

# Квантовая задача трех тел Страсть к точности

В.И. Коробов

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Россия

БЛТФ, 15 ноября 2016

## Эпиграф

Высокоточные измерения всегда привлекали меня как одна из самых красивых сторон физики. Появление все более совершенных инструментов для измерения позволяет заглянуть в неизведанные области.

Precision measurements have always appealed to me as one of the most beautiful aspects of physics. With better measuring tools, one can look where no one has looked before.

*Pasion for Precision*

Nobel Lecture by T.W. Hänsch

## Кулоновская задача трех тел

Стационарное уравнение Шредингера для кулоновской задачи трех тел:

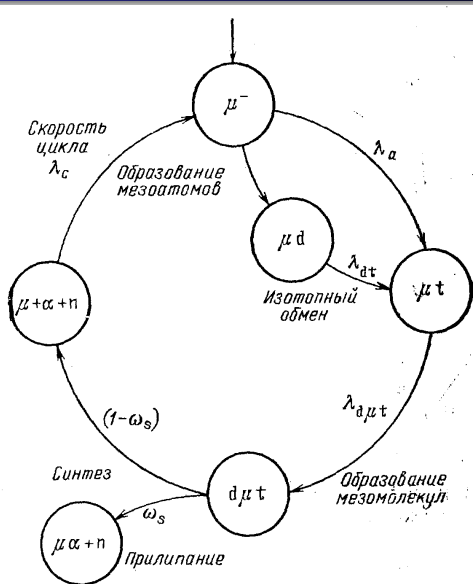
$$H\Psi = E_0\Psi,$$
$$H = \frac{\mathbf{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\mathbf{p}_2^2}{2m_2} + \frac{\mathbf{p}_3^2}{2m_3} + \frac{Z_1Z_2}{r_{12}} + \frac{Z_1Z_3}{r_{13}} + \frac{Z_2Z_3}{r_{23}}.$$

# Первые опыты.



## Мюонный катализ: 1985-1995

# Основной цикл мюонного катализа



# Уравнение Шредингера в сфероидальных координатах

Уравнение Шредингера в сфероидальных координатах:

$$\sum_{m'=\mu(\lambda)}^J \sum_{t' \in \{s, a\}} \left( H_{mm'}^{tt'} - \delta_{mm'} \delta_{tt'} E \right) F_{m'}^{t'} = 0, \quad m = \mu\lambda, \dots, J, \quad t \in \{s, a\}.$$

Операторы  $H_{mm'}^{tt'}$  определяются следующим образом:

$$H_{mm}^{ss} = H_{mm}^{aa} = \frac{1}{2\mu_{12}} \left\{ -\frac{\partial^2}{\partial R^2} - 2\frac{\partial}{\partial R} + \frac{2}{R^2(\xi^2 - \eta^2)} \left[ (\xi^2 - 1)\xi \left( R\frac{\partial^2}{\partial R\partial\xi} + \frac{\partial}{\partial\xi} \right) + (1 - \eta^2)\eta \left( R\frac{\partial^2}{\partial R\partial\eta} + \frac{\partial}{\partial\eta} \right) \right] + \frac{1}{4} (\xi^2 + \eta^2 - 1 + \kappa^2) P_m^2 + \frac{J(J+1) - 2m^2}{R^2} \right\} + \frac{1}{2\mu_3} P_m^2 + V(R, \xi, \eta),$$

$$H_{mm}^{sa} = H_{mm}^{as} = \frac{\kappa}{2\mu_{12}} \left\{ \frac{2}{R^2(\xi^2 - \eta^2)} \left[ (\xi^2 - 1)\eta \left( R\frac{\partial^2}{\partial R\partial\xi} + \frac{\partial}{\partial\xi} \right) + (1 - \eta^2)\xi \left( R\frac{\partial^2}{\partial R\partial\eta} + \frac{\partial}{\partial\eta} \right) \right] + \frac{\xi\eta}{2} P_m^2 \right\},$$

## продолжение

$$H_{m,m\pm 1}^{ss} = H_{m,m\pm 1}^{aa} = \frac{1}{2\mu_{12}R^2} \left[ \frac{\xi\eta}{\rho}(m \pm 1) \pm \mathcal{L}, \right]$$

$$H_{m,m\pm 1}^{sa} = H_{m,m\pm 1}^{as} = \frac{\kappa}{2\mu_{12}R^2} \left[ \frac{m \pm 1}{\rho} \pm \frac{\rho}{\xi^2 - \eta^2} \left( \xi \frac{\partial}{\partial \xi} - \eta \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \right],$$

$$H_{mm'} = 0, \quad \text{при } |m - m'| \geq 2.$$

Здесь

$$P_m^2 = \frac{4}{R^2(\xi^2 - \eta^2)} \left[ \frac{m^2(\xi^2 - \eta^2)}{\rho^2} - \frac{\partial}{\partial \xi}(\xi^2 - 1) \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \eta}(1 - \eta^2) \frac{\partial}{\partial \eta} \right],$$

$$\mathcal{L} = \frac{\rho}{\xi^2 - \eta^2} \left[ \eta \frac{\partial}{\partial \xi} - \xi \frac{\partial}{\partial \eta} \right],$$

$$V(R, \xi, \eta) = \frac{Z_1 Z_2}{R} + 2 \frac{Z_2 Z_3(\xi + \eta) + Z_1 Z_3(\xi - \eta)}{R(\xi^2 - \eta^2)}.$$

## Слабосвязанные состояния мюонных молекул



до 1986 года

Nonrelativistic energy (in eV) of the weakly bound  $dd\mu(11)$  molecular ion.

	year	$N$	$E_{nr}$
Vinitsky <i>et al</i>	1980	adiab	-1.91(5)
Gocheva <i>et al</i>	1984	adiab	-1.956
Frolov, Efros	1985	350	-1.97112
Hara, Ishihara	1986	380	-1.955
Korobov	1986	1286	-1.97465

Nonrelativistic energy (in eV) of the weakly bound  $dt\mu(11)$  molecular ion.

	year	$N$	$E_{nr}$
Vinitsky <i>et al</i>	1980	adiab	-0.64(5)
Gocheva <i>et al</i>	1984	adiab	-0.656
Frolov, Efros	1985	400	-0.60719
Hu	1986	500	-0.628
Korobov	1986	1495	-0.65889

после 1986 года



# конференция 1995 года в Дубне





Первые опыты

NRQED и квантовая задача трех тел  
Фундаментальные физические константы

Мюонный катализ: 1985-1995

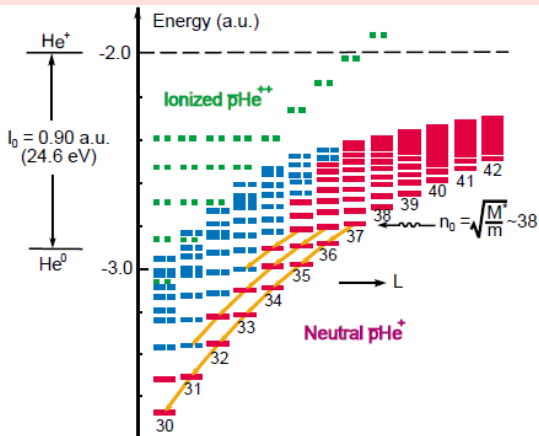
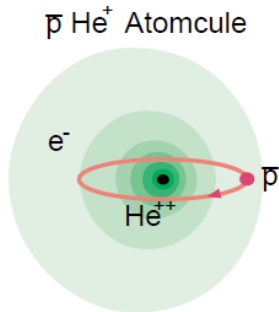
Антипротонный гелий  
Квантовая задача трех тел решена?

# конференция 2007 года в Дубне



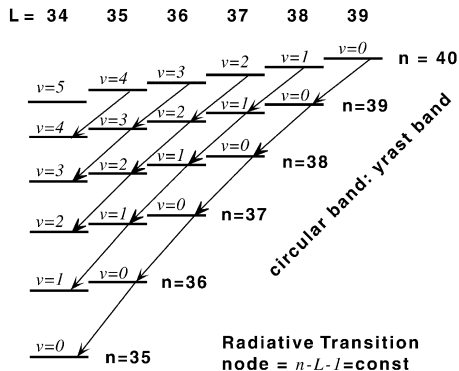
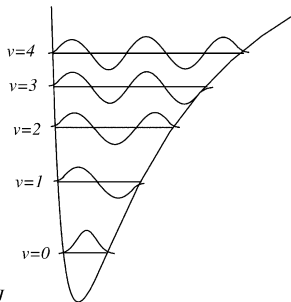
# Антипротонный гелий

# Антипротонный гелий, что это такое?



# Антипротонный гелий, что это такое?

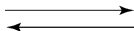
$$V_J(R) = -\frac{Z}{R} + \frac{J(J+1)}{2MR^2} + e_J(R)$$



**MOLECULAR**

$(J, v)$

unharmonic  
rotation ~ vibration



**DUAL**

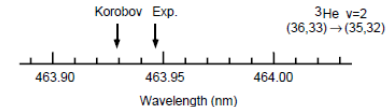
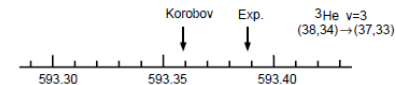
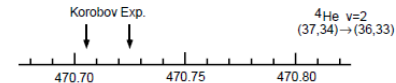
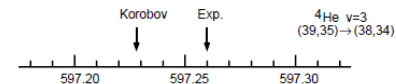
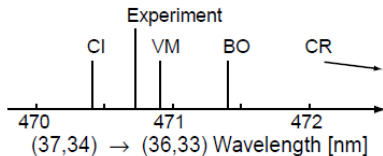
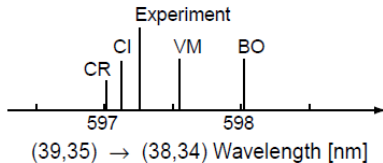
$J = L$

$v = n - L - l$

**ATOMIC**

$(n, L)$

## А что с теорией?



## Резюме "Physics World" — теория есть!

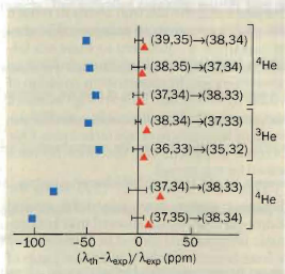
# Exotic adventures en route to the antiworld

From **John Eades** in the PPE Division at CERN, Geneva, Switzerland

The titles of most papers in scientific journals are carefully chosen to convey important news rapidly to busy workers in the field. The same procedure can sometimes have the opposite effect on outsiders, demonstrating just how outside they really are. "Energies and relativistic corrections for the metastable states of antiprotonic helium atoms" by **Vladimir Korobov** of the Joint Institute for Nuclear Research at Dubna in Russia and **Dmitri Bakalov** of the Institute for Nuclear Research and Nuclear Energy in Sofia, Bulgaria, is such a case (*Phys. Rev. Lett.* **79** 3379).

The outsider might not easily guess that the paper represents a theoretical breakthrough in interpreting the properties of antiprotonic helium atoms – helium atoms in which an electron has been replaced by an antiproton – in terms of the properties of the antiproton itself.

## Exotic basics



1 A comparison of observed wavelengths,  $\lambda_{\text{exp}}$ , for transitions in antiprotonic helium with the theoretical wavelengths,  $\lambda_{\text{th}}$ , calculated by Korobov and Bakalov. Non-relativistic calculations (blue squares) differed from the experimental measurements (black marks) by about 50 ppm. The inclusion of relativistic effects reduces the difference to a few ppm (red triangles). The top five transitions are so-called  $\Delta v = 0$  transitions, where  $v = n - l + 1$  and both  $n$  and  $l$  decrease by 1; in the bottom two transitions  $n$  increases by 1 while  $l$  decreases by 1 (i.e.  $\Delta v = 2$ ).

Первые опыты

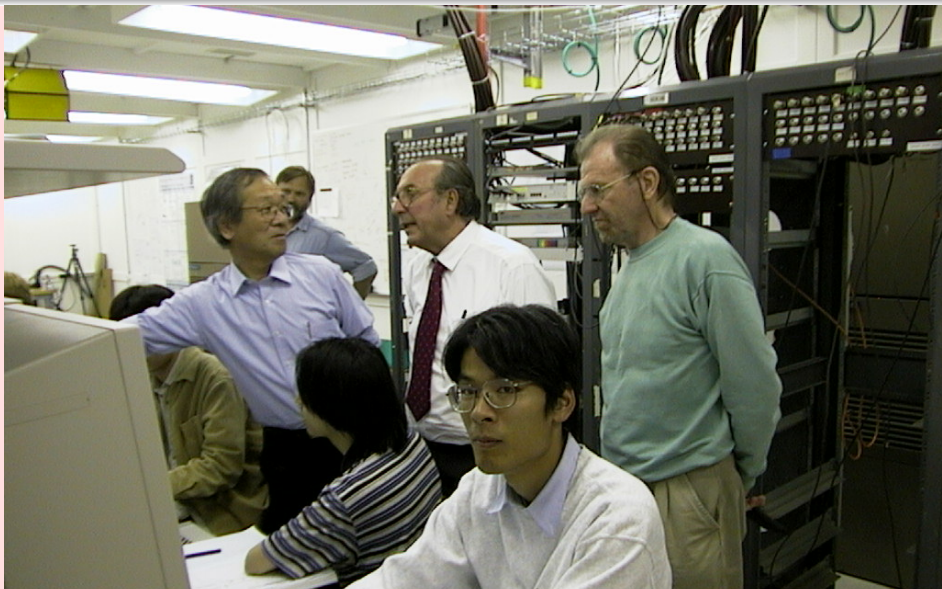
NRQED и квантовая задача трех тел  
Фундаментальные физические константы

Мюонный катализ: 1985-1995

Антипротонный гелий

Квантовая задача трех тел решена?

## Директор ЦЕРНа Лучано Майани



Коробов

Квантовая задача трех тел

# Квантовая задача трех тел решена? 2000 год



# Экспоненциальное разложение

V.I. Korobov, Phys. Rev. A, **61** 064503 (2000).

Экспоненциальное разложение:

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sum_{l_1+l_2=\mathcal{L}} \mathcal{Y}_{LM}^{l_1 l_2}(\hat{\mathbf{r}}_1, \hat{\mathbf{r}}_2) G_{l_1 l_2}^{L\pi}(r_1, r_2, r_{12}),$$

$$G_{l_1 l_2}^{L\pi}(r_1, r_2, r_{12}) = \sum_n C_n e^{-\alpha_n r_1 - \beta_n r_2 - \gamma_n r_{12}},$$

где  $\mathcal{L} = L$ , или  $L + 1$ , в зависимости от пространственной четности состояния, а параметры в экспоненте генерируются псевдослучайным образом.

*В известное разложение мы добавили многослойность и комплексность параметров вариационной функции и получилось...*

Основное состояние  $H_2^+$ 

Для этого случая особое значение имеет включение в разложение комплексных экспонент.

	$N$	$E$ (a.u.)
экспоненц. разложение	1600	-0.597139063123405047
	1800	-0.5971390631234050655
	2000	-0.5971390631234050710
	2200	-0.5971390631234050740
экстраполяция		-0.597139063123405076(2)
Гремо, Деланде и Билли	31746	-0.597139063123
Ребане и Филинский		-0.59713906312340
Мосс		-0.5971390631234

Масса протона фиксируется:  $m_p = 1836.152701 m_e$ .

# Антипротонный гелий и слабосвязанное состояние в $\text{H}_2^+$

Атом антипротонного гелия: полный орбитальный момент равен **35(!)**, состояние лежит выше порога существенного (непрерывного) спектра системы.

система		$E$
${}^4\text{He}^+ \bar{p} (L=35, \nu=0)$	ЭР	$-2.98402095449725(1)$
	Y. Kino	$-2.98402094$
$\text{H}_2^+ (L=0, \nu=19)$	ЭР	$-0.499731230655812(2)$
	R. Moss	$-0.49973123063$

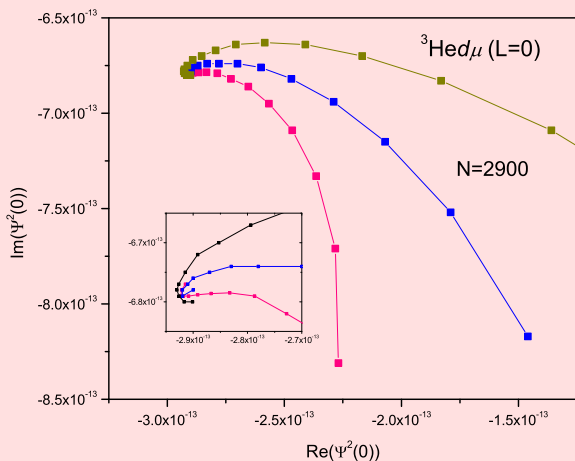
Последний пример — вычисление максимального вибрационного состояния ( $L=0$ ) для молекулы  $\text{H}_2^+$ . Волновая функция этого состояния имеет **19 узлов(!)**, а энергия связи равна  $3.39094 \times 10^{-6}$  атомных единиц, что на *пять порядков* меньше чем энергия связи основного состояния.

# Основное состояния атома гелия

## Экспоненциальный базис<sup>1</sup>.

	$N$	$E$ (a.u.)
экспоненц. разложение	3800	-2.9037243770341195983111421
	4200	-2.9037243770341195983111540
	4600	-2.9037243770341195983111572
	5200	-2.9037243770341195983111587
экстраполяция		-2.9037243770341195983111594(4)
Франковски и Пекерис	246	-2.9037243770326
Голдман	8066	-2.903724377034119594

<sup>1</sup>V. Korobov, Phys. Rev. A **66**, 024501 (2002).

Экзотика:  $\text{He}d\mu$  и метод CCR

## И наконец...

Нерелятивистская энергия основного состояния атома гелия

$$E(1S) = -2.90372\ 43770\ 34119\ 59831\ 11592\ 45194\ 40443$$

Нерелятивистская энергия основного состояния молекулярного иона  $H_2^+$

$$E(0,0) = -0.59713\ 90631\ 23405\ 07483\ 41340\ 96017$$

Нерелятивистская энергия иона  $H^-$

$$E(1S) = -0.52775\ 10165\ 44377\ 19659\ 08145\ 66747\ 57760$$

# NRQED и квантовая задача трех тел

# Интерлюдия 2000 год



# Конференция Hydrogen II



# Конференция Hydrogen II



# Джон Гарвард из Чарльзтауна



# Лаборатория теоретической физики



# NRQED. Введение.



# Концепция нерелятивистской КЭД (NRQED)

## КЭД

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = \bar{\psi} [(i\partial - eA)\gamma - m]\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu},$$



## Нерелятивистская КЭД

$$\mathcal{L}_{\text{NRQED}}$$



## Эффективный Гамильтониан

$$H_{\text{eff}} = \sum_i \frac{\mathbf{P}_i^2}{2m_i} + e^2 \sum_{j>i} \frac{Z_i Z_j}{r_{ij}} + \text{higher order corrections}$$

(Здесь  $\mathbf{P}_i = \mathbf{p}_i + e\mathbf{A}$ )

# Лагранжиан нерелятивистской КЭД

*Лагранжиан NRQED*<sup>2</sup> строится из нерелятивистских полей  $\psi$  для частиц входящих в систему: *скалярных* для скалярных частиц, *спиноров Паули* для частиц со спином 1/2 и т.д.

*Фотон* с необходимостью является *релятивистским* и определяется таким же образом, как и в КЭД.

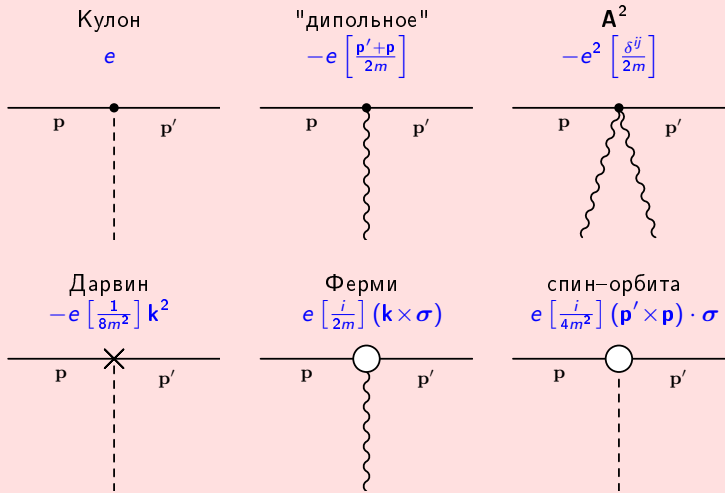
Лагранжиан инвариантен относительно *преобразований Галилея*, а также должен сохранять те же симметрии, что и лагранжиан КЭД: калибровочную инвариантность, сохранение четности, обращение времени и эрмитовость.

---

<sup>2</sup>W.E. Caswell and G.P. Lepage, Phys. Lett. B **167**, 437 (1986); T. Kinoshita and M. Nio, Phys. Rev. D **53**, 4909 (1996).



# Примеры основных взаимодействий в NRQED. Вершины.



Здесь  $\mathbf{k} = \mathbf{p}' - \mathbf{p}$  — переданный импульс частицы.

# Лэмбовский сдвиг и логарифм Бете

# Лэмбовский сдвиг

Впервые обнаружен в эксперименте Лэмба-Резерфорда<sup>a</sup>, как малое расщепление  $2S_{1/2}$  и  $2P_{1/2}$  уровней ( $\sim 1058$  МГц).

Первое простое объяснение этого явления в нерелятивистском приближении дано Бете<sup>b</sup>. Он показал, что этот эффект определяется взаимодействием электрона с электромагнитным вакуумом (собственная энергия связанного электрона) и впервые показал, что линейно расходящийся член должен быть ассоциирован с электромагнитной перенормировкой массы.

$$\Delta E_{se} = \frac{2\alpha^3}{3\pi m^2} \int_0^K k dk \left\langle \mathbf{p} \frac{1}{E_0 - H - k} \mathbf{p} \right\rangle$$

где  $k$  — энергия фотона.

<sup>a</sup>W.E. Lamb, R.C. Retherford, Phys. Rev. **72**, 241 (1947).

<sup>b</sup>H.A. Bethe, Phys. Rev. **72**, 339 (1947)

## Лэмбовский сдвиг

Вычитая линейно расходящуюся часть  $\left[-\frac{2\alpha^3}{3\pi} \langle \mathbf{p}^2 \rangle K\right]$ , связанную с перенормировкой массы

$$\Delta E'_{se} = \frac{2\alpha^3}{3\pi m^2} \int_0^K k dk \sum_n \frac{|\mathbf{p}_{n0}|^2 (E_0 - E_m)}{E_0 - E_n - k}$$

и интегрируя по  $k$ , получаем

$$\Delta E'_{se} = \frac{2\alpha^3}{3\pi m^2} \sum_n |\mathbf{p}_{n0}|^2 (E_0 - E_m) \ln \left[ \frac{K}{|E_0 - E_n|} \right] \approx 1040 \text{ MHz}$$

(If  $E_n - E_m$  is negative, it is easily seen that the principal value of the integral must be taken, as was done in (6).) Since we expect that relativity theory will provide a natural cut-off for the frequency  $k$ , we shall assume that in (6)

$$K \approx mc^2. \quad (7)$$

## Атом гелия.

Расчеты логарифма Бете разных лет для основного состояния атома гелия по состоянию на начало 1999 года.

Кабир, Солпитер (1953)	4.39(20)
Шварц, (1961)	4.370(4)
Бейкер и др., (1993)	4.37012
Батья, Драхман, (1998)	4.367
Коробов, Коробов	4.3701579(5)

# Метод Голдмана-Дрейка

Received January 14, 2000. Accepted February 2, 2000. Published on the NRC Research Press Web site on February 10, 2000.

G.W.F. Drake. Department of Physics, University of Windsor, Windsor, ON N9B 3P4, Canada.

S.P. Goldman. Department of Physics, University of Western Ontario, London, ON N6A 3K7, Canada.

Can. J. Phys. 77: 835–845 (1999)

© 1999 NRC Canada

$$\beta(1S) = 4.370\,160\,218(3).$$

В настоящий момент логарифм Бете для основного состояния атома гелия:

$$\beta(1S) = 4.370\,160\,223\,070(1)$$

А для основного состояния иона водорода  $H_2^+$ :

$$\beta(L=0, \nu=0) = 3.012\,230\,335(1)$$

# Фундаментальные физические константы



# Антипротонный гелий. Продолжение истории...

# Антипротонный гелий. Эксперимент 2010 года.

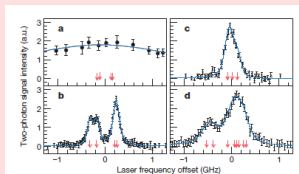
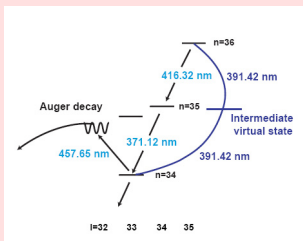


Figure 2 | Profiles of sub-Doppler two-photon resonances. a. Doppler- and power-broadened profile of the single-photon resonance  $(36, 34) \rightarrow (35, 33)$  of  $\bar{p}^3\text{He}^+$ . b. Sub-Doppler two-photon profile of  $(36, 34) \rightarrow (34, 32)$  involving the same parent state. c, d. Profiles of  $(33, 32) \rightarrow (31, 30)$  of  $\bar{p}^3\text{He}^+$  (c) and  $(35, 33) \rightarrow (33, 31)$  of  $\bar{p}^3\text{He}^+$  (d). Black filled circles indicate experimental data points with 1-s.d. error bars, blue lines are best fits of theoretical line profiles (see text) and partly overlapping arrows indicate positions of the hyperfine lines. a.u., arbitrary units.

[M. Hori et al. *Nature* 475, 484 (2011)]

Isotope	Transition ( $n, l$ ) $\rightarrow$ ( $n-2, l-2$ )	Transition frequency (MHz)	
		Experiment	Theory
$\bar{p}^4\text{He}^+$	$(36, 34) \rightarrow (34, 32)$	1,522,107,062(4)(3)(2)	1,522,107,058.9(2.1)(0.3)
	$(33, 32) \rightarrow (31, 30)$	2,145,054,858(5)(5)(2)	2,145,054,857.9(1.6)(0.3)
$\bar{p}^3\text{He}^+$	$(35, 33) \rightarrow (33, 31)$	1,553,643,100(7)(7)(3)	1,553,643,100.7(2.2)(0.2)

Experimental values show respective total, statistical and systematic 1-s.d. errors in parentheses; theoretical values (ref. 3 and V. I. Korobov, personal communication) show respective uncertainties from uncalculated QED terms and numerical errors in parentheses.


$$A_r(e) = 0.000\,548\,579\,909\,1(7) \quad [1.4 \times 10^{-9}]$$

# Антипротонный гелий в российских новостях

lenta.ru: Главное: x lenta.ru: Прогресс: Физик x как сделать снимок экра... Как сделать снимок экра...  
lenta.ru/news/2011/07/28/antiproton/

главное  
в России  
политика  
б. СССР  
в мире  
Америка  
Германия  
экономика  
финансы  
бизнес  
о рекламе  
недвижимость  
авто  
мотор  
преступность  
масс-медиа  
о высокоом  
кино  
музыка  
ре-аквариум  
спорт  
прогресс  
интернет  
технологии  
игры  
оружие  
медицина  
из жизни

28.07.2011, 14:46:17



Версия для печати | PDF/HTML

Антипротонный деселератор, который ученые использовали для работы. Фото CERN

## Физики взвесили антипротоны в атомкулах

Группа ученых Масаки Хори (Masaki Hori) из Института квантовой оптики общества Макса Планка провела наиболее точное измерение массы антипротона, улучшив известное значение на несколько порядков. Исследователи в очередной раз подтвердили, что массы протона и антипротона совпадают. [Статья](#) ученых появилась в журнале *Nature*, а ее краткое изложение [приводит](#) physicsworld.com.

В рамках исследования физики изучали так называемые атомкулы - экзотические молекулы гелия, в которых один из электронов замещен антипротоном. Эти объекты, способные существовать несколько микросекунд и получившие название антипротонного гелия, были открыты в 1991 году японскими физиками.

## Последние новости

17.10 18:48 [Удальцова отпустили под подписку о невыезде](#)

17.10 19:13 [Пивоваров обвинил Мамонтова в искажении смысла "Срока"](#)

17.10 18:26 [Организаторы выборов в КС заявили о сохранности денег участников МММ](#)

17.10 20:19 [Посольство США в Стокгольме возобновило работу после эвакуации](#)

17.10 18:46 [Власти Москвы проследят за митингами оппозиции](#)

17.10 19:59 [В Спирин подбитый вертолет юрнулся в воздухе](#)

17.10 19:46 [Госдума одобрила законопроект об образовании](#)

## Аутсайд

Розовый жираф [Нобелевский успех закоренелого джентльмена и его мамы](#)  
Нынешний нобелевский лауреат сэр Дюан Гёрдон, оказывается, был закоренелым двоечником.

Science: [Dance Your Ph.D. Finalists Announced](#)  
Финалисты конкурса "Станция свою диссертацию", объявленного престижным научным журналом, пытаются... станцевать свою диссертацию.

BBC News: [Bloodhound land speed rocket test roars over Newbury](#)  
Захватывающее видео подготовки к тесту аппарата Bloodhound, похожего скорее на ракету, чем на суперкар.

New Scientist: [Reality revealed: The ultimate fabric of the universe](#)  
NewScientist пытается за две с половиной минуты рассказать, из чего состоит реальность и приходит к весьма неожиданным выводам.

Коробов

## Современный статус. Теория.

$$\Delta E_{nr} = 2\,145\,088\,265.34$$

$$\Delta E_{\alpha^2} = -39\,349.33$$

$$\Delta E_{\alpha^3} = 5\,857.84$$

$$\Delta E_{\alpha^4} = 92.97$$

$$\Delta E_{\alpha^5} = -8.25(2)$$

$$\Delta E_{\alpha^6} = -0.10(10)$$

$$\Delta E_{total} = 2\,145\,054\,858.50(10)$$

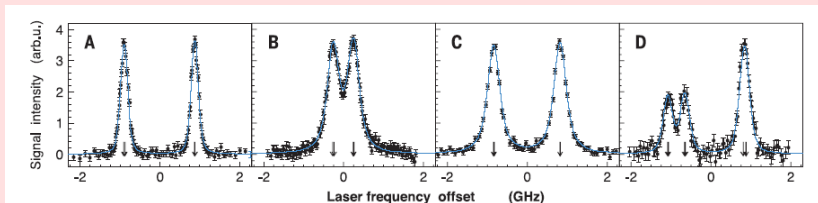
Transition (33, 32)  $\rightarrow$  (31, 30) (in MHz).  
CODATA10 recommended values of constants.

Along with the sensitivity of this transition to a change of  $\mu \equiv m_{\bar{p}}/m_e$ , this sets a limit on the fractional precision in determination of mass ratio

$$\frac{\Delta\mu}{\mu} = 3.6 \cdot 10^{-11}$$

## Современный статус. Эксперимент

Masaki Hori *et al.* Science **354**, 610 (2016)



$$m_{\bar{p}}/m_e = 1836.152\,6734(15) \quad [8 \times 10^{-10}]$$

# Протонный радиус и связанные с ним константы

# CODATA group. 2014



# Fundamental constants

- Proton charge radius

R. Pohl, *et al.* Nature **466**, 213 (2010)

$$r_p = 0.84184(67) [8 \times 10^{-4}]$$



# Fundamental constants

- Proton charge radius

R. Pohl, *et al.* Nature **466**, 213 (2010)

$$r_p = 0.84184(67) [8 \times 10^{-4}]$$

- Atomic mass of electron

S. Sturm, *et al.* Nature **506**, 467 (2014)

$$m_e = 0.000\,548\,579\,909\,067(14)(9)(2) [3 \times 10^{-11}]$$

# Fundamental constants

- Proton charge radius

R. Pohl, *et al.* Nature **466**, 213 (2010)

$$r_p = 0.84184(67) [8 \times 10^{-4}]$$

- Atomic mass of electron

S. Sturm, *et al.* Nature **506**, 467 (2014)

$$m_e = 0.000\,548\,579\,909\,067(14)(9)(2) [3 \times 10^{-11}]$$

- Rydberg constant:

CODATA-14

$$R_\infty = 10\,973\,731.568\,508(65) \text{ m}^{-1} [5.9 \times 10^{-12}]$$

# Спектроскопия ионов $\text{H}_2^+$ и $\text{HD}^+$

# Спектроскопия ионов $H_2^+$ и $HD^+$

Fundamental transitions in  $H_2^+$  and  $HD^+$  (in MHz).  
CODATA14 recommended values of constants.

	$H_2^+$	$HD^+$
$\Delta E_{nr}$	65 687 511.0470	57 349 439.9524
$\Delta E_{\alpha^2}$	1091.0399	958.1514
$\Delta E_{\alpha^3}$	-276.5450	-242.1263
$\Delta E_{\alpha^4}$	-1.9523	-1.7091
$\Delta E_{\alpha^5}$	0.1218(1)	0.1151(1)
$\Delta E_{\alpha^6}$	-0.0025(5)	-0.0022(4)
$\Delta E_{tot}$	65 688 323.7091(5)	57 350 154.3814(4)

The error bars in transition frequency set a limit on the fractional precision in determination of mass ratio to

$$\frac{\Delta\mu}{\mu} = 1.5 \cdot 10^{-11}$$

## RMS radius of proton

The **proton rms charge radius** uncertainty as is defined in the CODATA14 adjustment contributes to the fractional uncertainty at the level of  $\sim 5 \cdot 10^{-12}$  for the transition frequency. While the muon hydrogen "charge radius" moves the spectral line blue shifted by **3 kHz** that corresponds to a relative shift of  $5 \cdot 10^{-11}$ .

In case if we use the "*muon hydrogen*" *adjusted Rydberg constant* along with the *muon charge radius* then we get a shift of **1.1 kHz**, which is still feasible for detection.

Precision spectroscopy of the hydrogen molecular ions  $H_2^+$  and/or  $HD^+$  **allows to discriminate** the "muon" charge radius and the CODATA value.



# Google Scholar. По запросу: quantum electrodynamics

## Профили



### Richard Feynman

California Institute of Technology  
Цитируется: 67394

[quantum mechanics](#) [quantum electrodynamics](#)



### Paul Dirac

Lucasian Chair of Mathematics, Cambridge  
Цитируется: 54255

[quantum mechanics](#) [quantum electrodynamics](#)



### David L. Andrews

Professor of Chemical Physics, University of East Anglia  
Подтвержден адрес электронной почты в домене uea.ac.uk  
Цитируется: 6531

[Quantum Electrodynamics](#) [Photonics](#) [Nonlinear Optics](#) [Multiphoton Processes](#) [Quantum Optics](#)



### Krzysztof Pachucki

Uniwersytet Warszawski  
Подтвержден адрес электронной почты в домене fuw.edu.pl  
Цитируется: 5950

[atomic physics](#) [fundamental physics](#) [QED](#) [quantum electrodynamics](#)



### Ulrich D. Jentschura

Missouri S&T University  
Подтвержден адрес электронной почты в домене mst.edu  
Цитируется: 4728

[Quantum Electrodynamics](#) [Laser Physics](#) [Mathematical Physics](#)



### Vladimir A Yerokhin

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University  
Подтвержден адрес электронной почты в домене spbcas.ru  
Цитируется: 3767

[Atomic physics](#) [Quantum electrodynamics](#)



### Giuseppe Compagno

Associate Professor of Theoretical Physics, Palermo University  
Подтвержден адрес электронной почты в домене unipa.it  
Цитируется: 2876

[Quantum Electrodynamics](#) [Quantum Optics](#) [Theory of Open systems](#)



### Vladimir Korobov

Joint Institute for Nuclear Research, Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics  
Подтвержден адрес электронной почты в домене theor.jinr.ru  
Цитируется: 2848

[Atomic physics](#) [exotic atoms](#) [quantum electrodynamics](#)

Первые опыты  
NRQED и квантовая задача трех тел  
Фундаментальные физические константы

Антипротонный гелий  
Протонный радиус и связанные с ним константы  
Спектроскопия ионов  $H_2^+$  и  $HD^+$

