

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ ИМ. Н.Н. БОГОЛЮБОВА

Амплитуды рассеяния в неперенормируемых моделях: от теории Ферми до многомерных суперсимметричных теорий Янг–Миллса

Борлаков А. Т.

Научный руководитель: д. ф.-м. н. Казаков Дмитрий Игоревич

г. Дубна, 13 мая 2026 г.

План доклада

- 1 Введение
- 2 Теория Ферми и неперенормируемость
- 3 Спиральный формализм и пертурбативные вычисления
- 4 Рекуррентные соотношения и обобщённые уравнения ренормгруппы
- 5 Физические следствия и сравнение с калибровочной теорией
- 6 Максимально суперсимметричные теории Янга–Миллса
- 7 Заключение

Мотивация: роль неперенормируемых моделей

- Неперенормируемые взаимодействия естественно возникают как низкоэнергетический предел более фундаментальных теорий (эффективные теории поля).
- Примеры: теория Ферми слабых взаимодействий, киральная теория возмущений в КХД, гравитация как эффективная теория поля в пределе низких энергий.
- Исследование неперенормируемых моделей необходимо для понимания квантовой гравитации и построения последовательной теории на планковских масштабах.
- Развитие методов суммирования радиационных поправок в неперенормируемых теориях открывает путь к контролируемым предсказаниям за рамками пертурбативной теории.
- **Цель доклада:** представить результаты вычисления петлевых поправок в теории Ферми с использованием спирально-спинорного формализма, продемонстрировать построение рекуррентных соотношений на основе R' -операции и вывод обобщённых уравнений ренормгруппы. Проанализировать высокоэнергетическое поведение амплитуд в рассматриваемых неперенормируемых моделях.

Теория Ферми как эффективная теория

- Четырёхфермионное взаимодействие – низкоэнергетический предел слабых взаимодействий.
- Лагранжиан четырёхфермионного взаимодействия:

$$\mathcal{L} = i\bar{\Psi}\hat{\partial}\Psi - \frac{G}{\sqrt{2}}(\bar{\Psi}\hat{O}\Psi)(\bar{\Psi}\hat{O}\Psi)$$

- Константа связи G имеет размерность $[G] = -2$ (в единицах массы).
- Следствие: рост амплитуд с энергией, нарушение унитарности при $s \sim 1/G$.
- Замена на калибровочную теорию с промежуточными бозонами решает проблему перенормируемости.

Постановка задачи

Требуется вычислить лидирующие расходимости и выполнить суммирование ведущих логарифмов во всех порядках теории возмущений, оставаясь в рамках четырёхфермионной модели.

Подход к суммированию ведущих логарифмов

- Несмотря на неперенормируемость четырёхфермионного взаимодействия, в теории удаётся систематически выделить и вычислить ведущие логарифмические поправки, определяющие высокоэнергетическое поведение амплитуды рассеяния.
- В размерной регуляризации ведущие логарифмы $\log^n(E^2/\mu^2)$ находятся во взаимно-однозначном соответствии с ведущими полюсами $1/\epsilon^n$.

Ключевая идея

Вычислить ведущие полюса \rightarrow Заменить $1/\epsilon \rightarrow -\log(E^2/\mu^2)$

- Цель: вычислить лидирующие расходимости вплоть до трёх петель и построить рекуррентные соотношения для произвольного числа петель.
- Методы: формализм спиральных спиноров и R' -операция.

Двухкомпонентные спиноры Вейля

- Представление Вейля для γ -матриц:

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} -I_2 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}$$

- Киральные проекторы: $P_R = \frac{1+\gamma_5}{2}$, $P_L = \frac{1-\gamma_5}{2}$.

- $\sigma_{\dot{A}\dot{B}}^\mu \equiv (1, \sigma^i)$, $\bar{\sigma}^{\mu\dot{A}B} \equiv (1, -\sigma^i)$.

- Полезные тождества:

$$\begin{aligned} \sigma_{\dot{A}\dot{A}}^\mu \bar{\sigma}_{\dot{\mu}}^{\dot{B}B} &= 2\delta_A^B \delta_{\dot{A}}^{\dot{B}} \\ \sigma_{\dot{A}\dot{A}}^\mu \sigma_{\mu\dot{B}\dot{B}} &= 2\epsilon_{AB} \epsilon_{\dot{A}\dot{B}} \end{aligned}$$

- Внешние состояния в спиральном базисе:

$$P_R u(p) = p_A \equiv |p\rangle, \quad P_L u(p) = p^{\dot{B}} \equiv |p], \quad \bar{v}(p) P_R = p^A \equiv \langle p|, \quad \bar{v}(p) P_L = p_{\dot{B}} \equiv [p|$$

Спирально-спинорный формализм

- Лоренц-инвариантные спинорные произведения:

$$\langle pk \rangle = p^A k_A = \epsilon^{AB} p_B k_A, \quad [pk] = p_{\dot{A}} k^{\dot{A}} = p^{\dot{B}} \epsilon_{\dot{B}\dot{A}} k^{\dot{A}}$$

- Связь с мандельштамовскими переменными:

$$\langle pk \rangle [kp] = 2(p \cdot k)$$

- Антисимметрия: $\langle pk \rangle = -\langle kp \rangle$, $[pk] = -[kp]$.

- Тождество Фирца:

$$\langle p_1 | \sigma^\mu | p_2 \rangle [p_3 | \bar{\sigma}_\mu | p_4] = 2 \langle p_1 p_4 \rangle [p_3 p_2]$$

Следствие

Использование двухкомпонентного формализма совместно с тождеством Фирца позволяет существенно сократить число слагаемых и упростить вычисления по сравнению с четырёхкомпонентным спинорным формализмом Дирака.

Процесс $ff \rightarrow ff$ и древесные амплитуды

- Взаимодействие: $\Gamma^{(s_a, s_b)} \Gamma^{(s_c, s_d)} \bar{\psi}_{s_a} \psi_{s_b} \bar{\psi}_{s_c} \psi_{s_d}$.
- В скалярном случае $\Gamma = I$ древесная амплитуда:

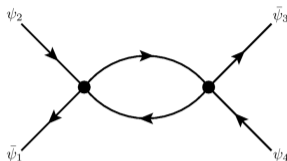
$$A_4^{(0)} = \langle 12 \rangle [34] - \langle 14 \rangle [32]$$

- Во всех порядках теории возмущений возникают лишь две независимые спинорные структуры:

$$\boxed{\langle 12 \rangle [34]} \quad \text{и} \quad \boxed{\langle 14 \rangle [32]}$$

- Свойство симметрии: часть $\langle 14 \rangle [32]$ получается из $\langle 12 \rangle [34]$ заменой $p_2 \leftrightarrow p_4$ с учётом антикоммутиации.

Пример детального вычисления: s-канальная диаграмма



Произведение двух древесных амплитуд:

$$\begin{aligned}
 A_4^{(0)}(\bar{\psi}_1\psi_2\bar{\psi}_5\psi_6) \times A_4^{(0)}(\bar{\psi}_8\psi_7\bar{\psi}_3\psi_4) &= -i^2 [\Gamma(1,2)\Gamma(5,6) - \Gamma(1,6)\Gamma(5,2)] \\
 &\times [\Gamma(8,7)\Gamma(3,4) - \Gamma(8,4)\Gamma(3,7)] \\
 &\times D_{(6,8)}^{\mu_1}(k)D_{(7,5)}^{\mu_2}(k+p) \bar{v}_L(p_1)u_R(p_2)\bar{v}_R(p_3)u_L(p_4).
 \end{aligned}$$

Слагаемые после раскрытия скобок:

- | | |
|--|--|
| 1) $-\langle 12 \rangle \text{Tr}[\sigma^{\mu_1}\bar{\sigma}^{\mu_2}] [34] I_1^{\mu_1\mu_2}$ | 2) $\langle 1 \sigma^{\mu_1}\bar{\sigma}^{\mu_2} 2\rangle [34] I_1^{\mu_1\mu_2},$ |
| 3) $\langle 12 \rangle [3 \sigma^{\mu_2}\bar{\sigma}^{\mu_1} 4] I_1^{\mu_1\mu_2}$ | 4) $-\langle 1 \sigma^{\mu_1} 4] [3 \bar{\sigma}^{\mu_2} 2\rangle I_1^{\mu_1\mu_2}.$ |

Однопетлевые поправки

- Три канала: s -, t - и u -канальные пузырьковые диаграммы.
- Ведущая расходимость в размерной регуляризации:

$$\text{Div } I_1^{\mu\nu} = -\frac{1}{6\epsilon} \left(p^\mu p^\nu + \frac{p^2}{2} g^{\mu\nu} \right)$$

- Результат для $\langle 12 \rangle [34]$ -части:

$$RS_1 = \frac{s}{2\epsilon} \langle 12 \rangle [34]$$

$$RT_1 = -\frac{t}{3\epsilon} \langle 12 \rangle [34], \quad RU_1 = -\frac{u}{3\epsilon} \langle 12 \rangle [34]$$

- Полная однопетлевая амплитуда:

$$A_4^{(1)} = \frac{5s}{6\epsilon} \langle 12 \rangle [34] - \frac{5t}{6\epsilon} \langle 14 \rangle [32]$$

- Древесный вклад: $A_4^{(0)} = \langle 12 \rangle [34] - \langle 14 \rangle [32]$.

Двухпетлевые поправки

- Две топологии: «двойной пузырь» ($I_1^{\mu\nu} \otimes I_1^{\rho\sigma}$) и «рюмка».
- Суммирование по каналам:

$$R_2(s, t) = \frac{5}{12\epsilon^2} \left(s^2 + \frac{t^2}{2} + \frac{(-s-t)^2}{2} \right) \langle 12 \rangle [34]$$

$$L_2(t, s) = -\frac{5}{12\epsilon^2} \left(t^2 + \frac{s^2}{2} + \frac{(-s-t)^2}{2} \right) \langle 14 \rangle [32]$$

- Полная двухпетлевая амплитуда: $A_4^{(2)} = R_2(s, t) + L_2(t, s)$.
- **Важно:** две структуры $\langle 12 \rangle [34]$ и $\langle 14 \rangle [32]$ по-прежнему независимы — амплитуда не факторизуется.

Трёхпетлевые поправки

- Результат для $\langle 12 \rangle [34]$ -части:

$$R_3(s, t) = \frac{s}{432\epsilon^3} (196s^2 + 193st + 193t^2) \langle 12 \rangle [34]$$

- $\langle 14 \rangle [32]$ -часть — замена $s \leftrightarrow t$:

$$L_3(t, s) = -\frac{t}{432\epsilon^3} (196t^2 + 193st + 193s^2) \langle 14 \rangle [32]$$

Порядок	Коэффициент при $\langle 12 \rangle [34]$
Tree	1
1-loop	$\frac{5s}{6\epsilon}$
2-loop	$\frac{5}{12} \frac{s^2 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}u^2}{\epsilon^2}$
3-loop	$\frac{s}{432\epsilon^3} (196s^2 + 193st + 193t^2)$

Случай V–A взаимодействия

- Лагранжиан четырёхфермионного взаимодействия в V–A форме:

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -\frac{G}{\sqrt{2}} \bar{\Psi} \gamma^\mu P_L \Psi \bar{\Psi} \gamma_\mu P_L \Psi$$

- Древесная амплитуда содержит единственную спинорную структуру:

$$A_4^{(0)} = \frac{1}{4} \langle 13 \rangle [42]$$

- Однопетлевые вклады по каналам пропорциональны той же структуре:

$$S_1 = -\frac{8s}{3\epsilon} \langle 13 \rangle [42], \quad T_1 = -\frac{8t}{3\epsilon} \langle 13 \rangle [42], \quad U_1 = 8\frac{u}{\epsilon} \langle 13 \rangle [42],$$

что приводит к полной амплитуде

$$A_4^{(1)} = S_1 + T_1 + U_1 = -\frac{32s+t}{3\epsilon} \langle 13 \rangle [42].$$

- Факторизация относительно $\langle 13 \rangle [42]$ сохраняется во всех порядках теории возмущений.

Теорема Боголюбова–Парасюка и локальность контрчленов

- Полная R -операция Боголюбова–Парасюка: $RG = (1 - KR')G$, где K выделяет сингулярную часть, а R' — неполная R -операция.
- R' рекурсивно удаляет все УФ-подрасходимости в собственных подграфах, но не полную расходимость диаграммы:

$$R' = 1 - \sum_{\gamma} L\gamma + \sum_{\gamma, \gamma'} L\gamma L\gamma' - \dots,$$

где $L\gamma$ — контрчлен, соответствующий подграфу γ .

- Согласно теореме Боголюбова–Парасюка, после действия R' остаётся **локальный** полином по импульсам: все члены вида $\frac{1}{\epsilon^m} \log^k(s/\mu^2)$ сокращаются.
- Условие локальности связывает коэффициенты при $1/\epsilon^n$ разных порядков. Это позволяет выразить ведущий полюс n -петлевой диаграммы через однопетлевой полюс.

Следствия локальности: связь ведущих полюсов

- После применения R' -операции к n -петлевой диаграмме в размерной регуляризации получаем разложение:

$$\frac{A_n^{(n)}(\mu^2)^{n\epsilon}}{\epsilon^n} + \frac{A_{n-1}^{(n)}(\mu^2)^{(n-1)\epsilon}}{\epsilon^n} + \dots + \frac{A_1^{(n)}(\mu^2)^\epsilon}{\epsilon^n}.$$

Здесь $A_k^{(n)}$ — вклад k -петлевого подграфа с $(n - k)$ -петлевым контрчленом.

- Требование локальности (отсутствие нелокальных членов $\log^k(\mu^2)/\epsilon^m$) даёт $n - 1$ линейных уравнений для коэффициентов $A_i^{(n)}$.
- В результате старший полюс выражается через однопетлевой, а сумма всех полюсных частей принимает простой вид:

$$A_n^{(n)} = (-1)^{n+1} \frac{A_1^{(n)}}{n},$$

$$\sum_{k=1}^n A_k^{(n)} = \frac{A_1^{(n)}}{n} = (-1)^{n+1} A_n^{(n)}.$$

Рекуррентные соотношения: схема

$$n \underbrace{A_n^{(n)}}_{n\text{-loop}} = - \underbrace{A_{n-1}^{(n)}}_{(n-1)\text{-loop}} \text{ (with loop) } - \underbrace{A_{n-1}^{(n)}}_{(n-1)\text{-loop}} \text{ (with loop)} + \sum_{k=1}^{n-2} \underbrace{A_k^{(n)}}_{k\text{-loop}} \text{ (with loop) } \underbrace{A_{n-1-k}^{(n)}}_{(n-1-k)\text{-loop}}$$

- **Схема рекуррентного соотношения** для n -петлевого вклада в четырёхточечную амплитуду.
- Линейный член: $(n - 1)$ -петлевой контрчлен с однопетлевой вставкой.
- Нелинейный член (с трёх петель): два контрчлена (k) и $(n - 1 - k)$ петель, соединённых однопетлевой диаграммой.
- Пунктирные линии обозначают контрчлены, которые локальны (полиномы по импульсам) согласно теореме Боголюбова–Парасюка.
- Интегрирование по оставшейся петле даёт интеграл по фейнмановскому параметру x , что приводит к интегральным рекуррентным соотношениям.

Рекуррентные соотношения: единичный оператор

Единичный оператор $\langle 12 \rangle [34]$:

$$\begin{aligned}
 nS_n(s, t) &= \int_0^1 dx \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{p=0}^k \frac{[s(-s-t)]^p [x(1-x)]^{p+1}}{p!(p+1)!} \left(s - t \left((p+1) + t' \frac{d}{dt'} \right) \right) \\
 &\quad \times \frac{d^p A_k(s, t', -s-t')}{dt'^p} \frac{d^p A_{n-1-k}(s, t', -s-t')}{dt'^p} \Big|_{t' \rightarrow -sx} \\
 nT_n(s, t) &= - \int_0^1 dx \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{p=0}^k \frac{[t(-s-t)]^p [x(1-x)]^{p+1}}{p!(p+1)!} \left(t \left((p+2) + s' \frac{d}{ds'} \right) \right) \\
 &\quad \times \frac{d^p A_k(s', t, -s'-t)}{ds'^p} \frac{d^p A_{n-1-k}(s', t, -s'-t)}{ds'^p} \Big|_{s' \rightarrow -tx} \\
 &\quad + \text{аналогичные вклады от } (s, u)
 \end{aligned}$$

- Соотношения для структуры $\langle 14 \rangle [32]$ получаются заменой $p_2 \leftrightarrow p_4$ с учётом знака.

Рекуррентные соотношения: V–A оператор

V–A оператор (13)[42]:

$$nS_n(s, t, u) = -8s \int_0^1 dx \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{p=0}^k \frac{[s(-s-u)]^p [x(1-x)]^{p+1}}{p!(p+1)!(p+2)^{-1}} \frac{d^p A_k}{du'^p} \frac{d^p A_{n-1-k}}{du'^p} \Big|_{u' \rightarrow -sx},$$

$$nU_n(s, t, u) = 8u \int_0^1 dx \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{p=0}^k \frac{[u(-s-u)]^p [x(1-x)]^{p+1}}{p!(p+1)!(p+3)^{-1}} \frac{d^p A_k}{ds'^p} \frac{d^p A_{n-1-k}}{ds'^p} \Big|_{s' \rightarrow -ux}$$

+ аналогичный вклад от (t, u) .

- Полная амплитуда: $A_k = S_k + T_k + U_k$
- Оба набора соотношений позволяют получить ведущие полюса в любом порядке без вычисления диаграмм.
- Проверены воспроизведением явных результатов до трёх петель.

Обобщённые уравнения ренормгруппы

- Вводим производящую функцию амплитуды:

$$A(s, t, u; z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(s, t, u)(-z)^n, \quad z = \frac{\bar{G}}{\epsilon}, \quad \bar{G} = \frac{G}{16\pi^2\sqrt{2}}$$

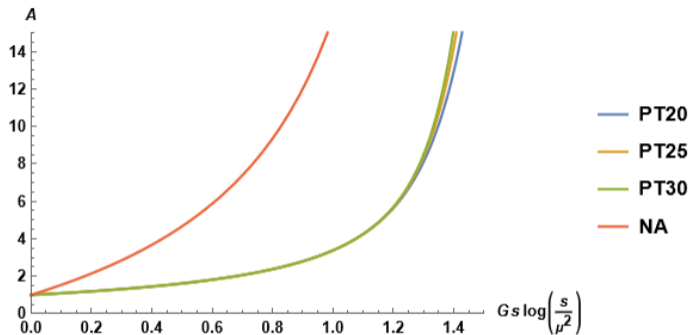
- Умножаем рекуррентные соотношения на $(-z)^{n-1}$ и суммируем от $n = 1$ до ∞ .
- Получаем **интегро-дифференциальное уравнение** для $A(z)$ — обобщённое уравнение ренормгруппы.
- После замены $z \rightarrow -\bar{G} \log(s/\mu^2)$ решение данного уравнения будет описывать поведение амплитуды при высоких энергиях.

Обобщённое уравнение РГ: единичный оператор

Уравнение для производящей функции амплитуды $A(s, t, u; z)$ в случае единичного оператора:

$$\begin{aligned}
 -\frac{dA(s, t, u)}{dz} = & \int_0^1 dx \sum_{p=0}^{\infty} \frac{[s(-s-t)]^p [x(1-x)]^{p+1}}{p!(p+1)!} \left(s - t((p+1) + t' \frac{d}{dt'}) \right) \left(\frac{d^p A(s, t', -s-t')}{dt'^p} \right)^2 \Bigg|_{t' \rightarrow -sx} \\
 & + \text{аналогичный член с заменой } t \leftrightarrow u \\
 & - \int_0^1 dx \sum_{p=0}^{\infty} \frac{[t(-s-t)]^p [x(1-x)]^{p+1}}{p!(p+1)!} \left(t((p+2) + s' \frac{d}{ds'}) \right) \left(\frac{d^p A(s', t, -s'-t)}{ds'^p} \right)^2 \Bigg|_{s' \rightarrow -tx} \\
 & - \int_0^1 dx \sum_{p=0}^{\infty} \frac{[u(-s-u)]^p [x(1-x)]^{p+1}}{p!(p+1)!} \left(u((p+2) + s' \frac{d}{ds'}) \right) \left(\frac{d^p A(s', -s'-u, u)}{ds'^p} \right)^2 \Bigg|_{s' \rightarrow -ux} .
 \end{aligned}$$

Численное решение обобщённого уравнения РГ: единичный оператор



- Сравнение частичных сумм теории возмущений (20, 25, 30 членов) и численного решения (NA) интегро-дифференциального уравнения.
- Численное решение указывает на более быстрый рост амплитуды с энергией, чем конечная сумма ряда теории возмущений.
- Поведение амплитуды указывает на наличие полюса Ландау в случае единичного оператора.

Обобщённое уравнение РГ: V–A оператор

Уравнение для производящей функции амплитуды $A(s, t, u; z)$ в случае V–A оператора:

$$\begin{aligned}
 -\frac{dA(s, t, u)}{dz} = & -8s \int_0^1 dx \sum_{p=0}^{\infty} \frac{[s(-s-u)]^p [x(1-x)]^{p+1}}{p!(p+1)!(p+2)^{-1}} \left(\frac{d^p A(s, -s-u', u')}{du'^p} \right)^2 \Bigg|_{u' \rightarrow -sx} \\
 & - 8t \int_0^1 dx \sum_{p=0}^{\infty} \frac{[t(-t-u)]^p [x(1-x)]^{p+1}}{p!(p+1)!(p+2)^{-1}} \left(\frac{d^p A(-t-u', t, u')}{du'^p} \right)^2 \Bigg|_{u' \rightarrow -tx} \\
 & + 8u \int_0^1 dx \sum_{p=0}^{\infty} \frac{[u(-s-u)]^p [x(1-x)]^{p+1}}{p!(p+1)!(p+3)^{-1}} \left(\frac{d^p A(s', -s'-u, u)}{ds'^p} \right)^2 \Bigg|_{s' \rightarrow -ux} \\
 & + 8u \int_0^1 dx \sum_{p=0}^{\infty} \frac{[u(-t-u)]^p [x(1-x)]^{p+1}}{p!(p+1)!(p+3)^{-1}} \left(\frac{d^p A(-t'-u, t', u)}{dt'^p} \right)^2 \Bigg|_{t' \rightarrow -ux}.
 \end{aligned}$$

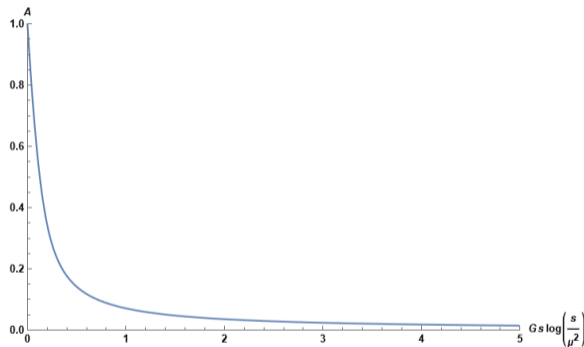
Анализ ряда теории возмущений: V - A оператор

- Ряд в режиме $s = 4E^2$, $t = u = -2E^2$ (через $y = \bar{G}s \log(s/\mu^2)$):

$$A(y) = 1 - \frac{16}{3}y + \frac{176}{9}y^2 - \frac{19424}{405}y^3 + \dots$$

- Коэффициенты **знакопеременны**.
- Частичные суммы осциллируют: чётные порядки дают возрастание, нечётные — убывание.
- Анализ конечного числа членов не позволяет сделать вывод об асимптотике.

Численное решение обобщённого уравнения РГ: V–A оператор



- Решение уравнения демонстрирует убывание амплитуды с ростом y .
- Численная аппроксимация и асимптотика:

$$A(y) = 0.067 y^{-0.987} \quad (R^2 = 0.9973), \quad A(y) \approx \frac{k}{y} \quad (k \approx 1/15).$$

- Полученное поведение амплитуды соответствует режиму асимптотической свободы.

Восстановление унитарности

- Древесное дифференциальное сечение в системе центра масс:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{(G/\sqrt{2})^2 u^2 / 16}{16\pi^2 s} = \frac{(G/\sqrt{2})^2 s / 64}{16\pi^2}.$$

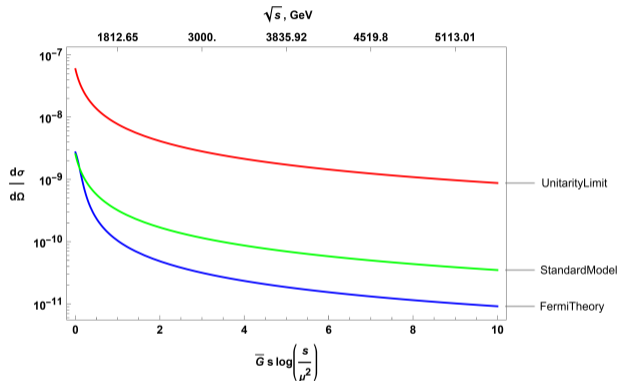
- Суммирование ведущих логарифмов даёт $A(y) \approx k/y$ ($k \approx 1/15$), откуда

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \approx \frac{C^2}{s \log^2(s/\mu^2)} \quad (C = \frac{\pi k}{2} \sim 0.1),$$

что удовлетворяет унитарному пределу $\frac{d\sigma}{d\Omega} < \frac{1}{4\pi^2 s}$ при высоких энергиях.

- Таким образом, унитарность восстанавливается за счёт радиационных поправок.

Сравнение со Стандартной моделью



- Сравнение дифференциального сечения $d\sigma/d\Omega$ как функции y и \sqrt{s} : унитарный предел, результат теории Ферми после суммирования ведущих логарифмов, кривая Стандартной модели (с учётом радиационных поправок).
- Полученное в теории Ферми сечение остаётся ниже унитарного предела и согласуется с поведением Стандартной модели в области высоких энергий.

Мотивация и постановка задачи

- Рассматриваются максимально суперсимметричные теории: $\mathcal{N} = 2$ SYM в $D = 6$, $\mathcal{N} = 1$ SYM в $D = 8$ и $D = 10$.
- Все они неперенормируемы ($[g^2] = 4 - D$) и анализируются в планарном пределе.
- Благодаря суперсимметрии пузыри и треугольники сокращаются; остаются только скалярные мастер-интегралы.

Постановка задачи

Требуется провести анализ лидирующих асимптотик на основе обобщённых уравнений ренормгруппы, полученных в предшествующих работах.

Обобщённые уравнения РГ в $D=6,8,10$

Уравнения, полученные в работе (Bork L.V., Kazakov D.I., Kompaniets M.V., Tolkachev D.M., Vlasenko D.E., JHEP 11, 59 (2015)):

$$\mathbf{D=6:} \quad \frac{d}{dz} \Sigma(s, t, z) = s - \frac{2}{z} \Sigma(s, t, z) + 2s \int_0^1 dx \int_0^x dy [\Sigma(s, t', z) + \Sigma(t', s, z)] \Big|_{t'=xt+yu}.$$

$\mathbf{D=8:}$

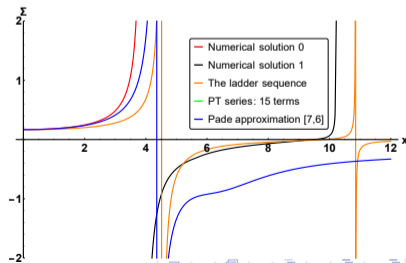
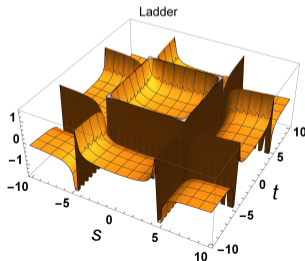
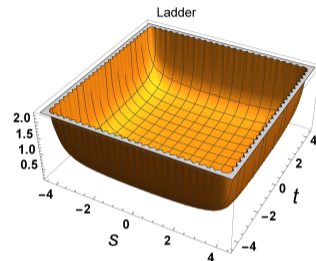
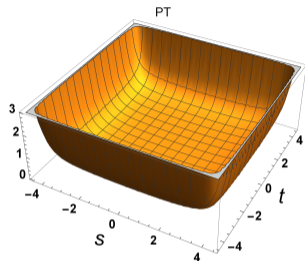
$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \Sigma(s, t, z) = & -\frac{1}{12} + 2s^2 \int_0^1 dx \int_0^x dy y(1-x)(\Sigma(s, t', z) + \Sigma(t', s, z)) \Big|_{t'=tx+yu} \\ & - s^4 \int_0^1 dx x^2(1-x)^2 \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!(p+2)!} \left(\frac{d^p}{dt'^p} (\Sigma(s, t', z) + \Sigma(t', s, z)) \Big|_{t'=-sx} \right)^2 (tsx(1-x))^p. \end{aligned}$$

$\mathbf{D=10:}$ аналогичная $D=8$ структура с s^3 и s^5 .

Лестничное приближение

- Интегрирование по фейнмановским параметрам выполняется аналитически, и интегро-дифференциальные уравнения сводятся к обыкновенным дифференциальным.
- **D=6**: $\Sigma_L(s, z) = \frac{2}{s^2 z^2} (e^{sz} - 1 - sz - \frac{s^2 z^2}{2})$;
при $z \rightarrow \infty$ ($\epsilon \rightarrow 0$) стремится к константе или бесконечности в зависимости от знака s .
- **D=8**: $\Sigma_L(s, z) = -\sqrt{5/3} \frac{4 \tan(zs^2/(8\sqrt{15}))}{1 - \tan(zs^2/(8\sqrt{15}))\sqrt{5/3}}$;
бесконечное число периодических полюсов, конечный ультрафиолетовый предел отсутствует.
- **D=10**: лестничная амплитуда состоит из двух компонент, Σ_{Lt} и Σ_{Ls} , удовлетворяющих системе нелинейных уравнений; качественно поведение такое же, как в D=8 — полюсная структура, конечный УФ-предел отсутствует.

Аналитическое и численное решения в $D=8$



Итоговая характеристика двух неперенормируемых моделей

- 1 Неперенормируемые модели допускают контролируемое суммирование ведущих асимптотик.
- 2 В случае V - A взаимодействия теории Ферми это приводит к физически осмысленным результатам, согласующимся с калибровочной теорией.
- 3 Суперсимметричные теории в высших размерностях демонстрируют, что сокращения диаграмм недостаточно для конечности.
- 4 Методология универсальна и может применяться к широкому классу эффективных теорий поля.

Основные результаты работы

- 1 Вычислены радиационные поправки в теории Ферми для единичного и $V-A$ операторов вплоть до трёх петель в рамках размерной регуляризации и спирально-спинорного формализма.
- 2 На основе теоремы Боголюбова–Парасюка и R' -операции построены рекуррентные соотношения, позволяющие находить лидирующую расходимость в произвольном порядке теории возмущений четырехфермионного взаимодействия.
- 3 Из рекуррентных соотношений получены обобщённые интегро-дифференциальные уравнения ренормгруппы для обоих операторов; анализ их решений выявил полюс Ландау в случае единичного оператора и асимптотическую свободу в $V-A$ случае.
- 4 Для максимально суперсимметричных теорий Янга–Миллса в $D = 6, 8, 10$ проведено аналитическое (лестничное приближение и Паде-аппроксимация) и численное исследование лидирующих асимптотик, показавшее отсутствие конечного ультрафиолетового предела.

Список публикаций

- 1 A. Borlakov, D. Kazakov. Loop corrections to the four-fermion interaction. *Eur. Phys. J. C* **85**, 1000 (2025).
- 2 A. Borlakov, D. Kazakov. High-energy behaviour of Fermi theory. *Eur. Phys. J. C* **86**, 159 (2026).
- 3 A. Borlakov, D. Kazakov. Asymptotic Freedom of V-A Fermi Interaction. *arXiv:2602.16380* (2026).
- 4 A. Borlakov, D. Kazakov, D. Tolkachev, D. Vlasenko. Summation of all-loop UV divergences in maximally supersymmetric gauge theories. *JHEP* **12**, 154 (2016).
- 5 D. Kazakov, L. Bork, A. Borlakov, D. Tolkachev, D. Vlasenko. High energy behavior in maximally supersymmetric gauge theories in various dimensions. *Symmetry* **11**, 104 (2019).

Благодарю за внимание!

Формулы древесных амплитуд (подробно)

- Скалярный случай:

$$A_4^{(0)}(\bar{\psi}_1\psi_2\bar{\psi}_3\psi_4) = \langle 12 \rangle [34] - \langle 14 \rangle [32]$$

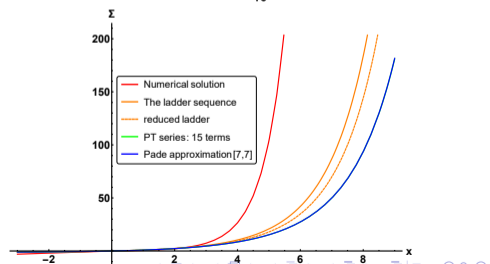
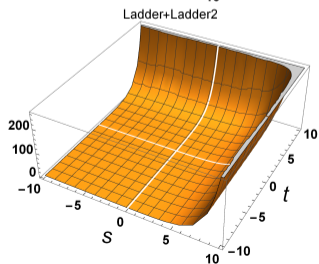
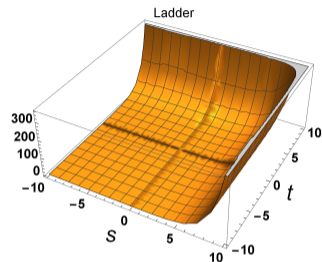
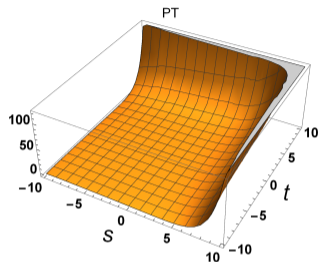
- V–A случай:

$$A_4^{(0)} = \frac{1}{4} (\langle 1|\gamma^\mu|2\rangle\langle 3|\gamma_\mu|4\rangle - \langle 1|\gamma^\mu|4\rangle\langle 3|\gamma_\mu|2\rangle) = \frac{1}{4}\langle 13 \rangle [42]$$

- Пропагатор в спиральном базисе (показан схематично):

$$\frac{i(\not{p})}{p^2 + i0}$$

Аналитическое и численное решения в $D=6$



Аналитическое и численное решения в $D=10$

