2) - m_1^2 - m_2^2}{2} - \frac{a_P}{1 + 2a_P} M_P^2 (\xi_1 - \xi_2)^2 \right].$$

Асимптотика: Для тяжело-легких мезонов ($m_1 \gg m_2$) модель правильно воспроизводит поведение $f_P \sim 1/\sqrt{m_1}$.

Фиксация параметров модели

Параметры фиксируются подгонкой под эталонные наблюдаемые:

- m_{ud} и α_s — из системы уравнений для $\pi(138)$ и $\rho(770)$.
- m_s , m_c , m_b — из подгонки под $K(495)$, $J/\Psi(3097)$ и $\Upsilon(9460)$.
- Λ — минимизацией отклонения f_π и f_K от эксперимента.

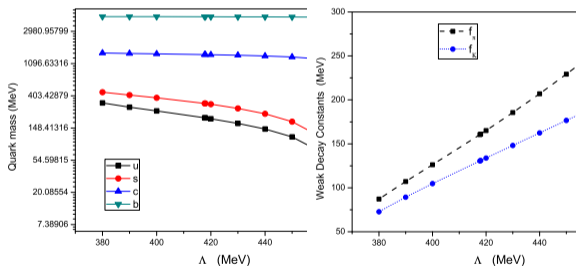


Рис. 3: Слева: Зависимость масс кварков от Λ . Справа: Зависимость f_π и f_K от Λ .

Результаты: Спектр масс мезонов

Набор параметров [Ganbold, '08/09]:

$$\alpha_s = 1.5023, \quad \Lambda = 416.4, \quad m_{ud} = 206.9, \quad m_s = 323.6, \\ m_c = 1453.8, \quad m_b = 4698.9 \text{ (все в МэВ)}.$$

Таблица 1: Вычисленный спектр обычных мезонов (в единицах МэВ) [Ganbold, '09].

$J^{PC} = 0^{-+}$	M_P	$J^{PC} = 0^{-+}$	M_P	$J^{PC} = 1^{--}$	M_V	$J^{PC} = 1^{--}$	M_V
$\pi(138)$	138	$\eta_c(2979)$	3012	$\rho(770)$	770	$D_s^*(2112)$	2078
$K(495)$	495	$B(5279)$	5437	$\omega(782)$	785	$J/\psi(3097)$	3097
$\eta(547)$	547	$B_s(5370)$	5551	$K^*(892)$	909	$B^*(5325)$	5464
$D(1870)$	1840	$B_c(6286)$	6522	$\Phi(1019)$	1022	$\Upsilon(9460)$	9460
$D_s(1970)$	1970	$\eta_b(9300)$	9434	$D^*(2010)$	1942		

- Относительная погрешность не превышает 3.5% во всём диапазоне (от 0.14 до 9.5 ГэВ).
- Смешивание $\omega - \Phi$ и $\eta - \eta'$ частично описано.

Сравнение констант распадов с экспериментом

С зафиксированными параметрами вычислены константы слабых распадов:

$$f_{\pi} = 128.8 \text{ МэВ}, \quad f_K = 157.7 \text{ МэВ}.$$

Сравнение с экспериментальными данными [Bernard et al., '05; PDG, '09]

$$f_{\pi^-}^{\text{PDG}} = 130.4 \pm 0.04 \pm 0.2 \text{ МэВ},$$

$$f_{K^-}^{\text{PDG}} = 155.5 \pm 0.2 \pm 0.8 \pm 0.2 \text{ МэВ}.$$

Модель демонстрирует хорошее согласие с экспериментом в пределах нескольких процентов, что подтверждает адекватность выбранного набора параметров и формализма.

Тяжелые кваркони ($m_1 = m_2 = m \gg \Lambda$):

$$M_J^2 = 4m^2 + \epsilon_J, \quad \epsilon_J = 4 \ln \left(\frac{3\pi}{32(7 - 4\sqrt{3})C_J\alpha_s} \right).$$

Расщепление $M_V > M_P$ сохраняется и для тяжелых систем (так как $C_P = 1 > C_V = 1/2$).

Тяжело-легкие системы ($m_1 \gg 1, m_2 \sim 1$):

$$M_J^2 = m_1^2 - \epsilon_J.$$

Константы распада: Правильная асимптотика $f_P \sim 1/\sqrt{m_1}$ для систем с одним тяжелым кварком.

Формализм: наименьшее состояние глюбола

Глюболы — связанные состояния глюонов, предсказанные КХД, но пока не обнаруженные экспериментально [Klemp & Zaitsev, '07]. В модели рассматривается скалярное двухглюонное состояние ($J^{PC} = 0^{++}$). Выделение бесцветного двухглюонного тока приводит к скалярному ядру УБС. Уравнение для массы глюбола:

$$1 - \frac{8g^2}{3} \int dz e^{izp} \Pi(z) = 0, \quad p^2 = -M_G^2.$$

С использованием гауссовой пробной функции:

$$U(x) = \frac{2c}{\pi} e^{-cx^2}.$$

Получено аналитическое выражение для массы легчайшего глюбола [Ganbold, '09]:

$$M_G = 2\Lambda \left[\ln \left(\frac{\alpha_{crit}}{\alpha_s} \right) \right]^{1/2}, \quad \alpha_{crit} \approx 80.$$

Результат: Масса и свойства глюбола

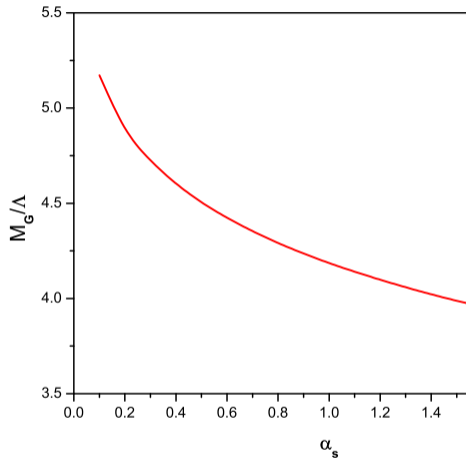


Рис. 4: Зависимость нормированной массы глюбола M_G/Λ от α_s .

Сравнение с другими предсказаниями

Численные решения:

- Подстановка параметров ($\alpha_s = 1.50$, $\Lambda = 416.4$ МэВ) дает:

$$M_G = 1660 \text{ МэВ}$$

- Радиус глобола: $r_G \approx 0.67$ фм.
- Произведение массы на радиус: $r_G \cdot M_G \approx 5.64$
(ср. с решёточной КХД [Morningstar & Peardon, '99; Chen et al., '06]: 4.16 ± 0.15).
- Глюонный конденсат: $g^2 \text{Tr}\langle F^2 \rangle \approx 0.8$ ГэВ⁴.

Результат находится в разумном согласии с диапазоном $\sim 1500 - 1800$ МэВ, ожидаемым в литературе.

Таблица 2: Сравнение масс скалярного глобола в разных схемах (в МэВ).

Источник	α_s	Λ , МэВ	M_G , МэВ
Данная модель	1.5	416	1660
Решёточная КХД [Chen et al., '08]	–	–	$1710 \pm 50 \pm 58$

Основные выводы раздела (Глюболы и мезоны)

- 1 **Единый формализм:** Разработана квантово-полевая модель, объединяющая АК и лестничное УБС, позволяющая одновременно описывать мезоны и глюболы.
- 2 **Спектр масс:** При минимальном наборе параметров (5 масс кварков, α_s , Λ) описан спектр 18 мезонов с точностью $\leq 3.5\%$ в диапазоне 0.14 – 9.5 ГэВ.
- 3 **Константы распадов:** Вычисленные значения $f_\pi = 128.8$ МэВ и $f_K = 157.7$ МэВ согласуются с данными PDG.
- 4 **Масса глюбола:** Получена независимая аналитическая и численная оценка $M_G = 1661$ МэВ, согласующаяся с решёточными вычислениями и предпочтительным кандидатом $f_0(1710)$.
- 5 **Глюонный конденсат:** Оценка $\langle g^2 FF \rangle \approx 0.8$ ГэВ⁴ соответствует порядку стандартных феноменологических значений.

Часть 3. Бегущая константа связи КХД в низкоэнергетической области

- G. Ganbold, “QCD running coupling in low-energy region”, Phys. Rev. D **81** (2010) 094008.
- G. Ganbold, “Infrared Behavior of QCD Running Coupling”, JINR Communications E1-2-2011-121 (2011).
- Gurjav Ganbold, “Hadron Spectrum and Infrared-Finite Behavior of QCD Running Coupling”, Phys. Part. Nucl. **43** (2012) 79–105.
- Gurjav Ganbold, “Quark-antiquark bound states and QCD running coupling within infrared confinement”, Phys. Part. Nucl. **45** (2014) 10.
- Gurjav Ganbold, “The glueball and meson spectrum, the meson weak decay constants and the strong effective coupling with the analytic (infrared) confinement”, Proceedings of Science, PoS (Hadron 2017) **036** (2018).
- Gurjav Ganbold, “Strong Effective Coupling, Meson Ground States, and Glueball within Analytic Confinement”, Particles **2** (2019) 180–194.
- Gurjav Ganbold, “Mesons and Glueballs, the Strong Effective Coupling within Analytic Confinement”, Phys. Part. Nucl. **51** (2020) 668.

- **Актуальность:** Поведение КХД на больших расстояниях ($Q < 1$ ГэВ) остаётся активной областью исследований [Prosperi et al., '07; PDG, '08]. Теория возмущений неприменима.
- **Роль α_s :** Эффективная константа связи обеспечивает интерполяцию между асимптотической свободой (УФ) и режимом адронизации (ИК).
- **Неопределённость:** ИК-поведение α_s чётко не установлено и требует уточнения [Shirkov, '02; Nesterenko, '03; Kaczmarek & Zantow, '05]. Существуют разные предсказания: от зануления до замораживания на конечном значении.
- **Цель:** Извлечь эффективный заряд КХД $\hat{\alpha}_s(M)$ в низкоэнергетической (пространство-подобной) области непосредственно из данных адронной спектроскопии.

Экспериментальные данные по α_s

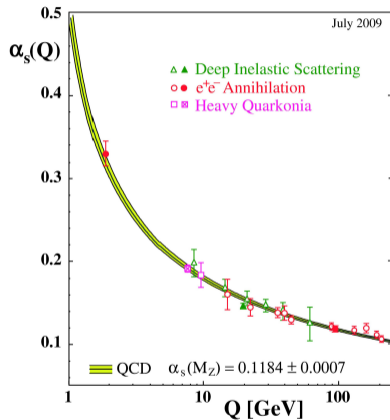


Рис. 5: Сводка измерений α_s как функции энергетического масштаба Q [Bethke, '09].

ИК-поведение глюонного пропагатора

Некоторые теоретические результаты предсказывают ИК-поведение глюонного пропагатора. Глюонный пропагатор, тождественно равный нулю в нуле импульса, рассматривался в [Fischer Alkofer, '02; Lerche Smekal, '02], в то время как другой пропагатор имел порядок $1/m_g^2$, где m_g — динамическая масса глюона [Alles, '96]. Анализ ренормгруппы [Gies, '02] и численные решеточные исследования, моделирующие глюонный пропагатор, согласуются с ИК-конечным поведением [Langfeld, '02].

Глюонный пропагатор [Ganbold, '10]

$$\tilde{D}_{\mu\nu}^{AB}(p) = \delta^{AB} \delta_{\mu\nu} \frac{1 - \exp(-p^2/\Lambda^2)}{p^2} = \delta^{AB} \delta_{\mu\nu} \int_0^{1/\Lambda^2} ds e^{-sp^2}.$$

Явное ИК-конечное поведение: $\tilde{D}(0) \sim 1/\Lambda^2$.

Уравнение Бете–Солпитера для мезонов

В лестничном приближении масса мезона определяется уравнением:

$$1 + \hat{\alpha}_s(M_J) \cdot \lambda_J(\Lambda, M_J, m_1, m_2) = 0.$$

Для основного состояния ($\ell = 0$, $n_r = 0$) используется гауссова пробная функция и вариационный принцип. Уравнение принимает вид:

$$1 = \frac{8\hat{\alpha}_s C_J}{3\pi^2(m_1/\Lambda)(m_2/\Lambda)} \exp \left\{ \frac{M_J^2 - (m_1 + m_2)^2}{2\Lambda^2} (\xi_1^2 + \xi_2^2) \right\} \max_{0 < c < 2} [c(2-c)^2] \\ \times \int_0^1 \int_0^1 \frac{du dw}{\sqrt{(1/u-1)(1/w-1)} Q^2} \exp \left\{ -\frac{M_J^2 (\xi_1 - \xi_2)^2}{4\Lambda^2 Q} \right\} \cdot [\dots],$$

где $C_J = \{1, 1/2\}$ для $J = \{P, V\}$, $Q = 1 + c(u + w)$.

Двухэтапная процедура (на примере $\Lambda = 345$ МэВ):

① **Фиксация масс кварков** по тяжелым мезонам ($M > 2$ ГэВ):

- ▶ Из гладкой интерполяции данных берутся значения:

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}_s(9460) &= 0.1817, & \hat{\alpha}_s(3097) &= 0.2619, \\ \hat{\alpha}_s(2112) &= 0.3074, & \hat{\alpha}_s(2010) &= 0.3138.\end{aligned}$$

- ▶ Решается система уравнений для $\Upsilon(9460)$, $J/\Psi(3097)$, $D_s^*(2112)$, $D^*(2010)$.
- ▶ **Массы кварков:** $m_{ud} = 192.56$, $m_s = 293.45$, $m_c = 1447.59$, $m_b = 4692.51$ (в МэВ).

② **Решение обратной задачи** для легких мезонов ($M < 1$ ГэВ):

- ▶ Массы $\pi(138)$, $K(495)$, $\rho(770)$, $K^*(892)$ как входные данные.
- ▶ Вычисляются низкоэнергетические значения $\hat{\alpha}_s$:

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}_s(138) &= 0.7131, & \hat{\alpha}_s(495) &= 0.6086, \\ \hat{\alpha}_s(770) &= 0.4390, & \hat{\alpha}_s(892) &= 0.4214.\end{aligned}$$

Результаты: Низкоэнергетическая $\hat{\alpha}_s(M)$

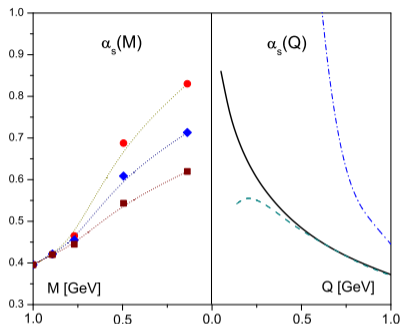


Рис. 6: Оценки $\hat{\alpha}_s(M)$ в низкоэнергетической области при разных $\Lambda = \{330, 345, 360\}$ Мэв в сравнении с теоретическими кривыми [Baldicchi et al., '08].

Согласование пространственно- и временно-подобной областей:

$$\alpha_s(0) = \hat{\alpha}_s(0) \int_0^\infty \frac{dt}{(1+t)^2} = \hat{\alpha}_s(0).$$

Пределы $\alpha_s(0)$ в Евклидова и Минковского областях совпадают.

Инфракрасная неподвижная точка

Для самого лёгкого кварка ($m_{ud} = 192.56$ МэВ, $\Lambda = 345$ МэВ):

$$\hat{\alpha}_s^0 = 0.757 \quad \text{или} \quad \frac{\hat{\alpha}_s^0}{\pi} = 0.241 .$$

Полученное значение ИК-неподвижной точки находится в разумном согласии с часто цитируемыми оценками:

- $\alpha_s^0/\pi \simeq 0.19 - 0.25$
- $\alpha_s^0/\pi \simeq 0.265$
- $\alpha_s^0/\pi \simeq 0.26$
- $\langle \alpha_s^0/\pi \rangle_{1\text{ГэВ}} \simeq 0.2$

[Godfrey & Isgur, '85]

[Zhang & Koniuk, '91]

[Halzen et al., '93]

[Dokshitzer et al., '96]

Глобальная картина $\hat{\alpha}_s(M)$

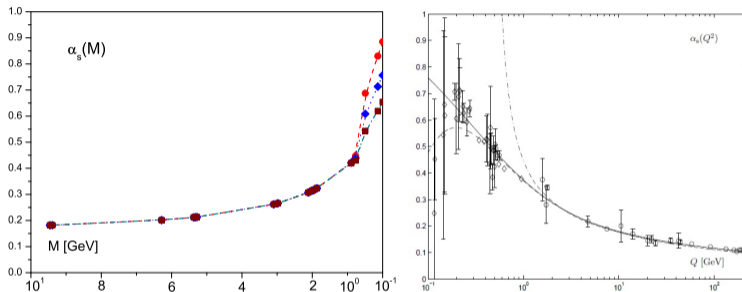


Рис. 7: Сводка оценок $\hat{\alpha}_s(M)$ в интервале 0 – 10 ГэВ при разных $\Lambda = \{330, 345, 360\}$ Мэв в сравнении с экспериментальными и теоретическими данными [Baldicchi et al., '08].

Отклики

From: JERROLD FRANKLIN <v1357@temple.edu>

Date: Mon, 17 May 2010 17:00:46 -0400

Subject: alpha_s

From: JERROLD FRANKLIN <v1357@temple.edu>

To: Gurjav Ganbold <ganbold@theor.jinr.ru>

Dear Dr. Ganbold,

I have just seen your paper "QCD Effective Coupling in the Infrared Region" on the arXiv.

I find it interesting that the value you find, $\alpha_s(0) = 0.757$, is close (and a bit higher, as expected) to the value $\alpha_s = 0.65 + /-.09$, Don Lichtenberg and I found some time ago from baryon masses in PRD 25, 1997 (1982). I am attaching a copy of our paper.

I hope you find it of interest.

Best regards, Jerrold Franklin

From: Stanley Brodsky, Alexandre Deur and Guy F de Teramond <gdt@asterix.crnet.cr>

From: Guy F de Teramond <gdt@asterix.crnet.cr>

Subject: arxiv: 1004.5280

Date: Sat, 1 May 2010 10:11:33 -0600

To: ganbold@theor.jinr.ru

Dear Professor Ganbold,

We have read your interesting recent article: "QCD Effective Coupling in the Infrared Region".

Our value for the strong coupling constant at $Q = 0$ is higher than your value, but here you may have use a different scheme from ours for the strong coupling. Comparison (and full references) to recent JLab data for the extraction of the IR strong coupling may also be relevant for your work.

We hope these brief comments may be useful.

Best regards,

Guy F. de Teramond

For Stanley Brodsky, Alexandre Deur and Guy de Teramond

Анализ α_s с помощью машинного обучения

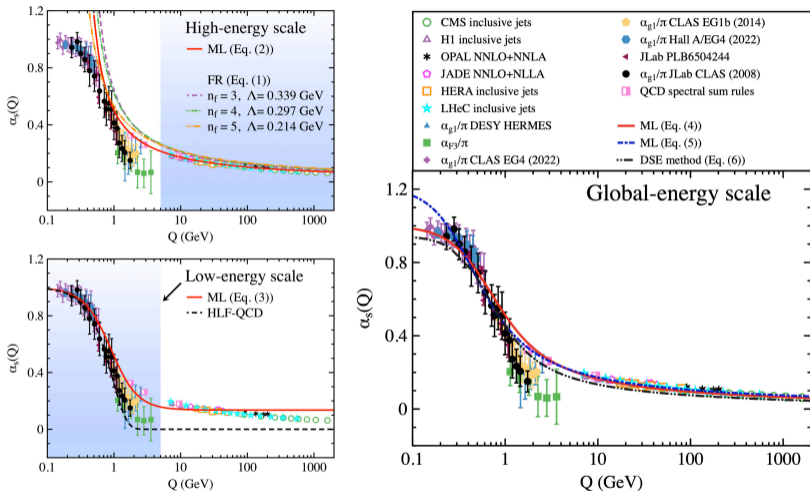


Рис. 8: С помощью машинного обучения получена формула α_s для всего диапазона энергий, где введение числа Эйлера устранило ИК расходимость и обеспечило переход между режимами. Анализ функций распределения, правила сумм Бьёркена и статической энергии кварк-кварк подтвердил эффективность описания. [Xiao-Yun Wang Chen Dong Xiang Liu, '23].

Таблица 3: Массы мезонов при $\Lambda = 345$ МэВ (в МэВ).

$J^{PC} = 0^{-+}$	M_P	$J^{PC} = 0^{-+}$	M_P	$J^{PC} = 1^{--}$	M_V	$J^{PC} = 1^{--}$	M_V
π	138	η_c	3039	ρ	770	D_s^*	2112
K	495	B	5339	ω	785	J/ψ	3097
η	547	B_s	5439	K^*	892	B^*	5357
D	1941	B_c	6489	Φ	1022	Υ	9460
D_s	2039	η_b	9442	D^*	2010		

- Относительная погрешность $\leq 3.5\%$ в диапазоне 0.14 – 9.5 ГэВ.
- Результаты устойчивы к вариации Λ (изменение не более 0.5% при изменении Λ на ± 15 МэВ).

Основные выводы раздела (Бегущая α_s)

- 1 **Новый метод:** Разработан подход извлечения эффективного заряда КХД $\hat{\alpha}_s(M)$ во времени-подобной области непосредственно из спектра масс мезонов.
- 2 **ИК-конечное поведение:** Установлено существование инфракрасной неподвижной точки. Получено конкретное значение:

$$\frac{\hat{\alpha}_s(0)}{\pi} = 0.241 \quad (\hat{\alpha}_s(0) = 0.757).$$

- 3 **Согласованность:** Результат мало чувствителен к вариации масштаба конфайнмента Λ и согласуется с независимыми феноменологическими оценками.
- 4 **Единство описания:** С теми же параметрами воспроизведён спектр масс мезонов в широком диапазоне (0.14 – 9.5 ГэВ) с точностью $\leq 3.5\%$.
- 5 **Ограничения:** При $M > 10$ ГэВ результаты становятся нестабильными из-за близких пороговых эффектов.

Часть 4. Константа связи Ферми и мезонный массовый спектр

- Gurjav Ganbold, *"Meson mass spectrum and the Fermi coupling in the covariant confined quark model"*, Proceedings of Science, PoS (Baldin ISHEPP XXII) **115** (2015) 1.
- Gurjav Ganbold, Thomas Gutsche, Mikhail A. Ivanov, Valery E. Lyubovitskij, *"On the meson mass spectrum in the covariant confined quark model"*, J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **42** (2015) 075002.
- Gurjav Ganbold, *"Meson spectrum and decay constants, glueball mass, the fermi and effective strong couplings within the infrared confinement approaches"*, Mon. J. Phys. **2** (2016) 120.
- Gurjav Ganbold, *"The Fermi coupling, mass spectrum and decay properties of mesons within the covariant confined quark model"*, Eur. Phys. J. Web of Conf. **138** (2017) 04004.

Основные черты модели КМКК [Branz et al., '10]:

- Эффективный квантово-полевой подход, основанный на лагранжиане взаимодействия адрона H с кварковым током J_H :

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = g_H \cdot H(x) \cdot J_H(x) + \text{H.c.},$$

$$J_H(x) = \int dx_1 dx_2 F_H(x, x_1, x_2) \bar{q}_2(x) \Gamma_H q_1(x).$$

- Вершинная функция в импульсном пространстве (гауссова форма):

$$\tilde{\Phi}_H(-p^2) = \exp(p^2/\Lambda_H^2), \quad s_H = 1/\Lambda_H^2.$$

- **Конфайнмент:** Вводится инфракрасное обрезание λ в представлении Фока–Швингера ($\int_0^\infty dt \rightarrow \int_0^{1/\lambda^2} dt$), что устраняет пороги рождения свободных кварков. Параметр обрезания универсален.
- **Свободные параметры:** Массы составляющих кварков m_q , параметры размера Λ_H , универсальный параметр λ .

Таблица 4: Центральные значения основных параметров (в ГэВ) [Ganbold et al., '15].

$m_{u/d}$	m_s	m_c	m_b	λ
0.241	0.428	1.67	5.05	0.181

Генерация масс адронов

- **Феномена:** Происхождение масс наблюдаемых адронов не имеет прямого объяснения в рамках СМ.
- **Идея:** Описание адронов как составных частиц с использованием лагранжианов двух типов [Jouvet, '56]:

▶ Юкавский тип: $\mathcal{L}_{\text{int}}^Y = g_H H(x) J_H(x)$.

▶ Фермиевский тип: $\mathcal{L}_{\text{int}}^F = \frac{G^2}{2} J_H^2(x)$.

- **Эквивалентность** достигается [Ganbold et al., '15] при выполнении **условия композитности** Вайнберга–Салама:

$$Z_H = 1 - g_H^2 \tilde{\Pi}'_H(m_H^2) = 0.$$

- **Фермиевская связь** G при этом удовлетворяет условию нормировки:

$$G \tilde{\Pi}(m_H^2) = 1.$$

Условие композитности $Z_H = 0$ фиксирует юкавскую связь g_H , а уравнение $G \tilde{\Pi}(m_H^2) = 1$ определяет фермиевскую связь G .

Критерий гладкости для фермиевской связи

Сложность: При непосредственном использовании физических масс мезонов зависимость фермиевской связи $G(M_H)$ имеет пилообразный, немонотонный характер.

Решение — Критерий гладкости [Ganbold et al., '15]:

- Предлагается изменить подход к определению масс: не использовать экспериментальные массы как входные, а вычислять их из уравнения $G \tilde{\Pi}_H(M_H^2) = 1$, требуя гладкой зависимости $G(M_H)$.
- Это превращает условие нормировки в уравнение для определения массы мезона.
- Критерий гладкости можно рассматривать как самостоятельный вариационный принцип или дополнительное физическое условие, выделяющее истинные массы связанных состояний.

Схема вычислений и диаграмма

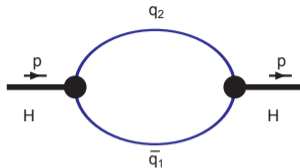


Рис. 9: Диаграмма собственной энергии для мезона в КМКК.

Алгоритм вычисления массы мезона:

- 1 Фиксируются параметры m_q , λ , Λ_H из подгонки констант распада и ширин.
- 2 Вычисляется массовая функция $\tilde{\Pi}_H(p^2)$.
- 3 Из условия композитности $Z_H = 0$ определяется юкавская связь g_H .
- 4 Из условия нормировки $G\tilde{\Pi}_H(M_H^2) = 1$ и критерия гладкости $G(M_H)$ находится масса мезона.

Результат: Гладкая зависимость $G(M_H)$

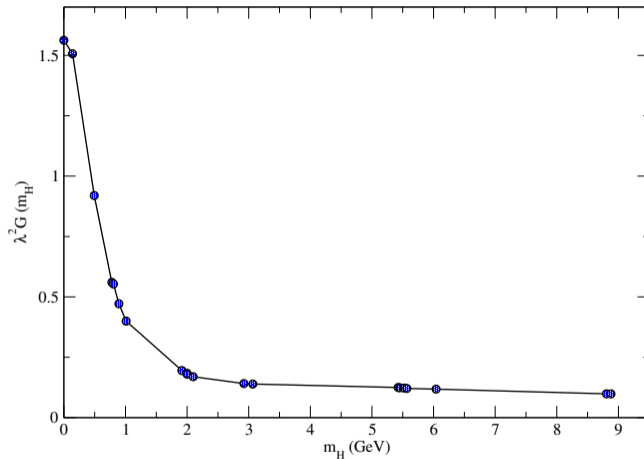


Рис. 10: Зависимость безразмерной фермиевской связи $G\lambda^2$ от масс мезонов, полученная с помощью критерия гладкости.

Таблица 5: Подогнанные значения масс мезонов (МэВ) в сравнении с данными PDG.

	Модель	Данные		Модель	Данные
m_π	141.0	139.57018 ± 0.0003	m_{η_c}	2922.0	2983.7 ± 0.7
m_K	493.0	493.677 ± 0.016	$m_{J/\psi}$	3067.0	3096.916 ± 0.011
m_ρ	778.0	775.26 ± 0.25	m_B	5425.0	5279.26 ± 0.17
m_ω	806.0	782.65 ± 0.12	m_{B^*}	5450.0	5325.2 ± 0.4
m_{K^*}	893.0	891.66 ± 0.26	m_{B_s}	5524.0	5366.77 ± 0.24
m_ϕ	1011.0	1019.45 ± 0.02	$m_{B_s^*}$	5566.0	5415.8 ± 1.5
m_D	1915.0	1869.62 ± 0.15	m_{B_c}	6041.0	6274.5 ± 1.8
m_{D_s}	1998.0	1968.50 ± 0.32	m_{η_b}	8806.0	9398.0 ± 3.2
m_{D^*}	2001.0	2010.29 ± 0.13	m_Υ	8880.0	9460.30 ± 0.26
$m_{D_s^*}$	2099.0	2112.3 ± 0.5			

- Среднее согласие с экспериментом составляет $\sim 2 - 3\%$ в широком диапазоне от π до B_c .
- Для тяжелых кваркониев (η_b , Υ) расхождение больше ($\sim 6\%$), что связано с приближениями модели.

Таблица 6: Значения эффективных связей $G\lambda^2$ в случаях точной и гладкой подгонки.

	Точная	Гладкая		Точная	Гладкая
π	1.508	1.507	η_c	0.128	0.141
K	0.919	0.920	J/ψ	0.129	0.139
ρ	0.571	0.560	B	0.215	0.125
ω	0.673	0.553	B^*	0.237	0.124
K^*	0.476	0.472	B_s	0.192	0.122
ϕ	0.377	0.400	B_s^*	0.232	0.121
D	0.224	0.195	B_c	0.0905	0.118
D_s	0.197	0.184	η_b	0.0612	0.0986
D^*	0.168	0.180	Υ	0.0600	0.0984
D_s^*	0.158	0.170			

- При точной подгонке разброс значений $G\lambda^2$ составляет от ~ 1.5 до ~ 0.06 .
- При гладкой подгонке кривая $G\lambda^2(M)$ становится монотонно убывающей функцией массы, что физически соответствует убыванию силы четырехфермионного взаимодействия с ростом энергетического масштаба.

Основные выводы раздела (Константа связи Ферми)

- 1 **Новый подход к генерации масс:** Сформулирован метод определения масс адронов, основанный на комбинации условия композитности $Z_H = 0$ и критерия гладкости фермиевской константы связи $G(M)$.
- 2 **Замкнутый вариационный принцип:** Доказано, что условия $Z_H = 0$ и $G\tilde{\Pi} = 1$ вместе с требованием гладкости $G(M)$ образуют систему уравнений, позволяющую вычислять массы мезонов без использования экспериментальных значений в качестве входных данных.
- 3 **Универсальность:** Полученный масс-спектр охватывает диапазон от π -мезона (~ 0.14 ГэВ) до B_c -мезона (~ 6.3 ГэВ) и до Υ (~ 9.5 ГэВ) с хорошей точностью (среднее согласие $\sim 2 - 3\%$).
- 4 **Физическая интерпретация:** Монотонно убывающая зависимость $G(M)$ отражает уменьшение силы четырехфермионного взаимодействия с ростом энергетического масштаба, что согласуется с асимптотической свободой КХД.

Часть 5. Радиационные переходы чармониевых состояний

- Gurjav Ganbold, “Charmonium radiative transitions, meson and glueball properties with the effective strong coupling”, Eur. Phys. J. Web of Conf. **204** (2019) 08002.
- Gurjav Ganbold, Thomas Gutsche, Mikhail A. Ivanov, Valery E. Lyubovitskij, “Radiative transitions of charmonium states in the covariant confined quark model”, Phys. Rev. D **104** (2021) 094048.
- Gurjav Ganbold, “Charmonium radiative decays within the Covariant Confined Quark Model”, S. Rev. Mex. Fis. **3** (2022) 0308016.
- Gurjav Ganbold, “Analytic confinement in modern hadron physics”, Proceed. of Institute of Physics and Technology, MAS **48** (2022) 183–199.
- Gurjav Ganbold, “Radiative transitions of charmoniums within the covariant confined quark model”, Phys. Part. Nucl. Lett. **20** (2023) 347.

Чармоний как испытательный полигон

- **Чармоний** — связанное состояние $c\bar{c}$, идеальная система для проверки моделей из-за промежуточной массы (~ 3 ГэВ).
- **Особенности:** Низколежащие состояния (J/ψ , η_c , χ_{cJ} , h_c) находятся ниже порога $D\bar{D}$; их доминирующие распады — однофотонные радиационные переходы.
- **Проблема:** Существуют расхождения между теоретическими предсказаниями (потенциальные модели, решёточная КХД) и экспериментальными данными, особенно для $J/\psi \rightarrow \gamma\eta_c$ [Barnes et al., '05; Becirevic & Sanfilippo, '13].
- **Цель:** Изучить доминирующие радиационные переходы S - и P -волновых чармониев в рамках КМКК.

Специфика для чармония

- Все состояния имеют одинаковый кварковый состав ($c\bar{c}$) и близкие массы ($3.0 \div 3.5$ ГэВ).
- **Гипотеза:** Размер адрона пропорционален его массе: $\Lambda_X = \varrho \cdot M_X$, где $\varrho > 0$ — единый параметр наклона.
- Вершинная функция: $\tilde{\Phi}_X(-p^2) = \exp\left(\frac{1}{\varrho^2} \cdot \frac{p^2}{M_X^2}\right)$.

Калибровочно-инвариантная амплитуда перехода $X_1 \rightarrow \gamma X_2$:

$$T_{X_1 \rightarrow \gamma X_2}^{\text{inv};\sigma} = g_{X_1} g_{X_2} e_c e N_c \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4 i} \tilde{\Phi}_{X_1}(-k^2) \tilde{\Phi}_{X_2}(-\left(k + \frac{1}{2} q_2\right)^2) \text{Tr}[\Gamma_2 S_1 \Gamma_1 S_2 \gamma_{\perp}^{\sigma} S_3].$$

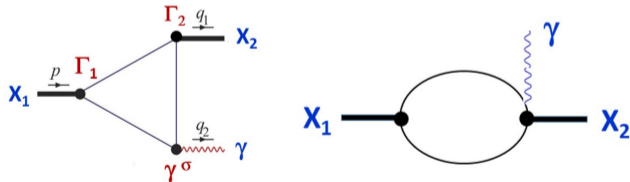


Рис. 11: Диаграммы Фейнмана главного порядка. Пузырьковые вклады (b) малы и опускаются.

Переходы $\chi_{cJ} \rightarrow \gamma J/\psi$: Фиксация ϱ

Параметр ϱ определяется подгонкой к данным по триплету χ_{cJ} [PDG, '21].

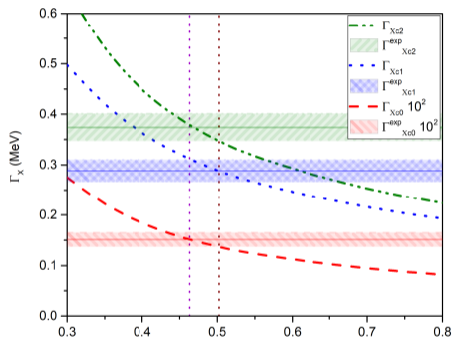


Рис. 12: Парциальные ширины распадов χ_{c0} , χ_{c1} , χ_{c2} в зависимости от ϱ .

Оптимальный параметр: $\varrho = 0.485$.

Результаты: Парциальные ширины распадов

С оптимальным $\rho = 0.485$ вычисляются $\Gamma(J/\psi \rightarrow \gamma\eta_c)$ и $\Gamma(h_c \rightarrow \gamma\eta_c)$.

Таблица 7: Ширины (кэВ) радиационных распадов чармония в КМКК.

J^{PC}	Распад	$\lambda = 0.181$	$\lambda \rightarrow 0$	[PDG,'22]	[Bruschini,'20; Deng et al.,'17]
1^{--}	$J/\psi \rightarrow \gamma\eta_c$	1.771	1.771	1.58 ± 0.43	$1.25 \div 2.64$
0^{++}	$\chi_{c0} \rightarrow \gamma J/\psi$	142.0	142.0	151 ± 14	$118 \div 128$
1^{++}	$\chi_{c1} \rightarrow \gamma J/\psi$	296.7	297.0	288 ± 22	$266 \div 315$
1^{+-}	$h_c \rightarrow \gamma\eta_c$	290.8	290.7	357 ± 270	$587 \div 720$
2^{++}	$\chi_{c2} \rightarrow \gamma J/\psi$	358.1	356.7	374 ± 27	$353 \div 467$

- Результаты КМКК хорошо согласуются с данными PDG2022 в пределах погрешностей.

Оценка полной ширины h_c

- Полная ширина h_c измерена с большой неопределённостью:
 $\Gamma_{h_c}^{\text{exp}} = 0.7 \pm 0.4$ МэВ [PDG, '20].
- Для $h_c \rightarrow \gamma\eta_c$ наша оценка (291 кэВ) существенно ниже решёточных предсказаний (~ 720 кэВ), но в пределах широкой экспериментальной неопределённости.
- Комбинируя нашу оценку парциальной ширины $\Gamma(h_c \rightarrow \gamma\eta_c) = 291$ кэВ с измеренным отношением ветвей $(51 \pm 6)\%$, получаем «теоретическую» полную ширину:

$$\Gamma_{h_c}^{\text{theor}} \simeq (0.57 \pm 0.12) \text{ МэВ}.$$

Это предсказание находится в более узком интервале и хорошо согласуется с центральным значением экспериментальных данных.

Предел деконфайнмента $\lambda \rightarrow 0$

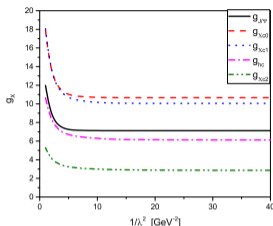


Рис. 13: Зависимость g_X от $1/\lambda^2$.

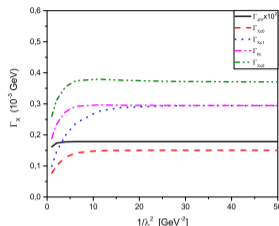


Рис. 14: Зависимость Γ_X от $1/\lambda^2$.

- Для рассматриваемых чармониев выполняется условие $M_X < 2m_c$ (нет порогов рождения свободных кварков).
- При уменьшении λ (увеличении $1/\lambda^2$) результаты не изменяются для $1/\lambda^2 > 20 \text{ ГэВ}^{-2}$.
- Универсальный параметр КМКК $\lambda = 0.181 \text{ ГэВ}$ ($1/\lambda^2 = 30.5 \text{ ГэВ}^{-2}$) находится глубоко в области плато.
- **Вывод:** Наши результаты устойчивы и остаются неизменными в пределе «деконфайнмента».

Основные выводы раздела (Радиационные переходы)

- 1 **Успешное применение КМКК:** Модель применена к описанию доминирующих однофотонных радиационных переходов S - и P -волновых состояний чармония.
- 2 **Минимальный набор параметров:** Использован один общий параметр наклона $\varrho = 0.485$ (вместо шести независимых Λ_χ) и масса c -кварка $m_c = 1.80$ ГэВ.
- 3 **Согласие с данными:** Вычислены парциальные ширины распадов для J/ψ , η_c , χ_{c0} , χ_{c1} , h_c , χ_{c2} . Результаты хорошо согласуются с последними данными PDG2020.
- 4 **Предсказание для h_c :** Получено уточнённое значение полной ширины $\Gamma_{h_c}^{\text{theor}} \simeq 0.57 \pm 0.12$ МэВ.
- 5 **Устойчивость к деконфайнменту:** Показано, что результаты не зависят от параметра ИК-обрезания λ для систем с массой ниже порога $2m_c$, что демонстрирует действенность модели в пределе «деконфайнмента».

Часть 6. Сильные распады экзотического состояния $Y(4230)$

- G. Ganbold, “*Strong decays of the charmonium-like state $Y(4230)$ and radiative transitions of low-lying charmoniums*”, Theor. Math. Phys. **216** (2023) 1326.
- Gurjav Ganbold, “*Hidden-Charm Strong Decays of Charmonium-Like State $Y(4230)$* ”, Phys. Part. Nucl. **55** (2024) 781.
- Gurjav Ganbold, M. A. Ivanov, “*Strong decays of charmonium-like state $Y(4230)$* ”, Eur. Phys. J. A **60** (2024) 13.

Загадка $Y(4230)$

- $Y(4230)$ — экзотическое чармониеподобное состояние с $J^{PC} = 1^{--}$, обнаруженное BaBar в канале $\pi^+\pi^-J/\psi$ [Aubert et al., '05].
- **Проблема:** Масса и свойства не соответствуют предсказаниям для $c\bar{c}$ чармония. Интерпретации: гибрид [Zhu, '05], тетракварк [Maiani et al., '05], адронная молекула [Wang et al., '13; Li & Liu, '13].
- **Новые данные BESIII:** Измерено отношение парциальных ширин распадов в $K\bar{K}J/\psi$ и $\pi\pi J/\psi$ [BESIII, '23]:

$$0.02 < \frac{\mathcal{B}(Y \rightarrow K^+K^-J/\psi)}{\mathcal{B}(Y \rightarrow \pi^+\pi^-J/\psi)} < 0.26.$$

- **Цель:** Изучить сильные распады $Y \rightarrow K^+K^-J/\psi$ и $Y \rightarrow \pi^+\pi^-J/\psi$ в рамках КМКК, интерпретируя Y как четырёхкварковое состояние молекулярного типа.

Модель: $Y(4230)$ как молекулярный тетракварк

Интерполирующий ток молекулярного типа (нейтральный, $0^-(1^{--})$):

$$J_Y^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \{(\bar{q}\gamma_5 c)(\bar{c}\gamma^\mu\gamma_5 q) + (\gamma_5 \leftrightarrow \gamma^\mu\gamma_5)\}, \quad q = u, d.$$

Нелокальное обобщение в КМКК:

- Лагранжиан: $\mathcal{L}_{\text{int}} = g_Y Y_\mu(x) J_{Y_{\text{nonloc}}}^\mu(x)$.
- Вершинная функция (гауссова): $\tilde{\Phi}_Y(-Q^2) = \exp(Q^2/\Lambda_Y^2)$.
- Константа связи g_Y фиксируется **условием композитности**:
 $Z_Y = 1 - g_Y^2 \tilde{\Pi}'_Y(M_Y^2) = 0$.

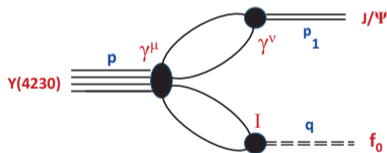
Параметры модели [Dubnicka et al., '20; Ganbold et al., '21]:

λ (ИК-обрезание)	$m_{u/d}$	m_s	m_c
0.181 ГэВ	0.241 ГэВ	0.428 ГэВ	1.670 ГэВ

Двухчастичный распад: $Y \rightarrow V S$

Матричный элемент распада $Y(p) \rightarrow J/\psi(p_1) + f_0(q)$:

$$\mathcal{M}_{YJS} = (Bg^{\mu\nu} + C p_1^\mu q^\nu) \varepsilon_\mu(p) \varepsilon_\nu^*(p_1).$$



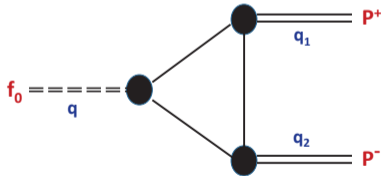
Парциальная ширина через спиральные амплитуды:

$$\Gamma(Y \rightarrow J/\psi + f_0) = \frac{|p_1|}{24\pi M_Y^2} (|H_{+1+1}|^2 + |H_{-1-1}|^2 + |H_{00}|^2).$$

Двухчастичный распад: $S \rightarrow P^+ P^-$

Матричный элемент: $\mathcal{M}_{SPP} = G_{SPP}(q^2)$. Ширина:

$$\Gamma_{SPP}(q^2) = \frac{|q_1|}{8\pi} \frac{G_{SPP}^2(q^2)}{q^2}.$$



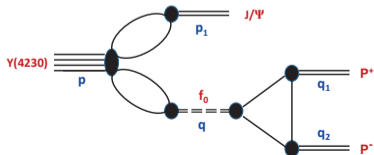
Механизм распада: Каскадная схема

Предлагается двухэтапный каскадный распад через промежуточные скалярные резонансы $f_0 = \{f_0(500), f_0(980)\}$:

- 1 $Y(4230) \rightarrow J/\psi + f_0$
- 2 $f_0 \rightarrow P^+ P^-$ ($P = \pi, K$).

Ограничения:

- Скалярные резонансы $f_0(500)$ и $f_0(980)$ рассматриваются как **кварк-антикварковые** состояния.
- Описание $c\bar{c} \leftrightarrow q\bar{q}$ переходов через глюонный обмен выходит за рамки модели.



Распределения Брейта–Вигнера

Модифицированное распределение Брейта–Вигнера:

$$BW_S(q^2) = \frac{\sqrt{q^2}}{\pi} \frac{1}{(q^2 - M_S^2)^2 + (M_S \Gamma_S)^2 [R_S^P(q^2)]^2}.$$

Важно: Для учета зависимости ширины от виртуальности q^2 вводится корректирующая функция:

$$R_S^P(q^2) = \frac{M_S^2}{q^2} \left(\frac{q^2 - 4M_P^2}{M_S^2 - 4M_P^2} \right)^{1/2}.$$

Она существенно подавляет распад $f_0(980) \rightarrow K^+ K^-$ вблизи порога.

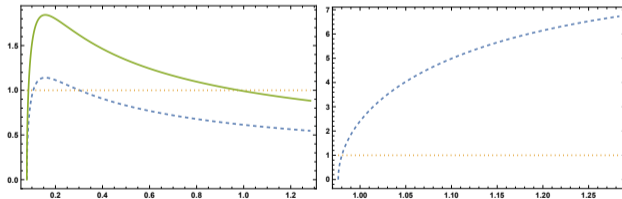


Рис. 15: Слева: $R_{f_0(500)}^\pi(q^2)$ и $R_{f_0(980)}^\pi(q^2)$. Справа: $R_{f_0(980)}^K(q^2)$.

Корректирующие функции и распределения Брейта–Вигнера

Учёт нетривиальной функции $R_S^P(q^2)$ особенно важен для канала K^+K^- , где он значительно меняет форму распределения.

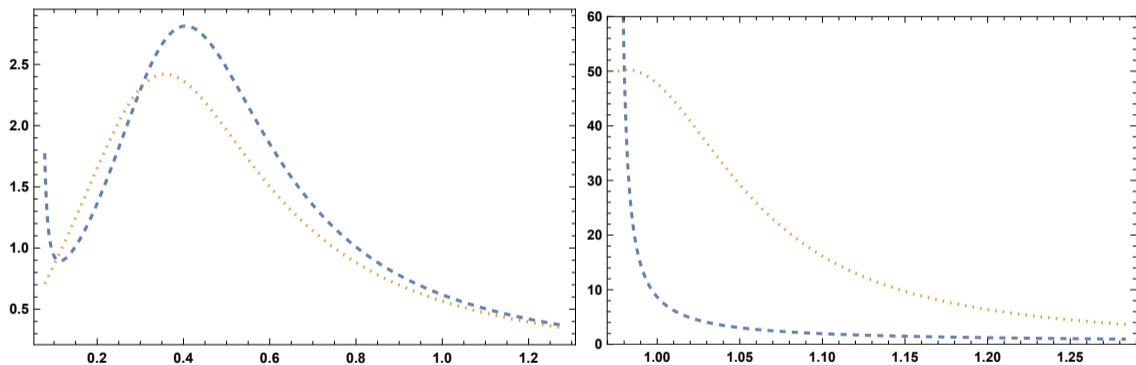


Рис. 16: Распределения Брейта–Вигнера для $f_0(500) \rightarrow \pi^+\pi^-$ и $f_0(980) \rightarrow K^+K^-$. Пунктир – с $R_S^P(q^2)$, точечная линия – приближение $R_S^P \equiv 1$.

Трёхчастичные ширины распадов

Интегрирование по квадрату массы промежуточного резонанса q^2 :

$$\Gamma(Y \rightarrow \pi^+ \pi^- J/\psi) = \int_{4M_\pi^2}^{q_{\max}^2} dq^2 \left[\Gamma_{YJS_1} BW_{S_1} \Gamma_{S_1\pi\pi} + \Gamma_{YJS_2} BW_{S_2} \Gamma_{S_2\pi\pi} + BW_{\chi_{12}} (\Gamma_{YJS_1} \Gamma_{S_2\pi\pi} + \Gamma_{YJS_2} \Gamma_{S_1\pi\pi}) \right],$$

$$\Gamma(Y \rightarrow K^+ K^- J/\psi) = \int_{4M_K^2}^{q_{\max}^2} dq^2 \Gamma_{YJS_2} BW_{S_2} \Gamma_{S_2KK}.$$

Вклад интерференционного члена $BW_{\chi_{12}}$ между $f_0(500)$ и $f_0(980)$ учитывается в пионном канале.

Фиксация параметров размера

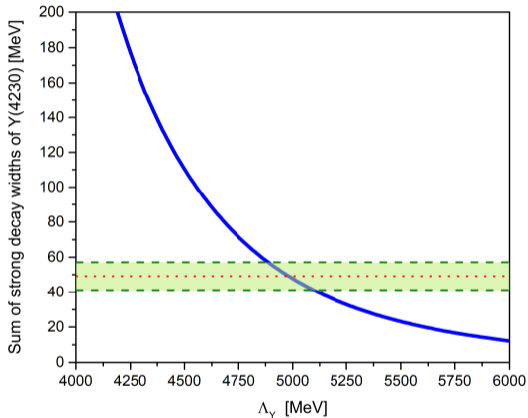


Рис. 17: Зависимость суммы парциальных ширин от Λ_γ . Зелёная полоса – экспериментальная полная ширина $\Gamma_Y = 49 \pm 8$ МэВ.

Таблица 8: Ширины распадов $Y(4230)$ (в МэВ). $R = 1$ обозначает приближение $R_S^P \equiv 1$.

Распад	КМКК	КМКК ($R = 1$)	[PDG, '24; BESIII, '23]
$\Gamma(Y \rightarrow J/\psi f_0(500))$	0.32 ± 0.03	0.32 ± 0.03	–
$\Gamma(Y \rightarrow J/\psi f_0(980))$	0.47 ± 0.05	0.47 ± 0.05	–
$\Gamma(f_0(980) \rightarrow K^+ K^-)$	30.2 ± 3.1	30.2 ± 3.1	$10 \sim 100$
$\Gamma(f_0(500) \rightarrow \pi^+ \pi^-)$	10.7 ± 1.2	10.7 ± 1.2	< 200
$\Gamma(f_0(980) \rightarrow \pi^+ \pi^-)$	34.6 ± 3.5	34.6 ± 3.5	$10 \sim 100$
$\Gamma(Y \rightarrow K^+ K^- J/\psi)$	1.2 ± 0.1	5.1 ± 0.6	–
$\Gamma(Y \rightarrow \pi^+ \pi^- J/\psi)$	35.1 ± 3.6	33.4 ± 3.5	$\Gamma_Y = 49 \pm 8$
$\frac{B(K^+ K^- J/\psi)}{B(\pi^+ \pi^- J/\psi)}$	0.033 ± 0.005	0.15 ± 0.03	$0.02 \sim 0.26$

Ключевые наблюдения:

- 1 Сумма вычисленных парциальных ширин (~ 36 МэВ) не превышает экспериментальную полную ширину $Y(4230)$ (49 ± 8 МэВ).
- 2 Канал $\pi^+\pi^- J/\psi$ доминирует над $K^+K^- J/\psi$, что ожидаемо из-за подавления последнего фазовым объёмом и близостью к порогу $K\bar{K}$.
- 3 **Решающая роль корректирующей функции:** Учёт $R_S^P(q^2)$ уменьшает ширину $\Gamma(Y \rightarrow K^+K^- J/\psi)$ с 5.1 МэВ до 1.2 МэВ (в ~ 4.3 раза).
- 4 Отношение ветвей $\mathcal{B}(K^+K^- J/\psi)/\mathcal{B}(\pi^+\pi^- J/\psi) = 0.033 \pm 0.005$ находится вблизи нижней границы экспериментального интервала $[0.02, 0.26]$.
- 5 Полученное отношение $\Gamma(f_0(980) \rightarrow \pi\pi)/\Gamma_{\text{tot}}(f_0(980)) \approx 0.53$ согласуется с данными.

Заключение по $Y(4230)$

- 1 В рамках КМКК с интерполирующим током молекулярного типа исследованы сильные трёхчастичные распады экзотического состояния $Y(4230)$.
- 2 Предложен каскадный механизм распада $Y \rightarrow J/\psi + f_0(\rightarrow P^+ P^-)$, где скалярные резонансы $f_0(500)$ и $f_0(980)$ рассматриваются как $q\bar{q}$ состояния.
- 3 Показано, что учёт модифицированного распределения Брейта–Вигнера с зависимостью ширины от виртуальности ($R_S^P(q^2)$) критически важен для правильного описания канала $K^+ K^- J/\psi$.
- 4 Вычисленное отношение ветвей $\mathcal{B}(Y \rightarrow K^+ K^- J/\psi) / \mathcal{B}(Y \rightarrow \pi^+ \pi^- J/\psi) = 0.033 \pm 0.005$ хорошо согласуется с последними экспериментальными данными BESIII.
- 5 Результаты подтверждают, что молекулярная четырёхкварковая интерпретация $Y(4230)$ не противоречит имеющимся данным по его сильным распадам.

Часть 7. Нарушение симметрии изоспина в сильных распадах $X_2(4014)$

- Gurjav Ganbold, M. A. Ivanov, “*Hidden-charm strong decays of the spin-2 partner of $X(3872)$* ”, Phys. Rev. D **111** (2025) 014007.

Введение: $X_2(4014)$ — партнёр $X(3872)$

- $X_2(4014)$ — спин-2 партнёр знаменитого экзотического состояния $X(3872)$.
- **Предсказание:** Существование более тяжёлого партнёра с $J^{PC} = 2^{++}$ и молекулярной структурой $D^* \bar{D}^*$ было предсказано в ряде теоретических работ [Tornqvist, '94; Nieves & Valderrama, '12; Albaladejo et al., '15].
- **Эксперимент:** Коллаборация Belle сообщила о структуре с массой $M = 4014.3 \pm 4.0 \pm 1.5$ МэВ и шириной $\Gamma = 4 \pm 11 \pm 6$ МэВ в канале $\gamma\psi(2S)$ [Belle, '22/24].
- **Альтернативные интерпретации:** Обычный чармоний $\chi_{c2}(2P)$ [Godfrey & Isgur, '85], компактный тетракварк [Wu et al., '19].
- **Цель:** Изучить нарушение симметрии изоспина в сильных распадах $X_2 \rightarrow \omega J/\psi$ и $X_2 \rightarrow \rho^0 J/\psi$ в рамках КМКК как способ дискриминации его внутренней структуры.

Модель: $X_2(4014)$ как молекулярный тетракварк

Интерполирующий ток молекулярного типа ($I^G(J^{PC}) = 0^+(2^{++})$):

$$J_{X_2}^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{2}} \{(\bar{q}\gamma^\mu c)(\bar{c}\gamma^\nu q) + (\gamma^\mu \leftrightarrow \gamma^\nu)\}, \quad q = u, d.$$

Нелокальное обобщение в КМКК:

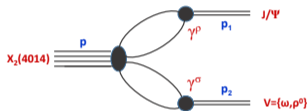
- Лагранжиан: $\mathcal{L}_{\text{int}} = g_{X_2} X_{2,\mu\nu}(x) J_{X_2}^{\mu\nu}(x)$.
- Вершинная функция: $\tilde{\Phi}_{X_2}(-Q^2) = \exp(Q^2/\Lambda_{X_2}^2)$.
- Константа связи g_{X_2} фиксируется условием композитности:
 $Z_{X_2} = 1 - g_{X_2}^2 \tilde{\Pi}'_{X_2}(M_{X_2}^2) = 0$.

Параметры модели (фиксированные, ГэВ):

λ	$m_{u/d}$	m_c	Λ_{ρ^0}	Λ_ω	$\Lambda_{J/\psi}$
0.181	0.241	1.670	0.61	0.80	1.55

Диаграмма распада и амплитуда

Двухчастичные распады $X_2 \rightarrow J/\psi + V$, где $V = \{\omega, \rho^0\}$.



Калибровочно-инвариантная амплитуда ведущего порядка:

$$T_{X_2 JV}^{\mu\nu\rho\sigma} = A_V \cdot (g^{\mu\rho} [g^{\sigma\nu} (p_1 \cdot p_2) - p_1^\sigma p_2^\nu] + \dots) + B_V \cdot (\dots).$$

Квадрат матричного элемента:

$$|\mathcal{M}_{X_2 JV}|^2 = M_{X_2}^4 (C_A^V A_V^2 + C_{AB}^V A_V B_V + C_B^V B_V^2),$$

где коэффициенты C_*^V полностью определяются массами мезонов.

Сравнение фазовых объёмов ρ^0 и ω

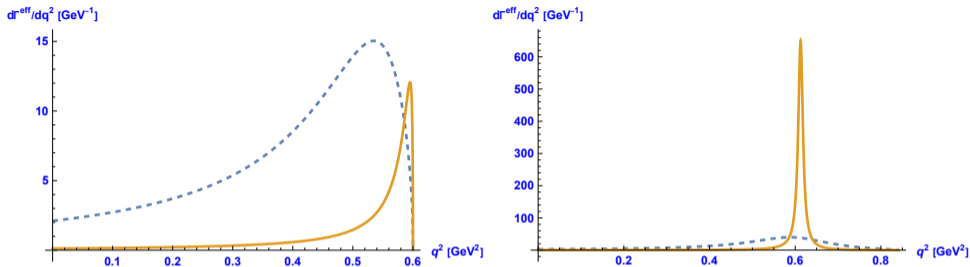


Рис. 18: Эффективные дифференциальные ширины в $\omega(\rightarrow 3\pi)J/\psi$ (желтые) и $\rho^0(\rightarrow 2\pi)J/\psi$ (синие). Для: $X(3872)$ - слева и $X_2(4014)$ - справа. Зависимость от матричных элементов игнорирована.

- Для $X(3872)$ распад $\omega(\rightarrow 3\pi)J/\psi$ кинематически подавлен.
- Для $X_2(4014)$ масса выше порогов $\rho J/\psi$ и $\omega J/\psi$, поэтому оба канала открыты.
- Грубая оценка отношения из фазовых объёмов и констант связи: $\text{BR}_{X_2}^{\text{approx}} \approx 0.762$.

Зависимость ширин от Λ_{X_2}

Параметр размера X_2 ищется в диапазоне $\Lambda_{X_2} \in [3.0, 5.0]$ ГэВ (следуя шаблону: чем тяжелее адрон, тем больше размер).

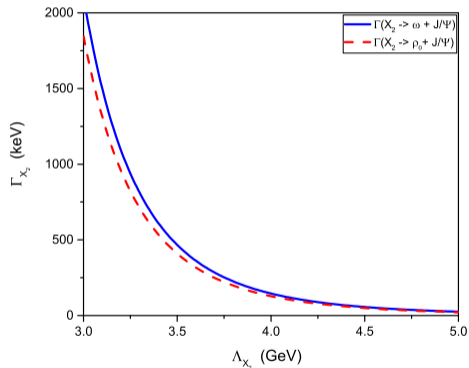


Рис. 19: Зависимость ширин $\Gamma(X_2 \rightarrow \omega J/\psi)$ и $\Gamma(X_2 \rightarrow \rho^0 J/\psi)$ от Λ_{X_2} при $M_{X_2} = 4.014$ ГэВ.

Таблица 9: Ширины распадов и их отношение при разных Λ_{X_2} .

Λ_{X_2} [ГэВ]	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0
$\Gamma(\omega J/\psi)$ [кэВ]	1825.3	430.4	138.4	54.4	24.6
$\Gamma(\rho^0 J/\psi)$ [кэВ]	1600.9	376.7	120.9	47.5	21.5
BR_{X_2}	1.140	1.143	1.145	1.146	1.146

Ключевое наблюдение:

- Абсолютные значения ширин сильно зависят от Λ_{X_2} .
- Отношение ветвей $BR_{X_2} \approx 1.14$ остаётся практически постоянным во всём диапазоне.
- Мода $\omega J/\psi$ слегка доминирует над $\rho^0 J/\psi$.

Зависимость от массы χ_2

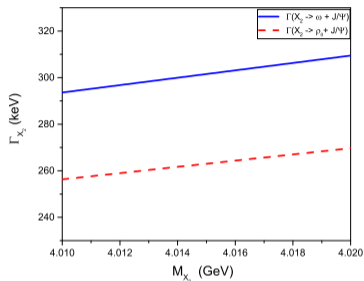


Рис. 20: Зависимость ширины от M_{χ_2} при фиксированном $\Lambda_{\chi_2} = 3.70$ ГэВ.

Сравнение с подходом мезонных петель [Zheng et al., '24]:

M_{χ_2} [ГэВ]	4.0137	4.0143	4.0167
$\text{BR}_{\chi_2}^{(\text{EFT})}$ [Zheng et al., '24]	~ 3.0	~ 15.0	$\sim 10^3$
$\text{BR}_{\chi_2}^{(0)}$	~ 1.143	~ 1.144	~ 1.144

Принципиальное различие подходов:

- **Модели с мезонными петлями (EFT) [Zheng et al., '24]:** Ширины распадов чрезвычайно чувствительны к массе X_2 из-за близости к порогам $D^* \bar{D}^{(*)}$. Отношение ветвей меняется от ~ 3 до $\sim 10^3$.
- **КМКК (кварковые петли):** Распады идут через конфайнментные кварковые петли, а не через петли очарованных мезонов. **Пороговые эффекты отсутствуют.**

Следствия:

- 1 $BR_{X_2} \approx 1.14$ стабильно относительно вариации Λ_{X_2} и M_{X_2} .
- 2 Это близко к $BR_X \sim 0.8 - 1.6$ для $X(3872)$, что ожидается для молекулярного партнёра.
- 3 Резкое отличие от предсказаний EFT (где $BR_{X_2} \sim 15$ или даже $\sim 10^3$) делает отношение ветвей экспериментально проверяемым критерием для дискриминации моделей.

Основные выводы раздела ($X_2(4014)$)

- 1 В рамках КМКК с интерполирующим током **молекулярного типа** исследованы сильные распады спин-2 состояния $X_2(4014)$.
- 2 Вычислены парциальные ширины распадов $X_2 \rightarrow \omega J/\psi$ и $X_2 \rightarrow \rho^0 J/\psi$ в ведущем порядке на уровне двухпетлевых кварковых диаграмм.
- 3 Обнаружена **стабильность отношения ветвей**:

$$\text{BR}_{X_2} = \frac{\Gamma(X_2 \rightarrow \omega J/\psi)}{\Gamma(X_2 \rightarrow \rho^0 J/\psi)} \approx 1.14.$$

Это отношение практически не зависит от параметра размера Λ_{X_2} , слабо меняется при вариации массы X_2 в пределах ошибок от BESIII.

- 4 **Отличие от моделей с мезонными петлями**: В отличие от EFT, где отношение сильно зависит от массы и может достигать 10^3 , КМКК предсказывает плавное поведение и отсутствие пороговых нестабильностей.
- 5 Полученное значение $\text{BR}_{X_2} \approx 1.14$ предлагается в качестве **экспериментально проверяемого критерия** для подтверждения четырёхкварковой природы молекулярного типа для $X_2(4014)$.

Основные результаты (1)

- Впервые аналитически показано, что юкавские модели с аналитическим конфайнментом качественно воспроизводят фундаментальные свойства мезонной спектроскопии: конфайнмент и асимптотически линейные траектории Редже с универсальным наклоном. Разработан формализм перехода к «адронному» описанию через диагонализацию ядра уравнения Бете-Солпитера. В рамках модели виртона (точное решение) и модели скалярного конфайнмента (вариационный анализ) обнаружена критическая константа связи α_{crit} , разделяющая фазы с массивными частицами и без них. По K -мезонной реджевской траектории оценены параметры шкалы конфайнмента и константы связи.

Основные результаты (2)

- Впервые в рамках модели инфракрасного конфайнмента достигнуто согласованное описание спектров масс обычных мезонов, их констант слабых распадов и массы скалярного глюбола. Выведены вариационные уравнения для масс мезонов; одновременно описаны спектры 18 мезонов в диапазоне 0.14 – 9.5 ГэВ с погрешностью $\leq 3.5\%$. Впервые из двухглюонного уравнения Бете–Солпитера выведено аналитическое выражение для массы скалярного глюбола и вычислено её значение.
- Впервые разработан метод извлечения эффективной бегущей константы связи $\hat{\alpha}_s(M)$ в низкоэнергетической области на основе подгонки мезонного спектра. Впервые получены количественные оценки, определена инфракрасная неподвижная точка $\alpha_s(0) \approx 0.757$ и показано совпадение пространственно-подобного и времени-подобного пределов.

Основные результаты (3)

- Впервые сформулированы критерий гладкости фермиевской константы связи G и самосогласованный вариационный принцип для уравнения масс, основанный на условиях нормировки волновой функции и композитности Вайнберга–Салама. Это позволило устранить пилообразное поведение $G(M)$, унифицировать описание псевдоскалярных и векторных мезонов и достичь точности вычисления масс 2 – 3% без дополнительной подгонки в широком интервале — от лёгких до тяжёлых мезонов.
- Впервые дано единое описание S - и P -волновых радиационных переходов шести состояний чармония ($\eta_c, J/\psi, \chi_{cJ}, h_c$) с единым параметром ϱ (отношение размера адрона к его массе). Предсказана величина $\Gamma(J/\psi \rightarrow \gamma\eta_c)$; впервые вычислен переход $h_c \rightarrow \gamma\eta_c$, на основе чего косвенно оценена $\Gamma_{\text{tot}}(h_c)$. Исследование предела деконфайнмента $\lambda \rightarrow 0$ показало стабильность результатов: для состояний ниже порога рождения свободных кварков результаты не зависят от инфракрасного обрезания, что подтверждает внутреннюю согласованность подхода.

Основные результаты (4)

- Впервые трёхчастичные сильные распады экзотических состояний описаны через промежуточные скалярные резонансы. Показано, что двухчастичный распад широкого $f_0(500) \rightarrow \pi^+\pi^-$ доминирует над аналогичным распадом узкого $f_0(980)$. Показано, что введение модифицированной функции Брейта-Вигнера значительно уменьшает $\Gamma(Y \rightarrow K^+K^-J/\psi)$. Для $Y(4230)$ получено теоретическое отношение распадов в K^+K^-J/ψ и $\pi^+\pi^-J/\psi$, согласующееся с данными BESIII.
- Впервые предсказано отношение парциальных ширин $BR_{X_2} \approx 1.14$ для каналов $\omega J/\psi$ и $\rho^0 J/\psi$ спин-2 состояния $X_2(4014)$. Отношение не чувствительно к девиации массы и демонстрирует полное отсутствие пороговых нестабильностей. Эта стабильность, радикально отличающая КМКК от моделей с мезонными петлями, выдвигается как экспериментально проверяемый критерий для дискриминации внутренней структуры данного состояния в пользу тетракварковой природы молекулярного типа.

- 1 G. V. Efimov, G. Ganbold, “*Meson Spectrum and Analytic Confinement*”, Phys. Rev. D **65** (2002) 054012.
- 2 G. Ganbold, “*Hadron Spectra and Regge Trajectories*”, AIP Conference Proc. **717** (2004) 285–290.
- 3 G. Ganbold, “*Light and Heavy Mesons, Glueballs and Analytic Confinement*”, AIP Conference Proc. **796** (2005) 127–132.
- 4 G. Ganbold, “*A Quantum Field Approach to Meson and Glueball Spectra*”, E. Conf. C070910, **228** (2007) 98–105.
- 5 G. Ganbold, “*Analytic confinement: the glueball and meson masses, and the weak decay constants*”, Proceedings of Science, PoS (Confinement 08) **085** (2008) 1.
- 6 G. Ganbold, “*Glueballs and mesons: The ground states*”, Phys. Rev. D **79** (2009) 034034.
- 7 G. Ganbold, “*Two-particle Bound States: Mesons and Glueballs*”, Eur. Phys. J. Web of Conf. **3** (2010) 03014.
- 8 G. Ganbold, “*QCD running coupling in low-energy region*”, Phys. Rev. D **81** (2010) 094008.

Публикации (продолжение)

- 9 G. Ganbold, *"Infrared Behavior of QCD Running Coupling"*, JINR Communications E1-2-2011-121 (2011).
- 10 G. Ganbold, *"Spectra of Light and Heavy Mesons, Glueball and QCD Effective Coupling"*, E. Conf. C110613 (2011) 268.
- 11 Gurjav Ganbold, *"Hadron Spectrum and Infrared Behavior of QCD Coupling"*, J. Phys.: Conf. Ser. **295** (2011) 012041.
- 12 Gurjav Ganbold, *"Hadron Spectrum and Infrared-Finite Behavior of QCD Running Coupling"*, Phys. Part. Nucl. **43** (2012) 79–105.
- 13 Gurjav Ganbold, *"Meson Spectrum, Glueball Mass and QCD Effective Coupling within Infrared Confinement"*, Proceedings of Science, PoS (Confinement X) **065** (2013) 1.
- 14 Gurjav Ganbold, *"Infrared Confinement and Meson Spectroscopy"*, Proceedings of Science, PoS (Baldin ISHEPP XXI) **059** (2013) 1.
- 15 Gurjav Ganbold, *"Quark-antiquark bound states and QCD running coupling within infrared confinement"*, Phys. Part. Nucl. **45** (2014) 10.
- 16 Gurjav Ganbold, *"Meson mass spectrum and the Fermi coupling in the covariant confined quark model"*, Proceedings of Science, PoS (Baldin ISHEPP XXII) **115** (2015) 1.

Публикации (продолжение)

- 17 Gurjav Ganbold, Thomas Gutsche, Mikhail A. Ivanov, Valery E. Lyubovitskij, *“On the meson mass spectrum in the covariant confined quark model”*, J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **42** (2015) 075002.
- 18 Gurjav Ganbold, *“Meson spectrum and decay constants, glueball mass, the fermi and effective strong couplings within the infrared confinement approaches”*, Mon. J. Phys. **2** (2016) 120.
- 19 Gurjav Ganbold, *“The Fermi coupling, mass spectrum and decay properties of mesons within the covariant confined quark model”*, Eur. Phys. J. Web of Conf. **138** (2017) 04004.
- 20 Gurjav Ganbold, *“Infrared confinement: Mass-scale dependence of the strong effective coupling, leptonic decay constants and spectrum of mesons, the lowest glueball mass”*, J. Phys.: Conf. Ser. **938** (2018) 012047.
- 21 Gurjav Ganbold, *“The glueball and meson spectrum, the meson weak decay constants and the strong effective coupling with the analytic (infrared) confinement”*, Proceedings of Science, PoS (Hadron 2017) **036** (2018).
- 22 Gurjav Ganbold, *“Strong Effective Coupling, Meson Ground States, and Glueball within Analytic Confinement”*, Particles **2** (2019) 180–194.

Публикации (продолжение)

- 23 Gurjav Ganbold, “*Charmonium radiative transitions, meson and glueball properties with the effective strong coupling*”, Eur. Phys. J. Web of Conf. **204** (2019) 08002.
- 24 Gurjav Ganbold, “*Mesons and Glueballs, the Strong Effective Coupling within Analytic Confinement*”, Phys. Part. Nucl. **51** (2020) 668.
- 25 Gurjav Ganbold, Thomas Gutsche, Mikhail A. Ivanov, Valery E. Lyubovitskij, “*Radiative transitions of charmonium states in the covariant confined quark model*”, Phys. Rev. D **104** (2021) 094048.
- 26 Gurjav Ganbold, “*Charmonium radiative decays within the Covariant Confined Quark Model*”, S. Rev. Mex. Fis. **3** (2022) 0308016.
- 27 Gurjav Ganbold, “*Analytic confinement in modern hadron physics*”, Proceed. of Institute of Physics and Technology, MAS **48** (2022) 183–199.
- 28 Gurjav Ganbold, “*Radiative transitions of charmoniums within the covariant confined quark model*”, Phys. Part. Nucl. Lett. **20** (2023) 347.
- 29 G. Ganbold, “*Strong decays of the charmonium-like state $Y(4230)$ and radiative transitions of low-lying charmoniums*”, Theor. Math. Phys. **216** (2023) 1326.

- 30 Gurjav Ganbold, "*Hidden-Charm Strong Decays of Charmonium-Like State $Y(4230)$* ", Phys. Part. Nucl. **55** (2024) 781.
- 31 Gurjav Ganbold, M. A. Ivanov, "*Strong decays of charmonium-like state $Y(4230)$* ", Eur. Phys. J. A **60** (2024) 13.
- 32 Gurjav Ganbold, M. A. Ivanov, "*Hidden-charm strong decays of the spin-2 partner of $X(3872)$* ", Phys. Rev. D **111** (2025) 014007.