

# Следующее за ведущим логарифмическое приближение КЭД

Возная У.Е.

ЛТФ ОИЯИ, Государственный университет "Дубна"

Научный руководитель: д.ф.-м.н., проф. РАН А.Б. Арбузов

Дубна  
2024

# Содержание

- 1 Актуальность темы исследования
- 2 Цель и задачи
- 3 Глава 1
- 4 Глава 2
- 5 Глава 3
- 6 Публикации

# Актуальность темы исследования

- Расчет поправок высших порядков к процессам физики высоких энергий необходим для точного описания и предсказания результатов экспериментов
- Расчет поправок высших порядков - технически сложная задача, необходимо развитие методов, позволяющих ее упростить
- Метод структурных функций позволяет избежать прямых многопетлевых вычислений, учитывая только члены, усиленные большим логарифмом

# Актуальность темы исследования

- Исследование процесса  $e^+e^-$  аннигиляции актуально для будущих электрон-позитронных коллайдеров (ILC, CEPC, CLIC, FCC-ee)
- Исследование распада мюона актуально для поиска Новой физики (запрещенных в СМ и редких распадов, нарушения сохранения лептонного аромата). Лептонная универсальность позволяет применить результаты, полученные при исследовании мюона, к тау-лептону.

# Цель и задачи

## Цель

Развитие метода структурных функций в следующем за ведущим логарифмическом приближении (СВЛП), теоретическое предсказание характеристик процессов электрон-позитронной аннигиляции и распада мюона с точностью, достаточной для будущих экспериментов

## Задачи:

- 1 Построить уравнения эволюции и решить их для функций партонных распределений и фрагментации КЭД
- 2 Рассчитать радиационные поправки к сечению процесса электрон-позитронной аннигиляции в виртуальный фотон или  $Z$ -бозон
- 3 Рассчитать радиационные поправки к энергетическому спектру электрона при распаде мюона
- 4 Исследовать эффекты, связанные с бегущей константой связи
- 5 Исследовать влияние различных масштабов факторизации на поправки

# Глава 1. Подход партонных распределений в КЭД

- 1 Введение
- 2 Уравнения эволюции партонных распределений в КЭД
- 3 Решение методом итераций
- 4 Свертки и плюс-прескрипция
- 5 Бегущая константа связи
- 6 Результаты

Основные результаты приведены в работах

*A. B. Arbuzov, U.V., J. Phys. G. (2023) 50, 12, 125004,*

*arXiv: 2212.01124;*

*A. Б. Арбузов, У.В., Письма в ЭЧАЯ (2023) 20, 3, 434—440;*

*U.V., A. B. Arbuzov, Phys. Part. Nucl. Lett. (2023) 20, 6, 1456—1458.*

# История

Подход структурных функций (партонных распределений) для КЭД был разработан на основе подхода структурных функций в КХД.

Уравнения эволюции партонных распределений в КЭД – редукция уравнений ДГЛАП к абелеву случаю.

• В. Л. Грибов, Л. Н. Липатов, В.Г. Горшков и Г. В. Фролов:

- ▶ дважды логарифмические асимптотики КЭД процессов:  
 $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ -рассеяния вперед,  $\mu^-e^-$ -рассеяния назад,  
 $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ -аннигиляции,  $e^-e^+$  и  $e^-\mu^+$ -рассеяния назад
- ▶ дважды логарифмические амплитуды  $e^+e^-$ -аннигиляции в произвольное число фотонов,- асимптотики  $\gamma\gamma$ ,  $e\gamma$  и  $ee$ -рассеяния при высоких энергиях,
- ▶ диаграммы, дающие главный логарифмический вклад,
- ▶ интегральное уравнение для сечения с испусканием произвольного числа фотонов, амплитуда в двойном логарифмическом приближении

# История

- ▶ связь между структурными функциями электрон-позитронной аннигиляции в адроны и глубоко неупругого рассеяния электрона на протоне, связь между структурными функциями для электрон-позитронной аннигиляции и рассеяния.
- На основе этого метода Ю. Л. Докшицером (ЖЭТФ, 1977) и независимо Г. Алтарелли и Дж. Паризи (Nucl. Phys. B., 1977, 126) были выведены уравнения эволюции.
- Этот подход был адаптирован для КЭД В.С. Фадиным и Э.А. Кураевым (Яд. Физ., 1985, 41, 733-742). На основе уравнений ДГЛАП были получены уравнения эволюции структурных функций КЭД и поправки ведущего логарифмического приближения.
- СВЛП: Berends (1988), Арбузов, Мельников (Phys.Rev.D 66 (2002), для распада мюона), Blumlein et al. (глубоко неупругое рассеяние,  $e^+e^-$ -аннигиляция), Frixon et al. (JHEP 03 (2020) 135,) - численные результаты, Y. Ulrich et al. (McMULE)

## Подход структурных функций

- Основан на теории возмущений
- Позволяет рассчитать наиболее численно значимые (логарифмические) поправки
- Разложение по степеням константы взаимодействия и большого логарифма:  $\alpha^k L^k$  – ВЛП (LO),  $\alpha^k L^{k-1}$  – СВЛП (NLO),  $\alpha^k L^{2k}$  – ДЛП

Большой логарифм

$$L = \ln \frac{\mu_F^2}{\mu_R^2}$$

$\mu_F$  - масштаб факторизации,  $\mu_R$  - масштаб перенормировки (в КЭД  $\mu_R = m_e$ )

Масштаб перенормировки обычно выбирается равным массе легкой заряженной частицы, масштаб факторизации – равным некоторому характерному энергетическому масштабу для данного процесса.

Для распада мюона  $\mu_F = m_\mu$ , для  $e^+e^-$ -аннигиляции в  $Z$ -бозон/вирт. фотон  $\mu_F = m_{Z^0}$

# Подход структурных функций

## Функции партонных распределений и фрагментации

Функция  $D_{ij}(x, s)$  описывает плотность вероятности распределения безмассовых партонов типа  $i$  (в КЭД - электрона, позитрона или фотона) в начальной массивной частице типа  $j$ .  $x$  - доля энергии партона по отношению к полной энергии испустившей его частицы.

Функции партонных распределений (ФПР, структурные функции) относятся к переходу из массивной частицы в безмассовую и излучению из начального состояния. Функции фрагментации относятся к излучению из конечного состояния и к переходу из безмассовой частицы в наблюдаемую конечную массивную.

## Функции расщепления

$P_{ij}(x)$  описывает плотность вероятности перехода партона типа  $j$  в партон типа  $i$  с долей энергии  $x$ .

Функции расщепления, партонных распределений и фрагментации не зависят от процесса.

## Безмассовые коэффициенты Вильсона

$\sigma_{ij}(x)$  содержат информацию о конкретном процессе.

## Сечение (на примере процесса $2 \rightarrow 2$ )

$$\begin{aligned}
 d\sigma_{ab \rightarrow cd}^{\text{NLO}} = & \sum_{i,j,k,l} \int_{\bar{z}_1}^1 dz_1 \int_{\bar{z}_2}^1 dz_2 D_{ia}^{\text{str}}(z_1, L) D_{jb}^{\text{str}}(z_2, L) \times \\
 & \times \left( d\sigma_{ij \rightarrow kl}^{\text{Born}}(z_1, z_2) + d\bar{\sigma}_{ij \rightarrow kl}^{(1)}(z_1, z_2) + \mathcal{O}(\alpha^2 L^0) \right) \times \\
 & \times \int_{\bar{y}_1}^1 \frac{dy_1}{Y_1} \int_{\bar{y}_2}^1 \frac{dy_2}{Y_2} D_{ck}^{\text{frg}}\left(\frac{y_1}{Y_1}, L\right) D_{dl}^{\text{frg}}\left(\frac{y_2}{Y_2}, L\right) + \mathcal{O}\left(\frac{\mu_R^2}{\mu_F^2}\right)
 \end{aligned}$$

где  $\bar{z}_i$  и  $\bar{y}_i$  – некоторые минимальные доли энергии, определяемые условиями эксперимента;  $z_i$  – доли энергии налетающих партонов,  $Y_i$  – доли энергии вылетающих частиц,  $d\sigma_{ij \rightarrow kl}^{\text{Born}}(z_1, z_2)$  и  $d\bar{\sigma}_{ij \rightarrow kl}^{(1)}(z_1, z_2)$  – борновское сечение для безмассовых партонов и  $\mathcal{O}(\alpha)$  вклад в него

# Уравнение эволюции партонных распределений в КЭД

В подходе структурных функций КЭД:

$$D_{ba}\left(x, \frac{\mu_R^2}{\mu_F^2}\right) = \delta(1-x)\delta_{ba} + \sum_{i=e,\bar{e},\gamma} \int_{\mu_R^2}^{\mu_F^2} \frac{dt\alpha(t)}{2\pi t} \int_x^1 \frac{dy}{y} D_{ia}\left(y, \frac{\mu_R^2}{t}\right) P_{bi}\left(\frac{x}{y}, t\right)$$

Для решения уравнения эволюции использовалась программа на FORM

Для вычисления сверток использовались пакеты HPL и MT Wolfram Mathematica

## Бегущая константа

$$\alpha(\mu^2) = \frac{\alpha(\mu_R)}{1 + \bar{\Pi}(\mu, \mu_R, \alpha(0))}$$

где

$$\begin{aligned} \bar{\Pi}(\mu, \mu_R, \alpha(0)) &= \frac{\alpha(0)}{\pi} \left( \frac{5}{9} - \frac{L}{3} \right) + \left( \frac{\alpha(0)}{\pi} \right)^2 \left( \frac{55}{48} - \zeta_3 - \frac{L}{4} \right) + \\ &+ \left( \frac{\alpha(0)}{\pi} \right)^3 \left( \frac{-L^2}{24} \right) + \dots \end{aligned}$$

и  $L = \ln(\mu^2/\mu_R^2)$  – большой логарифм. После разложения в ряд:

$$\begin{aligned} \alpha(\mu^2) &= \frac{\alpha(0)}{2\pi} \left\{ 1 + \frac{\alpha(0)}{2\pi} \left( -\frac{10}{9} + \frac{2}{3}L \right) + \left( \frac{\alpha(0)}{2\pi} \right)^2 \left( -\frac{1085}{324} + 4\zeta_3 - \right. \right. \\ &\left. \left. - \frac{13}{27}L + \frac{4}{9}L^2 \right) + \mathcal{O}(\alpha^3(0)) \right\} \end{aligned}$$

**Можно раскладывать по степеням  $\alpha$ , зависящей от масштаба энергии, чтобы учесть вклады более высоких порядков, и включить вклады других фермионов в  $\bar{\Pi}(\mu, \mu_R, \alpha(0))$**

## Бегущая константа

$$\begin{aligned} P_{ee}^{(1)Our} &= \ln x \left( \frac{5}{3} - \frac{13}{3(1-x)} + \frac{11}{3}x + \frac{8}{3}x^2 \right) + \\ &+ \ln x \ln(1-x) \left( 2 - \frac{4}{1-x} + 2x \right) + \ln x^2 \left( -\frac{3}{2} - \frac{3}{2}x \right) - \\ &- \frac{25}{3} + \frac{37}{3}x + \frac{20}{9x} - \frac{56}{9}x^2 \\ P_{ee}^{(1)Berends} &= \ln x \left( \frac{5}{3} - \frac{13}{3(1-x)} + \frac{11}{3}x + \frac{8}{3}x^2 \right) + \\ &+ \ln x \ln(1-x) \left( 2 - \frac{4}{1-x} + 2x \right) + \ln x^2 \left( -\frac{3}{2} - \frac{3}{2}x \right) - \\ &- \frac{65}{9} - \frac{20}{9(1-x)} + \frac{121}{9}x + \frac{20}{9x} - \frac{56}{9}x^2 = P_{ee}^{(1)Our} - \frac{10}{9}P_{ee}^{(0)} \end{aligned}$$

# Свертки и регуляризация

$$(f \otimes g)(x) \equiv \int_0^1 dz \int_0^1 dy f(z)g(y)\delta(x - yz) = \int_x^1 \frac{dz}{z} f(z)g\left(\frac{x}{z}\right)$$

$$f(x) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \left( f_{\Theta}(x)\Theta(1 - x - \Delta) + f_{\Delta}\delta(1 - x) \right)$$

$$\int_z^1 dx [f(x)]_+ g(x) = \int_0^1 dx f(x) \left[ g(x)\Theta(x - z) - g(1) \right]$$

$$(f \otimes g)_{\Theta}(z) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \left\{ \int_{z/(1-\Delta)}^{1-\Delta} \frac{dx}{x} f_{\Theta}(x)g_{\Theta}\left(\frac{z}{x}\right) + f_{\Delta}g_{\Theta}(z) + f_{\Theta}(z)g_{\Delta} \right\}$$

$$f_{\Delta} = - \int_0^{1-\Delta} f_{\Theta}(z) dz$$

$$(f \otimes g)_{\Delta} = f_{\Delta}g_{\Delta} - \int_{1-\Delta}^1 dy f(y) \int_{1-\Delta}^{\frac{1-\Delta}{y}} dx g(x)$$

# Решение методом итераций

Начальные условия:

$$D_{ee}^{(0)}(x, \mu^2) = \delta(1-x) + \frac{\alpha}{2\pi} d_{ee}^{(1)}(x), \quad D_{\gamma e}^{(0)}(x, \mu^2) = \frac{\alpha}{2\pi} d_{\gamma e}^{(1)}(x)$$

$$D_{e\bar{e}}^{(0)}(x, \mu^2) = \frac{\alpha}{2\pi} d_{e\bar{e}}^{(1)}(x) = 0$$

$$d_{ee}^{(1)}(x) = \left[ \frac{1+x^2}{1-x} \left( \ln \frac{\mu_0^2}{m_e^2} - 1 - 2 \ln(1-x) \right) \right]_+ = \left[ \frac{1+x^2}{1-x} (-1 - 2 \ln(1-x)) \right]_+$$

$$d_{\gamma e}^{(1)}(x) = -\frac{1+(1-x)^2}{x} (2 \ln x + 1), \quad d_{e\gamma}^{(1)}(x) = 0$$

$$D_{ba}(x, \mu^2, \mu_0^2) = \delta(1-x)\delta_{ba} + \sum_{i=e, \bar{e}, \gamma} \int_{\mu_0^2}^{\mu^2} \frac{dt \alpha(t)}{2\pi t} \int_x^1 \frac{dy}{y} D_{ia}(y, t, \mu_0) P_{bi} \left( \frac{x}{y} \right)$$

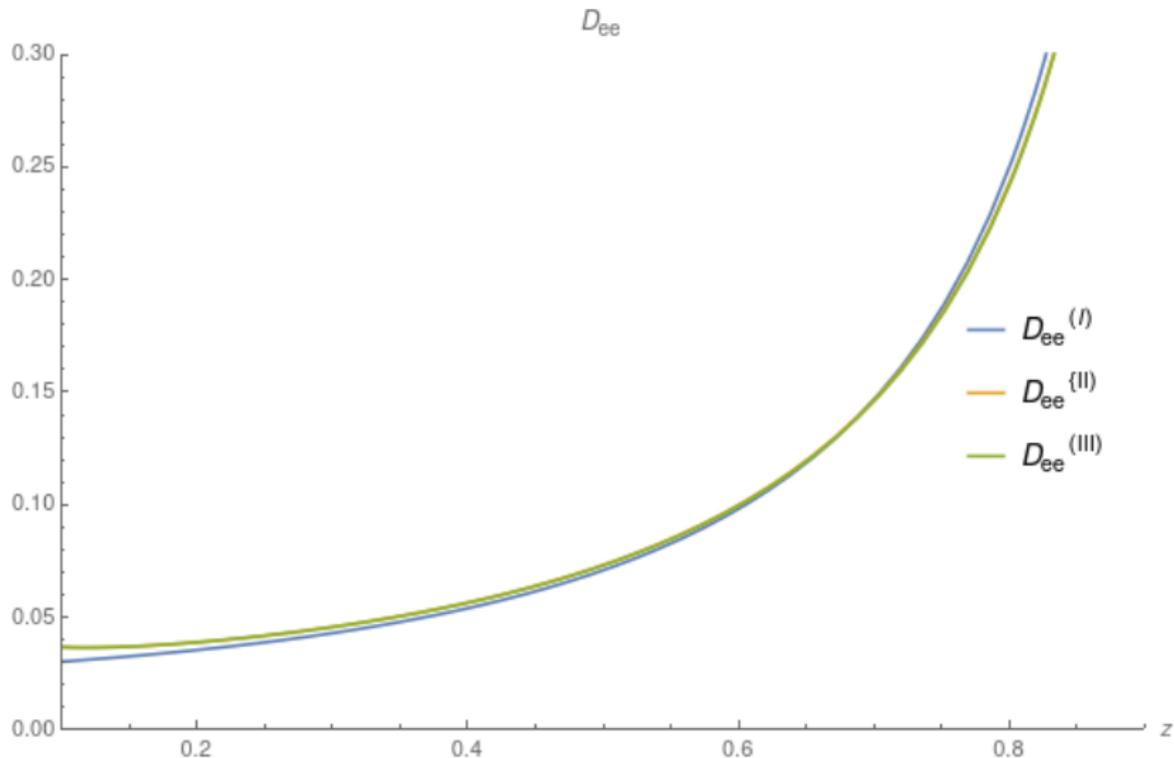
$$D_{ba}^{(k)} = D_{ba}^{(0)} + \frac{\alpha}{2\pi} \left( P_{be} \otimes D_{ea}^{(k-1)} + P_{b\gamma} \otimes D_{\gamma a}^{(k-1)} + P_{b\bar{e}} \otimes D_{\bar{e}a}^{(k-1)} \right)$$

# Результаты

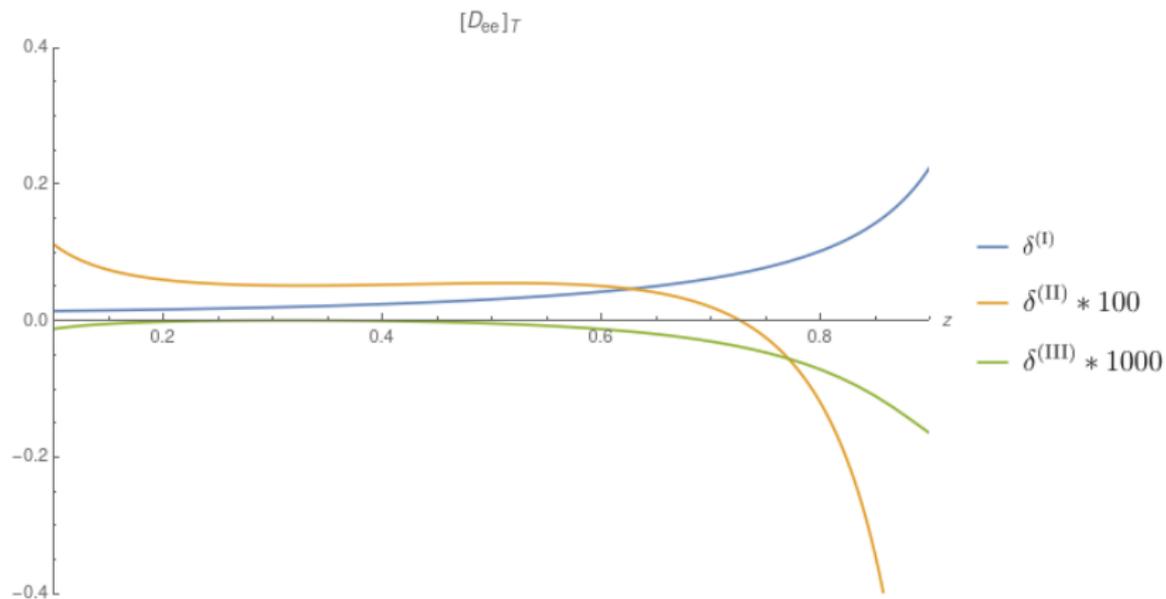
$$\begin{aligned}
 [D_{ee}^{(III)}]_T &= \delta(1-x) + \frac{\alpha}{2\pi} d_{ee}^{(1)}(x) + \frac{\alpha}{2\pi} L P_{ee}^{(0)} + \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2 L \left( d_{\gamma e}^{(1)}(x) \otimes P_{e\gamma}^{(0)} + P_{ee}^{(1)} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{10}{9} P_{ee}^{(0)} + P_{ee}^{(0)} \otimes d_{ee}^{(1)}(x) \right) + \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2 L^2 \left( \frac{1}{2} P_{\gamma e}^{(0)} \otimes P_{e\gamma}^{(0)} + \frac{1}{3} P_{ee}^{(0)} + \frac{1}{2} P_{ee}^{(0)} \otimes P_{ee}^{(0)} \right) \\
 &\quad + \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^3 L^2 \left( \frac{1}{2} P_{\gamma e}^{(1)T} \otimes P_{e\gamma}^{(0)} + \frac{1}{2} P_{ee}^{(0)} \otimes P_{ee}^{(1)T} + \frac{1}{3} d_{\gamma e}^{(1)} \otimes P_{e\gamma}^{(0)} + \frac{1}{2} d_{\gamma e}^{(1)} \otimes P_{\gamma\gamma}^{(0)} \otimes P_{e\gamma}^{(0)} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} P_{\gamma e}^{(0)} \otimes P_{e\gamma}^{(1)T} - \frac{10}{9} P_{\gamma e}^{(0)} \otimes P_{e\gamma}^{(0)} + \frac{2}{3} P_{ee}^{(1)T} + \frac{1}{2} d_{ee}^{(1)} \otimes P_{\gamma e}^{(0)} \otimes P_{e\gamma}^{(0)} - \frac{13}{54} P_{ee}^{(0)} + \right. \\
 &\quad \left. \frac{1}{2} P_{ee}^{(0)} \otimes d_{\gamma e}^{(1)} \otimes P_{e\gamma}^{(0)} + P_{ee}^{(0)} \otimes P_{ee}^{(1)T} + \frac{1}{3} P_{ee}^{(0)} \otimes d_{ee}^{(1)} - \frac{10}{9} P_{ee}^{(0)} \otimes P_{ee}^{(0)} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} P_{ee}^{(0)} \otimes P_{ee}^{(0)} \otimes d_{ee}^{(1)} \right) + \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^3 L^3 \left( \frac{4}{27} P_{ee}^{(0)} + \frac{1}{6} P_{\gamma e}^{(0)} \otimes P_{ee}^{(0)} \otimes P_{e\gamma}^{(0)} \right) + \frac{2}{9} P_{\gamma e}^{(0)} \otimes P_{e\gamma}^{(0)} \\
 &\quad + \frac{1}{3} P_{ee}^{(0)} \otimes P_{\gamma e}^{(0)} \otimes P_{e\gamma}^{(0)} + \frac{1}{3} P_{ee}^{(0)} \otimes P_{ee}^{(0)} + \frac{1}{6} P_{ee}^{(0)} \otimes P_{ee}^{(0)} \otimes P_{ee}^{(0)} \Big)
 \end{aligned}$$

Исправлена ошибка в порядке  $\mathcal{O}(\alpha^3 L^3)$  ( *A.B. Arbuzov, U.V., J.Phys.G 50 (2023) 12, 125004* )

# Сходимость



# Сходимость



# Сходимость

$$D_{ee}^{(I)}(x, \mu) = \delta(1-x) + \frac{\alpha}{2\pi} d_{ee}^{(1)} + \frac{\alpha}{2\pi} L P_{ee}^{(0)}$$

$$D_{ee}^{(II)}(x, \mu) = \delta(1-x) + \frac{\alpha}{2\pi} d_{ee}^{(1)} + \frac{\alpha}{2\pi} L P_{ee}^{(0)} +$$

$$+ \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2 L \left( d_{\gamma e}^{(1)} \otimes P_{e\gamma}^{(0)} + P_{ee}^{(1)} - \frac{10}{9} P_{ee}^{(0)} + P_{ee}^{(0)} \otimes d_{ee}^{(1)} \right) +$$

$$+ \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2 L^2 \left( \frac{1}{2} P_{\bar{e}\bar{e}}^{(0)} \otimes P_{e\bar{e}}^{(0)} + \frac{1}{2} P_{\gamma e}^{(0)} \otimes P_{e\gamma}^{(0)} + \frac{1}{3} P_{ee}^{(0)} + \frac{1}{2} P_{ee}^{(0)} \otimes P_{ee}^{(0)} \right)$$

# Результаты

- Исправлена ошибка в синглетной части функции  $D_{ee}$  в порядке  $\mathcal{O}(\alpha^3 L^3)$
- Исследованы
- Учтены вклады переходов электрона или фотона в позитрон и наоборот.
- Исследованы эффекты, связанные с бегущей константой связи
- Получены аналитические выражения для функций  $D_{ee}$   $\mathcal{O}(\alpha^3 L^2)$ ,  $\mathcal{O}(\alpha^4 L^3)$ ,  $\mathcal{O}(\alpha^5 L^5)$

## Глава 2. $e^+e^-$ -аннигиляция

- $e^+e^-$ -аннигиляция
- Сечение
- Факторизация в следующем за ведущим порядке
- Результаты

Рассматривается процесс

$$e^+e^- \rightarrow Z/\gamma^*$$

Рассчитаны поправки к излучению из начального состояния порядков  $\mathcal{O}(\alpha^3 L^2)$ ,  $\mathcal{O}(\alpha^4 L^4)$ ,  $\mathcal{O}(\alpha^5 L^5)$ ,  $\mathcal{O}(\alpha^4 L^3)$ .

Основные результаты приведены в работе *A.B. Arbuzov, U.V. // Phys. Rev. D (2024) 109, 11, 113002, arXiv: 2405.03443 [hep-ph]*

# $e^+e^-$ -аннигиляция

Рассматривается процесс

$$e^+e^- \rightarrow Z/\gamma^*$$

Расчет поправок высших порядков к процессу  $e^+e^-$ -аннигиляции необходим для теоретического предсказания результатов экспериментов на имеющихся и будущих электрон-позитронных коллайдерах.

Поправки были рассчитаны в работе *Ablinger et al., Nucl. Phys. B, 955, 115045, 2020*

Сечение:

$$\sigma_{\bar{e}e}^{\text{NLO}}(s') = \sum_{i,j=e,\bar{e},\gamma} \int_{\bar{z}_1}^1 \int_{z_2}^1 dz_1 dz_2 D_{ie}^{\text{str}} \left( z_1, \frac{\mu_R^2}{\mu_F^2} \right) D_{j\bar{e}}^{\text{str}} \left( z_2, \frac{\mu_R^2}{\mu_F^2} \right) \times \\ \times \left( \sigma_{ij}^{(0)}(sz_1z_2) + \bar{\sigma}_{ij}^{(1)}(sz_1z_2) + \mathcal{O}(\alpha^2 L^0) \right) \delta(s' - sz) + \mathcal{O} \left( \frac{\mu_R^2}{\mu_F^2} \right)$$

$$D_{\bar{e}e} = D_{ee}, \quad D_{\gamma\bar{e}} = D_{\gamma e}$$

$$\frac{d\sigma_{\bar{e}e}}{ds'} = \sigma^{(0)} \left[ D_{\bar{e}e} \otimes D_{ee} \otimes \sigma_{\bar{e}e} + D_{\gamma e} \otimes D_{ee} \otimes \sigma_{e\gamma} + D_{ee} \otimes D_{e\bar{e}} \otimes \sigma_{ee} + \right. \\ \left. + D_{\gamma e} \otimes D_{\bar{e}e} \otimes \sigma_{\bar{e}\gamma} + D_{\gamma e} \otimes D_{\gamma\bar{e}} \otimes \sigma_{\gamma\gamma} + D_{\gamma e} \otimes D_{e\bar{e}} \otimes \sigma_{e\gamma} + D_{\bar{e}e} \otimes D_{\bar{e}e} \otimes \sigma_{\bar{e}\bar{e}} + \right. \\ \left. + D_{\bar{e}e} \otimes D_{\gamma\bar{e}} \otimes \sigma_{\bar{e}\gamma} + D_{\bar{e}e} \otimes D_{e\bar{e}} \otimes \sigma_{\bar{e}e} \right]$$

# Вклады различных порядков в сечение

$$d\sigma_{ab \rightarrow cd}^{\text{NLO}} = d\sigma_{ab \rightarrow cd}^{(0)} \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{\alpha}{2\pi} \right)^k \sum_{l=k-1}^k c_{kl} L^l + \mathcal{O}(\alpha^k L^{k-2}) \right\}$$

Таблица: Вклады различных порядков

i \ j	$\bar{e}$	$\gamma$	$e$
$e$	$D_{ee} D_{\bar{e}\bar{e}} \sigma_{e\bar{e}}$ LO (1)	$D_{ee} D_{\gamma\bar{e}} \sigma_{e\gamma}$ NLO ( $\alpha^2 L$ )	$D_{ee} D_{e\bar{e}} \sigma_{ee}$ NNLO ( $\alpha^4 L^2$ )
$\gamma$	$D_{\gamma e} D_{\bar{e}\bar{e}} \sigma_{\gamma\bar{e}}$ NLO ( $\alpha^2 L$ )	$D_{\gamma e} D_{\gamma\bar{e}} \sigma_{\gamma\gamma}$ NNLO ( $\alpha^4 L^2$ )	$D_{\gamma e} D_{e\bar{e}} \sigma_{\gamma e}$ NLO ( $\alpha^4 L^3$ )
$\bar{e}$	$D_{\bar{e}e} D_{\bar{e}\bar{e}} \sigma_{\bar{e}\bar{e}}$ NNLO ( $\alpha^4 L^2$ )	$D_{\bar{e}e} D_{\gamma\bar{e}} \sigma_{\bar{e}\gamma}$ NLO ( $\alpha^4 L^3$ )	$D_{\bar{e}e} D_{e\bar{e}} \sigma_{\bar{e}e}$ LO ( $\alpha^4 L^4$ )

## Учет переходов позитрона

$$\Delta_{C44} = \frac{1}{3} \sigma_{e\bar{e}}^{(0)} P_{e\gamma}^{(0)} \otimes P_{\gamma e}^{(0)} \otimes P_{\gamma\bar{e}}^{(0)} \otimes P_{\bar{e}\gamma}^{(0)}$$

Из уравнений эволюции:

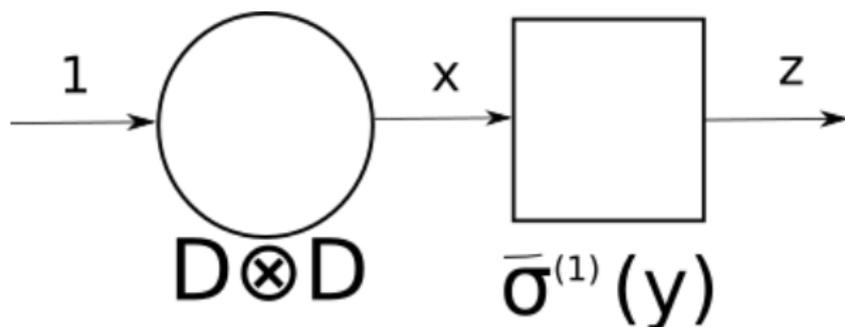
$$\frac{1}{12} \sigma_{e\bar{e}}^{(0)} P_{e\gamma}^{(0)} \otimes P_{\gamma e}^{(0)} \otimes P_{\gamma\bar{e}}^{(0)} \otimes P_{\bar{e}\gamma}^{(0)}$$

Из-за включения  $D_{e\bar{e}} \otimes D_{\bar{e}e}$  в сечение:

$$\frac{1}{4} \sigma_{e\bar{e}}^{(0)} P_{e\gamma}^{(0)} \otimes P_{\gamma e}^{(0)} \otimes P_{\gamma\bar{e}}^{(0)} \otimes P_{\bar{e}\gamma}^{(0)}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{C44}(z) = & \frac{1}{3} \left[ \ln z \left( -21 - \frac{16}{9z} - 21z - \frac{16}{9}z^2 \right) + \ln^2 z (-2 + 2z) + \right. \\ & \left. + \ln^3 z \left( -\frac{2}{3} - \frac{2}{3}z \right) - 26 - \frac{176}{27z} + 26z + \frac{176}{27}z^2 \right] \end{aligned}$$

## Сечение



Поправка к однопетлевому сечению:

$$\delta_{\bar{e}e}^{(1)}(sx) \equiv \frac{\sigma_{\bar{e}e}^{(1)}(sx)}{\sigma_{\bar{e}e}^{(0)}(sx)} = \frac{\alpha}{\pi} \left\{ \left[ \frac{1+y^2}{1-y} \right]_+ \left( \ln \frac{sx}{m_e^2} - 1 \right) + \delta(1-y) \left( 2\zeta_2 - \frac{1}{2} \right) \right\}$$

$$y = \frac{z}{x}$$

## Факторизация в следующем за ведущим порядке

В работах *Berends(1987)*, *Blumlein(2011)* масштаб факторизации был выбран

$$\mu_F^2 = sz.$$

Тогда большой логарифм

$$L = \ln(s/m_e^2) + \ln z$$

В выражении для однопетлевого сечения, использованном в работе *Blumlein(2011)*, переменная  $y = z/x$  была заменена на  $x$ :

$$\begin{aligned} \left[ \bar{\delta}_{\bar{e}e}^{(1)}(sx) \right]^* &= \frac{\alpha}{\pi} \left\{ \left[ \frac{1+y^2}{1-y} \right]_+ \ln y + 2(1+y^2) \left[ \frac{\ln(1-y)}{1-y} \right]_+ + \right. \\ &\left. + \delta(1-y) \left( 2\zeta_2 - \frac{1}{2} \right) \right\} \end{aligned}$$

В подходе работ *Berends(1987)*, *Blumlein(2011)* этот логарифм интегрируется. В наших обозначениях в свертках  $\ln z$  не интегрируется ( $y$  – переменная интегрирования):

$$\begin{aligned} \bar{\delta}_{\bar{e}e}^{(1)}(sx) &= \frac{\alpha}{\pi} \left\{ \left[ \frac{1+y^2}{1-y} \right]_+ (\ln z - \ln y) + 2(1+y^2) \left[ \frac{\ln(1-y)}{1-y} \right]_+ + \right. \\ &\left. + \delta(1-y) \left( 2\zeta_2 - \frac{1}{2} \right) \right\} \end{aligned}$$

# Соотношения матчнга

При  $x = 1$

$$\delta_{\bar{e}e}^{(1)}(s) = \bar{\delta}_{\bar{e}e}^{(1)}(s) + 2\frac{\alpha}{2\pi} \left[ P_{ee}^{(0)}(z)L + d_{ee}^{(1)}(z) \right] + \mathcal{O}\left(\frac{m_e^2}{s}\right)$$

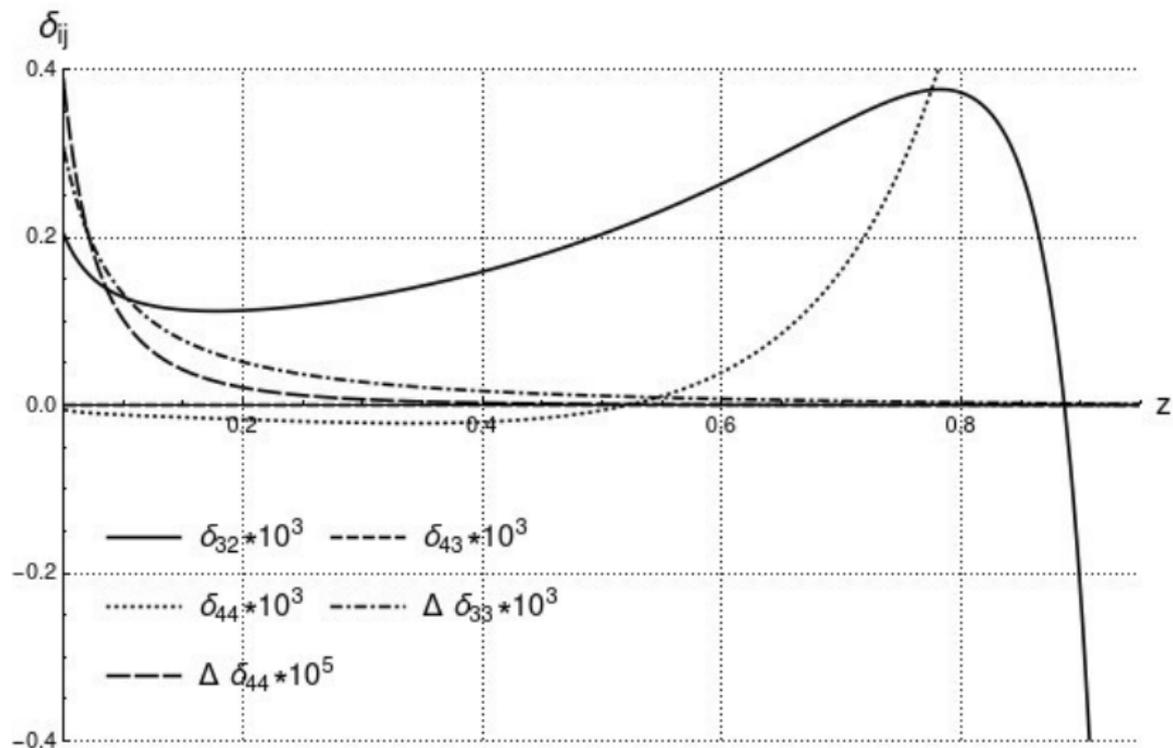
После вычитания массовых сингулярностей в рамках стандартной схемы  $\overline{\text{MS}}$ :

$$\begin{aligned} \bar{\delta}_{\bar{e}e}^{(1)}(s) = & \frac{\alpha}{\pi} \left\{ 2(1+z^2) \left[ \frac{\ln(1-z)}{1-z} \right]_+ + \right. \\ & \left. + \delta(1-z) \left( 2\zeta_2 - \frac{1}{2} \right) \right\} \end{aligned}$$

# Результаты

- Уточнены выражения для коэффициентов  $c_{32}$ ,  $c_{44}$ ,  $c_{43}$ ,  $c_{55}$ , учтены вклады от перехода электрона или фотона в позитрон и наоборот
- Обоснован выбор масштаба факторизации, позволяющий минимизировать неучтенные поправки

# Результаты



# Численные оценки

$$\sigma_{e^+e^-} = \int_{z_{min}}^{1-\Delta} dz (\sigma^{(0)}(z) c_{ij}^{\theta}(z) + c_{ij}^{\Delta} \sigma^{(0)}(1))$$

$$E_{beam} = \frac{M_z - 1}{2}, \quad Z_{min} = 0.5, \quad \Delta = 10^{-7}$$

Таблица: Поправки различных порядков, %

c11	c10	c22	c21	c33	c32	c44	c43	c55
$\gamma$								
		7.28480	-0.82656	-0.95286	0.15745	0.09393	-0.02019	-0.00737
Pairs								
		-0.35204	0.2038	0.13181	-0.08358	0.00234	0.01642	0.00296
Full								
-37.66044	2.2067	6.93272	-0.62276	-0.82106	0.07387	0.09627	-0.00377	-0.00441

## Глава 3. Распад мюона.

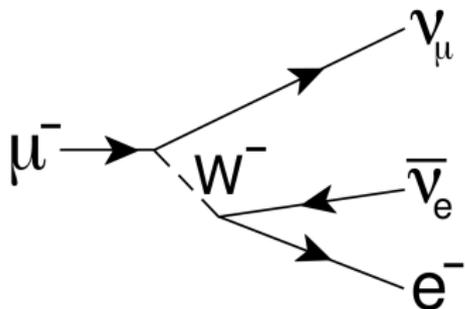
- 1 Распад мюона
- 2 Выбор масштаба факторизации
- 3 Результаты

Основные результаты приведены в работах *A. B. Arbuzov, U.V., Phys. Rev. D. (2024) 109, 5, 053001, arXiv: 2312.10778, U.V., A. B.Arbuzov // Phys. Part. Nucl. Lett. - 2024. - V. 21, № 4. - P. 601–603*

# История

- Поправки к распаду мюона порядка  $\mathcal{O}(\alpha^1)$  известны с 1950-х годов (*Behrends, Finkelstein, Sirlin (1956), Berman, Sirlin (1962), Kinoshita, Sirlin (1959), Berman (1958)* для  $m_e \rightarrow 0$ ), для массивного электрона (*Arbuzov, Phys.Lett.B 524,2002*)
- Поправки  $\mathcal{O}(\alpha^2 L^2)$  (*Arbuzov et al., 2002*)
- В работе *A. Arbuzov, K. Melnikov, Phys.Rev.D 66 (2002) 093003* были получены поправки к спектру неполяризованного мюона до порядка  $\alpha^2 L$ , и в работе *A. Arbuzov, JHEP 03 (2003) 063* и к спектру поляризованного мюона до порядка  $\alpha^3 L^3$  в ВЛП и до  $\alpha^2 L$  СВЛП;
- Эксперимент TWIST измерял параметры Мишеля с точностью до  $10^{-4}$ , что требовало выхода за  $\mathcal{O}(\alpha^1)$ -приближения
- Эксперименты: Mu2E, Mu3e, MEG, MEG II и другие

# Распад мюона



$$\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$$

- Распад мюона - чисто слабый процесс, V-A взаимодействие
- Параметры Мишеля определены для него с большой точностью

Возможная новая физика - запрещенные в СМ распады:

$$\mu^- \rightarrow e^- \gamma \quad \mu^- \rightarrow e^- e^- e^+ \quad \mu^- \rightarrow e^- \gamma \gamma$$

$$\mu^- \rightarrow e^-, \quad \mu^- \rightarrow e^+ \text{ в мюонных атомах, } \text{Mu} \rightarrow \text{Mu}^-$$

**и вклады взаимодействий не V-A типа**

# Энергетический спектр электрона при распаде мюона

$$\frac{d^2\Gamma}{dcdz} = \Gamma_0(F(z) \pm cP_\mu G(z))$$

В подходе структурных функций:

$$\frac{d^2\Gamma}{dcdz} = \sum_{j=e,\gamma} \int_z^1 \frac{dx}{x} \frac{d^2\hat{\Gamma}_j}{dcdx}(x, c, \mu_F, \mu_R) D_{ej} \left( \frac{z}{x}, \mu_F, \mu_R \right)$$

$$\Gamma_0 = \frac{G_F^2 m_\mu^5}{192\pi^3}, \quad z = \frac{2m_\mu E_e}{m_\mu^2 + m_e^2},$$

$$z_0 \leq z \leq 1, \quad z_0 = \frac{2m_\mu m_e}{m_\mu^2 + m_e^2}$$

# Энергетический спектр электрона при распаде мюона

Поправки к излучению из конечного состояния

$$H(z) = \left( h_e^{(0)}(z) + \frac{\alpha}{2\pi} h_e^{(1)}(z) \right) \otimes [D_{ee}]_T + \\ + \left( h_\gamma^{(0)}(z) + \frac{\alpha}{2\pi} h_\gamma^{(1)}(z) \right) \otimes [D_{e\gamma}]_T \equiv h_0(z) + \sum_{ij} \alpha^i L^j H_{ij}(z)$$

$h \equiv f$ ,  $H \equiv F$  для неполяризованной или  $h \equiv g$ ,  $H \equiv G$  для поляризованной части

$h_0$  - борновское приближение

$$f_0(z) = f_e^{(0)}(z) = z^2(3 - 2z), \quad g_0(z) = g_e^{(0)}(z) = z^2(1 - 2z)$$

$$f_e^{(0)}(z) = z^2(3 - 2z), \quad f_\gamma^{(0)}(z) = 0,$$

$$f_e^{(1)}(z) = 2z^2(2z - 3)(4\zeta(2) - 4\text{Li}_2(z) + 2\ln z^2 - 3\ln z \ln(1 - z) - \ln(1 - z)^2) \\ + \left(\frac{5}{3} - 2z - 13z^2 + \frac{34}{3}z^3\right) \ln(1 - z) + \left(\frac{5}{3} + 4z - 2z^2 - 6z^3\right) \ln z \\ + \frac{5}{6} - \frac{23}{3}z - \frac{3}{2}z^2 + \frac{7}{3}z^3,$$

$$f_\gamma^{(1)}(z) = \ln z \left(-\frac{10}{3} + \frac{2}{z} + 4z\right) + \ln(1 - z) \left(-\frac{5}{3} + \frac{1}{z} + 2z - 2z^2 + \frac{2}{3}z^3\right) \\ + \frac{1}{3} - \frac{1}{z} + \frac{35}{12}z - 2z^2 - \frac{1}{4}z^3,$$

$$g_e^{(0)}(z) = z^2(1 - 2z), \quad g_\gamma^{(0)}(z) = 0,$$

$$g_e^{(1)}(z) = 2z^2(1 - 2z) \left(\ln(1 - z)^2 - 4\text{Li}_2(1 - z) - \ln(z) \ln(1 - z) - 2\ln(z)^2\right) \\ + \left(\frac{11}{3} - \frac{4}{3z} - 6z - \frac{17}{3}z^2 + \frac{34}{3}z^3\right) \ln(1 - z) + \left(-\frac{1}{3} - 6z^2 - 6z^3\right) \ln(z) \\ - \frac{7}{6} + 3z + \frac{7}{6}z^2 + 3z^3,$$

$$g_\gamma^{(1)}(z) = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3z} - \frac{2}{3}z^2 + \frac{2}{3}z^3\right) \ln(1 - z) + \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3z}\right) \ln z - \frac{2}{3} + \frac{2}{3z} + \frac{11}{12}z - \frac{2}{3}z^2 - \frac{1}{4}z^3$$

# Результаты

A.B. Arbuzov, U.V., Phys.Rev.D 109 (2024) 5, 053001

$$\begin{aligned} H(z) &= h_e^{(0)}(z) + \frac{\alpha}{2\pi} h_1 + \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2 \left\{ \left[ h_2^{(0,\gamma)} + h_2^{(0,NS)} \right. \right. \\ &+ \left. \left. h_2^{(0,S)} \right] L^2 + \left[ h_2^{(1,\gamma)} + h_2^{(1,NS)} + h_2^{(1,S)} + h_2^{(1,int)} \right] L \right\} \\ &+ \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^3 \left\{ \left[ h_3^{(0,\gamma)} + h_3^{(0,NS)} + h_3^{(0,S)} \right] L^3 + \left[ h_3^{(1,\gamma)} + h_3^{(1,NS)} \right. \right. \\ &+ \left. \left. h_3^{(1,S)} + h_3^{(1,int)} \right] L^2 \right\} + \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^4 \left\{ \left[ h_4^{(0,\gamma)} + h_4^{(0,NS)} + h_4^{(0,S)} \right] L^4 \right\} \\ &\equiv h_0(z) + \sum_{i,j} \alpha^i L^j H_{ij}(z) \end{aligned}$$

Были рассчитаны поправки порядков  $\alpha^3 L^2$ ,  $\alpha^4 L^4$

Уточнены результаты для порядков  $\alpha^2 L$ ,  $\alpha^3 L^3$

Рассчитаны отдельно чисто фотонные поправки  $+\alpha^4 L^3$ , согласие с  
*P. Banerjee et. al., SciPost Phys. 15, 021 (2023)*

# Выбор масштаба факторизации

Старый масштаб факторизации:

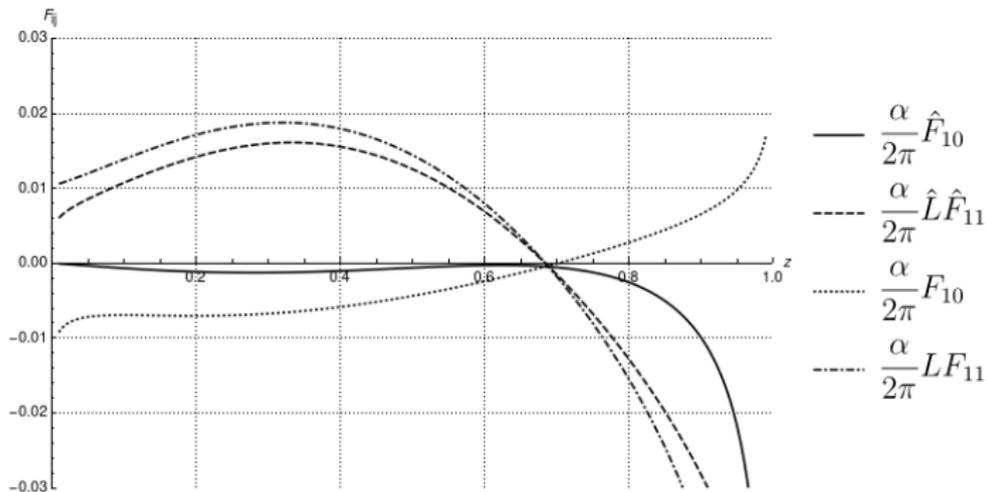
$$\mu_F^2 = m_\mu^2$$

Новый масштаб факторизации:

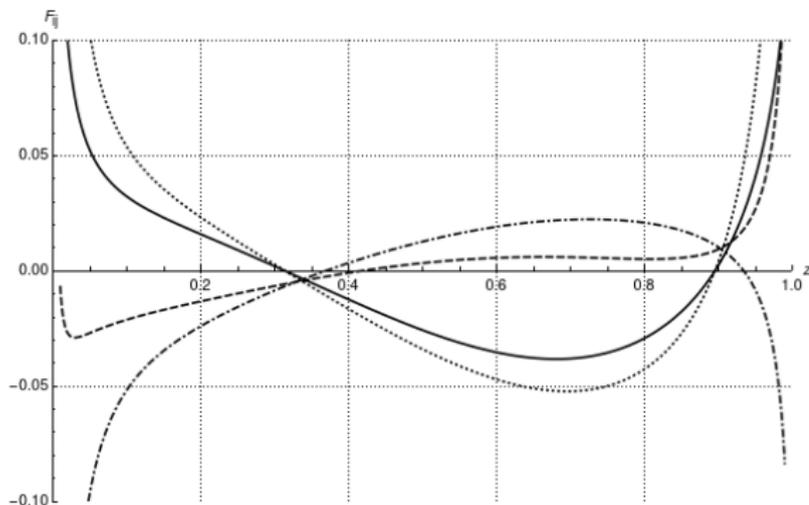
$$\mu_F^2 = m_\mu^2 z(1-z)$$

Новый "большой логарифм":

$$\hat{L} = L + \Delta L, \quad \Delta L = \ln z + \ln(1-z)$$



# Выбор масштаба факторизации



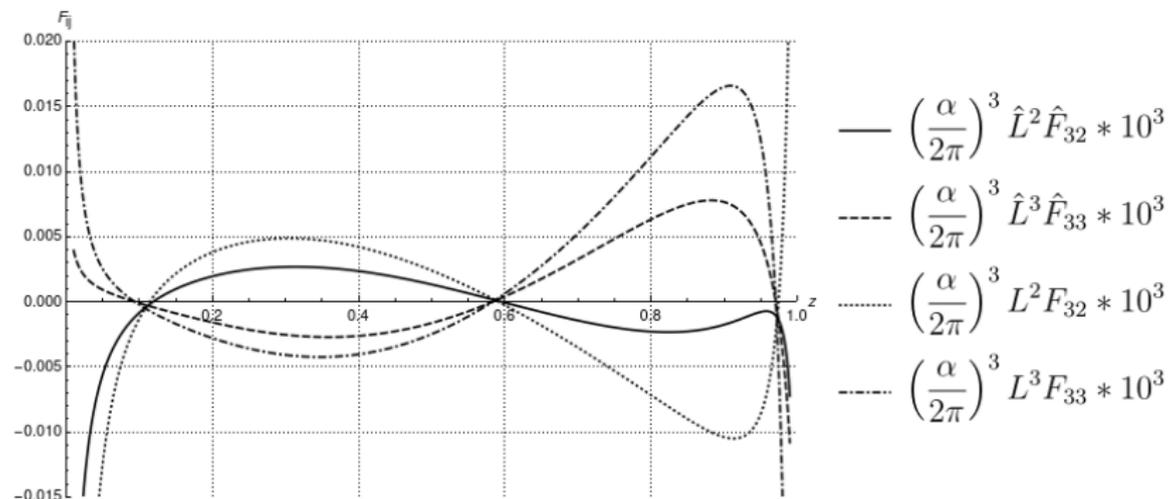
$$\text{—} \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2 \hat{L}^2 \hat{F}_{22} * 10^2$$

$$\text{- - -} \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2 \hat{L} \hat{F}_{21} * 10^2$$

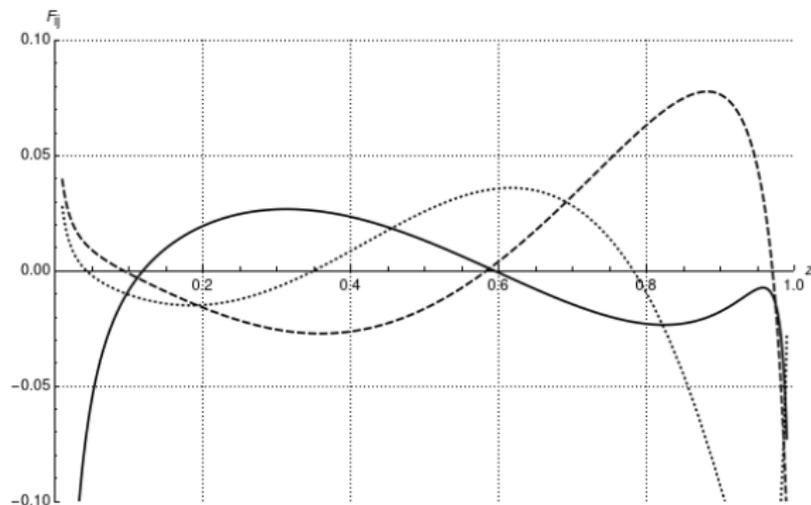
$$\text{...} \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2 L^2 F_{22} * 10^2$$

$$\text{- . - .} \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2 L F_{21} * 10^2$$

# Выбор масштаба факторизации



# Неполяризованная часть

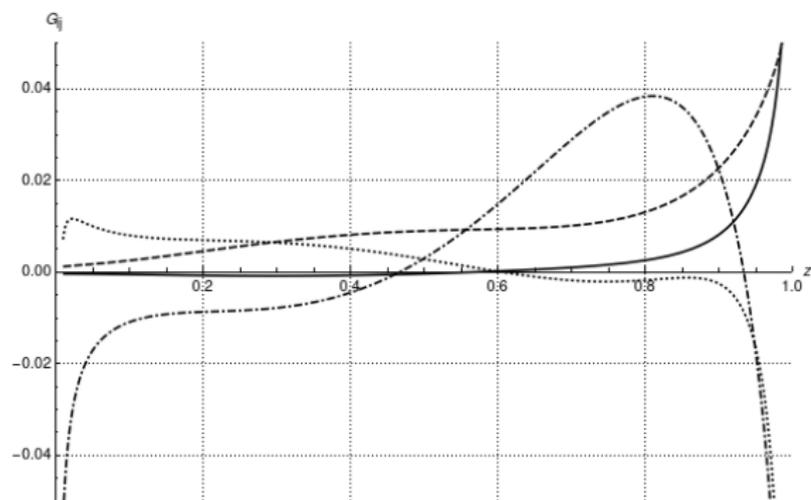


—  $\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^3 \hat{L}^2 \hat{F}_{32} * 10^4$

- - -  $\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^3 \hat{L}^3 \hat{F}_{33} * 10^4$

.....  $\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^3 \hat{L}^2 \hat{F}_{44} * 10^6$

# Поляризованная часть



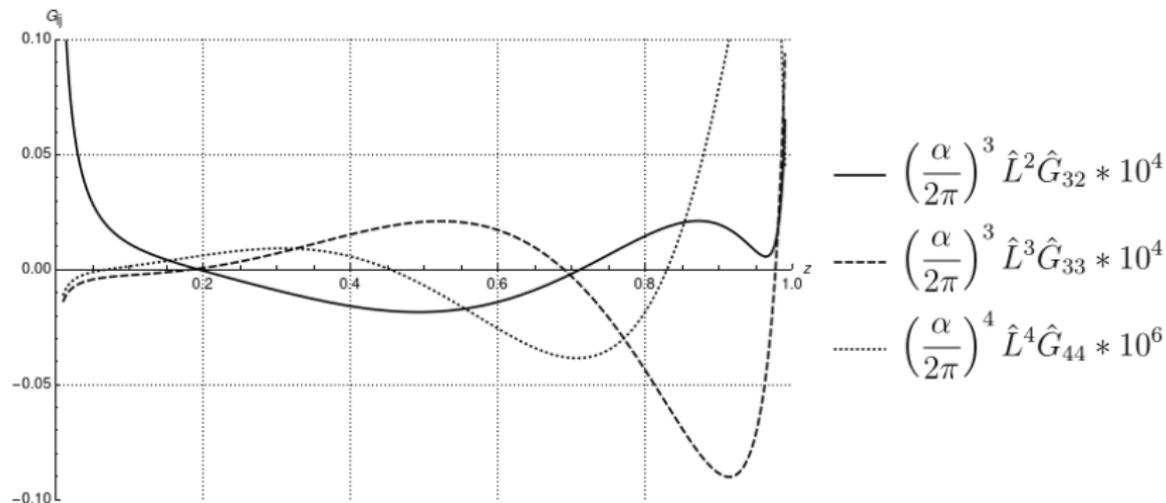
$$\text{—} \quad \frac{\alpha}{2\pi} \hat{G}_{10}$$

$$\text{- - -} \quad \frac{\alpha}{2\pi} \hat{L} \hat{G}_{11}$$

$$\text{.....} \quad \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2 \hat{L} \hat{G}_{21} * 10^2$$

$$\text{- . - . -} \quad \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2 \hat{L}^2 \hat{G}_{22} * 10^2$$

# Поляризованная часть



# Результаты

- Уточнены результаты для порядков  $\alpha^2 L$ ,  $\alpha^3 L^3$
- Рассчитаны поправки порядков  $\alpha^3 L^2$ ,  $\alpha^4 L^4$
- Показана зависимость от масштаба факторизации

## Положения, выносимые на защиту

- Построены и решены методом итераций уравнения эволюции для функций партонных распределений и фрагментации КЭД в СВЛП. Впервые в явном виде получены аналитические выражения для структурных и фрагментационных функций электрона в порядках  $\mathcal{O}(\alpha^3 L^2)$ ,  $(\alpha^4 L^4)$ ,  $(\alpha^4 L^3)$  и  $(\alpha^5 L^5)$ , где  $L = \ln(Q^2/m_e^2)$  и  $Q^2$  являются большим логарифмом и масштабом факторизации, соответственно.
- При решении уравнений эволюции и построении предсказаний для наблюдаемых величин систематически учтены вклады переходов электрона в позитрон и наоборот. Показано, что включение этих вкладов важно для обеспечения точности теоретических предсказаний на уровне  $10^{-5}$ .
- Найдена и исправлена ошибка в более ранних вычислениях ведущих логарифмических вкладов в структурную функцию электрона в порядке  $\mathcal{O}(\alpha^3 L^3)$ .

## Положения, выносимые на защиту

- Метод структурных функций КЭД применен для расчета поправок к процессу  $e^+e^- \rightarrow Z/\gamma^*$ . Исправлены имеющиеся в литературе результаты в порядках  $\mathcal{O}(\alpha^3 L^2)$ ,  $(\alpha^4 L^4)$  и  $(\alpha^5 L^5)$ . Исследована зависимость от выбора масштаба факторизации, и выбрано его значение, позволяющее улучшить сходимость ряда теории возмущений по степеням большого логарифма.
- Впервые рассчитаны радиационные поправки порядков  $\mathcal{O}(\alpha^3 L^2)$  и  $(\alpha^4 L^4)$  к энергетическому спектру электрона в распаде поляризованного мюона. Уточнены выражения для поправок порядков  $\mathcal{O}(\alpha^2 L)$  и  $(\alpha^3 L^3)$ .
- Исследованы эффекты, связанные с нелогарифмическими вкладами в бегущую константу связи. Показана эквивалентность разных схем учета таких слагаемых.

## Научная новизна

- 1 Впервые получены явные выражения для функций партонных распределений и функций фрагментации в СВЛП.
- 2 Впервые рассчитаны радиационные поправки к сечению процесса электрон-позитронной аннигиляции в виртуальный фотон/ $Z$ -бозон в подходе партонных распределений в порядке  $\alpha^3 L^2$ ,  $\alpha^4 L^3$ ;
- 3 Впервые рассчитаны радиационные поправки к энергетическому спектру электрона при распаде мюона в порядке  $\alpha^3 L^2$ ;
- 4 Было выполнено оригинальное исследование факторизации бегущей константы связи.

# Апробация работы

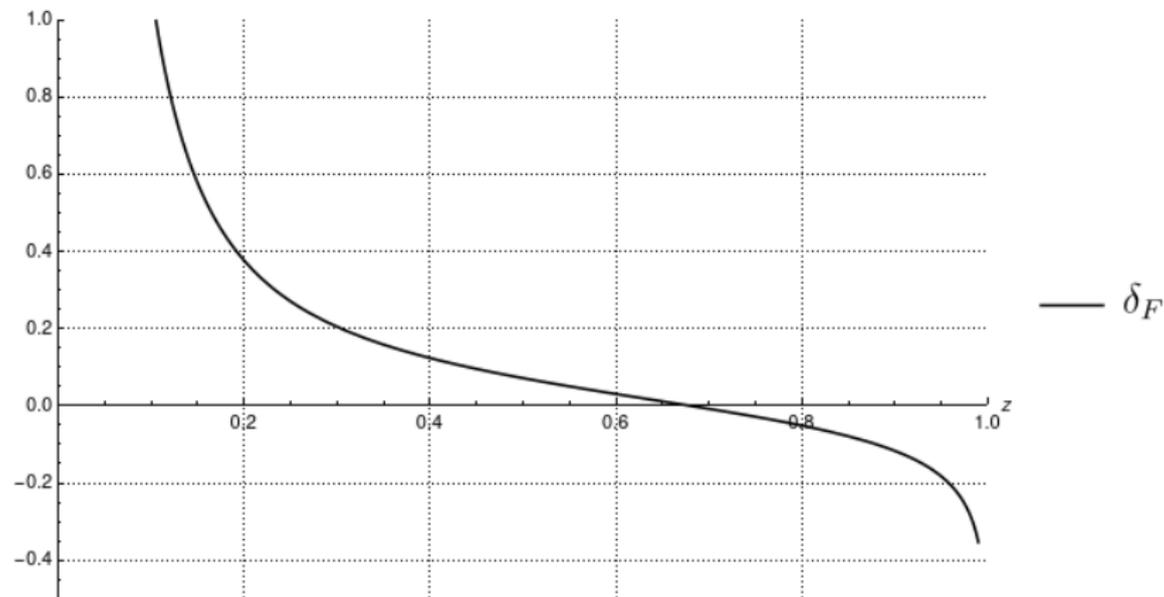
- 1 XXVI Международная конференция молодых ученых и специалистов (ОМУС-2022), 24.10.2022 – 28.10.2022, Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Россия;
- 2 Всероссийская школа-конференция государственного университета “Дубна” “Фундаментальная физика и прикладные технологии”, г.Дубна, Государственный университет “Дубна”, 24.04.2023 – 27.04.2023;
- 3 The 16th International Conference on Interconnections between Particle Physics and Cosmology (PPC 2023), Institute for Basic Science, Тэджон, Республика Корея;
- 4 21-я Международная Ломоносовская конференция по физике элементарных частиц, 24-30 августа 2023 г, Москва, МГУ;
- 5 XXVII Международная конференция молодых ученых и специалистов (ОМУС-2023), 30.10.2023 – 3.11.2023 г, Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Россия;
- 6 Вторая Всероссийская школа-конференция государственного университета “Дубна” “Фундаментальная физика и прикладные технологии”, г.Дубна, Государственный университет “Дубна”, 22.04.2024 – 26.04.2024;
- 7 Научная сессия секции ядерной физики ОФН РАН, 1-5 апреля 2024 г., Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Россия.

- 1 Арбузов А. Б., В. У. Е. Функции партонных распределений электрона [Текст] / В. У. Е. Арбузов А. Б. // Письма в ЭЧАЯ. — 2023. — Т. 20, № 3. — С. 434—440.
- 2 A. B. Arbuzov, U. E. Voznaya // J. Phys. G. — 2023. — V. 50, № 12. — P. 125004. — arXiv: 2212.01124 [hep-ph].
- 3 U. E. Voznaya, A. B. Arbuzov // Phys. Part. Nucl. Lett. — 2023. — V. 20, № 6. — С. 1456—1458.
- 4 A. B. Arbuzov, U. E. Voznaya // Phys. Rev. D. — 2024. — V. 109, № 11. — P. 113002. — arXiv: 2405.03443 [hep-ph]
- 5 A. B. Arbuzov, U. E. Voznaya // Phys. Rev. D. — 2024. — V. 109, № 5. — P. 053001. — arXiv: 2312.10778 [hep-ph].
- 6 U. E. Voznaya, A. B. Arbuzov // Phys. Part. Nucl. Lett. - 2024. - V. 21, № 4. - P. 601–603. - arXiv: [hep-ph]

## Значимость

Развит метод структурных функций и метод факторизации. Поправки высших порядков к электрон-позитронной аннигиляции могут быть использованы для результатов экспериментов на имеющихся и будущих электрон-позитронных коллайдерах. Точность Поправки высших порядков к энергетическому спектру поляризованного мюона могут быть применены для предсказания и описания результатов экспериментов по распаду мюона, в том числе для поисков Новой физики.

# Относительная величина поправки



$$\delta_F = \frac{1}{f_0(z)} \sum_{i,j} \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^i \hat{L}^j \hat{F}_{ij}(z)$$

## Гармонические полилогарифмы

$H(a_1, \dots, a_k; z)$  – гармонические полилогарифмы Для определения гармонических полилогарифмов вводятся функции:

$$f_1(z) = \frac{1}{1-z}, \quad f_0(z) = \frac{1}{z}, \quad f_{-1}(z) = \frac{1}{1+z},$$

Гармонические полилогарифмы можно получить рекурсивно, интегрируя эти функции:

$$H(1; z) = \int_0^z f_1(y) dy = -\ln(1-z), \quad H(0; z) = \ln z,$$

$$H(-1; z) = \int_0^z f_{-1}(y) dy = -\ln(1+z),$$

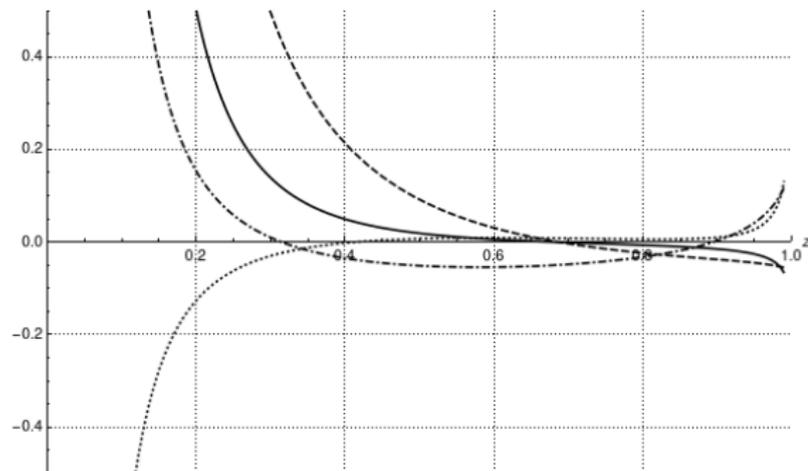
$$H({}^n 0; z) = \frac{1}{n!} \ln^n z,$$

$$H(a, a_1, \dots, a_k; z) = \int_0^z f_a(y) H(a_1, \dots, a_k; y) dy,$$

где

$${}^n 0 = \underbrace{0, \dots, 0}_n$$

# Относительная величина отдельных вкладов



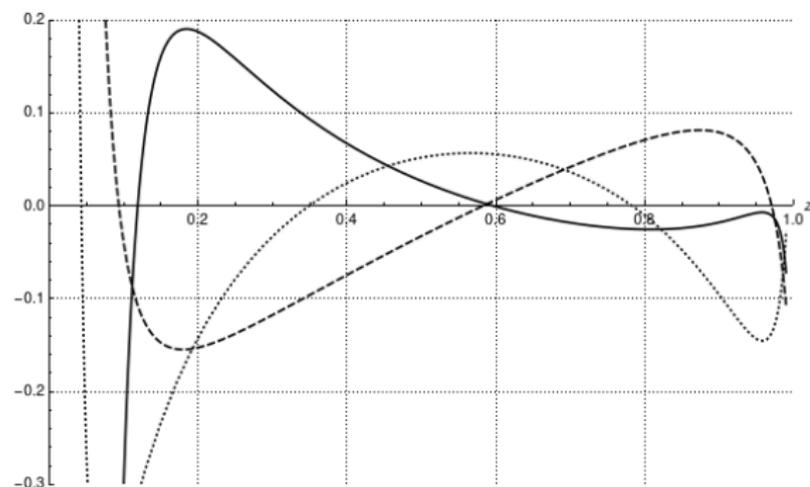
$$\text{—} \quad \frac{\alpha}{2\pi} \frac{\hat{F}_{10}}{f_0}$$

$$\text{- - -} \quad \frac{\alpha}{2\pi} \hat{L} \frac{\hat{F}_{11}}{f_0}$$

$$\text{.....} \quad \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2 \hat{L} \frac{\hat{F}_{21}}{f_0} * 10^2$$

$$\text{- . - .} \quad \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2 \hat{L}^2 \frac{\hat{F}_{22}}{f_0} * 10^2$$

# Относительная величина отдельных вкладов



$$\begin{aligned} & \text{—} \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^3 \hat{L}^2 \frac{\hat{F}_{32}}{f_0} * 10^4 \\ & \text{---} \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^3 \hat{L}^3 \frac{\hat{F}_{33}}{f_0} * 10^4 \\ & \cdots \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^4 \hat{L}^4 \frac{\hat{F}_{44}}{f_0} * 10^6 \end{aligned}$$