

Ренормгрупповые функции в старших порядках теории возмущений: расчеты и приложения

Александр Бедняков

ЛТФ ОИЯИ

7 мая 2026

(по материалам докторской диссертации)



Содержание

- Введение
- Часть 1: Ренормгрупповой (РГ) анализ СМ и стабильность вакуума
 - РГ функции в СМ на уровне 3 петель и выше
 - Параметры КХД в СМ: α_s и m_b
 - Проблема стабильности электрослабого вакуума
- Часть 2: РГ функции в четырехмерных перенормируемых моделях
 - Наиболее общий вид β -функций калибровочных и юкавских констант
 - Асимптотическая безопасность в модели Литима-Саннино
- Часть 3: Ренормгрупповые расчеты в скалярных теориях
 - Хиггсовский сектор двухдублетного расширения СМ (2HDM)
 - Произвольная перенормируемая скалярная теория в $d = 4$
 - Аномальные размерности операторов в модели с гиперкубической симметрией
- Заключение

Введение

- Перенормируемые теории

$$\mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu \Phi, \mathbf{g}) + \delta \mathcal{L}_{\text{к.ч.}}(\Phi, \partial_\mu \Phi, \mathbf{g}, \Lambda) \stackrel{?}{=} \underbrace{\mathcal{L}(\Phi_0(\Lambda), \partial_\mu \Phi_0(\Lambda), \mathbf{g}_0(\Lambda))}_{\text{перенормируемая}}$$

$$\Phi_0(\Lambda) = Z_\Phi^{1/2}(\Lambda/\mu) \cdot \Phi(\mu) \quad \mathbf{g}_0(\Lambda) = Z_g(\Lambda/\mu) \cdot \mathbf{g}(\mu)$$

- Размерная регуляризация

$$\Lambda \rightarrow \infty, \quad d = 4 - 2\epsilon, \quad d^4 p \rightarrow \mu^{4-d} d^d p$$

- Минимальная (модифицированная*) схема $\overline{\text{MS}}$

$$Z_X = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{Z_X^{(i)}}{\epsilon^i} \quad \beta_g \equiv \mu \frac{dg}{d\mu} = -Z_g^{-1} \cdot \frac{dZ_g}{d \ln \mu} \cdot g, \quad \gamma_\Phi \equiv \frac{1}{2} Z_\Phi^{-1} \cdot \frac{dZ_\Phi}{d \ln \mu}.$$

- Ренормгрупповая (РГ) инвариантность $[\Gamma_n - \text{ОЧН } n\text{-точка}]$

$$\Gamma_{n,R}(X_1, \dots, X_n) = Z_\Phi^{n/2} \Gamma_{n,0}(X_1, \dots, X_n) \Rightarrow \left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta_g \frac{\partial}{\partial g} - n \gamma_\Phi \right] \Gamma_{n,R} = 0.$$

* $\mu^2 \rightarrow \mu^2 e^\gamma / (4\pi)$

Методы и инструменты

- Модельные файлы (КХД, СМ, СМ в фоновой калибровке, ...)
- DIANA/QGRAF [Nogueira'93;Fleischer,Tentyukov'99]
генерация диаграмм Фейнмана
- Метод **IRR** – изменение ИК структуры (логарифмически расходящихся) диаграмм для упрощения вычисления УФ расходимостей [Vladimirov'78]
- Редукция интегралов с помощью **IBP** [Tkachov,Chetyrkin&Tkachov'81)]
 - LiteRed [Lee'12]
 - FIRE version [Smirnov'14-19]
 - Безмассовые пропагаторы MINCER [Gorishii...'89,Larin,...'91]
FORCER [Ruijl,Ueda,Vermaseren'17]
MATAD [Steinhauser'00]
FMFT [Pikelner'17]
 - Массивные вакуумные диаграммы
- Мастер-интегралы
 - 4-петлевые безмассовые пропагаторы [Baikov,Chetyrkin'10;Lee,Smirnovs'11]
 - 4-loop полностью массивные вакуумные диаграммы [Czakon'04]

Часть 1: Ренормгрупповый анализ СМ и стабильность вакуума

- A. V. Bednyakov, “On the electroweak contribution to the matching of the strong coupling constant in the SM”, *Phys. Lett. B*, т. 741, с. 262–266, 2015.
- A. V. Bednyakov, B. A. Kniehl, A. F. Pikelner и O. L. Veretin, “Stability of the Electroweak Vacuum: Gauge Independence and Advanced Precision”, *Phys. Rev. Lett.*, т. 115, № 20, с. 201802, 2015.
- A. V. Bednyakov и A. F. Pikelner, “Four-loop strong coupling beta-function in the Standard Model”, *Phys. Lett. B*, т. 762, с. 151–156, 2016.
- A. V. Bednyakov, B. A. Kniehl, A. F. Pikelner и O. L. Veretin, “On the b -quark running mass in QCD and the SM”, *Nucl. Phys. B*, т. 916, с. 463–483, 2017.
- A. V. Bednyakov, “Three-loop anomalous dimensions of fixed-charge operators in the SM”, *Phys. Lett. B*, т. 852, с. 138615, 2024.
- A. V. Bednyakov, A. S. Fedoruk и D. I. Kazakov, “Renormalization-group analysis of the SM: Loops, uncertainties, and vacuum stability”, *Phys. Rev. D*, т. 113, № 3, с. 036018, 2026.

Хиггсовский потенциал, РГ и (не)стабильность вакуума

$$(16\pi^2)\{a_1, a_s, a_y, a_\lambda\} = \{5/3g_1^2, g_s^2, y_t^2, \lambda\}$$

$$V_{\text{eff}}(\phi \gg v) \simeq \frac{\lambda(\mu = \phi)}{4} \phi^4$$

$$\frac{da_\lambda}{d \ln \mu^2} = 12a_\lambda^2 + 6a_t a_\lambda - 3a_t^2 + \frac{27}{400} a_1^2 + \dots$$

$$\frac{da_t}{d \ln \mu^2} = \frac{9}{2} a_t^2 - 8a_s a_t - \frac{17}{20} a_1^2 + \dots$$

$$\frac{da_s}{d \ln \mu^2} = -7a_s^2 + \dots \quad [\text{асимптот. свобода}]$$

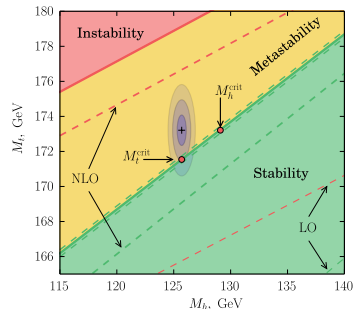
$$\frac{da_1}{d \ln \mu^2} = \frac{41}{10} a_1^2 + \dots \quad [\text{полюс Ландау в УФ}]$$

$$a_1 \approx 1.4 \cdot 10^{-3}, \quad a_s \approx 8.5 \cdot 10^{-3}$$

$$a_t \approx 5.7 \cdot 10^{-3}, \quad a_\lambda \approx 8.1 \cdot 10^{-4}$$

$$\mu_0 \approx 172 \text{ ГэВ}$$

- **Нестабильность?** [Krasnikov'78;Linde'80;...]
- **Трехпетлевые β -функции для $\overline{\text{MS}}$ параметров СМ**
[Mihaila,Salomon,Steinhauser'12;AB,Pikelner,Velizhanin'13;Chetyrkin&Zoller'13]
матричные юкавские константы: [AB,Pikelner,Velizhanin'14]
- **Граничные условия: полный набор двухпетлевых поправок, связывающих $\overline{\text{MS}}$ параметры СМ с (псевдо) наблюдаемыми** [Buttazzo,...'13;Kniehl,Pikelner,Veretin'15]



Граничные значения параметров СМ на электрослабой шкале

- Лагранжиан СМ

$$\mathcal{L}_{\text{СМ}} = \underbrace{\mathcal{L}_{\text{Gauge}}(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_s)}_{U(1) \times SU(2) \times SU(3)} + \underbrace{\mathcal{L}_{\text{Yukawa}}(\mathbf{y}_u, \mathbf{y}_d, \mathbf{y}_l)}_{\text{фермионы 3 поколений}} + \mathcal{L}_{\text{Higgs}}(\lambda, m_{\Phi}^2) + \mathcal{L}_{\text{gauge-fix}} + \mathcal{L}_{\text{ghost}}$$

- (Древесный) хиггсовских потенциал

$$-\mathcal{L}_{\text{Higgs}}(\lambda, m_{\Phi}^2) = V_{\text{Higgs}}(\lambda, m_{\Phi}^2) = m_{\Phi}^2 \Phi^\dagger \Phi + \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2$$

$$[m_{\Phi}^2 < 0] \Rightarrow \frac{m_{\Phi}^2}{2} (v+h)^2 + \frac{\lambda}{4} (v+h)^4 \quad [\text{унитарная калибровка}]$$

- Связь бегущих параметров на шкале μ с (псевдо) наблюдаемыми – система нелинейных уравнений
[$\bar{\delta}_i = \bar{\delta}_i(\mu)$ – квантовые поправки $\overline{\text{MS}}$]

$$(4\pi)\alpha = \frac{g_1^2 g_2^2}{g_1^2 + g_2^2} [1 + \bar{\delta}_\alpha], \quad (4\pi)\alpha_s^{(5)} = g_s^2 [1 + \bar{\delta}_s] \quad G_F = \frac{1}{\sqrt{2}v^2} [1 + \bar{\delta}_r],$$

$$M_Z^2 = \frac{(g_1^2 + g_2^2)v^2}{4} [1 + \bar{\delta}_Z], \quad M_h^2 = 2\lambda v^2 [1 + \bar{\delta}_h], \quad M_f = \frac{y_f v}{\sqrt{2}} [1 + \bar{\delta}_f].$$

см., например, [Buttazzo, ...'13; Kniehl, Pikelner, Veretin'15; Martin'14-16]

- Что такое v ? Что такое $\alpha_s^{(5)}$? Что такое M_q ?

Что такое v ?

- Вакуумное среднее $\phi = h + v$ – минимум **эффективного** потенциала

$$V_{\text{eff}}(\phi) = V_{\text{Higgs}}(\phi) + \Delta V(\phi), \quad [\Delta V_{\text{Higgs}} - \text{квантовые поправки}]$$

- Калибровочная** [Nielsen'75] и **РГ** зависимость V_{eff}

$$\left(\xi \frac{\partial}{\partial \xi} + C(\phi, \xi) \frac{\partial}{\partial \phi} \right) V_{\text{eff}} = 0, \quad \left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta_{a_i} \frac{\partial}{\partial a_i} - \gamma_{\Phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) V_{\text{eff}} = 0$$

- В ТВ мы должны гарантировать, что в каждом порядке выполняется

$$\langle h \rangle = \left. \frac{dV_{\text{eff}}}{d\phi} \right|_{\phi=v} = m_{\Phi}^2 v + \lambda v^3 + \left. \frac{d\Delta V(\phi)}{d\phi} \right|_{\phi=v} = 0 \Rightarrow v = v_{\text{tree}} = \sqrt{-m_{\Phi}^2/\lambda} + \Delta v$$

- Вариант 1:** сдвиг на v_{tree} , Δv – **возмущение** (FJ-схема) [Fleischer, Jegerlehner'81]

- Бегущие массы в $\overline{\text{MS}}$ **калибровочно независимы** по построению, например,

$$m_q(\mu) = y_q(\mu) v_{\text{tree}}(\mu) / \sqrt{2}, \quad \mu \partial_{\mu} m_q = \gamma_{m_q} m_q, \quad \gamma_{m_q} \neq \beta_q$$

- Δv эффективно приводит к **одночастично приводимым** вкладам в Γ_n

$$\Delta v : \quad 2\lambda v_{\text{tree}}^2 \Delta v \left[1 + \frac{3}{2} \frac{\Delta v}{v_{\text{tree}}} + \frac{1}{2} \frac{\Delta v^2}{v_{\text{tree}}^2} \right] + \left. \frac{d\Delta V}{d\phi} \right|_{\phi=v_{\text{tree}}+\Delta v} = 0, \quad [\Delta v \sim M_t^4 / (M_W^2 M_h^2) \sim 9]$$

Что такое v ?

- Вакуумное среднее $\phi = h + v$ – минимум **эффективного** потенциала

$$V_{\text{eff}}(\phi) = V_{\text{Higgs}}(\phi) + \Delta V(\phi), \quad [\Delta V_{\text{Higgs}} - \text{квантовые поправки}]$$

- Калибровочная** [Nielsen'75] и **РГ** зависимость V_{eff}

$$\left(\xi \frac{\partial}{\partial \xi} + C(\phi, \xi) \frac{\partial}{\partial \phi} \right) V_{\text{eff}} = 0, \quad \left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta_{a_i} \frac{\partial}{\partial a_i} - \gamma_{\Phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) V_{\text{eff}} = 0$$

- В ТВ мы должны гарантировать, что в каждом порядке выполняется

$$\langle h \rangle = \left. \frac{dV_{\text{eff}}}{d\phi} \right|_{\phi=v} = m_{\Phi}^2 v + \lambda v^3 + \left. \frac{d\Delta V(\phi)}{d\phi} \right|_{\phi=v} = 0 \Rightarrow v = v_{\text{tree}} = \sqrt{-m_{\Phi}^2/\lambda} + \Delta v$$

- Вариант 2: сдвиг на **полное** v (“tadpole-free”) [Bohm...Hollik'86; Martin'14-]

- Бегущие массы в $\overline{\text{MS}}$ **калибровочно зависимы** по построению

$$m_q(\mu) = y_q(\mu) v(\mu) / \sqrt{2}, \quad \mu \partial_{\mu} m_q = \gamma_{m_q} m_q, \quad \gamma_{m_q} \neq \beta_q$$

- v_{tree} (или m_{Φ}^2) определяется через v . Большие вклады Δv **поглощаются** в v

$$\frac{m_{\Phi}^2}{\lambda} \equiv v_{\text{tree}}^2 = v^2 - \frac{1}{\lambda v} \left. \frac{d\Delta V}{d\phi} \right|_{\phi=v}.$$

Что такое v ?

- Вакуумное среднее $\phi = h + v$ – минимум **эффективного** потенциала

$$V_{\text{eff}}(\phi) = V_{\text{Higgs}}(\phi) + \Delta V(\phi), \quad [\Delta V_{\text{Higgs}} - \text{квантовые поправки}]$$

- Калибровочная** [Nielsen'75] и **РГ** зависимость V_{eff}

$$\left(\xi \frac{\partial}{\partial \xi} + C(\phi, \xi) \frac{\partial}{\partial \phi} \right) V_{\text{eff}} = 0, \quad \left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta_{a_i} \frac{\partial}{\partial a_i} - \gamma_{\Phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) V_{\text{eff}} = 0$$

- В ТВ мы должны гарантировать, что в каждом порядке выполняется

$$\langle h \rangle = \left. \frac{dV_{\text{eff}}}{d\phi} \right|_{\phi=v} = m_{\Phi}^2 v + \lambda v^3 + \left. \frac{d\Delta V(\phi)}{d\phi} \right|_{\phi=v} = 0 \Rightarrow v = v_{\text{tree}} = \sqrt{-m_{\Phi}^2/\lambda} + \Delta v$$

- Вариант 3:** “сдвиг” на $v_F^2 \equiv 1/(\sqrt{2}G_F)$ [Hempfling, Kniehl'95; Kniehl, Veretin'14...]
 - Обращение в рамках ТВ

$$G_F = \frac{1}{\sqrt{2}v^2} [1 + \bar{\delta}r] \Rightarrow v(\mu) = v(v_F, \mu, \dots)$$

- Бегущие массы в $\overline{\text{MS}}$ **калибровочно независимы** по построению

$$m_{q,\gamma}(\mu) = y_q(\mu) v_F / \sqrt{2} = y_q(\mu) 2^{-3/4} G_F^{-1/2}, \quad \mu \partial_{\mu} m_q = \gamma_{m_q} m_q, \quad \gamma_{m_q} = \beta_q$$

Что такое $\alpha_s^{(5)}$? КХД×КЭД как эффективная теория

- Низкоэнергетическая **эффективная** $SU(3) \times U(1)$ теория, получаемая из СМ путем “интегрированием по тяжелым частицам”: t кварку, W^\pm , Z и h бозонам

$$\mathcal{L}_{\text{СМ}}(g_s, g_1, g_2, y_b, y_t, \lambda, \dots) \Rightarrow \mathcal{L}_{\text{КХД}\times\text{КЭД}}^{(n_f=5)}(\alpha_s^{(5)}, \alpha^{(5)}, m_b^{(5)})$$

- В $\overline{\text{MS}}$ схеме вклады от виртуальных тяжелых частиц не подавлены степенным образом [Appelquist, Carrazzone'75], **логарифмические** поправки поглощаются в переопределение бегущих параметров (и полей). Такое “отщепление” (decoupling) t и W на масштабе μ_{th} дает:

$$\alpha_s^{(5)}(\mu_{\text{th}}) = \alpha_s(\mu_{\text{th}})\zeta_{\alpha_s}, \quad \zeta_{\alpha_s} = 1 + \frac{2}{3} \frac{\alpha_s}{4\pi} \log \frac{M_t^2}{\mu^2} + \dots, \quad (4\pi)\alpha_s = g_s^2,$$

$$\alpha^{(5)}(\mu_{\text{th}}) = \alpha(\mu_{\text{th}})\zeta_\alpha, \quad \zeta_\alpha = 1 + \frac{\alpha}{4\pi} \left(\frac{2}{3} - 7 \log \frac{M_W^2}{\mu^2} + \frac{16}{9} \log \frac{M_t^2}{\mu^2} \right) + \dots$$

- В [АВ'14] были рассмотрены двухпетлевые поправки в ζ_{α_s} , приводящие к

$$\alpha_s(M_Z) = \alpha_s^{(5)}(M_Z) \cdot \left[1 - \underbrace{0.008067}_{\alpha_s} - \underbrace{0.000965}_{\alpha_s^2} + \underbrace{0.000143}_{\alpha_s \alpha} + \underbrace{0.000018}_{\alpha_s^3} \right]$$

Что такое M_b [и $m_b^{(5)}$]?

- “Физическая” **полюсная** масса кварка M_b
 - хорошо определена в конечном порядке ТВ
 - ренормальная неопределенность $\mathcal{O}(\Lambda_{QCD}/M_b) \sim 10\%$
- Бегущая масса кварка $m_b^{(5)}(\mu)$ в КХД×КЭД в \overline{MS}
 - Не чувствительна к инфракрасной физике
 - Извлекается из эксперимента с **большой точностью**

[Tarrach'81]

[Bigi...'94;Beneke,Braun'94]

[PDG'24]

$$\mu_b = m_b^{(5)}(\mu_b), \quad \mu_b = 4.183(7) \text{ ГэВ}$$

Полюсная масса может служить **“мостом”** для связи параметров СМ и КХД×КЭД

$$M_b = m_{b,\gamma}(\mu) \left(1 + \sum_{i+j=1}^2 \alpha_s^i \cdot \alpha^j \cdot \sigma_{ij}(M_b, M, \mu) + \dots \right)_{\text{СМ}}, \quad M = \{M_t, M_W, M_Z, M_h\}$$

$$= \zeta_b \cdot m_b^{(5)}(\mu) \left(1 + \sum_{i+j=1}^2 (\zeta_{\alpha_s} \alpha_s^{(5)})^i \cdot (\zeta_{\alpha} \alpha^{(5)})^j \cdot \underline{\sigma}_{ij}(M_b, \mu) + \dots \right)_{\text{КХД}\times\text{КЭД}} + \mathcal{O}\left(\frac{m_b}{M}\right)$$

$$\mu_b \xrightarrow{\text{РГ в КХД}\times\text{КЭД}} m_b^{(5)}(M_Z) \rightarrow y_b(M_Z) = 2^{3/4} G_F^{1/2} m_b^{(5)}(M_Z) \zeta_b^{-1} \xrightarrow{\text{РГ в СМ}} y_b(M_t)$$

Связь M_b и $m_b^{(5)}$ с y_b в СМ

По сравнению с выражением

$$y_b(M_Z) = 2^{3/4} G_F^{1/2} \cdot M_b \left[1 - \underbrace{0.010}_\alpha - \underbrace{0.270}_{\alpha_s} - \underbrace{0.0784}_{\alpha_s^2} + \underbrace{0.0032}_{\alpha_s \alpha} + \underbrace{0.0003}_{\alpha^2} + \dots \right]$$

полученным с помощью формулы

[Hempfling,Kniehl'14]

$$y_b(\mu) = 2^{3/4} G_F^{1/2} M_b [1 + \delta_b(\underbrace{M_b}_{4 \text{ ГэВ}}, \underbrace{M_t, M_W, M_Z, M_h, \mu}_{100-200 \text{ ГэВ}})],$$

содержащей вклады от больших логарифмов $\log(M_b/M_Z)$, найденное соотношение между $m_{b,\gamma}$ и $m_b^{(5)}$ дает (КХД – RunDec [Chetyrkin'00]):

[AB'17]

$$y_b(M_Z) = 2^{3/4} G_F^{1/2} \cdot m_b^{(5)}(M_Z) \cdot \left[1 - \underbrace{0.00838}_\alpha - \underbrace{0.00074}_{\alpha_s^2} - \underbrace{0.00023}_{\alpha_s^3} + \underbrace{0.00068}_{\alpha_s \alpha} - \underbrace{0.00005}_{\alpha^2} + \dots \right]$$

и приводит к **снижению** теоретической неопределенности в значении

$$y_b(M_t) = 0.01539 \pm 0.00002_{\text{th}}$$

Необходимые ингредиенты самосогласованного РГ анализа

- Граничные значения параметров СМ $x(\mu_0)$ на шкале $\mu_0 = M_t$ и их неопределенности (2* петли)

- параметрические (Δx_O – ошибки “наблюдаемых” $O = O^{\text{exp}} \pm \Delta O^{\text{exp}}$)
- теоретические (δx_μ – вариация шкалы $\mu_0 = 2^{\pm 1} M_t$)

[AB,Kniehl,Pikelner,Veretin'15] КОД mr [Pikelner..'16]

x	x_0	Δx_{α_s}	Δx_{M_W}	Δx_{M_H}	Δx_{M_t}	β_x	δx_μ
g_1	0.35838	-3.8×10^{-6}	-2.3×10^{-4}	-2.5×10^{-6}	$+7.1 \times 10^{-5}$	$+2.1 \times 10^{-3}$	8.5×10^{-5}
g_2	0.64812	$+8.5 \times 10^{-7}$	$+1.2 \times 10^{-4}$	-6.6×10^{-7}	-9.8×10^{-6}	-5.2×10^{-3}	5.8×10^{-5}
g_s	1.16540	$+2.7 \times 10^{-3}$	$+8.9 \times 10^{-8}$	$+7.8 \times 10^{-8}$	-4.0×10^{-5}	-7.2×10^{-2}	5.6×10^{-5}
y_t	0.93517	-3.6×10^{-4}	-1.3×10^{-7}	-8.6×10^{-6}	$+5.1 \times 10^{-3}$	-5.2×10^{-2}	8.0×10^{-4}
λ	0.12714	-6.2×10^{-6}	-4.2×10^{-7}	$+8.2 \times 10^{-4}$	$+6.4 \times 10^{-5}$	-2.0×10^{-2}	5.8×10^{-4}
m	131.86	-2.6×10^{-3}	-4.4×10^{-4}	$+3.8 \times 10^{-1}$	$+1.2 \times 10^{-1}$	+2.6	7.3×10^{-1}

$$x(\mu) = x_0 + \Delta x_{\alpha_s} \frac{\alpha_s^{(5)}(M_Z) - \alpha_s^{(5),\text{exp}}(M_Z)}{\Delta \alpha_s^{(5),\text{exp}}(M_Z)} + \Delta x_{M_t} \frac{M_t - M_t^{\text{exp}}}{\Delta M_t^{\text{exp}}} + \Delta x_{M_W} \frac{M_W - M_W^{\text{exp}}}{\Delta M_W^{\text{exp}}} + \Delta x_{M_H} \frac{M_H - M_H^{\text{exp}}}{\Delta M_H^{\text{exp}}} + \beta_x \frac{\mu - \mu_0}{\mu_0} \pm \delta x_\mu$$

- РГ уравнения для эволюции от μ_0 до планковской шкалы (3* петли)

РГ анализ стабильности вакуума

- Граничные значения параметров СМ $x(\mu_0)$ на шкале $\mu_0 = M_t$ и их неопределенности
[AB,Kniehl,Pikelner,Veretin'15] КОД `mr` [Pikelner...'16]
- РГ эволюция от μ_0 до планковской шкалы
- Абсолютная стабильность: $V_{\text{eff}}(v) < V_{\text{eff}}(v')$ и критические массы (M_h^{crit} или M_t^{crit})

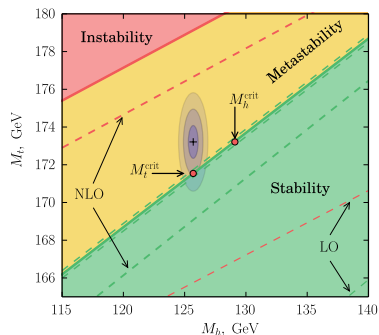
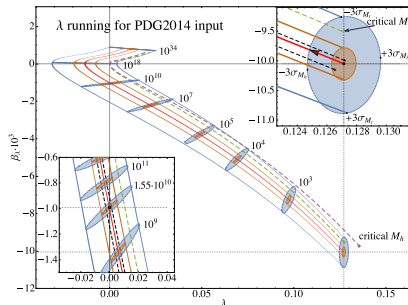
$$V_{\text{eff}}(v) = V_{\text{eff}}(v') \rightarrow \lambda(\mu^{\text{crit}}) = \beta_\lambda(\mu^{\text{crit}}) = 0$$

$$M_t^{\text{crit}} = 171.54 \pm 0.30 \begin{matrix} +0.26 \\ -0.41 \end{matrix} \text{ ГэВ}$$

$$M_t^{\text{M.C.}} = 173.21 \pm 0.87 \text{ ГэВ}$$

- **Метастабильность** ($\mathcal{P} < 1$) и вероятность распада за время жизни Вселенной

$$\mathcal{P} \propto \frac{\tilde{\mu}^4}{H_0^4} e^{-\frac{8\pi^2}{3|\tilde{\lambda}|}} \quad \tilde{\lambda} \equiv \lambda(\tilde{\mu}) < 0, \quad \beta_\lambda(\tilde{\mu}) = 0$$



\tilde{A} -функция и условия согласования Вейля (WCC) в СМ

- Аналог c-функции Замолотчикова в 2d конформных теориях
- Обобщение на $d > 2$: монотонно (α -теорема) меняющаяся вдоль РГ потока \tilde{A} -функция безразмерных констант связи a^I [Cardy'88; Jack, Osborn'90]

$$d\tilde{A} = da^I \chi_{IJ} \beta^J, \quad \frac{da^I}{dt} \equiv \beta^I, \quad \frac{d\tilde{A}}{dt} = \beta^I \chi_{IJ} \beta^J \stackrel{?}{\geq} 0$$

- Условие интегрируемости приводит к соотношениям между различными вкладками в β -функции (различных) констант связи

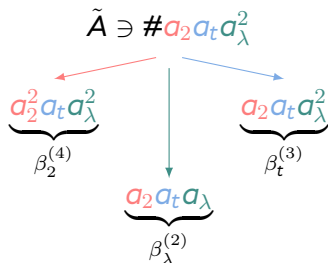
$$\frac{\partial^2 \tilde{A}}{\partial a^I \partial a^J} = \frac{\partial}{\partial a^I} (\chi_{JK} \beta^K) = \frac{\partial}{\partial a^J} (\chi_{IK} \beta^K)$$

- В лидирующем порядке в СМ

$$\chi_{IJ} = \text{diag} \left(\frac{1}{a_1^2}, \frac{3}{a_2^2}, \frac{8}{a_3^2}, \frac{2}{a_t}, 4 \right)$$

- **Согласованный с WCC** подсчет порядков ТВ?

$$L[\text{калибр. вз.}] - (L-1)[\text{юкав. вз.}] - (L-2)[\text{скаляр. вз.}]$$



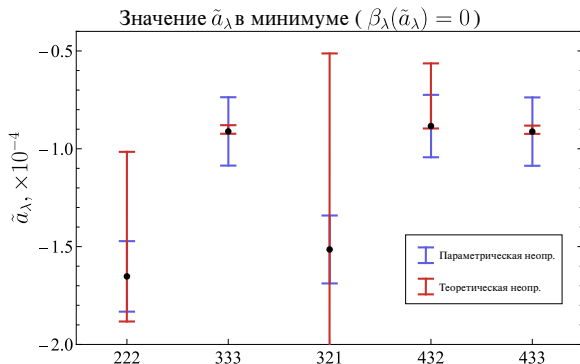
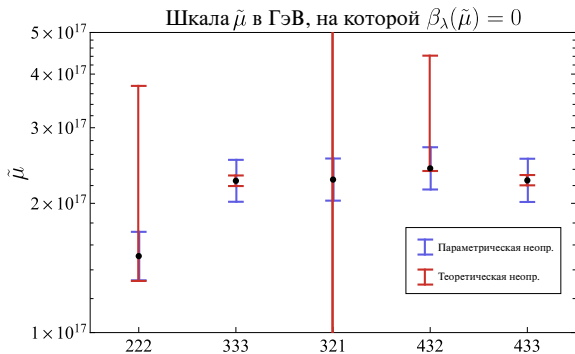
[Antipin...'13]

Зависимость неопределенностей от учетных порядков ТВ

- Аргументы (WCC) в пользу использования “недиагональных” порядков ТВ в РГ уравнениях при исследовании стабильности вакуума [Antipin...13]

$$L[\text{калибр. вз.}] - (L-1)[\text{юкав. вз.}] - (L-2)[\text{скаляр. вз.}]$$

- В работе [AB,Fedoruk,Kazakov'25] проводится согласованный РГ анализ и показывается, что стандартные “диагональные” РГ более адекватной с точки зрения теоретических неопределенностей:



Зависимость неопределенностей от учетных порядков ТВ

- Аргументы (WCC) в пользу использования “недиагональных” порядков ТВ в РГ уравнениях при исследовании стабильности вакуума [Antipin...’13]

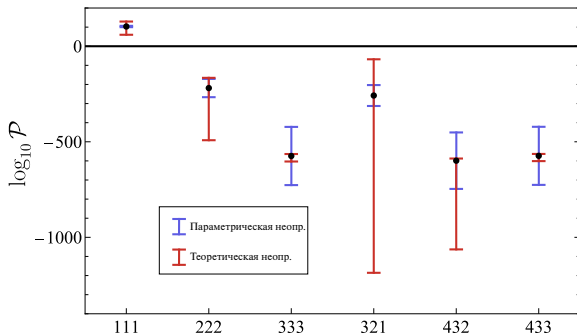
$$L[\text{калибр. вз.}] - (L-1)[\text{юкав. вз.}] - (L-2)[\text{скаляр. вз.}]$$

- В работе [AB,Fedoruk,Kazakov’25] проводится согласованный РГ анализ и показывается, что стандартные “диагональные” РГ более адекватной с точки зрения теоретических неопределенностей:

$$\log_{10} \mathcal{P} \approx 159.497$$

$$+ 0.434294 \left(4 \ln \frac{\tilde{\mu}}{\mu_0} - \frac{1}{6|\tilde{a}_\lambda|} \right)$$

$\log_{10} \mathcal{P} \simeq 100$ для случая 111 означает, что вероятность распада вакуума достигла бы 100% намного, намного раньше в истории Вселенной



4-петлевые электрослабые поправки в β -функцию α_s

- **Предел** исчезающих $SU(2) \times U(1)$ калибровочных констант
Рассматривался следующий набор параметров

$$a_i = \left(\frac{g_s^2}{16\pi^2}, \frac{y_t^2}{16\pi^2}, \frac{\lambda}{16\pi^2}, \xi \right) \quad \text{Существенное уменьшение числа диаграмм!}$$

Зависимость от параметра фиксирующего калибровку ξ

- Калибровка фонового поля: $V = \tilde{V} + \hat{V}$
 $Z_{a_s} = 1/Z_{\hat{G}}, \quad Z_\xi = Z_{\tilde{G}}, \quad \hat{G} - \text{фоновое}, \quad \tilde{G} - \text{квантовое}$
- Мультипликативная перенормировка $a_{\text{bare}} = Z_a a_{\text{ren}}$ ОЧН функций Грина

$$\Gamma_{\text{ren}}^{(l)} = Z_\Gamma^{(l)} \left[1 + \Gamma_{\text{bare}}^{(1)}(a_{\text{bare}}) + \Gamma_{\text{bare}}^{(2)}(a_{\text{bare}}) + \dots + \Gamma_{\text{bare}}^{(l)}(a_{\text{bare}}) \right]$$

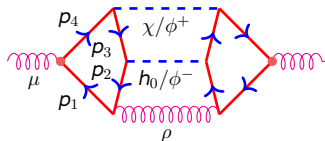
- Киральные взаимодействия в рассматриваемом приближении
 - γ_5 нет в калибровочных вершинах!
 - γ_5 возникает только в вершинах с “голдстоуновскими” бозонами.

4-петлевые поправки в β -функцию α_s (проблема γ_5)

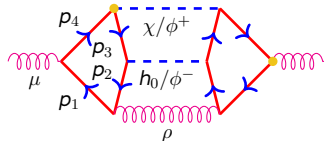
- Соотношения (I) и (II) оказываются несовместными в $d = 4 - 2\epsilon$.

$$\{\gamma_\mu, \gamma_5\} = 0 \quad \text{(I)}, \quad \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma_5) = -4i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}, \quad \text{(II)}$$

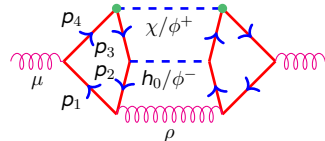
- Самосогласованный BMHV подход нарушает калибровочную симметрию и требует введения неминимальных контрчленов, восстанавливающих симметрию перенормированной теории [tHooft,Veltman'72,Breitenlohner,Maison'77]
- Мы использовали оба соотношения I-II, но отказались от цикличности линейного функционала "Tr" [Korner,Kreimer,Schilcher'91]:



$R = 1$



$R = 2$



$R = 3$

- 24 планарных и 48 непланарных диаграмм дают в сумме вклад

$$\frac{\alpha_s^2 a_t^2 T_F^2}{\epsilon} \left(\frac{4}{3} + 8\zeta_3 \right) \cdot R, \quad [R = 3 - \text{поперечность пропагатора}].$$

Результат: β_{a_s} в пределе $g_1 = g_2 = 0$

- Бета-функция

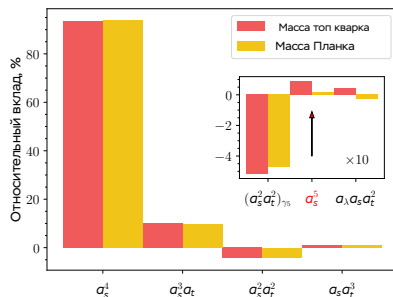
$$\beta = \frac{d a_s}{d \ln \mu^2} = -a_s \sum_{i=0}^3 \beta_i h^{i+1}$$

- h “считает” степени a_i

$$a_s = \frac{g_s^2}{16\pi^2}, a_t = \frac{y_t^2}{16\pi^2}, a_\lambda = \frac{\lambda}{16\pi^2}$$

- Относительные вклады в β_3 .

- 5-петлевой вклад КХД [Chetyrkin,..'16] β_4/β_3



Четырехпетлевой результат

[AB,Pikelner'16]

$$\begin{aligned} \beta_3 &= \beta_3^{\text{QCD}}(n_f = 2n_G) + a_s^3 a_t \left[T_F C_F^2 (6 - 144\zeta_3) + T_F C_A C_F \left(\frac{523}{9} - 72\zeta_3 \right) + \frac{1970}{9} T_F C_A^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1288}{9} T_F^2 C_F n_G - \frac{872}{9} T_F^2 C_A n_G \right] + a_s a_t^3 T_F \left(\frac{423}{2} + 12\zeta_3 \right) + 60 a_s a_t^2 a_\lambda T_F - 72 a_s a_t a_\lambda^2 T_F \\ &\quad - a_s^2 a_t^2 \left[T_F^2 \left(48 - 96\zeta_3 + \underbrace{R}_3 \cdot \left[\frac{16}{3} + 32\zeta_3 \right] \right) + T_F C_F (117 - 144\zeta_3) + 222 T_F C_A \right] \end{aligned}$$

Результаты части 1

- Метод расчет **пороговых поправок** в КХД в \overline{MS} обобщен на случай **СМ**
 - Двухпетлевые вклады в соотношение между $\alpha_s^{(5)}(\mu)$ в КХД и $g_s(\mu)$ в СМ
 - Двухпетлевые вклады в соотношение между $m_b^{(5)}(\mu)$ в КХД и $y_b(\mu)$ в СМ
 - Независимый расчет и реализация в рамках кода SMDR [Martin'19]
- Исследование **стабильности** электрослабого **вакуума** СМ
 - Трехпетлевой калибровочно-независимый РГ анализ
 - Критические массы и их **неопределенности**
 - Оценка вкладов различных порядков, учет **четырёхпетлевых** эффектов
- Расчет лидирующих **четырёхпетлевых** поправок в β_{α_s} в рамках СМ
 - Корректное выражение $R = 3$ для формально неоднозначного вклада от γ_5 .
 - Независимое подтверждение однозначной части [Zoller'15]
 - Независимое доказательство, что $R = 3$, основанное на WCC [Poole, Thomsen'19]

Часть 2: РГ функции в четырехмерных перенормируемых моделях

- A. Bednyakov и A. Pikelner, “Four-Loop Gauge and Three-Loop Yukawa Beta Functions in a General Renormalizable Theory”, *Phys. Rev. Lett.*, т. 127, № 4, с. 041801, 2021.
- A. Bednyakov и A. Mukhaeva, “Perturbative Asymptotic Safety and Its Phenomenological Applications”, *Symmetry*, т. 15, № 8, с. 1497, 2023.
- A. V. Bednyakov и A. I. Mukhaeva, “Asymptotic safety in the Litim-Sannino model at four loops”, *Phys. Rev. D*, т. 109, № 6, с. 065030, 2024.

РГ функции в произвольной перенормируемой КТП ($d = 4$)

- Двухпетлевые РГУ – стандарт *де-факто* при РГ анализе Новой физики благодаря общим результатам [Machacek&Vaughn'83-85, Luo...'03] и таким компьютерными кодами как SARAH [Staub'08-13]
- Лагранжиан в терминах майорановских Ψ_i и действительных ϕ_a

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} G_{AB}^{-2} F_{\mu\nu}^A F^{B\mu\nu} + \frac{1}{2} (D_\mu \phi)_a (D_\mu \phi)_a + \frac{i}{2} \Psi_i^T \gamma^\mu (D_\mu \Psi)_i - \frac{1}{2} \phi^a \Psi_i^T y_{aj} \Psi_j - \frac{1}{24} \lambda_{abcd} \phi_a \phi_b \phi_c \phi_d,$$

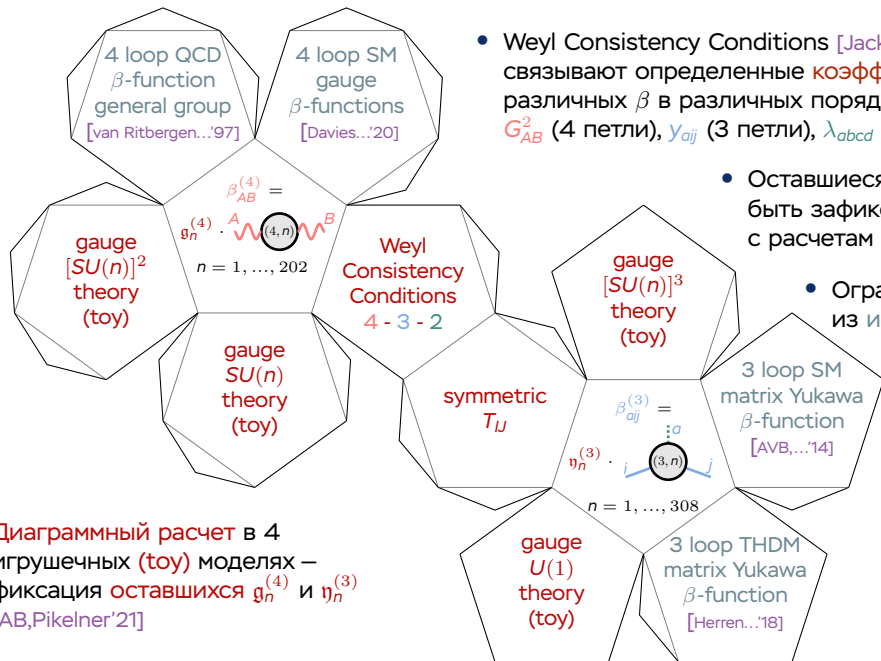
- Калибровочные и юкавские β -функции определены как

$$\beta_{AB} = \frac{dG_{AB}^2}{d \ln \mu} = \frac{1}{2} \left[\sum_l G_{AC}^2 \frac{\beta_{CD}^{(l)}}{(4\pi)^{2l}} G_{DB}^2 + (A \leftrightarrow B) \right]$$
$$\beta_{aj} = \frac{dy_{aj}}{d \ln \mu} = \frac{1}{2} \left[\sum_l \frac{\beta_{aj}^{(l)}}{(4\pi)^{2l}} + (i \leftrightarrow j) \right]$$

- В [AB,Pikelner'21] впервые 2-петлевой результат был обобщен на уровень 4(калибр. вз.) – 3(юкав. вз.) – 2(скаляр. вз.) петель

Калибровочные и юкавские РГУ в произвольных моделях

- Weyl Consistency Conditions [Jack,...'14, Poole,...'19] связывают определенные коэффициенты различных β в различных порядках ТВ: G_{AB}^2 (4 петли), Y_{aij} (3 петли), λ_{abcd} (2 петли)



- Оставшиеся неизвестные могут быть зафиксированы сравнением с расчетам в конкретных моделях
- Ограничения на $g_n^{(4)}$ и $\eta_n^{(3)}$ из известных ответов в СМ и 2HDM

- Диаграммный расчет в 4 игрушечных (toy) моделях – фиксация оставшихся $g_n^{(4)}$ и $\eta_n^{(3)}$ [AB, Pikelner'21]

При сравнении использовался пакет RGBeta [Thomsen'21]

От “игрушечных” моделей к произвольной КТП в $d = 4$

$$\mathcal{G} = SU(n_1) \times SU(n_2)$$

$\phi_{\alpha\beta}$ заряжен по двум гр. факторам

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathbf{M1}} = & -\frac{1}{2g^2} \text{Tr}(F_{\mu\nu}^i F_{\mu\nu}^i) + (D_\mu \phi)^\dagger_{\alpha\rho} (D_\mu \phi)_{\alpha\rho} \\ & - \frac{\lambda_1}{2} (\phi_{\alpha\rho}^\dagger \phi_{\alpha\rho}) (\phi_{\beta\sigma}^\dagger \phi_{\beta\sigma}) \\ & - \frac{\lambda_2}{2} (\phi_{\alpha\rho}^\dagger \phi_{\alpha\sigma}) (\phi_{\beta\sigma}^\dagger \phi_{\beta\rho}) \end{aligned}$$

модельные файлы как
для DIANA (диаграммный счет)
так и для RGBeta

$$\mathcal{G} = SU(n_1) \times SU(n_2) \times SU(n_3)$$

Ψ - фонд. \mathcal{G} , скаляры ϕ_i - присоед. $SU(n_i)$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathbf{M3}} = & -\frac{1}{2g^2} \text{Tr}(F_{\mu\nu}^i F_{\mu\nu}^i) + \text{Tr}[(D_\mu \phi_i)(D_\mu \phi_i)] \\ & + i\bar{\Psi}\gamma_\mu (D_\mu \Psi) - y_i [\bar{\Psi}\phi_i\Psi + \text{h.c.}] \\ & - \frac{\lambda_{ij}}{8} \text{Tr}(\phi_i\phi_i)\text{Tr}(\phi_j\phi_j) - \frac{\lambda_i}{24} \text{Tr}(\phi_i\phi_i\phi_i\phi_i) \end{aligned}$$

$$\mathcal{G} = SU(n)$$

Q, h - фонд., $u_R = P_R u, s$ - синглеты

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathbf{M2}} = & -\frac{1}{4g^2} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a + i\bar{Q}\gamma^\mu D_\mu Q + i\bar{u}_R\gamma^\mu \partial_\mu u_R \\ & + \frac{1}{2} (\partial_\mu s)^2 + |D_\mu h|^2 \\ & - y_s \bar{Q}Qs - y_u [(Qh)u_R + \text{h.c.}] \\ & - \frac{\lambda_s s^4}{24} - \frac{\lambda_{sh}}{2} s^2 (h^\dagger h) - \frac{\lambda_h}{2} (h^\dagger h)^2. \end{aligned}$$

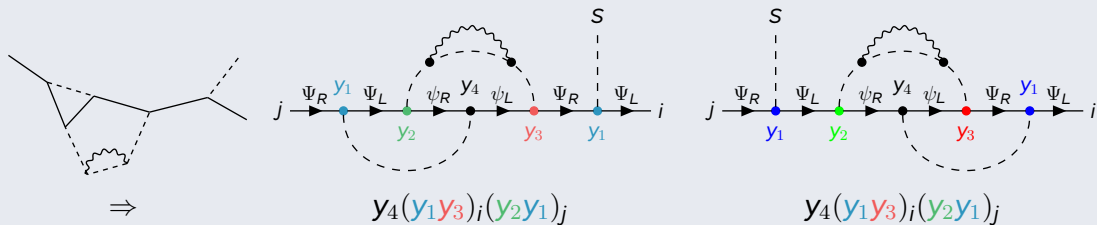
$$\mathcal{G} = U(1)$$

$\Psi = (\psi_1, \psi_2)$, $Q_s = 0$, $Q_h + Q_\psi = Q_\Psi$

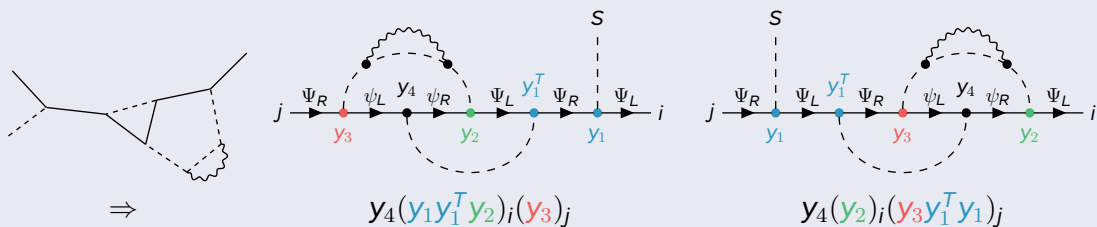
$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathbf{M4}} = & -\frac{1}{2g^2} (F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}) + |D_\mu h|^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu s)^2 \\ & + i\bar{\Psi}_i \gamma_\mu (D_\mu \Psi_i) + i\bar{\psi} \gamma_\mu (D_\mu \psi) \\ & - [(y_1)_{ij} s \bar{\Psi}_i P_R \Psi_j + (y_2)_i h \bar{\Psi}_i P_R \psi \\ & + (y_3)_i h^* \bar{\psi} P_R \Psi_i + y_4 s \bar{\psi} P_R \psi + \text{h.c.}] \\ & - \frac{\lambda_s s^4}{24} - \frac{\lambda_{sh}}{2} s^2 (h^\dagger h) - \frac{\lambda_h}{2} (h^\dagger h)^2. \end{aligned}$$

Модель **M4** для “расщепления” вкладов в $\eta_{172}^{(3)}$ и $\eta_{173}^{(3)}$

Тензорная структура 172 для юкавской β [Poole&Thomsen'19]



Тензорная структура 173 для юкавской β [Poole&Thomsen'19]



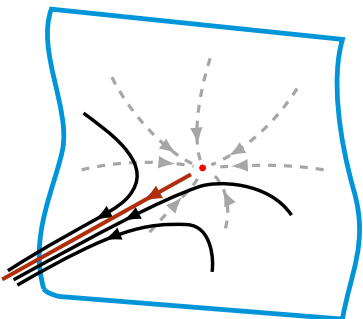
Калибровочные и юкавские РГУ: ограничения на $g_n^{(4)}$ и $\eta_n^{(3)}$

Тип бета-функции	калибровочная		юкавская	
	$r = \mathbf{n} + c$	u_g	$r = \mathbf{n} + c$	u_η
Число уравнений и неизвестных				
Начальное число неизвестных	-	202	-	308
WCC	128+0	74	133+0	175
4-петлевые калибровочные в CM	63+84	11	-	
3-петлевые матричные юкавские в CM	-		128+17	47
3-петлевые матричные юкавские в 2HDM	-		33+213	14
4-петлевая КХД с произвольной группой	2+11	9	-	
$SU(n_1) \times SU(n_2)$, (M1)	5+25	4	-	
$SU(n)$, (M2)	2+55	2	4+76	10
$SU(n_1) \times SU(n_2) \times SU(n_3)$, (M3)	-		9+89	1
$U(1)$, (M4)	-		1+199	0
Симметричность метрики	2+8	0	-	
Окончательное число неизвестных		0		0

$r = \mathbf{n} + c$ отвечает рангу линейной системы уравнений на $g^{(4)}$ или $\eta^{(3)}$ без учета ограничений, полученных на предыдущем шаге, \mathbf{n} – числу новых независимых уравнений, а c – числу автоматически удовлетворяемых соотношений.

Асимптотическая свобода и асимптотическая безопасность

$$S = \int d^d x \mu^{d-\Delta_i} g_i \mathcal{O}_i(x),$$
$$\alpha_i \equiv \frac{g_i^2}{16\pi^2}$$



- РГ поток в пространстве параметров $\alpha = \{\alpha_i\}$ обладает **фиксированной точкой с остаточным взаимодействием (FP)** α^* :

$$\partial_t \alpha_i = \beta_i(\alpha), \quad \beta_i(\alpha^*) = 0, \quad t \equiv \ln \mu$$

$$\partial_t(\alpha_i - \alpha_i^*) = -\omega_{ij}(\alpha_j - \alpha_j^*) + \dots, \quad \omega_{ij} \equiv -\partial_j \beta_i(\alpha^*)$$

- ИК существенные** направления ($\theta_j^{\text{IR}} > 0$) образуют подпространство **конечной** размерности (k)

$$\alpha_i(\mu) = \alpha_i^* + \sum_{j=1}^k c_{ij} \left(\frac{\mu}{\mu_0} \right)^{-\theta_j^{\text{IR}}} \quad [\theta_i - \text{собств. знач. } \omega_{ij}]$$
$$+ \sum_{j=k+1}^{\infty} c_{ij} \left(\frac{\mu}{\mu_0} \right)^{-\theta_j^{\text{UV}}}$$

- В ИК области (УФ-конечная) теория обладает **k свободными параметрами**

Модель Литима-Саннино

поле	$SU(N_c)$	$SU_L(N_f)$	$SU_R(N_f)$
ψ_L	N_c	N_f	1
ψ_R	N_c	1	N_f
H	1	N_f	\bar{N}_f

- калибровочная $SU(N_c)$
- глобальная $SU_L(N_f) \times SU_R(N_f)$

- Лагранжиан

[Litim,Sannino'14]

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4}F^{a\mu\nu}F_{\mu\nu}^a + \mathcal{L}_{gf} + \mathcal{L}_{gh}, \quad [F_{\mu\nu}^a \equiv \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a + gf^{abc}G_\mu^b G_\nu^c] \\ & + \text{Tr}(\bar{\psi}i\hat{D}\psi) + \text{Tr}(\partial^\mu H^\dagger \partial_\mu H) - \mathbf{y}\text{Tr}[\bar{\psi}(H\mathcal{P}_R + H^\dagger\mathcal{P}_L)\psi] \\ & - m^2\text{Tr}(H^\dagger H) - \underbrace{\mathbf{u}\text{Tr}[(H^\dagger H)^2]}_{\text{single-trace}} - \underbrace{\mathbf{v}(\text{Tr}[H^\dagger H])^2}_{\text{double-trace}} \end{aligned}$$

- Нарушение $SU_L(N_f) \times SU_R(N_f) \rightarrow SU(N_f)$

$$\delta\mathcal{L} = -m_\psi\text{Tr}(\bar{\psi}\psi) - \left[\frac{h_2}{2}\text{Tr}(HH^\dagger H) + \frac{h_3}{2}\text{Tr}(HH^\dagger)\text{Tr}(H) + \text{h.c.} \right]$$

$$\equiv -m_\psi\mathcal{O}_1 - h_2\mathcal{O}_2 - h_3\mathcal{O}_3 = -\vec{\kappa} \cdot \vec{\mathcal{O}}, \quad \vec{\mathcal{O}} - \text{операторы размерности 3}$$

Модель Литима-Саннино: предел Венециано

$$\alpha_g = \frac{g^2 N_c}{(4\pi^2)}, \quad \alpha_y = \frac{y^2 N_c}{(4\pi^2)}, \quad \alpha_u = \frac{u N_f}{(4\pi^2)}, \quad \alpha_v = \frac{v N_f^2}{(4\pi^2)}$$

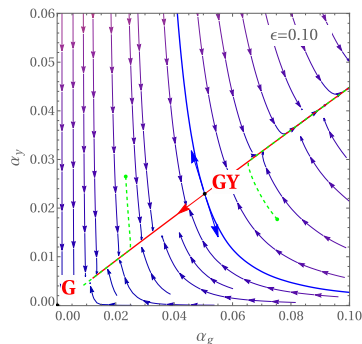
$$\partial_t \alpha_i = \beta_i(\alpha, N_c, \epsilon) = \beta_i(\alpha, \epsilon) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N_c}\right), \quad \epsilon \equiv \frac{N_f}{N_c} - \frac{11}{2} \quad [\text{малый параметр}]$$

- Бета-функция калибровочной константы: $\partial_t \alpha_g = \alpha_g^2 \left[\frac{4}{3} \epsilon + \dots \right]$
- Фиксированная точка $\beta_i(\alpha^*, \epsilon) = 0$, причем $0 < \epsilon \ll 1$

$$\alpha_x^* = \sum_{i=1}^{\infty} c_x^{(i)} \epsilon^i$$

- Чтобы найти $c_x^{(n)}$ необходимо знать

$$\left. \begin{array}{l} (n+1) \text{ петли } \beta_g \\ n \text{ петли } \beta_y \\ n \text{ петли } \beta_{u,v} \end{array} \right\} (n+1, n, n) \text{ порядок}$$



Модель Литима-Саннино: конформное окно

- Результат в 433 - порядке

$$\alpha_x^* = \underbrace{c_x^{(1)} \epsilon}_{211} + \underbrace{c_x^{(2)} \epsilon^2}_{322} + \underbrace{c_x^{(3)} \epsilon^3}_{433}$$

[Litim,Sannino'14] [Bond,Litim,] [Litim,Riyaz,]
[Medina,Steudtner'17] [Stamou,Steudtner'23,]
[AB,Mukhaeva'24]

- Поправки от конечного N_c

$$c_x^{(n)} \rightarrow c_x^{(n)} \cdot \mathbf{f}_x^{(n)}(\mathbf{N}_c) : \quad \lim_{N_c \rightarrow \infty} \mathbf{f}_x^{(n)}(\mathbf{N}_c) = 1$$

- В фиксированной точке $\alpha^* = \alpha^*(\epsilon, N_c)$ имеем

$\theta_{2,3,4}(\alpha^*) < 0 < \theta_1(\alpha^*)$ - одно ИК-существенно направление [dim O = 4]

$\Delta_O = d_O + \gamma_O^*$, $\gamma_O^* \equiv \gamma_O(\alpha^*)$ - критические размерности операторов O

- Конформное окно

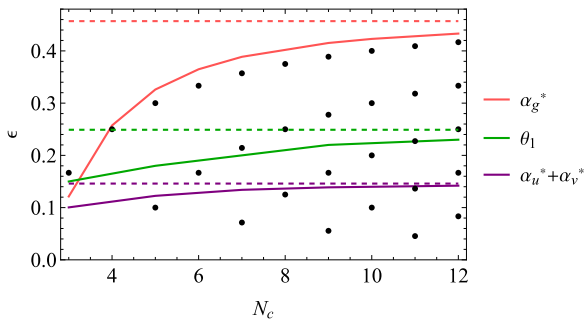
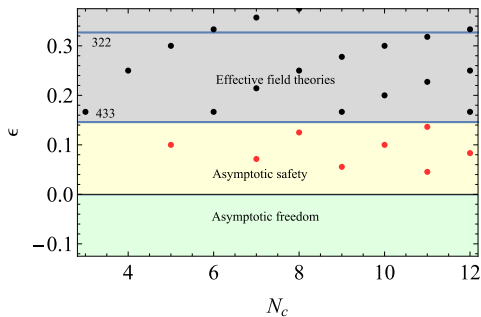
Ограничения на ϵ_{\max} :

$$\begin{aligned} \alpha^*(\epsilon_{\text{perturbativity}}) &= 1? \\ [\alpha_U^* + \alpha_V^*](\epsilon_{\text{vacuum stability}}) &= 0? \\ \theta_1(\epsilon_{\text{merge}}) &= 0? \end{aligned}$$

Конформное окно в пределе Венециано и при конечном N_c

$$\begin{aligned}\alpha_g^* &= 0.456\epsilon + 0.781\epsilon^2 + 6.610\epsilon^3, \\ \alpha_y^* &= 0.211\epsilon + 0.508\epsilon^2 + 3.322\epsilon^3, \\ \alpha_u^* &= 0.200\epsilon + 0.440\epsilon^2 + 2.693\epsilon^3, \\ -\alpha_v^* &= 0.137\epsilon + 0.632\epsilon^2 + 4.313\epsilon^3,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\theta_1 &= 0.608\epsilon^2 - 0.707\epsilon^3 - 6.947\epsilon^4, \\ -\theta_2 &= 2.737\epsilon + 6.676\epsilon^2 + 22.120\epsilon^3, \\ -\theta_3 &= 2.941\epsilon + 1.041\epsilon^2 + 5.137\epsilon^3, \\ -\theta_4 &= 4.039\epsilon + 9.107\epsilon^2 + 38.646\epsilon^3\end{aligned}$$



[AB, Mukhaeva'24]

Операторы размерности 3

$$\gamma_{O_1}^* = -0.2105\epsilon + \underbrace{0.4628\epsilon^2 + 0.3669\epsilon^2}_{\text{нельзя верить}}$$

[Litim et al'23]

- Учет смешивания

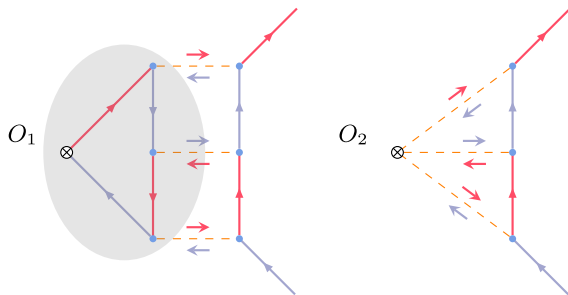
$$O_1 = \text{Tr}(\bar{\psi}\psi) \quad [\text{Litim et al'23}]$$

$$O_2 = \frac{1}{2}\text{Tr}(HH^\dagger H) + \text{h.c.}$$

$$O_3 = \frac{1}{2}\text{Tr}(HH^\dagger)\text{Tr}(H) + \text{h.c.}$$

$$O_4 = 1/2\partial^2\text{Tr}(H) + \text{h.c.}$$

$$\vec{O} \equiv \{O_1, O_2, O_3\}$$



$$[\vec{O}]_R = Z_O \cdot (\vec{O})_{\text{bare}} + \vec{Z} \cdot (O_4)_{\text{bare}}, \quad [O_4]_R = Z_H^{-1/2} (O_4)_{\text{bare}}$$

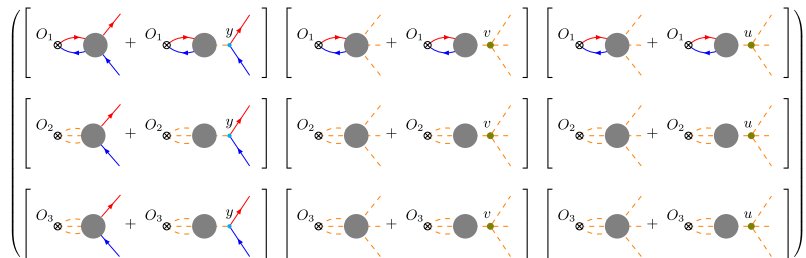
- Учет уравнения движения:

$$(O_4)_{\text{bare}} + \vec{\Lambda}_{\text{bare}} \cdot (\vec{O})_{\text{bare}} = 0, \quad \vec{\Lambda}_{\text{bare}} = (y/2, 2u, 2v)_{\text{bare}}$$

Операторы размерности 3: матрица смешивания

- Смешивание 3 операторов \vec{O} с учетом уравнений движения

$$[\vec{O}]_R = \mathbf{Z}_O \cdot (\vec{O})_{\text{bare}} + \vec{Z} \cdot (O_4)_{\text{bare}}, \quad (O_4)_{\text{bare}} = -\vec{\Lambda}_{\text{bare}} \cdot (\vec{O})_{\text{bare}}$$



$$[\vec{O}]_R = \tilde{\mathbf{Z}}_O (\vec{O})_{\text{bare}}, \quad \tilde{\mathbf{Z}}_O = \mathbf{Z}_O - \vec{Z} \otimes \vec{\Lambda}_{\text{bare}}, \quad \tilde{\gamma}_O = -\partial_t \tilde{\mathbf{Z}}_O \cdot \tilde{\mathbf{Z}}_O^{-1}$$

- Собственные значения

$$\gamma_H^* = \gamma_1 = 0.21053\epsilon + 0.46247\epsilon^2 + 2.47105\epsilon^3 - \text{“потомок” оператора поля}$$

$$\gamma_2 = 2.22982\epsilon + 3.88519\epsilon^2 + 20.5012\epsilon^3$$

$$\gamma_3 = 1.68082\epsilon + 0.98321\epsilon^2 + 5.03949\epsilon^3$$

Результаты части 2

- С помощью диаграммных расчетов в упрощенных “игрушечных” моделях найдены все модельно-независимые коэффициенты в “шаблонных” выражениях для β_{AB} (4 петли) и β_{aij} (3 петли) в произвольной перенормируемой квантово-полевой модели
 - Реализовано в новой версии RGBeta v.1.1.0
 - Подтверждено независимо в последующей работе [Davies,Herren,Thomsen'22]
- Анализ сценария асимптотической безопасности в модели Литима-Саннино
 - подтверждение четырехпетлевого результата в пределе Венециано [Litim...23]
 - Обобщение на случай конечного N_c , конформное окно в порядке 443
 - Корректная трактовка операторов размерности 3

Часть 3: Ренормгрупповые расчеты в скалярных теориях

- A. V. Bednyakov, “On three-loop RGE for the Higgs sector of 2HDM”, *JHEP*, т. 11, с. 154, 2018.
- A. Bednyakov и A. Pikelner, “Six-loop beta functions in general scalar theory”, *JHEP*, т. 04, с. 233, 2021.
- A. Bednyakov, J. Henriksson и S. R. Kousvos, “Anomalous dimensions in hypercubic theories”, *JHEP*, т. 11, с. 051, 2023.
- A. V. Bednyakov, “On the scalar sector of 2HDM: ring of basis invariants, syzygies, and six-loop renormalization-group equations”, *JHEP*, т. 06, с. 081, 2025.

Скалярный сектор 2HDM

- Двухдублетное расширение СМ (2HDM) [Lee'73] (см., также [Branco...'12,Ivanov'17])
- Предсказывает **три дополнительных скаляра** (H_0, A_0, H^\pm) в спектре частиц
- Дополнительные источники \mathcal{CP} и FCNC
- Трехпетлевые β для калибровочных и юкавских констант [Herren...'17]
- В работе [AB'18] – трехпетлевые РГ для λ_i и m_{ij}^2 , входящие

$$V_H = m_{11}^2 \Phi_1^\dagger \Phi_1 + m_{22}^2 \Phi_2^\dagger \Phi_2 - \left(m_{12}^2 \Phi_1^\dagger \Phi_2 + \text{h.c.} \right), \quad \Phi_{1,2} \text{ дублеты хиггсов}$$
$$+ \frac{1}{2} \lambda_1 \left(\Phi_1^\dagger \Phi_1 \right)^2 + \frac{1}{2} \lambda_2 \left(\Phi_2^\dagger \Phi_2 \right)^2 + \lambda_3 \left(\Phi_1^\dagger \Phi_1 \right) \left(\Phi_2^\dagger \Phi_2 \right) + \lambda_4 \left(\Phi_1^\dagger \Phi_2 \right) \left(\Phi_2^\dagger \Phi_1 \right)$$
$$+ \left[\frac{1}{2} \lambda_5 \left(\Phi_1^\dagger \Phi_2 \right)^2 + \lambda_6 \left(\Phi_1^\dagger \Phi_1 \right) \left(\Phi_1^\dagger \Phi_2 \right) + \lambda_7 \left(\Phi_2^\dagger \Phi_2 \right) \left(\Phi_1^\dagger \Phi_2 \right) + \text{h.c.} \right]$$

$m_{11}^2, m_{22}^2, \lambda_{1-4}$ действительные, m_{12}^2 и λ_{5-7} могут быть комплексные

- Свобода **выбора базиса** $\Phi_a \rightarrow U_{ab} \Phi_b, \quad U \in \text{SU}(2)$ приводит к следующему числу **физических параметров** в хиггсовском секторе:
14 (параметров в V_H) - 3 (нарушенных генераторов) = **11**

Скалярный сектор 2HDM: диаграммный расчет

- Удобная параметризация $2 \otimes \bar{2} = 3 \oplus 1$

[Ivanov'05-07]

$$\Phi_a \Phi_b^\dagger = \frac{1}{2} (\Phi^\dagger \Phi) \delta_{ab} + \frac{1}{2} (\Phi^\dagger \sigma^n \Phi) \sigma_{ab}^n = r_0 \delta_{ab} + \vec{r} \cdot \vec{\sigma}_{ab} = r_\mu \sigma_{ab}^\mu$$

$$V_H = M_\mu r^\mu + \Lambda_{\mu\nu} r^\mu r^\nu, \quad M_\mu = (M_0, \vec{M}), \quad \Lambda_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \Lambda_{00} & \vec{\Lambda} \\ \vec{\Lambda} & \Lambda \end{pmatrix}$$

- Λ_{00}, M_0 – синглеты, \vec{M} , и $\vec{\Lambda}$ – триплеты (векторы), а симметричная 3x3 матрица Λ может быть разложена на синглет $\text{tr} \Lambda$ и квинтуплет $\tilde{\Lambda} \equiv \Lambda - \frac{1}{3} \text{tr} \Lambda$
- Всепетлевая структура РГ функций

[AB'18]

$$\beta_{\Lambda_{00}} = a_0$$

$$I_{1,0}^{(1)} = \Lambda_{00},$$

$$I_{1,0}^{(2)} = \text{tr} \Lambda,$$

$$\beta_{\vec{\Lambda}} = b_0 \vec{\Lambda} + b_1 \Lambda \cdot \vec{\Lambda} + b_2 \Lambda^2 \cdot \vec{\Lambda}$$

$$I_{2,0}^{(2)} = \vec{\Lambda} \cdot \vec{\Lambda},$$

$$I_{2,0}^{(2)} = \text{tr} \Lambda^2,$$

$$\beta_\Lambda = c_0 + c_1 \Lambda + c_2 \Lambda^2 + c_3 \vec{\Lambda} \otimes \vec{\Lambda}$$

$$I_{3,0}^{(1)} = \vec{\Lambda} \cdot \Lambda \cdot \vec{\Lambda},$$

$$I_{3,0}^{(2)} = \text{tr} \Lambda^3,$$

$$+ c_4 (\Lambda \cdot \vec{\Lambda} \otimes \vec{\Lambda} + \vec{\Lambda} \otimes \Lambda \cdot \vec{\Lambda}) + c_5 \Lambda \cdot \vec{\Lambda} \otimes \Lambda \cdot \vec{\Lambda},$$

$$I_{4,0}^{(1)} = \vec{\Lambda} \cdot \Lambda^2 \cdot \vec{\Lambda}.$$

- a_0, b_i, c_i – полиномы от репараметризационных инвариантов $I_{\alpha,\beta}^{(i)}$.

- Трехпетлевые β для компонент $\Lambda_{\mu\nu}$ и M_μ , а также λ_i и m_{ij}^2

[AB'18]

Скалярный сектор 2HDM: базисные инварианты и их РГ

- Ряд Гильберта см., например, [Hanany...09, Jenkins...09, Hanany...10]

$$H(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n, \quad c_n \text{ задает число инвариантов степени } n, \text{ причем } c_0 = 1.$$

- Ряд Гильберта (отдельная t_i для каждого неприводимого представления):

$$H\left(\underbrace{t_1}_{\Lambda_{00}}, \underbrace{t_2}_{\text{tr}\Lambda}, \underbrace{t_3}_{\vec{\Lambda}}, \underbrace{t_4}_{\vec{\Lambda}}\right) = \frac{1 + t_3^3 t_4^3}{\underbrace{(1-t_1)}_{I_{1,0}^{(1)}} \underbrace{(1-t_2)}_{I_{1,0}^{(2)}} \underbrace{(1-t_3^2)}_{I_{2,0}^{(1)}} \underbrace{(1-t_4^2)}_{I_{2,0}^{(2)}} \underbrace{(1-t_4^3)}_{I_{3,0}^{(1)}} \underbrace{(1-t_4 t_3^2)}_{I_{3,0}^{(2)}} \underbrace{(1-t_3^2 t_4^2)}_{I_{4,0}^{(1)}}}.$$

- Числитель соответствует **CP-нечетному** инварианту степени 6:
 $I_{6,0}^{(1)} \equiv \vec{\Lambda} \cdot \left[(\vec{\Lambda} \cdot \vec{\Lambda}) \times (\vec{\Lambda}^2 \cdot \vec{\Lambda}) \right]$, алгебраически зависимым и определяется (с точность до знака) **CP-четными** инвариантами.
- Базисные инварианты скалярного сектора 2HDM образуют **градуированное полиномиальное фактор-кольцо**, порождаемое 22 генераторами [Trautner'18], между которыми существует 63 независимых полиномиальных соотношения (**сизигий**). В работе [AB'25] были найдены **6**-петлевые РГУ для произвольного элемента этого кольца.

РГ функции в наиболее общей ϕ^4 в $d = 4$

$$\beta_\lambda, \mathcal{O}(\lambda^3) \xrightarrow{[\text{Brezin}, \dots '73]} \beta_\lambda, \mathcal{O}(\lambda^4) \xrightarrow{[\text{Kazakov}, \dots '79]} \beta_\lambda, \mathcal{O}(\lambda^5) \xrightarrow{[\text{Gorishnii}, \dots '83]} \beta_\lambda, \mathcal{O}(\lambda^6) \xrightarrow{[\text{Kompaniets}, \dots '17]} \beta_\lambda, \mathcal{O}(\lambda^7) \xrightarrow{[\text{Schnetz}'18]}$$

- Выдающийся 6-петлевой расчет в $\mathcal{O}(n)$ модели ϕ^4 [Kompaniets&Panzer'16-17]
 \Rightarrow поддиаграммные ответы для KR' -операции, примененной к 2- и 4-точечным ОЧН
- В работе [AB, Pikelner'21] были найдены константы перенормировки для произвольной скалярной модели с действительными ϕ_a

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_a \partial_\mu \phi_a - \frac{m_{ab}^2}{2} \phi_a \phi_b - \frac{h_{abc}}{3!} \phi_a \phi_b \phi_c - \frac{\lambda_{abcd}}{4!} \phi_a \phi_b \phi_c \phi_d - t_a \phi_a - \Lambda$$

с помощью “простых” **замен** $\mathcal{O}(n)$ -факторов [Kompaniets&Panzer'17] в диаграммах для 2- и 4-х точек на свертки λ_{abcd} в общей теории


- Используя GraphState [Batkovic...'14], результат можно представить в виде

$$\beta_{abcd} = \sum_{l=1}^6 h^l \sum_i^{n_l} T_{i,abcd}^{(l)} C_i^{(l)}, \quad \gamma_{ab} = \sum_{l=1}^6 h^l \sum_i^{n_l} T_{i,ab}^{(l)} D_i^{(l)},$$

$$n_l = \{1, 2, 7, 23, 110, 571\} \quad n_l = \{0, 1, 1, 4, 11, 50\}$$

где n_l (n_l) – число **тензорных структур** $T_{i,abcd}^{(l)}$ ($T_{i,ab}^{(l)}$) на уровне l петель.

РГ функции в наиболее общей ϕ^4 в $d = 4$

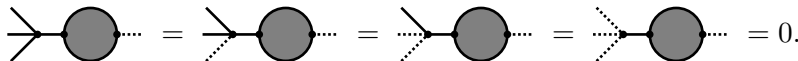
Пример: $T_{7,abcd}^{(3)} \equiv \frac{1}{4!} [\lambda_{a i_1 i_2 i_3} \lambda_{b i_3 i_4 i_6} \lambda_{c i_2 i_4 i_5} \lambda_{d i_1 i_5 i_6} + \text{перест.}] =$  , $\underbrace{e_{123|e_{23|e_3|e_1}}}_{\text{индекс Никеля}}$
 $C_7^{(3)} = 12\zeta_3$

- Метод вспомогательных полей (“dummy-field”): β_{abc} , β_{ab} , β_a , и β_Λ .
- Нераспространяющиеся поля χ_a : $\phi_a \rightarrow \phi_a + \chi_a$ и тождества

$$\lambda_{abcx} \equiv h_{abc}, \quad \lambda_{abxx} \equiv 2m_{ab}^2, \quad \lambda_{axxx} \equiv 3!t_a, \quad \lambda_{xxxx} \equiv 4!\Lambda$$

$$\beta_\Lambda = \frac{1}{4!} \cdot \tilde{\beta}_{xxxx}, \quad \beta_a = \frac{1}{3!} \cdot \tilde{\beta}_{axxx}, \quad \beta_{ab} = \frac{1}{2} \cdot \tilde{\beta}_{abxx}, \quad \beta_{abc} = \tilde{\beta}_{abcx},$$

где в выражениях для $\tilde{\beta}$ удалены вклады типа “головастик”:



- Все выражения выложены в **открытый доступ**

[AB,Pikelner'21]

6-петлевые РГУ в произвольной ϕ^4 : некоторые приложения

Переходя к действительным полям с помощью

- **явного перечисления**, как, например, в 2HDM ($a = 1, \dots, 8$):

$$\phi_a = (\operatorname{Re}\Phi_{1,1}, \dots, \operatorname{Im}\Phi_{2,2}), \quad \lambda_{1111} = 3\lambda_1, \dots, \quad \beta_{\lambda_1} = \frac{1}{3}\beta_{1111}, \dots,$$

- представления **матричных** ϕ в виде

$$\phi = \sum_{a=1}^{N_a} \chi_a T_a,$$

где χ_a действительные поля, а N_a матриц T_a кодируют все степени свободы, присутствующие в исходных ϕ .

- **мультииндексов**, например, для $[O(n)]^3$ $a = \{a_1, a_2, a_3\}$.

впервые были найдены (в шести петлях)

[AB,Pikelner'21]

- аномальная размерность вакуумной энергии в $O(n)$ [$n = 4$ – случай СМ]
- аномальные размерности квадратичных возмущений в $O(n) \times O(m)$ модели
- β для безразмерных констант связи в $U(n) \times U(m)$ и $[O(n)]^3$ моделях
- РГУ в модели с полем Хиггса в присоединенном представлении $SU(n)$
- β для скалярного сектора 2HDM (использовались в [AB'25])

Аномальные размерности в гиперкубической модели

- $O(n)$ модель с кубической анизотропией (6L study [Adzhemyan et al'19]):

$$\lambda_{abcd} = \frac{g_1}{3} (\delta_{ab}\delta_{cd} + \delta_{ac}\delta_{bd} + \delta_{ad}\delta_{bc}) + g_2\delta_{abcd}, \quad \delta_{a_1\dots a_k} = \begin{cases} 1, & a_1 = \dots = a_k \\ 0, & \text{в пр. случае} \end{cases}$$

- (n) нарушается до группы симметрии n -мерного гиперкуба $H_n \in O(n)$.
- предсказываются четыре фиксированные точки. На уровне 1 петли ($d = 4 - \epsilon$):

$$\begin{aligned} (g_1^G, g_2^G) &= (0, 0), & (g_1^I, g_2^I) &= \left(0, \frac{\epsilon}{3}\right), \\ (g_1^H, g_2^H) &= \left(\frac{3\epsilon}{n+8}, 0\right), & (g_1^C, g_2^C) &= \left(\frac{\epsilon}{n}, \frac{n-4}{3n}\epsilon\right) \end{aligned}$$

- 1-петлевые критические размерности составных операторов без производных в различных представлениях H_n [Antipin, Bersini'19].
- **Пример:** Бесследовый симметричный тензор $\phi_i\phi_j - \frac{1}{n}\delta_{ij}\phi^2$ расщепляется на
 - диагональную компоненту $\delta_{ij}(\phi_i^2 - \frac{1}{n}\phi^2)$ (индекс $\phi_{\text{аксиал}}$ [Aharony'76, Aharony et al'22])
 - недиагональную компоненту $\phi_i\phi_j$ ($i \neq j$) (индекс $\phi_{\text{диагон}}$ [Aharony'76, Aharony et al'22])

Аномальные размерности в гиперкубической модели

Проекторы на представления (случай 2 полей):

$$\phi_a \phi_b = \underbrace{P_{abij}^S}_{\nu} \phi_i \phi_j + \underbrace{P_{abij}^X}_{\phi_{\text{аксиал}}} \phi_i \phi_j + \underbrace{P_{abij}^Z}_{\phi_{\text{диагон}}} \phi_i \phi_j$$

$$P_{abij}^S = \frac{1}{n} \left[\begin{array}{c} a \\ \text{---} \\ b \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} i \\ \text{---} \\ j \end{array} \right), \quad P_{ab\alpha\beta}^A P_{\alpha\beta ij}^B = \delta^{AB} P_{abij}^A, \quad \text{Tr}(P^A) = \text{dim}(A)$$

$$P_{abij}^Z = \frac{1}{2} \left[\begin{array}{c} a \text{---} i \\ b \text{---} j \end{array} + \begin{array}{c} a \text{---} i \\ \diagdown \quad \diagup \\ b \quad j \end{array} - 2 \begin{array}{c} a \text{---} i \\ \diagup \quad \diagdown \\ b \quad j \end{array} \right], \quad P_{abij}^X = \begin{array}{c} a \text{---} i \\ \diagdown \quad \diagup \\ b \quad j \end{array} - \frac{1}{n} \left[\begin{array}{c} a \\ \text{---} \\ b \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} i \\ \text{---} \\ j \end{array} \right),$$

Критические экспоненты находятся из общих формул для β_{ab}

$$m_{ab}^2 \rightarrow g_S P_{11ab}^S + g_X P_{11ab}^X + g_Z P_{12ab}^Z$$

$$(\partial_g \beta_g)_{\text{фикс. точка}} = \Delta_O - d, \quad \phi_{\text{аксиал}} = \frac{d - \Delta_X}{d - \Delta_S}, \quad \phi_{\text{диагон}} = \frac{d - \Delta_Z}{d - \Delta_S},$$

Аномальные размерности в гиперкубической модели

Проекторы на представления (случай 3 полей):

$$h_{abc} \rightarrow \left\{ g_{V_1} [P_{V \otimes S}^V]_{122}(abc) + g_{V_2} [P_{V \otimes Z}^V]_{221}(abc) \right\} \text{ смешивание} \\ + g_{XV} [P_{V \otimes X}^{XV}]_{122}(abc) + g_{Z_3} [P_{V \otimes Z}^{Z_3}]_{123}(abc)$$

Проекторы на представления (случай 4 полей):

$$\lambda_{abcd} \ni \left\{ g_{X_1} [P_{X \otimes S}^X]_{1111}(abcd) + g_{X_2} [P_{X \otimes X}^X]_{1111}(abcd) \right\} \text{ смешивание} \\ + \left\{ g_{Z_1} [P_{Z \otimes S}^Z]_{1211}(abcd) + g_{Z_2} [P_{Z \otimes X}^Z]_{1211}(abcd) \right\} \text{ смешивание} \\ + g_B [P_{Z \otimes X}^B]_{1222}(abcd) + g_{XX} [P_{Z \otimes Z}^{XX}]_{1221}(abcd) \\ + g_{XZ} [P_{Z \otimes X}^{XZ}]_{1233}(abcd) + g_{Z_4} [P_{Z \otimes Z}^{Z_4}]_{1234}(abcd)$$

В работе [AB, Henriksson, Kousvos'23] с помощью [AB, Pikelner'21] в рамках ϵ -разложения были найдены **шестипетлевые** критические размерности **всех возможных операторов**, составленных не более чем из **четырёх полей**.

Результаты части 3

- Диаграммный **трехпетлевой** расчет РГ функций в **скалярном секторе 2HDM**
 - Построение ряда Гильберта
 - Исправление неточности в используемых повсеместно двухпетлевых РГУ
 - Всепетлевая параметризация РГ уравнений для $SO(3)$ ковариантов – новая “симметрия” (РГ инвариантное соотношение между параметрами) скалярного сектора G00FY [Ferreira, Grzadkowski, OGREID, OSLAND’24]

$$[M_0 = 0 \leftrightarrow m_{11}^2 + m_{22}^2 = 0], \quad [\vec{\Lambda} = 0 \leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2, \quad \lambda_7 = -\lambda_6]$$

- Расчет **шестипетлевых** РГ функций для **всех возможных** параметров **произвольной** перенормируемой скалярной теории в $d = 4$
 - Обобщение известных результатов в моделях с **матричным параметром порядка**
 - РГУ для образующих фактор-кольца **базисных инвариантов** в 2HDM
 - Спектр аномальных размерностей операторов вида $\phi^{\otimes m}$ для $m = 1..4$ в модели с **гиперкубической** симметрией

Спасибо за внимание!

Основные положения, выдвигаемые на защиту I

- Впервые известный способ нахождения пороговых поправок в КХД обобщен на случай СМ. Найдены лидирующие двухпетлевые пороговые поправки для бегущей массы b -кварка и сильной константы связи α_s с учетом электрослабых взаимодействий. В рамках трехпетлевого РГ анализа изучено влияние указанных эффектов на величину бегущих констант сильного и юкавского взаимодействия на различных масштабах в СМ;
- Впервые были найдены лидирующие электрослабые поправки в четырехпетлевую бета функцию сильной константы связи в СМ. Показано, что соответствующие вклады на несколько порядков больше пятипетлевых КХД поправок, как на электрослабой так и на планковской шкале;
- Впервые проведен калибровочно-независимый трехпетлевой анализ стабильности вакуума СМ, найдены критические значения масс топ кварка и бозона Хиггса, а также их неопределенности ;

Основные положения, выдвигаемые на защиту II

- Впервые выполнен расчет трехпетлевых РГ функций в скалярном секторе произвольного двухдублетного расширения стандартной модели (2HDM). Впервые получены выражения для ряда Гильберта для скалярного сектора 2HDM. Предложен удобный метод расчета бета функций для произвольных базисных инвариантов;
- Впервые получены шестипетлевые РГ уравнения для произвольной четырехмерной перенормируемой скалярной теории;
- Впервые найден самосогласованный набор четырехпетлевых калибровочных, трехпетлевых юкавских и двухпетлевых скалярных бета функций для произвольной перенормируемой квантово-полевой теории в четырехмерии.

Публикации I

- [1] A. V. Bednyakov, “On the electroweak contribution to the matching of the strong coupling constant in the SM”, *Phys. Lett. B*, т. 741, с. 262–266, 2015.
- [2] A. V. Bednyakov, B. A. Kniehl, A. F. Pikelner и O. L. Veretin, “Stability of the Electroweak Vacuum: Gauge Independence and Advanced Precision”, *Phys. Rev. Lett.*, т. 115, № 20, с. 201802, 2015.
- [3] A. V. Bednyakov и A. F. Pikelner, “Four-loop strong coupling beta-function in the Standard Model”, *Phys. Lett. B*, т. 762, с. 151–156, 2016.
- [4] A. V. Bednyakov, B. A. Kniehl, A. F. Pikelner и O. L. Veretin, “On the b -quark running mass in QCD and the SM”, *Nucl. Phys. B*, т. 916, с. 463–483, 2017.
- [5] A. V. Bednyakov, “Three-loop anomalous dimensions of fixed-charge operators in the SM”, *Phys. Lett. B*, т. 852, с. 138 615, 2024.
- [6] A. V. Bednyakov, A. S. Fedoruk и D. I. Kazakov, “Renormalization-group analysis of the SM: Loops, uncertainties, and vacuum stability”, *Phys. Rev. D*, т. 113, № 3, с. 036 018, 2026.

Публикации II

- [7] A. V. Bednyakov, “On three-loop RGE for the Higgs sector of 2HDM”, *JHEP*, т. 11, с. 154, 2018.
- [8] A. Bednyakov и A. Pikelner, “Six-loop beta functions in general scalar theory”, *JHEP*, т. 04, с. 233, 2021.
- [9] A. Bednyakov, J. Henriksson и S. R. Kousvos, “Anomalous dimensions in hypercubic theories”, *JHEP*, т. 11, с. 051, 2023.
- [10] A. V. Bednyakov, “On the scalar sector of 2HDM: ring of basis invariants, syzygies, and six-loop renormalization-group equations”, *JHEP*, т. 06, с. 081, 2025.
- [11] A. Bednyakov и A. Pikelner, “Four-Loop Gauge and Three-Loop Yukawa Beta Functions in a General Renormalizable Theory”, *Phys. Rev. Lett.*, т. 127, № 4, с. 041801, 2021.
- [12] A. Bednyakov и A. Mukhaeva, “Perturbative Asymptotic Safety and Its Phenomenological Applications”, *Symmetry*, т. 15, № 8, с. 1497, 2023.

Публикации III

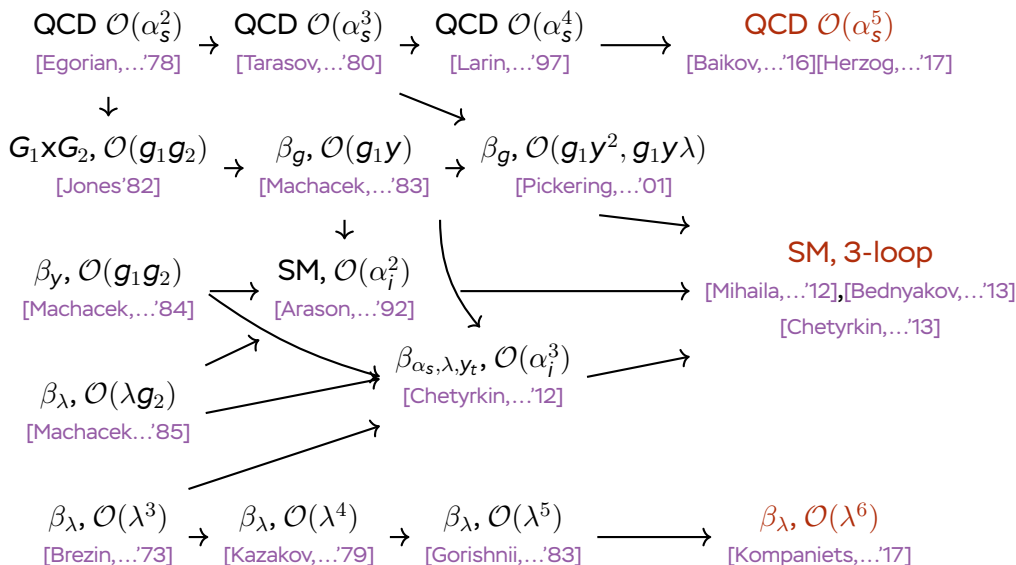
- [13] A. V. Bednyakov и A. I. Mukhaeva, “Asymptotic safety in the Litim-Sannino model at four loops”, *Phys. Rev. D*, т. 109, № 6, с. 065 030, 2024.

В трудах конференций:

- [14] A. V. Bednyakov, “An advanced precision analysis of the SM vacuum stability”, *Phys. Part. Nucl.*, т. 48, № 5, с. 698–703, 2017.
- [15] A. V. Bednyakov и A. F. Pikelner, “On the four-loop strong coupling beta-function in the SM”, англ., V. A. Andrianov, V. A. Matveev, V. A. Rubakov, V. T. Kim, A. A. Andrianov и M. D. Fitkevich, ред., т. 125, 2016, с. 04 008.
- [16] A. V. Bednyakov и A. I. Mukhaeva, “On Asymptotic Safety in the Litim–Sannino Model”, *Phys. Part. Nucl.*, т. 56, № 2, с. 229–234, 2025.

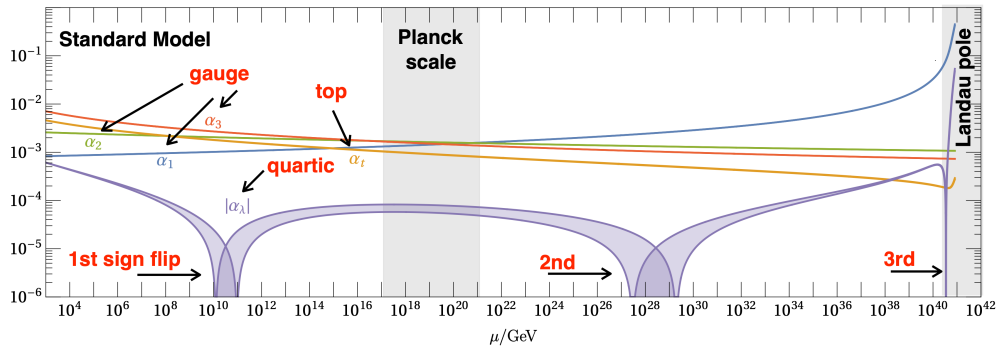
Backup

РГ расчеты: немного истории



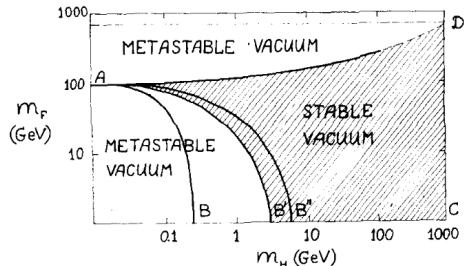
А. Пикельнер

От электрослабой шкалы до планковского масштаба и дальше



[Hiller,Höhne,Litim,SteuDner'23]

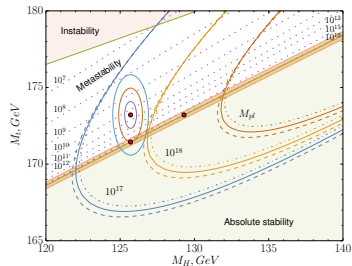
“История” (не)стабильности вакуума



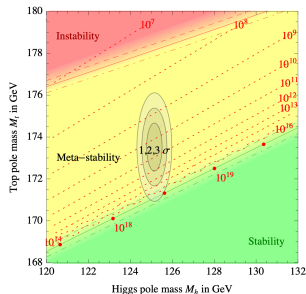
[Linde'80]

[Krive,Linde'76]

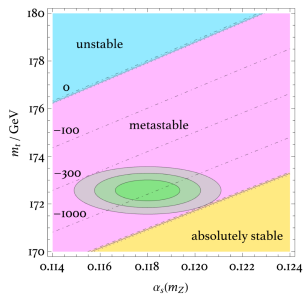
[Krasnikov'78]



[AB,Kniehl,Pikelner,Veretin'15]

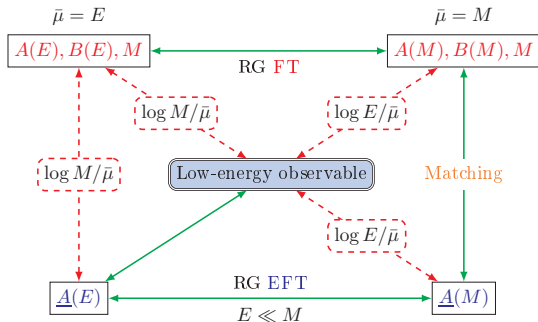


[Buttazzo...'13]



[Baratella...'24]

Пересуммирование и эффективные теории



Известный пример:

- $A(\bar{\mu}) = \alpha_s^{(6)}(\bar{\mu})$,
- $M = M_t$,
- $\underline{A}(\bar{\mu}) = \alpha_s^{(5)}(\bar{\mu})$

Связь 6-ароматной КХД с 5-ароматной без топ кварка.

- Эффективная теория (ЕТ) описывает взаимодействия “легких” полей при энергиях $E \ll M$ и параметризуется бегущими $\underline{A}(\bar{\mu})$.
- Последнюю можно выразить (**matching**) через бегущие параметры “полной” теории (FT) - $A(\bar{\mu}), B(\bar{\mu})$ и массы тяжелых частиц M .
- Большие $\log E/M$ суммируются с помощью решения РГ уравнений в эффективной теории с граничными условиями при $\bar{\mu} = M$.

(Псевдо)наблюдаемые

[PDG2014]

$$\alpha_s^{(5)}(M_Z) = 0.1185(6),$$

$$M_Z = 91.1876(21) \text{ ГэВ},$$

$$M_H = 125.7(4) \text{ ГэВ},$$

$$M_b = 4.78(6) \text{ ГэВ}$$

$$G_F = 1.1663787(6) \cdot 10^{-5} \text{ ГэВ}^{-2},$$

$$M_W = 80.385(15) \text{ ГэВ},$$

$$M_t^{\text{MC}} = 173.21(87) \text{ ГэВ},$$

$$m_b(m_b) = 4.18(3) \text{ ГэВ},$$

[PDG2024]

$$\alpha_{\text{Th}} = 7.2973525693(11) \cdot 10^{-3},$$

$$\alpha_s^{(5)}(M_Z) = 0.1180(9)$$

$$M_H = 125.20(11) \text{ ГэВ},$$

$$M_Z = 91.1880(20) \text{ ГэВ},$$

$$\Delta\alpha_{\text{had}}^{(5)}(M_Z) = 0.02783(6),$$

$$G_F = 1.1663788(6) \cdot 10^{-5} \text{ ГэВ}^{-2}$$

$$M_t^{\text{MC}} = 172.57(29) \text{ ГэВ},$$

$$m_b(m_b) = 4.183(7) \text{ ГэВ}$$

Шесть глобальных симметрий V_H в 2HDM

Higgs-family симметрии:

$$\Phi_a \rightarrow S_{ab} \Phi_b$$

$$S_{SU(2)} = \begin{pmatrix} e^{-i\alpha} \cos \theta & e^{-i\beta} \sin \theta \\ -e^{i\beta} \sin \theta & e^{+i\alpha} \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$S_{U(1)} = \begin{pmatrix} e^{-i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{+i\alpha} \end{pmatrix}$$

$$S_{Z_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

обобщенные CP симметрии

$$\Phi_a \rightarrow X_{ab} \Phi_b^*$$

$$X_{CP3} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$X_{CP2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X_{CP1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

см, например, [Bento,Boto,Silva,Trautner,'21, Ferreira,Grzadkowski, Ogreid,Osland'23]

Шесть глобальных симметрий V_H в 2HDM

Higgs-family симметрии:

$$\Phi_a \rightarrow S_{ab} \Phi_b$$

$$S_{SU(2)} : m_{12}^2 = 0, \lambda_{5,6,7} = 0 \\ m_{11}^2 = m_{22}^2, \lambda_1 = \lambda_2 \\ \lambda_4 = \lambda_1 - \lambda_3$$

$$S_{U(1)} : m_{12}^2 = 0, \lambda_{5,6,7} = 0$$

$$S_{Z_2} : m_{12}^2 = 0, \lambda_{6,7} = 0$$

обобщенные CP симметрии

$$\Phi_a \rightarrow X_{ab} \Phi_b^*$$

$$X_{CP3} : m_{12}^2 = 0, \lambda_{6,7} = 0 \\ m_{11}^2 = m_{22}^2, \lambda_1 = \lambda_2 \\ \lambda_5 = \lambda_1 - \lambda_3 - \lambda_4$$

$$X_{CP2} : m_{12}^2 = 0, \lambda_6 + \lambda_7 = 0 \\ m_{11}^2 = m_{22}^2, \lambda_1 = \lambda_2$$

$$X_{CP1} : m_{12}^2, \lambda_{5,6,7} \text{ - действительные}$$

Ряды Гильберта в 2HDM

- Плетистическая экспонента

$$\text{PE}[z, t; r] = \exp \left[\sum_{i=1}^{\infty} \frac{t^i \chi_r(z^i)}{i} \right]$$

- Характеры [SU(2)] представлений $r = \{3, 5\}$

$$\chi_3(z) = z^2 + 1 + \frac{1}{z^2}, \quad \chi_5(z) = z^4 + z^2 + 1 + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^4}$$

- (Обобщенный ряд Гильберта (мультиградуировка))

$$H(t_1, t_1, t_2) = \int d\mu_{\text{SU}(2)}(z) \cdot \underbrace{\text{PE}[z, t_1, 3]}_{\vec{\Lambda}} \cdot \underbrace{\text{PE}[z, t_2, 3]}_{\vec{M}} \cdot \underbrace{\text{PE}[z, t_3, 5]}_{\vec{\Lambda}}$$
$$\int d\mu_{\text{SU}(2)} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z} (1 - z^2)$$