

Электромагнитные радиационные поправки в измерениях радиуса протона

А.Н. Ильичёв

ЛТФ ОИЯИ, Дубна

НИИ ЯП БГУ, Минск

И.В. Акушевич

Университет Дьюка (США)

28 мая 2026 г.

Введение и план доклада

Два метода измерения зарядового радиуса протона

1. Упругое ep -рассеяние

Среднеквадратичный зарядовый радиус протона определяется по наклону G_E ,
когда $Q^2 \rightarrow 0$:

$$\langle r_E^2 \rangle = -6 \left. \frac{dG_E(Q^2)}{dQ^2} \right|_{Q^2 \rightarrow 0}.$$

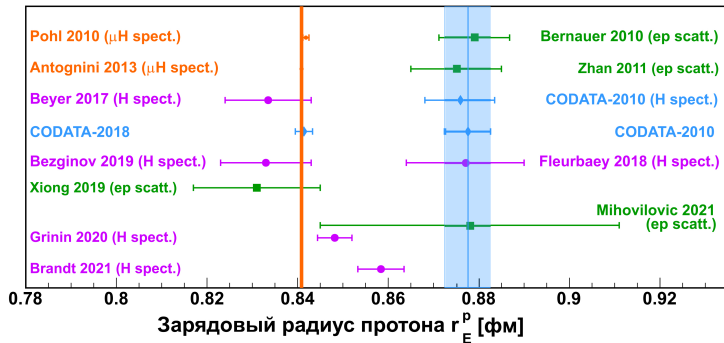
2. Водородная спектроскопия

Используются сдвиги энергетических уровней S -состояния, вызванные конечным
размером протона. Уровень атомной энергии

$$E_{n,l} \approx -\frac{R_\infty}{n^2} + \delta_{l,0} \frac{L_{1S} + ar_E^2}{n^3}.$$

Здесь n и l являются главным квантовым числом и квантовым числом углового
момента соответственно, R_∞ – постоянная Ридберга, L_{1S} – лэмбовский сдвиг на
 $1S$ состояние точечного ядра и $a \approx 1,56$ МГц·фм⁻². Как правило, для
определения R_∞ и r_E^2 необходимо измерить две частоты перехода. Однако, для
измерений лэмбовского сдвига, таких как переход из $2S_{1/2}$ в $2P_{1/2}$, измерение
 R_∞ не требуется, и, таким образом, этот метод обеспечивает независимое
измерение r_E^2 .

Введение и план доклада



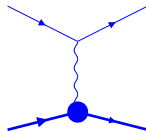
Зарядовый радиус протона, определяемый на основе упругого ep -рассеяния, экспериментов по спектроскопии водорода, а также сбора мировых данных CODATA с 2010 года. Мюонные спектроскопические измерения показаны оранжевыми точками, обычные результаты спектроскопии водорода показаны фиолетовыми точками, измерения рассеяния электронов показаны зелеными квадратами, а синие ромбы показывают компиляции CODATA.

Введение и план доклада

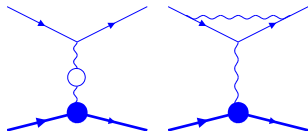
- ▶ Измерения радиуса протона, основанные на экспериментах по рассеянию лептонов, позволяют достигать высокой точности измерений. Однако для этого требуется жёсткий контроль систематических неопределённостей. Наиболее существенный вклад в них дают радиационные поправки.
- ▶ В анализе данных радиус протона извлекается из наклона Q^2 -зависимости, который определяется с помощью процедуры фитирования в рамках поканального подхода или метода, интегрированного по углу Мёллера.
- ▶ Целью данной работы является вычисление КЭД радиационных поправок и анализ Q^2 -зависимости отдельных вкладов в полную радиационную поправку в процессах $e p$ - и ee -рассеяния.
- ▶ Дополнительная цель — выявить и обсудить возможные пути дальнейшего улучшения как этих, так и других доступных расчётов.

Борновский вклад и поправки первого порядка: диаграммы Фейнмана

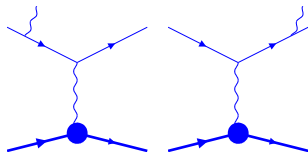
Борновский вклад:



Однопетлевые диаграммы:



Излучение реального фотона:



Борновский вклад

Борновское сечение для неполяризованного упругого lp -рассеяния

$$l(k_1) + p(p_1) \rightarrow l'(k_2) + p'(p_2)$$

при условиях $k_1^2 = k_2^2 = m^2$ и $p_1^2 = p_2^2 = M^2$ описывается двумя кинематическими инвариантами:

$$S = 2p_1 k_1, \quad Q^2 = -(k_1 - k_2)^2.$$

Сечение имеет вид

$$\frac{d\sigma_B}{dQ^2} = \frac{2\pi\alpha^2}{\lambda_S Q^4} (\theta_B^1 \mathcal{F}_1(Q^2) + \theta_B^2 \mathcal{F}_2(Q^2)),$$

где $\lambda_S = S^2 - 4m^2 M^2$, а

$$\theta_B^1 = Q^2 - 2m^2, \quad \theta_B^2 = \frac{S(S - Q^2) - M^2 Q^2}{2M^2},$$

$$\mathcal{F}_1 = Q^2 G_M^2, \quad \mathcal{F}_2 = 4M^2 \frac{G_E^2 + \tau_p G_M^2}{1 + \tau_p}.$$

Кинематическая область для Q^2 равна $(0, Q_{\max}^2)$, где

$$Q_{\max}^2 = \frac{\lambda_S}{S + M^2 + m^2}.$$

Поправки первого порядка

$$\frac{d\sigma_{RC}}{dQ^2} = \frac{\alpha}{\pi} (\delta_{IR} + \delta_{\text{vert}} + \delta_{\text{vac}}^l + \delta_{\text{vac}}^h) \frac{d\sigma_B}{dQ^2} + \frac{d\sigma_{AMM}}{dQ^2} + \frac{d\sigma_F}{dQ^2}$$

$$\begin{aligned} \delta_{IR} + \delta_{\text{vert}} &= 2 \left((Q^2 + 2m^2)L_m - 1 \right) \log \frac{v_{\text{cut}}}{mM} + \frac{1}{2}SL_S + \frac{1}{2}XL_X + S_\phi - 2 \\ &+ \left(\frac{3}{2}Q^2 + 4m^2 \right) L_m - \frac{Q^2 + 2m^2}{\sqrt{\lambda_m}} \left(\frac{1}{2}\lambda_m L_m^2 + 2 \text{Li}_2 \left[\frac{2\sqrt{\lambda_m}}{Q^2 + \sqrt{\lambda_m}} \right] - \frac{\pi^2}{2} \right). \end{aligned}$$

$$\delta_{\text{vac}}^l = \sum_{i=e,\mu,\tau} \delta_{\text{vac}}^i = \sum_{i=e,\mu,\tau} \left[\frac{2}{3}(Q^2 + 2m_i^2)L_m^i - \frac{10}{9} + \frac{8m_i^2}{3Q^2}(1 - 2m_i^2L_m^i) \right].$$

$$\frac{d\sigma_{AMM}}{dQ^2} = \frac{\alpha^3 m^2 L_m}{2M^2 Q^2 \lambda_S} \left[12M^2 \mathcal{F}_1(Q^2) - (Q^2 + 4M^2) \mathcal{F}_2(Q^2) \right],$$

где

$$L_S = \frac{1}{\sqrt{\lambda_S}} \log \frac{S + \sqrt{\lambda_S}}{S - \sqrt{\lambda_S}}, \quad L_X = \frac{1}{\sqrt{\lambda_X}} \log \frac{X + \sqrt{\lambda_X}}{X - \sqrt{\lambda_X}}, \quad L_m = \frac{1}{\lambda_m} \log \frac{\lambda_m + Q^2}{\lambda_m - Q^2}$$

и

$$\lambda_S = S^2 - 4m^2 M^2, \quad \lambda_X = (S - Q^2)^2 - 4m^2 M^2, \quad \lambda_m = Q^4 - 4m^2 Q^2.$$

Излучение реального фотона

Для описания излучения реального фотона в lp -рассеянии

$$l(k_1) + p(p_1) \rightarrow l'(k_2) + p'(p_2) + \gamma(k)$$

необходимо ввести три дополнительные кинематические переменные

- ▶ $t = -(k_1 - k - k_2)^2$ — истинный импульс виртуального фотона,
- ▶ $v = (p + k_1 - k_2)^2 - M^2$ — неупругость,
- ▶ ϕ_k — угол между плоскостью рассеяния и плоскостью излучения фотона, то есть плоскостями, задаваемыми векторами $(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ и (\mathbf{q}, \mathbf{k}) .

Сечение имеет вид

$$\frac{d\sigma_F}{dQ^2} = -\frac{\alpha^3}{2\lambda_S} \int_{t_{\min}}^{t_{\max}} dt \int_{v_1}^{v_{\max}} dv \sum_{i=1}^2 \left(\frac{\mathcal{F}_i(t)}{t^2} \sum_{j=1}^{k_i} (Q^2 + v - t)^{j-3} \theta_{ij}(v, t) - 4F_{IR} \theta_i^B \frac{\mathcal{F}_i(Q^2)}{(Q^2 + v - t)^2 Q^4} \right)$$

Это выражение является результатом аналитического интегрирования по переменной ϕ_k .

Структура сечения излучения реального фотона

$$\frac{d\sigma_F}{dQ^2} = -\frac{\alpha^3}{2\lambda_S} \int_0^{v_{\max}} dv \int_{t_{\min}}^{t_{\max}} dt \sum_{i=1}^2 \left(\frac{\mathcal{F}_i(t)}{t^2} \sum_{j=1}^{k_i} (Q^2 + v - t)^{j-3} \theta_{ij}(v, t) - 4F_{IR} \theta_i^B \frac{\mathcal{F}_i(Q^2)}{(Q^2 + v - t)^2 Q^4} \right)$$

где $\theta_{ij}(v, t)$ — кинематические коэффициенты, содержащие пять типов членов:

- ▶ члены, возникающие из пропагатора при излучении в начальном состоянии;
- ▶ члены, возникающие из пропагатора при излучении в конечном состоянии;
- ▶ члены, возникающие из квадрата пропагатора излучения в начальном состоянии (всегда умножены на m^2);
- ▶ члены, возникающие из квадрата пропагатора излучения в конечном состоянии (также всегда умножены на m^2);
- ▶ остальные члены.

Извлечение Q^2 -зависимости радиационных поправок

Лидирующая Q^2 -зависимость включает:

- ▶ Факторизованную реальную и виртуальную часть радиационных поправок

$$\delta_{IR} + \delta_{vert} = \frac{Q^2}{12m^2} \left[4 \log \frac{Q^2 \lambda_S}{M^2 m^4} + 3 + \frac{2S}{\lambda_S} \left(S - 2(S^2 - 3m^2 M^2) L_S \right) \right]$$

- ▶ Вакуумную поляризацию лептонов и адронов

$$\delta_{vac}^l = \frac{2}{15} Q^2 \sum_{i=e,\mu,\tau} \frac{1}{m_i^2}$$

- ▶ Аномальный магнитный момент

$$\frac{d\sigma_{AMM}}{dQ^2} = -\frac{\alpha M^2 Q^2}{\pi S^2} \frac{d\sigma_B}{dQ^2}$$

- ▶ Излучение многих мягких фотонов

$$\frac{d\sigma_{obs}}{dQ^2} = \exp\left(\frac{\alpha}{\pi} \delta_{inf}\right) \left[1 + \frac{\alpha}{\pi} (\delta_{IR} - \delta_{inf} + \delta_{vert} + \delta_{vac}^l + \delta_{vac}^h) \right] \frac{d\sigma_B}{dQ^2} + \frac{d\sigma_{AMM}}{dQ^2} + \frac{d\sigma_F}{dQ^2}$$

где

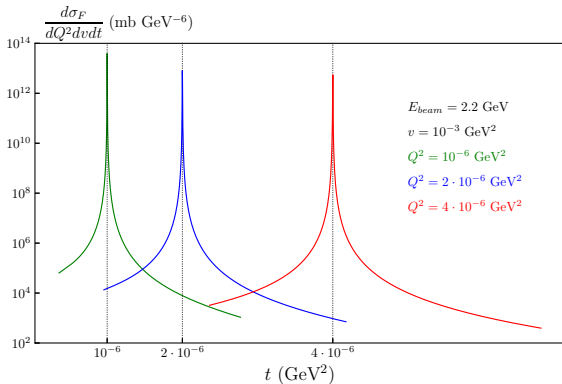
$$\delta_{inf} = 2 \left((Q^2 + 2m^2) L_m - 1 \right) \log \frac{v_{max}}{mM} \approx \frac{2Q^2}{3m^2} \log \frac{v_{max}}{mM} = \frac{2Q^2}{3m^2} (\log q_m + L_S)$$

РП от излучения реального фотона при малых Q^2

$$\frac{d\sigma_F}{dQ^2} = -\frac{\alpha^3}{2\lambda_S} \int_0^{v_{max}} dv \int_{t_{min}}^{t_{max}} dt \sum_{i=1}^2 \left(\frac{\mathcal{F}_i(t)}{t^2} \sum_{j=1}^{k_i} (Q^2 + v - t)^{j-3} \theta_{ij}(v, t) - 4F_{IR}\theta_i^B \frac{\mathcal{F}_i(Q^2)}{(Q^2 + v - t)^2 Q^4} \right)$$

Напомним, что формфактор в области малых t или Q^2 почти постоянен, например дипольная формула

$$G_D(Q^2) = \frac{1}{(1 + Q^2/\Lambda^2)^2}$$



Поэтому формфактор можно разложить в ряд Тейлора, например

$$G_E(t) = G_E(Q^2) + (t - Q^2)G'_E(Q^2) + \dots$$

Детали вычисления

$$\frac{d\sigma_F}{dQ^2} = -\frac{\alpha^3}{2\lambda_S} \int_0^{v_{\max}} dv \int_{t_{\min}}^{t_{\max}} dt \left(K_1 G_M^2(Q^2) + K_2 G_E^2(Q^2) + \bar{K}_1 (G_M^2(Q^2))' + \bar{K}_2 (G_E^2(Q^2))' \right)$$

- ▶ Интегралы вычисляются аналитически.
- ▶ Чтобы получить аналитическое выражение для асимптотики при малых Q^2 , мы раскладываем отдельные вклады по Q^2 .
- ▶ В каждом коэффициенте оставляем только ведущие члены по массе лептона, то есть раскладываем точно вычисленные интегралы в приближении $Q^2 \ll m^2 \ll S, M^2$, что приводит к ряду по $q_m = Q/m$.

Результаты:

- ▶ K_2 даёт наибольший вклад, приводящий к поведению $1/Q^2$ для $d\sigma_F/dQ^2$.
- ▶ Члены с K_1 , \bar{K}_1 и \bar{K}_2 в этом порядке не дают вклада в сечение.

Детали вычисления

Существует четыре вклада в коэффициент K_2/Q^8 :

- ▶ Логарифмические члены от излучения в начальном состоянии ($L_s = 2 \log(\frac{S}{mM})$):

$$q_m^3 \left(4q_m - \frac{16}{5}q_m^2 + \frac{25}{9}q_m^3 + L_s \left(-\frac{16}{3} + 3q_m - \frac{8}{3}q_m^2 + q_m^3 \right) \right)$$

- ▶ Логарифмические члены от излучения в конечном состоянии:

$$L_s q_m^3 \left(\frac{16}{3} - 3q_m + \frac{8}{3}q_m^2 - \frac{5}{3}q_m^3 \right)$$

- ▶ Логарифмические члены от инфракрасных вкладов:

$$2(2 - q_m)q_m^5$$

- ▶ Члены, не содержащие логарифмов:

$$4q_m^4 \left(-1 - \frac{1}{5}q_m + \frac{1}{3}q_m^2 \right)$$

Сумма этих вкладов:

$$\left(\frac{19}{9} - \frac{2}{3}L_s \right) q_m^6$$

Члены порядка $O(q_m^3)$, $O(q_m^4)$ и $O(q_m^5)$ полностью сокращаются, что приводит к поведению $1/Q^2$ для σ_F .

Численный пример

Сечение можно представить в виде суммы четырёх вкладов:

$$\frac{d\sigma_F}{dQ^2} = \frac{d\sigma_X}{dQ^2} + \frac{d\sigma_S}{dQ^2} + \frac{d\sigma_0}{dQ^2} + \frac{d\sigma_M}{dQ^2}$$

Q^2	$d\sigma_X/dQ^2$	$d\sigma_S/dQ^2$	$d\sigma_0/dQ^2$	$d\sigma_M/dQ^2$	$d\sigma_F/dQ^2$
$1 \cdot 10^{-04}$	$0.32842 \cdot 10^{09}$	$-0.11578 \cdot 10^{09}$	$-0.22115 \cdot 10^{07}$	$-0.85398 \cdot 10^{08}$	$0.12504 \cdot 10^{09}$
$1 \cdot 10^{-05}$	$0.28041 \cdot 10^{11}$	$-0.12323 \cdot 10^{11}$	$0.49904 \cdot 10^{09}$	$-0.53033 \cdot 10^{10}$	$0.10913 \cdot 10^{11}$
$1 \cdot 10^{-06}$	$0.24476 \cdot 10^{13}$	$-0.18985 \cdot 10^{13}$	$0.15947 \cdot 10^{12}$	$-0.25076 \cdot 10^{12}$	$0.45785 \cdot 10^{12}$
$1 \cdot 10^{-07}$	$0.59225 \cdot 10^{15}$	$-0.59265 \cdot 10^{15}$	$0.19813 \cdot 10^{14}$	$-0.95778 \cdot 10^{13}$	$0.98308 \cdot 10^{13}$
$1 \cdot 10^{-08}$	$0.21326 \cdot 10^{18}$	$-0.21475 \cdot 10^{18}$	$0.19765 \cdot 10^{16}$	$-0.34254 \cdot 10^{15}$	$0.14349 \cdot 10^{15}$
$1 \cdot 10^{-09}$	$0.72230 \cdot 10^{20}$	$-0.72411 \cdot 10^{20}$	$0.19462 \cdot 10^{18}$	$-0.11460 \cdot 10^{17}$	$0.16576 \cdot 10^{16}$
$1 \cdot 10^{-10}$	$0.23404 \cdot 10^{23}$	$-0.23423 \cdot 10^{23}$	$0.19328 \cdot 10^{20}$	$-0.36984 \cdot 10^{18}$	$0.17408 \cdot 10^{17}$
$1 \cdot 10^{-11}$	$0.74605 \cdot 10^{25}$	$-0.74624 \cdot 10^{25}$	$0.19283 \cdot 10^{22}$	$-0.11785 \cdot 10^{20}$	$0.17784 \cdot 10^{18}$
$1 \cdot 10^{-12}$	$0.23654 \cdot 10^{28}$	$-0.23656 \cdot 10^{28}$	$0.19271 \cdot 10^{24}$	$-0.37471 \cdot 10^{21}$	$0.15894 \cdot 10^{19}$

Таким образом, численная оценка асимптотического поведения сечения с радиационными поправками при малых Q^2 требует чрезвычайно высокой точности интегрирования по фазовому объёму реального фотона.

Асимптотика различных вкладов

Конечные выражения для лидирующих $q_m = Q/m$ асимптотик, т.е. в приближении $Q^2 \ll m^2 \ll S, M^2$ имеют вид

$$\frac{d\sigma_{obs}}{dQ^2} = \exp\left(\frac{\alpha}{\pi}\delta_{inf}\right) \left[1 + \frac{\alpha}{\pi}\delta\right] \frac{d\sigma_B}{dQ^2} + \frac{d\sigma_F}{dQ^2}.$$

где

- ▶ Борновское сечение пропорционально Q^{-4}

$$\frac{d\sigma_B}{dQ^2} = \frac{4\pi\alpha^2}{Q^4} G_E^2(0)$$

- ▶ Инфракрасно конечная часть сечения с излучением фотона пропорционально Q^{-2}

$$\frac{d\sigma_F}{dQ^2} = -\frac{\alpha^3}{\pi Q^2 m^2} \left(\frac{19}{9} - \frac{2}{3}L_s\right) G_E^2(0)$$

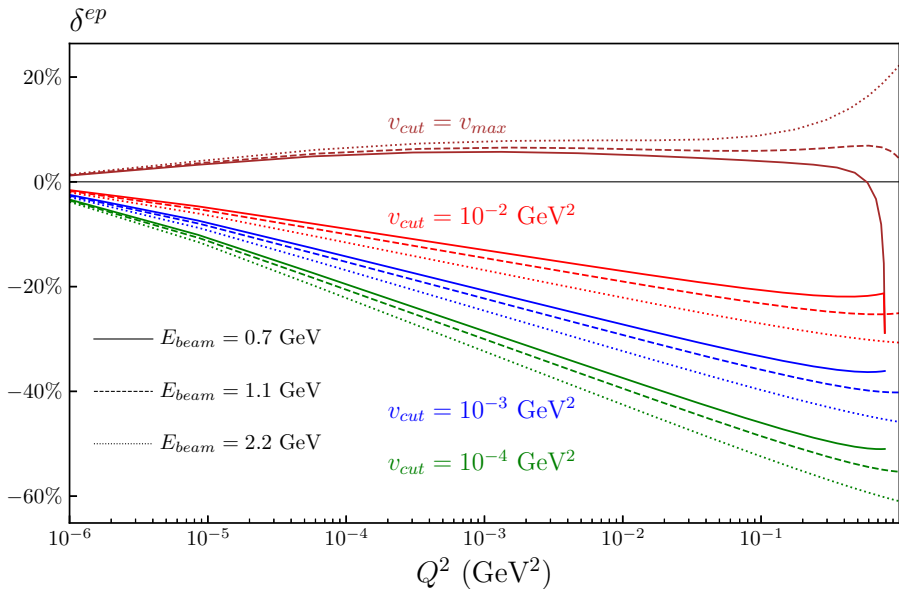
- ▶ Фвктризирующиеся поправки δ_{inf} и δ имеют вид:

$$\delta_{inf} = \frac{q_m^2}{3} (2 \log q_m + L_s) \quad \delta = \frac{q_m^2}{6} \left(\frac{23}{10} - L_s\right)$$

Численный пример

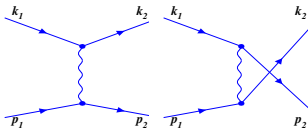
$Q^2, \text{ GeV}^2$	Born nb GeV^{-2}	δ_{VR}^{\max}	δ_{VR}^{cut}	RC_F^{\max}	RC_F^{cut}
$1 \cdot 10^{-8}$	$0.41 \cdot 10^{18}$	-0.0001	-0.0006	0.0003	$-0.12 \cdot 10^{-8}$
$1 \cdot 10^{-7}$	$0.41 \cdot 10^{16}$	-0.0001	-0.0056	0.0023	$-0.12 \cdot 10^{-7}$
$1 \cdot 10^{-6}$	$0.41 \cdot 10^{14}$	0.0017	-0.0392	0.0111	$-0.82 \cdot 10^{-7}$
$1 \cdot 10^{-5}$	$0.41 \cdot 10^{12}$	0.0080	-0.1249	0.0265	$-0.30 \cdot 10^{-6}$
$1 \cdot 10^{-4}$	$0.41 \cdot 10^{10}$	0.0158	-0.2284	0.0305	$-0.56 \cdot 10^{-6}$
$1 \cdot 10^{-3}$	$0.41 \cdot 10^8$	0.0237	-0.3339	0.0247	$-0.17 \cdot 10^{-5}$
$1 \cdot 10^{-2}$	$0.40 \cdot 10^6$	0.0315	-0.4395	0.0181	$-0.68 \cdot 10^{-6}$
$Q^2, \text{ GeV}^2$	RC_{AMM}	δ_{vac}^l	δ_{vac}^h	RC_{tot}^{\max}	$RC_{\text{tot}}^{\text{cut}}$
$1 \cdot 10^{-8}$	$-0.75 \cdot 10^{-11}$	$0.14 \cdot 10^{-4}$	$0.18 \cdot 10^{-9}$	0.0003	-0.0006
$1 \cdot 10^{-7}$	$-0.71 \cdot 10^{-10}$	$0.11 \cdot 10^{-3}$	$0.18 \cdot 10^{-8}$	0.0024	-0.0055
$1 \cdot 10^{-6}$	$-0.48 \cdot 10^{-9}$	$0.87 \cdot 10^{-3}$	$0.18 \cdot 10^{-7}$	0.0137	-0.0383
$1 \cdot 10^{-5}$	$-0.14 \cdot 10^{-8}$	$0.33 \cdot 10^{-2}$	$0.18 \cdot 10^{-6}$	0.0378	-0.1216
$1 \cdot 10^{-4}$	$-0.23 \cdot 10^{-8}$	$0.67 \cdot 10^{-2}$	$0.18 \cdot 10^{-5}$	0.0530	-0.2218
$1 \cdot 10^{-3}$	$-0.32 \cdot 10^{-8}$	$0.10 \cdot 10^{-1}$	$0.18 \cdot 10^{-4}$	0.0587	-0.3237
$1 \cdot 10^{-2}$	$-0.39 \cdot 10^{-8}$	$0.14 \cdot 10^{-1}$	$0.18 \cdot 10^{-3}$	0.0639	-0.4253

Численный пример

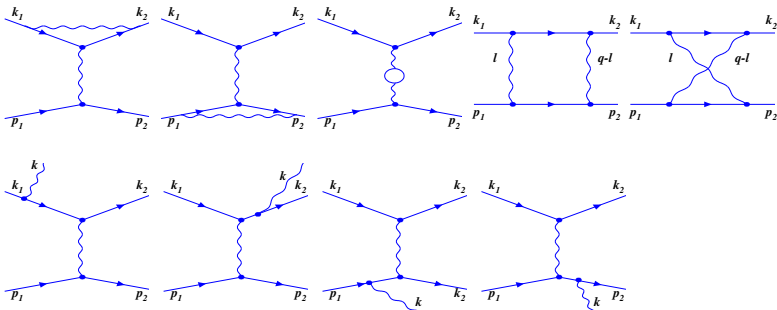


Мёллеровское рассеяние. Диаграммы Фейнмана

- ▶ Борновский вклад: t и u -каналы



- ▶ РП в t -канале



Мёллеровское рассеяние. Структура РП

Мёллеровское рассеяние

$$e^-(k_1) + e^-(p_1) \rightarrow e^-(k_2) + e^-(p_2)$$

описывается следующими переменными Мандельштама:

$$s = (k_1 + p_1)^2, \quad t = (k_1 - k_2)^2, \quad u = (p_1 - k_2)^2 = 4m^2 - s - t.$$

$$\frac{d\sigma_B}{dc_\theta} = \frac{d\sigma_B^t}{dc_\theta} + (t \leftrightarrow u),$$

где

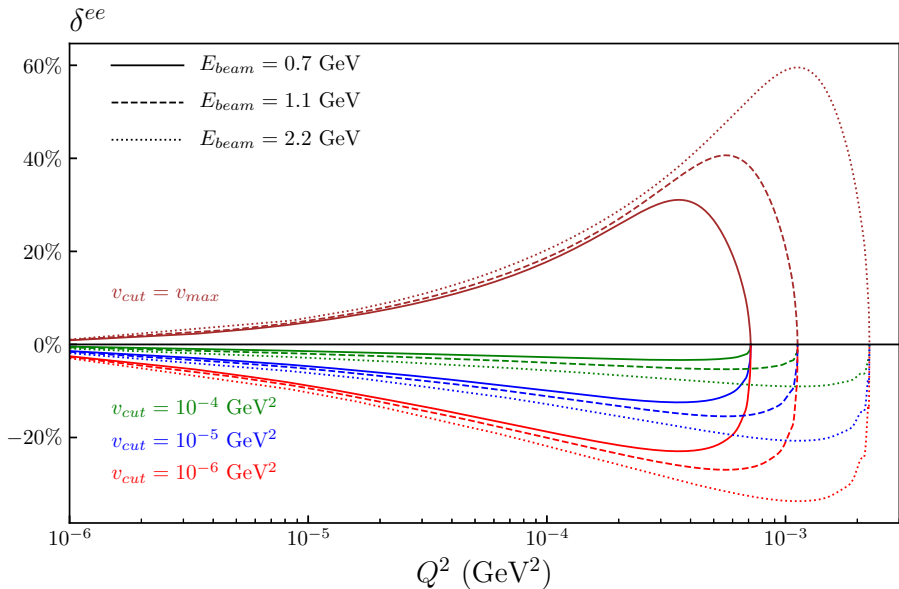
$$\frac{d\sigma_B^t}{dc_\theta} = \frac{\mathcal{M}_b^t \mathcal{M}_b^+}{32\pi s} = \frac{\pi\alpha^2}{2s} \left[\frac{(s-u)^2 + t(t-8m^2)}{t^2} + 2 \frac{(s-6m^2)(s-2m^2)}{tu} \right].$$

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{RC}(V_{cut})}{dc_\theta} &= \frac{d\sigma_{virt}}{dc_\theta} + \frac{d\sigma_R}{dc_\theta} = \frac{\alpha}{\pi} \delta_{VR} \frac{d\sigma_B}{dc_\theta} + \frac{\alpha}{\pi} \left[\delta_{virt}^t \frac{d\sigma_B^t}{dc_\theta} + \delta_{virt}^u \frac{d\sigma_B^u}{dc_\theta} \right] + \frac{d\sigma_F}{dc_\theta} \\ &+ \frac{d\sigma_{AM}^t}{dc_\theta} + \frac{d\sigma_{AM}^u}{dc_\theta} + \frac{d\sigma_{2\gamma d}^t F}{dc_\theta} + \frac{d\sigma_{2\gamma d}^u F}{dc_\theta} + \frac{d\sigma_{2\gamma x}^t F}{dc_\theta} + \frac{d\sigma_{2\gamma x}^u F}{dc_\theta}, \end{aligned}$$

Численный пример

$Q^2, \text{ GeV}^2$	Born nb GeV^{-2}	δ_{VR}	δ_{virt}^t	δ_{virt}^u	RC_F
$1 \cdot 10^{-8}$	$0.72 \cdot 10^{10}$	0.0005	0.0001	$-0.27 \cdot 10^{-06}$	-0.0004
$1 \cdot 10^{-7}$	$0.72 \cdot 10^8$	0.0047	0.0005	$-0.27 \cdot 10^{-05}$	-0.0036
$1 \cdot 10^{-6}$	$0.72 \cdot 10^6$	0.0324	0.0021	$-0.27 \cdot 10^{-04}$	-0.0238
$1 \cdot 10^{-5}$	$0.72 \cdot 10^4$	0.0999	-0.0050	$-0.27 \cdot 10^{-03}$	-0.0386
$1 \cdot 10^{-4}$	$0.72 \cdot 10^2$	0.1713	-0.0350	$-0.29 \cdot 10^{-02}$	0.0661
$1 \cdot 10^{-3}$	$1.42 \cdot 10^0$	0.2181	-0.0502	$-0.44 \cdot 10^{-01}$	0.4357
$2 \cdot 10^{-3}$	$3.42 \cdot 10^1$	0.1815	-0.0044	$-0.42 \cdot 10^{-01}$	0.1048
$Q^2, \text{ GeV}^2$	RC_{AMM}^t	RC_{AMM}^u	δ_{box}	RC_{tot}^{max}	RC_{tot}^{cut}
$1 \cdot 10^{-8}$	$-0.25 \cdot 10^{-11}$	$0.36 \cdot 10^{-10}$	$-0.24 \cdot 10^{-05}$	0.0016	-0.0002
$1 \cdot 10^{-7}$	$-0.11 \cdot 10^{-10}$	$0.36 \cdot 10^{-09}$	$-0.13 \cdot 10^{-04}$	0.0156	-0.0014
$1 \cdot 10^{-6}$	$0.79 \cdot 10^{-09}$	$0.36 \cdot 10^{-08}$	$-0.63 \cdot 10^{-04}$	0.0107	-0.0090
$1 \cdot 10^{-5}$	$0.27 \cdot 10^{-07}$	$0.36 \cdot 10^{-07}$	$-0.24 \cdot 10^{-03}$	0.0562	-0.0279
$1 \cdot 10^{-4}$	$0.48 \cdot 10^{-06}$	$0.39 \cdot 10^{-06}$	$0.49 \cdot 10^{-04}$	0.2020	-0.0545
$1 \cdot 10^{-3}$	$0.47 \cdot 10^{-05}$	$0.46 \cdot 10^{-05}$	$0.93 \cdot 10^{-02}$	0.5789	-0.0875
$2 \cdot 10^{-3}$	$0.58 \cdot 10^{-06}$	$0.74 \cdot 10^{-06}$	$0.38 \cdot 10^{-02}$	0.2441	-0.0600

Численный пример



Возможные вклады при малых Q^2

Рассмотрим t -канальный двухфотонный вклад в приближении $-t \ll m^2 \ll s$

- ▶ Прямой двухфотонный обмен:

$$\frac{2s\alpha^3}{t^2} (2L_s L_t - x_t(\pi^2 + (L_t - 2)x_t)) - \frac{\alpha^3}{t} (L_s - L_s^2 + 7L_t - 12 + \frac{4}{3}\pi^2)$$

- ▶ Перекрёстный двухфотонный обмен:

$$-\frac{2s\alpha^3}{t^2} (2L_s L_t - x_t(\pi^2 + (L_t - 2)x_t)) - \frac{\alpha^3}{t} (4L_s L_t + L_s - L_s^2 - 5L_t + 20 + \frac{1}{3}\pi^2)$$

- ▶ Их сумма

$$-\frac{2\alpha^3}{t} (2L_s L_t + L_s - L_s^2 + L_t + 4 + \frac{5}{6}\pi^2)$$

Здесь:

$$L_s = \log\left(\frac{s}{m^2}\right), \quad L_t = \log\left(\frac{-t}{m^2}\right), \quad x_t = \frac{\sqrt{-t}}{m}.$$

РП к отношению ep/ee : дополнительные свойства

- ▶ Основной объект анализа — отношение R сечений процессов ep и ee -рассеяния.
- ▶ Радиационная поправка к отношению:

$$\delta_R = \frac{R_{obs} - R_B}{R_B}$$

- ▶ Разность в числителе:

$$\frac{\sigma_{obs}^{ep}}{\sigma_{obs}^{ee}} - \frac{\sigma_B^{ep}}{\sigma_B^{ee}} = \frac{\sigma_B^{ep} + \sigma_{RC}^{ep}}{\sigma_B^{ee} + \sigma_{RC}^{ee}} - \frac{\sigma_B^{ep}}{\sigma_B^{ee}} \approx \frac{\sigma_B^{ee}\sigma_{RC}^{ep} - \sigma_B^{ep}\sigma_{RC}^{ee}}{\sigma_B^{ee}\sigma_B^{ep}} R_B = (\delta_{RC}^{ep} - \delta_{RC}^{ee}) R_B$$

- ▶ Следовательно,

$$\delta_R = \delta_{RC}^{ep} - \delta_{RC}^{ee}$$

Таким образом, одинаковые вклады в радиационные поправки для сечений ep - и ee -рассеяния, не дают вклад в поправку к отношению R .

Примеры таких вкладов: факторизованная часть двухфотонного обмена, излучение мягких фотонов (со всех линий), возможно некоторые вклады высших порядков.

Уроки из анализа малых Q^2 -асимптотик

- ▶ Борновский вклад имеет порядок $1/Q^4$.
- ▶ Радиационная поправка имеет порядок $1/(Q^2 m^2)$.
- ▶ Большой логарифм сохраняется и вносит вклад в РП как $L_s = \log(S/(mM))$.
- ▶ Радиационные поправки к сечениям $e\bar{p}$ - и Мёллеровского рассеяния имеют схожую структуру.
- ▶ Идентичные для $e\bar{p}$ - и Мёллеровского рассеяния вклады в РП можно игнорировать при рассмотрении РП к отношению.
- ▶ Поведение $1/(Q^2 m^2)$ для вклада жёсткого фотона является результатом точного аналитического сокращения специфических членов более высоких порядков по Q^2 , а именно членов порядка $1/Q^3$, $1/Q^4$ и $1/Q^5$.
- ▶ Это поведение получается после аналитического интегрирования по полярному углу импульса реального фотона.
- ▶ Эти свойства накладывают дополнительные требования на подходы, использующие Монте-Карло интегрирование по всем переменным фотона при малых Q^2 .

Вклады, подлежащие изучению: диаграммы двухфотонного обмена

Наиболее распространённые подходы к вычислению обмена двумя фотонами в *ep*-рассеянии включают:

▶ Подходы с эффективными протонными вершинами

1. В этом подходе амплитуда обмена двумя фотонами аппроксимируется упрощённой адронной моделью.
2. Протон рассматривается как элементарный бесструктурный фермион, взаимодействующий с виртуальным фотоном через эффективную вершину.
3. Эффективная фотон-адронная связь описывается зависящей от импульса вершиной с феноменологическими параметрами (например, массами резонансов, структурами и формфакторами), подгоняемыми по данным средних энергий.

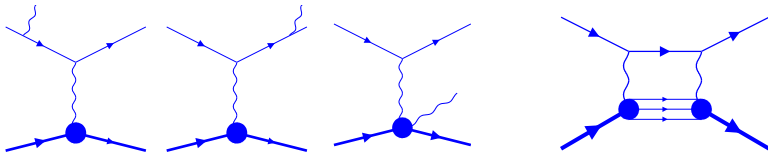
▶ Подходы, основанные на идеях унитарности и дисперсионных соотношениях

1. Используя унитарность, матричный элемент двухфотонного обмена аппроксимируется вставкой промежуточных адронных состояний.
2. Рассматривается произведение двух электромагнитных токов с суммированием по промежуточным адронным состояниям.
3. Это позволяет выразить процесс через известные величины: формфакторы протона для протонных промежуточных состояний и структурные функции для адронных состояний.

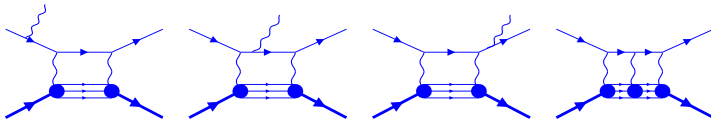
Реализация находится в процессе. Наши предварительные оценки (интерференция излучения лептонов и адронов с инфракрасной частью двухфотонных диаграмм) показывают, что эффект невелик и уменьшается при росте Q^2 .

Вклады, подлежащие изучению: диаграммы двухфотонного обмена

Производится расчёт интерференцию между:



Возможные дальнейшие расширения:

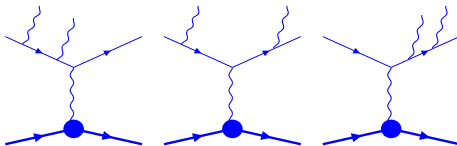


Вклады, подлежащие изучению: эффекты высших порядков

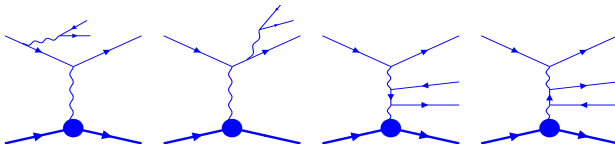
Вторые порядки по ep -рассеянию включают четыре класса диаграмм:

- i. два фотона в конечном состоянии;
- ii. рождение лептонной пары;
- iii. однопетлевые эффекты с одним фотоном в конечном состоянии;
- iv. двухпетлевые эффекты.

Два фотона в конечном состоянии:

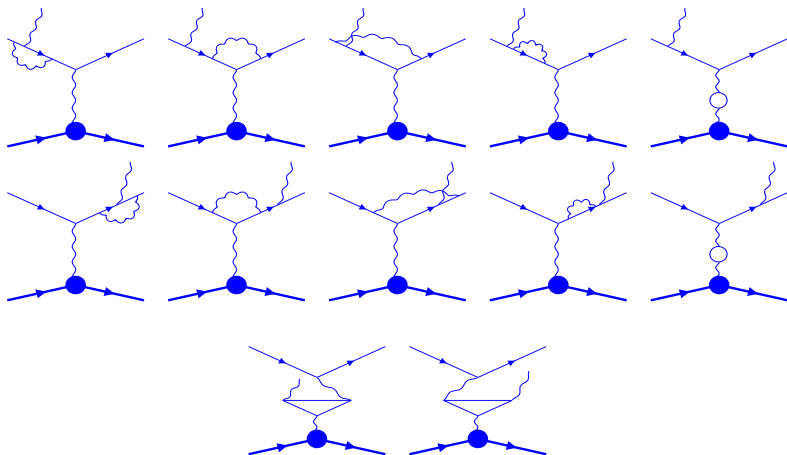


Рождение лептонной пары:



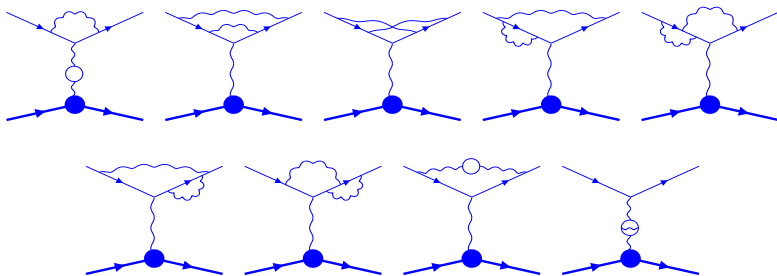
Диаграммы Фейнмана для эффектов высших порядков

Однопетлевые эффекты с одним реальным фотоном



Диаграммы Фейнмана для эффектов высших порядков

Двухпетлевые эффекты



- ▶ Инфракрасная расходимость может быть устранена только в сумме вкладов инфракрасных членов, возникающих в сечениях трёх процессов (i, iii и iv), поэтому эти вклады нельзя рассматривать по отдельности.
- ▶ Другая проблема — вычисление конечных частей, возникающих из i) интегрирования по фазовому пространству излучённых жёстких фотонов или лептонных пар и ii) двухпетлевых вкладов. В обоих случаях вычисления требуют многомерного интегрирования.

Эффекты высших порядков: подходы Три уровня оценки эффектов высшего порядка (NNLO):

- ▶ Точное вычисление — с нашей точки зрения нереализуемо;
- ▶ Вычисление с использованием одной или нескольких контролируемых аппроксимаций;
- ▶ Оценка вклада NNLO в систематическую ошибку, связанную с РП.

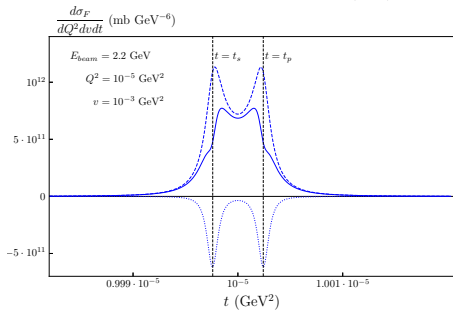
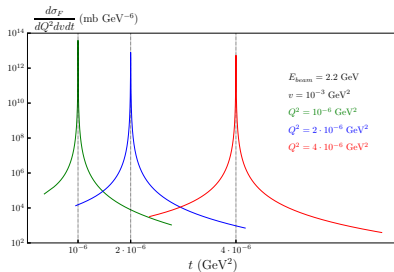
Наш подход включает:

- ▶ Расширение нашего расчёта для DVCS (Phys. Rev. D **90**(3):033001, 2014) в сочетании с одним из подходов к двухпетлевым вычислениям;
- ▶ Сравнение с аналитическими результатами других групп (например, Dr. Hubert Spiesberger, Dr. Aleksandrs Aleksejevs);
- ▶ Сравнение с результатами, полученными с помощью кода McMuLe;
- ▶ Оценку вклада NNLO в систематическую ошибку, связанную с РП, с использованием излучения многих мягких фотонов и метода структурных функций.

Дополнительное замечание:

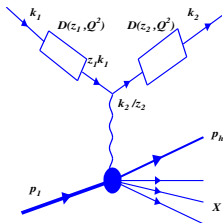
- ▶ вклад радиационных поправок высших порядков в систематическую ошибку можно оценить путём сравнения наблюдаемого распределения сечения по V_{cut} с предсказаниями, полученными в рамках излучения многих мягких фотонов или метода электронных структурных функций.

Применение электронных структурных функций



$$\beta = \frac{2\alpha}{\pi} \left(\log \frac{S}{mM} - 1 \right)$$

Почему метод ЭСФ может работать



- ▶ КЭД-радиационные поправки к соответствующим сечениям могут быть записаны как свёртка двух электронных структурных функций и «жёсткой» части сечения.
- ▶ Традиционно такие поправки включают эффекты петлевых вкладов, а также мягкого и жёсткого коллинеарного излучения фотонов и e^+e^- -пар.

$$\sigma^{in} = \int_{z_1^m}^1 dz_1 D(z_1, Q^2) \int_{z_2^m}^1 \frac{dz_2}{z_2^2} D(z_2, Q^2) \sqrt{\frac{\hat{\lambda}_Y}{\lambda_Y} \frac{S_x^2}{\hat{S}_x^2}} \hat{\sigma}_t^{hard}$$

где ЭСФ:

$$D(z_{1,2}, Q^2) = D^\gamma(z_{1,2}, Q^2) + D_N^{e^+e^-}(z_{1,2}, Q^2) + D_S^{e^+e^-}(z_{1,2}, Q^2)$$

(см. Journal of Experimental and Theoretical Physics, 98(3) 403-416).

Применение ЭСФ к кинематике PRad требует модификаций в области $Q^2 \ll m^2 \ll S, M^2$.

Выводы

- ▶ Радиационные поправки в кинематике PRad находятся под частичным контролем:
 - ▶ Радиационные поправки нижшего порядка вычислены с использованием альтернативных подходов; сравнение их предсказаний продолжается.
 - ▶ Как полные РП, так и отдельные вклады уменьшаются при уменьшении Q^2 .
 - ▶ Важное свойство: фактический результат для РП от излучения жёсткого фотона получается благодаря взаимного сокращения специфических вкладов, которые по отдельности дают большие члены более высоких порядков по $1/Q^2$.
 - ▶ Требуется дальнейшее сравнение альтернативных подходов.
- ▶ Радиационные поправки высших порядков требуют дополнительных усилий.
 - ▶ Прогресс возможен на основе взаимного сравнения результатов, полученных методами аналитического интегрирования (например, нашей группой) и подходами, использующими численное/Монте-Карло интегрирование по полному фазовому пространству (например, группой McMule).
 - ▶ Вклад NNLO в систематическую ошибку можно исследовать, сравнивая экспериментальные данные при различных ограничениях на неупругость с предсказаниями, основанными на излучении многих мягких фотонов и методе электронных структурных функций.