

Осцилляции нейтрино во внешних полях в рамках квантовой теории поля

М.С. Дворников
ИЗМИРАН, Москва
ОИЯИ, Дубна

План доклада

- Флейворные осцилляции нейтрино в рамках квантовой механики
 - ✓ Основы формализма
 - ✓ Осцилляции в вакууме
 - ✓ Осцилляции во внешних полях
 - ✓ Недостатки квантовомеханического описания
- Модель осцилляций нейтрино в пространстве
- Квантово-полевое описание осцилляций флейворных нейтрино: нейтрино как виртуальные частицы
 - ✓ Вычисление матричного элемента
 - ✓ Пропагаторы массовых состояний во внешних полях
 - ✓ Уравнение Дайсона для пропагаторов и его решение
 - ✓ Майорановские нейтрино во внешних полях
 - ✓ Флейворные осцилляции нейтрино в веществе
 - ✓ Спин-флейворные осцилляции в магнитном поле

Литература

- M.Dvornikov, Quantum field theory treatment of neutrino spin-flavor oscillations in a magnetic field, arxiv:2504.14726
- M.Dvornikov, Quantum field theory treatment of neutrino flavor oscillations in matter, Phys. Rev. D 111, 056009 (2025); arxiv:2411.19120

Квантовомеханическое описание осцилляций нейтрино

Исторически флейворные осцилляции рассматривались в рамках квантовой механики. Полученные таким образом вероятности согласуются с экспериментальными данными практически во всех ситуациях.

Флейворные нейтрино являются суперпозицией массовых состояний

$$\nu_\lambda = \sum_a U_{\lambda a} \psi_a \quad \lambda = e, \mu \quad a = 1, 2$$

Матрица смешивания

$$(U_{\lambda a}) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

В начальный момент времени имеются только электронные нейтрино $\nu_e(0) = 1, \quad \nu_\mu(0) = 0$

Массовые состояния эволюционируют как плоские волны

$$\psi_a(x, t) \propto e^{-iE_a t + i p x} \quad E_a = \sqrt{p^2 + m_a^2} \approx p + \frac{m_a^2}{2p}$$

Эволюция флейворных нейтрино и вероятность перехода

$$\nu_\lambda(t) = \sum_{a, \lambda'} U_{\lambda a} U_{\lambda' a}^* \exp\left(-i \frac{m_a^2}{2p} t\right) \nu_{\lambda'}(0) \quad P_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu}(t) = \sin^2(2\theta) \sin^2\left(\frac{\Delta m^2}{4E} t\right)$$

Эффективный гамильтониан

Массовые состояния удовлетворяют уравнению Шредингера

$$i\dot{\nu}_m = H_m \nu_m \quad H_m = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} \approx \frac{1}{4E} \begin{pmatrix} -\Delta m^2 & 0 \\ 0 & \Delta m^2 \end{pmatrix}, \quad \Delta m^2 = m_2^2 - m_1^2 > 0$$

Уравнение Шредингера для флейворных состояний

$$i\dot{\nu}_f = H_f \nu_f \quad H_f = U H_m U^\dagger = \frac{\Delta m^2}{4E} \begin{pmatrix} -\cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}$$

Начальное состояние $\nu_f(0) = \nu_e = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Решение уравнения Шредингера $\nu_f(t) = \begin{pmatrix} \nu_e(t) \\ \nu_\mu(t) \end{pmatrix} = e^{-iH_f t} \nu_f(0) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\Delta m^2}{4E}t\right) + i \sin\left(\frac{\Delta m^2}{4E}t\right) \cos 2\theta \\ -i \sin\left(\frac{\Delta m^2}{4E}t\right) \sin 2\theta \end{pmatrix}$

Вероятность перехода $P_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu}(t) = |\nu_\mu(t)|^2 = \sin^2(2\theta) \sin^2\left(\frac{\Delta m^2}{4E}t\right)$

Взаимодействие нейтрино с веществом

Лагранжиан эффективного взаимодействия с веществом

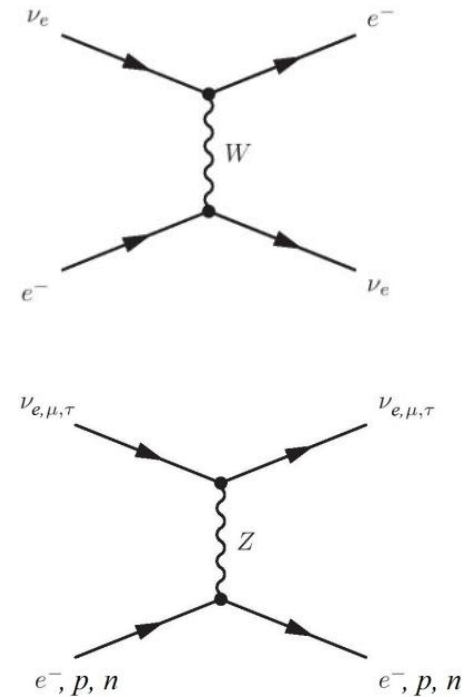
$$\mathcal{L} = -\frac{4G_F}{\sqrt{2}} \bar{\nu} \gamma_\mu^L \nu \cdot \bar{f} (C_V \gamma^\mu - C_A \gamma^\mu \gamma^5) f$$

Приближение рассеяния вперед $\langle \bar{f} \gamma^\mu f \rangle = j_f^\mu$, $\langle \bar{f} \gamma^\mu \gamma^5 f \rangle = \lambda_f^\mu$

$$\mathcal{L} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{\nu} \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \nu \cdot V^\mu \quad V^\mu = \sum_f [j_f^\mu q_f^{(1)} + \lambda_f^\mu q_f^{(2)}]$$

В неподвижном и неполяризованном веществе

$$V_{\nu_e} = \sqrt{2} G_F \left(n_e - \frac{1}{2} n_n \right), \quad V_{\nu_\mu} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} n_n$$



Осцилляции нейтрино в веществе: квантовая механика

Эффективный Гамильтониан

$$H_f = \begin{pmatrix} -\frac{\Delta m^2}{4E} \cos 2\theta + \sqrt{2}G_F n_e & \frac{\Delta m^2}{4E} \sin 2\theta \\ \frac{\Delta m^2}{4E} \sin 2\theta & \frac{\Delta m^2}{4E} \cos 2\theta \end{pmatrix}$$

Вероятность перехода

$$P_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu}(t) = \frac{\left(\frac{\Delta m^2}{4E} \sin 2\theta\right)^2}{\left(\frac{\Delta m^2}{4E} \sin 2\theta\right)^2 + \left(\frac{\Delta m^2}{4E} \cos 2\theta - \frac{G_F n_e}{\sqrt{2}}\right)^2} \sin^2 \left(\sqrt{\left(\frac{\Delta m^2}{4E} \sin 2\theta\right)^2 + \left(\frac{\Delta m^2}{4E} \cos 2\theta - \frac{G_F n_e}{\sqrt{2}}\right)^2} t \right),$$

Предполагая, что плотность вещества медленно меняется вдоль траектории нейтрино, получаем, что при

$$\frac{\Delta m^2}{4E} \cos 2\theta = \frac{G_F n_e}{\sqrt{2}} \quad \text{вероятность перехода резко возрастает}$$

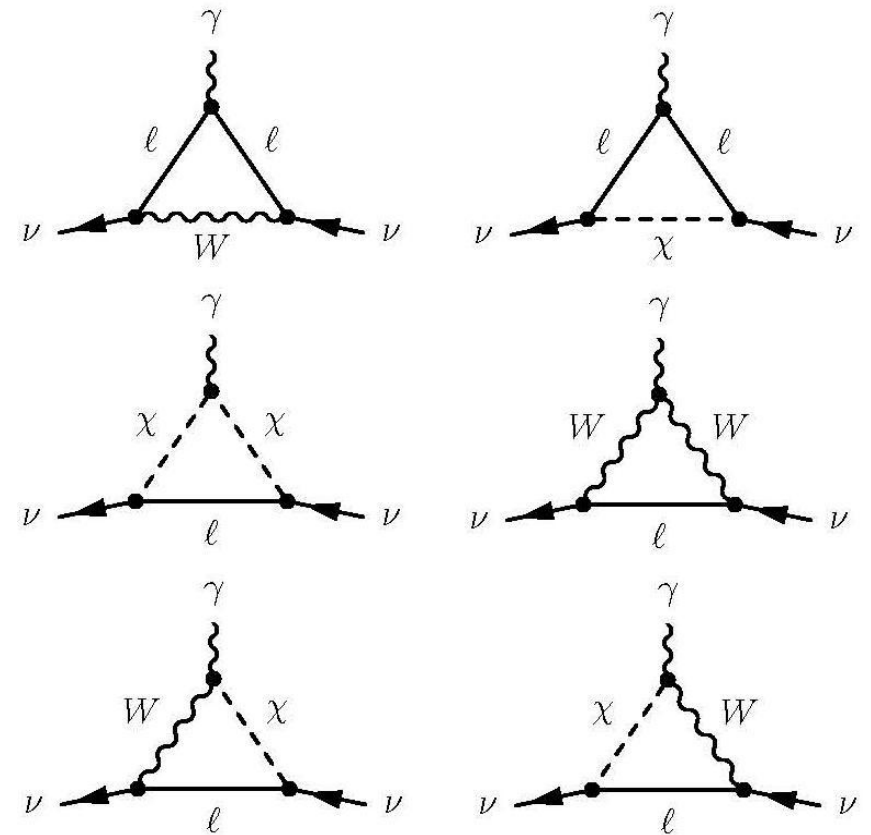
Эффект Михеева-Смирнова-Вольфштейна

Электродинамика нейтрино

- Нейтрино не обладают электрическим зарядом
- Однако нейтрино могут обладать магнитными моментами, целиком имеющими аномальную природу
- Лагранжиан взаимодействия

$$\mathcal{L} = -\frac{\mu_{ab}}{2} \bar{\psi}_a \sigma_{\mu\nu} \psi_b F^{\mu\nu} \quad (M_{\lambda\lambda'}) = U(\mu_{ab})U^\dagger$$

- Дираковские нейтрино могут иметь диагональные и переходные магнитные моменты
- Майорановские нейтрино - только переходные. При этом матрица магнитных моментов эрмитова и чисто мнимая
- В присутствии электромагнитного поля у нейтрино обладающих магнитными моментами может меняться поляризация и флейворный состав. Этот процесс называется спин-флейворные осцилляции



Спин-флейворные осцилляции: квантовая механика

- Рассматриваются 2 майорановских нейтрино в базисе $(\nu_e, \nu_\mu, \bar{\nu}_e, \bar{\nu}_\mu)$
- Поперечное магнитное поле
- Эффективный гамильтониан

$$H_f = \begin{pmatrix} -\frac{\Delta m^2}{4E_\nu} \cos 2\theta & \frac{\Delta m^2}{4E_\nu} \sin 2\theta & 0 & i\mu B \\ \frac{\Delta m^2}{4E_\nu} \sin 2\theta & \frac{\Delta m^2}{4E_\nu} \cos 2\theta & -i\mu B & 0 \\ 0 & i\mu B & -\frac{\Delta m^2}{4E_\nu} \cos 2\theta & \frac{\Delta m^2}{4E_\nu} \sin 2\theta \\ -i\mu B & 0 & \frac{\Delta m^2}{4E_\nu} \sin 2\theta & \frac{\Delta m^2}{4E_\nu} \cos 2\theta \end{pmatrix}$$

Точное решение для случая $\nu(0) = \nu_e$

$$\nu(t) = \frac{1}{2\mathfrak{E}_\nu} \begin{pmatrix} \frac{(\mu B)^2 + \left(\frac{\Delta m^2}{4E_\nu}\right)^2 \sin^2 2\theta}{\mathfrak{E}_\nu + \frac{\Delta m^2}{4E_\nu} \cos 2\theta} e^{-i\mathfrak{E}_\nu t} + \left(\mathfrak{E}_\nu + \frac{\Delta m^2}{4E_\nu} \cos 2\theta\right) e^{i\mathfrak{E}_\nu t} \\ -i\frac{\Delta m^2}{2E_\nu} \sin 2\theta \sin \mathfrak{E}_\nu t \\ 0 \\ -2\mu B \sin \mathfrak{E}_\nu t \end{pmatrix}$$

- Вероятность перехода для $\nu_e \rightarrow \bar{\nu}_\mu$

$$P_{\nu_e \rightarrow \bar{\nu}_\mu}(t) = |\bar{\nu}_\mu(t)|^2 = \frac{(\mu B)^2}{(\mu B)^2 + \left(\frac{\Delta m^2}{4E_\nu}\right)^2} \sin^2 \left(\sqrt{(\mu B)^2 + \left(\frac{\Delta m^2}{4E_\nu}\right)^2} t \right)$$

$$\mathfrak{E}_\nu = \sqrt{\left(\frac{\Delta m^2}{4E_\nu}\right)^2 + (\mu B)^2}$$

Описание массивных майорановских частиц вейлевскими спинорами

- Природу нейтрино можно прояснить только в массовом базисе
- Мы будем рассматривать майорановские нейтрино $(\psi_a)^c = C\bar{\psi}_a^T = \psi_a$

- Удобно представить $\psi_a = \begin{pmatrix} i\sigma_2\eta_a^* \\ \eta_a \end{pmatrix}$

- Волновое уравнение в веществе

$$i\dot{\eta}_a + [(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}) - g_a]\eta_a + im_a\sigma_2\eta_a^* = 0$$

- Волновое уравнение в магнитном поле

$$i\dot{\eta}_a + (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p})\eta_a + im_a\sigma_2\eta_a^* - i\mu_{ab}(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{B})\sigma_2\eta_b^* = 0$$

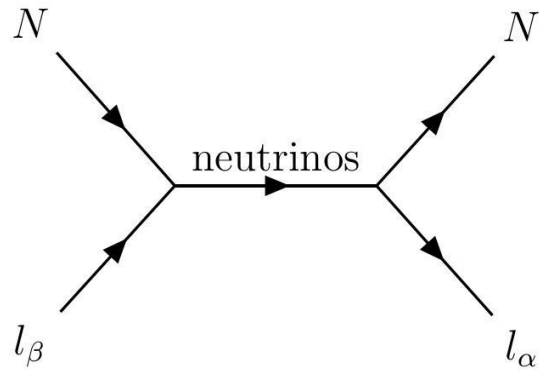
Недостатки квантовомеханического подхода

- При внимательном рассмотрении в квантовомеханическом описании обнаруживается ряд недостатков:
 - равны ли импульсы, или скорости, или энергии различных нейтрино?
 - осцилляции происходят в пространстве или во времени?
 - как быть со спинорной структурой волновой функции нейтрино?
и пр. (см., например, Наумов & Наумов (2020)).
- Требуется построение формализма для флейворных осцилляций основанного на квантовой теории поля.

Модель флейворных осцилляций

- Непосредственно в эксперименте нейтрино не наблюдается.
- Регистрируются заряженные лептоны, с которыми взаимодействуют нейтрино.
- Если флейворный состав лептонов в источнике отличается от состава в детекторе, то можно говорить об осцилляциях нейтрино.
- Заметим, что заряженные лептоны обладают определенными массами. Поэтому, in- и out-состояния для них хорошо определены.
- В качестве источника будем рассматривать тяжелое ядро, с которым взаимодействует заряженный лептон. Аналогичное устройство будет иметь детектор.
- Нейтрино в данном подходе будет являться виртуальной частицей.
- Данная модель осцилляций была предложена Кобзаревым и др. (1982); Giunti et al. (1993); Grimus & Stockinger (1996).

Квантово-полевое описание



Матричный элемент, соответствующий осцилляциям нейтрино, следует из фейнмановской диаграммы

$$S = -\frac{1}{2} \left(\sqrt{2} G_{int} \right)^2 \int d^4x d^4y \langle l_\alpha | T \{ j_\mu^\dagger(x) J^\mu(x) j^\nu(y) J_\nu^\dagger(y) \} | l_\beta \rangle \quad \text{Элемент S-матрицы}$$

$$\mathcal{L}_{int} = \sqrt{2} G_{int} j_\mu J^\mu \quad \text{Лагранжиан взаимодействия лептонного и ядерного токов}$$

$$j_\mu = \sum_\lambda \bar{\nu}_{\lambda L} \gamma_\mu l_{\lambda L} \quad \text{Лептонный ток}$$

$$J_\mu(x) \propto \delta_{\mu 0} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2)$$

$$J_\nu(y) \propto \delta_{\nu 0} \delta(\mathbf{y} - \mathbf{x}_1)$$

Ядра предполагаются тяжелыми.

Поэтому они считаются неподвижными как в источнике (\mathbf{x}_1), так и в детекторе (\mathbf{x}_2)

Матричный элемент осцилляций

Считаем, что виртуальными являются массовые состояния $\nu_\lambda = \sum_a U_{\lambda a} \psi_a$

Предполагая, что заряженные лептоны - это плоские волны, получаем выражение для S-матрицы $S = -\frac{G_{int}^2 e^{-i\mathbf{p}_\alpha \mathbf{x}_2 + i\mathbf{p}_\beta \mathbf{x}_1}}{2V \sqrt{E_\alpha E_\beta}} 2\pi \delta(E_\alpha - E_\beta) \mathcal{M}_{\beta \rightarrow \alpha}$

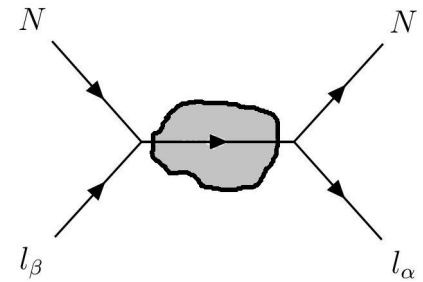
Матричный элемент $\mathcal{M}_{\beta \rightarrow \alpha} = \sum_{ab} U_{\alpha a} U_{\beta b}^* \kappa_-^\dagger(p_\alpha) \left(\int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \Sigma_{ab}(E, \mathbf{q}) e^{i\mathbf{q}\mathbf{L}} \right) \kappa_-(p_\beta)$ $E = (E_\alpha + E_\beta)/2$

$\langle 0 | T \{ \eta_a(x) \eta_b^\dagger(y) \} | 0 \rangle = \Sigma_{ab}(x - y)$ Пропагаторы массовых состояний

В вакууме $\Sigma_{ab} \propto \delta_{ab}$ В этом случае можно воспроизвести формулы для вероятностей вакуумных осцилляций $P_{\beta \rightarrow \alpha} \propto |\mathcal{M}_{\beta \rightarrow \alpha}|^2$ (Кобзарев и др., 1982; Grimus & Stockinger, 1996).

Матричный элемент в веществе

- Будем рассматривать ситуацию, когда пространство между источником и детектором заполнено веществом, с которым нейтрино взаимодействует электрослабо
- Наша цель - найти пропагаторы Σ_{ab} в этом случае
- Матричный элемент и вероятность перехода получаютcя после вычисления 3D преобразования Фурье от точных пропагаторов и усреднения результата по лептонным состояниям



Волновые уравнения для массовых состояний нейтрино в веществе

$$\mathcal{L} = \sum_{\lambda\lambda'} \bar{\nu}_\lambda \left[\delta_{\lambda\lambda'} i\gamma^\mu \partial_\mu - m_{\lambda\lambda'} - V_{\lambda\lambda'} \frac{1}{2} \gamma^0 (1 - \gamma^5) \right] \nu_{\lambda'}$$

Лагранжиан для флейворных нейтрино в веществе. Важно, что взаимодействие с веществом диагонально $(V_{\lambda\lambda'}) = \text{diag}(V_e, V_\mu)$

$$V_e = \sqrt{2} G_F \left(n_e - \frac{1}{2} n_n \right) \quad V_\mu = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} n_n$$

В массовом базисе массовая матрица диагональна. Однако, взаимодействие с веществом в этом базисе недиагонально

$$\mathcal{L} = \sum_{ab} \bar{\psi}_a \left[\delta_{ab} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m_a) - g_{ab} \frac{1}{2} \gamma^0 (1 - \gamma^5) \right] \psi_b$$

Это приводит к тому, что уравнения Дирака для массовых нейтрино в веществе являются зацепляющимися

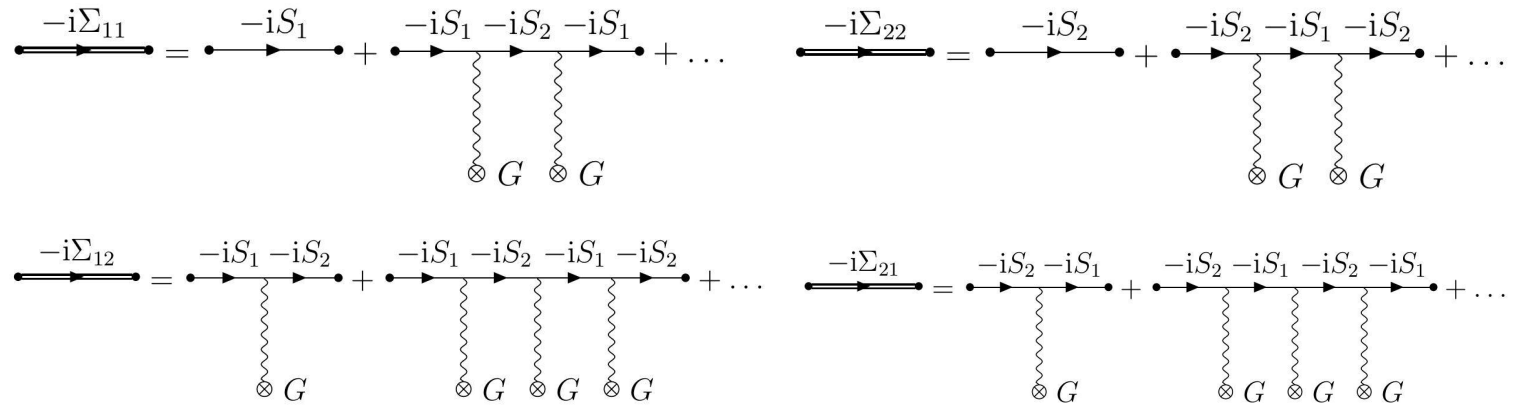
$$\left[i\gamma^\mu \partial_\mu - m_1 - \frac{g_1}{2} \gamma^0 (1 - \gamma^5) \right] \psi_1 = \frac{g}{2} \gamma^0 (1 - \gamma^5) \psi_2, \quad \left[i\gamma^\mu \partial_\mu - m_2 - \frac{g_2}{2} \gamma^0 (1 - \gamma^5) \right] \psi_2 = \frac{g}{2} \gamma^0 (1 - \gamma^5) \psi_1$$

Пропагаторы массовых нейтрино в веществе

Для нахождения пропагаторов системы из 2-х нейтрино нужно решать систему уравнений 8x8

$$\begin{pmatrix} i\gamma^\mu \partial_\mu - m_1 - G_1 & -G \\ -G & i\gamma^\mu \partial_\mu - m_2 - G_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{21} \\ \Sigma_{12} & \Sigma_{22} \end{pmatrix} = 1_{8 \times 8} \delta(x)$$

Можно искать точные пропагаторы в рамках теории возмущений и попытаться просуммировать все члены ряда



Результат суммирования всех слагаемых на диаграммах Фейнмана можно записать в виде аналога уравнений Дайсона

$$\begin{aligned} (-iS_1)^{-1} &= (-i\Sigma_{11})^{-1} + G(-iS_2)G, & (-iS_2)^{-1} &= (-i\Sigma_{22})^{-1} + G(-iS_1)G \\ [(-iS_1)G(-iS_2)]^{-1} &= (-i\Sigma_{12})^{-1} + G, & [(-iS_2)G(-iS_1)]^{-1} &= (-i\Sigma_{21})^{-1} + G \end{aligned}$$

$S_{1,2}$ - это «диагональные» пропагаторы, которые также учитывают взаимодействие с веществом

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m_{1,2} - G_{1,2})S_{1,2} = \delta(x)$$

Майорановские нейтрино

- При решении уравнений Дайсона для Σ_{12} нужно находить обратный оператор G^{-1}
- Для дираковских нейтрино $G = \gamma^0(1 - \gamma^5)/2$
- Это проекционный оператор для которого G^{-1} не существует
- Однако, для майорановских нейтрино $G = g$ и $G_{1,2} = g_{1,2}$. Таким образом, уравнения Дайсона для «одетых» пропагаторов хорошо определены
- Современные модели генерации масс нейтрино, предсказывающие малые массы активных нейтрино, используют именно майорановские массовые состояния
- В принципе, одно дираковское нейтрино эквивалентно 2-м майорановским с одинаковыми массами, $m_1=m_2$ и $m_3=m_4$. Однако в этом случае диаграммы Фейнмана, приводящие к уравнениям Дайсона для «одетых» пропагаторов, будут ветвящимися, поскольку нужно будет учитывать переходы $1 \rightarrow 3$, $1 \rightarrow 4$, $2 \rightarrow 3$, $2 \rightarrow 4$ и т.д. Суммирование соответствующих рядов, по-видимому, невозможно

Диагональные пропагаторы массовых майорановских нейтрино

Диагональные пропагаторы массовых состояний (тонкие линии) определяются стандартным образом

$$S_a(x - y) = \langle 0 | T[\eta_a(x) \eta_a^\dagger(y)] | 0 \rangle = \theta(x_0 - y_0) \langle 0 | \eta_a(x) \eta_a^\dagger(y) | 0 \rangle - \theta(y_0 - x_0) \langle 0 | \eta_a^*(y) \eta_a^T(x) | 0 \rangle$$

ЯВНЫЙ ВИД

$$S_a(x) = \frac{i}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ipx} \left\{ \left[\lambda_{a-}^2 \left(\frac{1}{p_0 - E_{a-} + i0} + \frac{A_{a-}^2}{p_0 + E_{a-} - i0} \right) + \lambda_{a+}^2 \left(\frac{1}{p_0 + E_{a+} - i0} + \frac{A_{a+}^2}{p_0 - E_{a+} + i0} \right) \right] - (\sigma \hat{p}) \left[\lambda_{a-}^2 \left(\frac{1}{p_0 - E_{a-} + i0} + \frac{A_{a-}^2}{p_0 + E_{a-} - i0} \right) - \lambda_{a+}^2 \left(\frac{1}{p_0 + E_{a+} - i0} + \frac{A_{a+}^2}{p_0 - E_{a+} + i0} \right) \right] \right\}$$

$$\lambda_{a\pm}^2 = \frac{E_{a\pm} + p \mp g_a}{2E_{a\pm}}, \quad A_{a\pm} = \mp \frac{m_a}{E_{a\pm} + p \mp g_a}$$

Уровни энергии

$$E_{a\pm} = \sqrt{m_a^2 + (p \mp g_a)^2}$$

«Одетые» пропагаторы в веществе

Если представить диагональный пропагатор без смешивания в виде

$$S_a(p) = \mathcal{A}_a(p) + (\sigma\hat{p})\mathcal{B}_a(p)$$

Тогда точные пропагаторы имеют вид

$$\Sigma_{11} = \frac{\mathcal{A}_1 + (\sigma\hat{p})\mathcal{B}_1 + g^2(\mathcal{A}_1^2 - \mathcal{B}_1^2)(\mathcal{A}_2 - (\sigma\hat{p})\mathcal{B}_2)}{(1 + g^2\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2)^2 + (1 + g^2\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2)^2 - 1 - g^4(\mathcal{A}_1^2\mathcal{B}_2^2 + \mathcal{A}_2^2\mathcal{B}_1^2)}$$

$$\Sigma_{22} = \frac{\mathcal{A}_2 + (\sigma\hat{p})\mathcal{B}_2 + g^2(\mathcal{A}_2^2 - \mathcal{B}_2^2)(\mathcal{A}_1 - (\sigma\hat{p})\mathcal{B}_1)}{(1 + g^2\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2)^2 + (1 + g^2\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2)^2 - 1 - g^4(\mathcal{A}_1^2\mathcal{B}_2^2 + \mathcal{A}_2^2\mathcal{B}_1^2)}$$

$$\Sigma_{12} = \Sigma_{21} = \frac{ig[\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2 + \mathcal{B}_1\mathcal{B}_2 - g^2(\mathcal{A}_1^2 - \mathcal{B}_1^2)(\mathcal{A}_2^2 - \mathcal{B}_2^2) - (\sigma\hat{p})(\mathcal{A}_1\mathcal{B}_2 - \mathcal{B}_1\mathcal{A}_2)]}{(1 + g^2\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2)^2 + (1 + g^2\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2)^2 - 1 - g^4(\mathcal{A}_1^2\mathcal{B}_2^2 + \mathcal{A}_2^2\mathcal{B}_1^2)}$$

Для ультрарелятивистских частиц можно получить следующие выражения

$$\Sigma_{11}(p_0, \mathbf{p}) = \frac{i[1 - (\sigma\hat{p})](p_0 - E_{2-})}{2[(p_0 - E_{1-} + i0)(p_0 - E_{2-} + i0) - g^2]}$$

$$\Sigma_{22}(p_0, \mathbf{p}) = \frac{i[1 - (\sigma\hat{p})](p_0 - E_{1-})}{2[(p_0 - E_{1-} + i0)(p_0 - E_{2-} + i0) - g^2]}$$

$$\Sigma_{12}(p_0, \mathbf{p}) = \frac{ig[1 - (\sigma\hat{p})]}{2[(p_0 - E_{1-} + i0)(p_0 - E_{2-} + i0) - g^2]}$$

$$E_{1,2-} = \sqrt{m_{1,2}^2 + (\mathbf{p} + g_{1,2})^2}$$

Результаты для майорановских нейтрино

Для 2-х нейтрино матричный элемент имеет вид $\mathcal{M}_{e \rightarrow \mu} \propto \kappa_-^\dagger(p_\mu) \left[\sin 2\theta \frac{1}{2} (\Sigma_{22} - \Sigma_{11}) + \cos 2\theta \Sigma_{12} \right] \kappa_-(p_e)$

Также необходимо вычислить преобразование Фурье $\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \Sigma_{ab}(E, \mathbf{q}) e^{i\mathbf{q}\mathbf{L}}$

Окончательный вид матричного элемента $\mathcal{M}_{e \rightarrow \mu} \propto -\frac{\left(\frac{\Delta m^2}{4E} + \frac{g_2 - g_1}{2}\right) \sin 2\theta + g \cos 2\theta}{\sqrt{\left(\frac{\Delta m^2}{4E} + \frac{g_2 - g_1}{2}\right)^2 + g^2}} \sin \left(\sqrt{\left(\frac{\Delta m^2}{4E} + \frac{g_2 - g_1}{2}\right)^2 + g^2} |L| \right)$

Эффективные потенциалы взаимодействия с веществом в массовом базисе

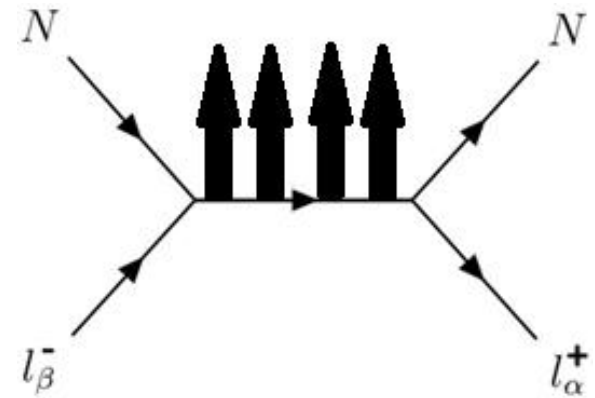
$$g_1 = V_e \cos^2 \theta + V_\mu \sin^2 \theta, \quad g_2 = V_e \sin^2 \theta + V_\mu \cos^2 \theta, \quad g = (V_e - V_\mu) \sin \theta \cos \theta$$

Вероятность совпадает с предсказанием квантовомеханического подхода для описания флейворных осцилляций в веществе

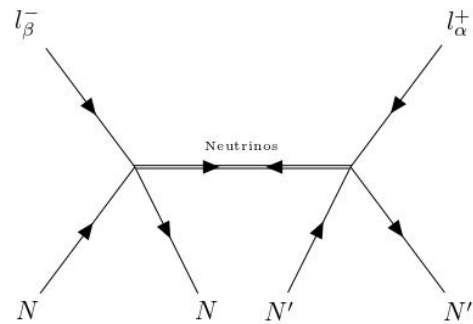
$$P_{e \rightarrow \mu} = \frac{\left(\frac{\Delta m^2}{4E} \sin 2\theta\right)^2}{\left(\frac{\Delta m^2}{4E} \sin 2\theta\right)^2 + \left(\frac{\Delta m^2}{4E} \cos 2\theta - \frac{G_F n_e}{\sqrt{2}}\right)^2} \sin^2 \left(\sqrt{\left(\frac{\Delta m^2}{4E} \sin 2\theta\right)^2 + \left(\frac{\Delta m^2}{4E} \cos 2\theta - \frac{G_F n_e}{\sqrt{2}}\right)^2} |L| \right)$$

Спин-флейворные осцилляции в магнитном поле

- Рассматриваются 2 майорановских нейтрино
- Вакуумный угол смешивания и массы ненулевые
- Нейтрино обладают переходным магнитным моментом (в массовом базисе)
- Магнитное поле поперечное



Квантово-полевое описание спин-флейворных осцилляций



Фейнмановская диаграмма, соответствующая спин-флейворным осцилляциям, содержит лептон и анти-лептон

$$S = -\frac{1}{2} \left(\sqrt{2} G_{\text{int}} \right)^2 \int d^4x d^4y \langle l_{\alpha}^+, N, N' | T \{ j^{\mu}(x) J_{\mu}(x) j^{\nu}(y) J_{\nu}(y) \} | l_{\beta}^-, N, N' \rangle \quad \text{Элемент S-матрицы}$$

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \sqrt{2} G_{\text{int}} j_{\mu} J^{\mu} \quad \text{Лагранжиан взаимодействия лептонного и ядерного токов}$$

$$j_{\mu} = \sum_{\lambda} \bar{\nu}_{\lambda L} \gamma_{\mu} l_{\lambda L} \quad \text{Лептонный ток}$$

$$J_{\mu}(x) \propto \delta_{\mu 0} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2)$$

$$J_{\nu}(y) \propto \delta_{\nu 0} \delta(\mathbf{y} - \mathbf{x}_1)$$

Ядра предполагаются тяжелыми.

Поэтому они считаются неподвижными как в источнике (\mathbf{x}_1), так и в детекторе (\mathbf{x}_2)

Матричный элемент спин-флейворных осцилляций

Массовые состояния являются виртуальными частицами $\nu_\lambda = \sum_a U_{\lambda a} \psi_a$

Выражение для S-матрицы $S = 4\pi G_{\text{int}}^2 e^{-i\mathbf{p}_\alpha \mathbf{x}_2 + i\mathbf{p}_\beta \mathbf{x}_1} \delta(E_\alpha - E_\beta) \mathcal{M}_{\beta \rightarrow \bar{\alpha}}$

Матричный элемент $\mathcal{M}_{\beta \rightarrow \bar{\alpha}} = \sum_{ab} U_{\alpha a}^* U_{\beta b}^* \kappa_{\alpha+}^\dagger(p_\alpha) \left(\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \Sigma_{ab}(E, \mathbf{q}) e^{i\mathbf{q}\mathbf{L}} \right) \kappa_{\beta-}(p_\beta) \quad E = (E_\alpha + E_\beta)/2$

$\Sigma_{ab}(x - y) = \langle 0 | T \{ \xi_a(x) \eta_b^\dagger(y) \} | 0 \rangle$ Пропагаторы массовых состояний

«Нейтринная» волновая функция

$$\psi_a = \begin{pmatrix} i\sigma_2 \eta_a^* \\ \eta_a \end{pmatrix}$$

«Антинейтринная» волновая функция

$$\psi_a = \begin{pmatrix} \xi_a \\ -i\sigma_2 \xi_a^* \end{pmatrix}$$

В отсутствие магнитного поля спин-флейворные осцилляции называются осцилляциями между нейтрино и антинейтрино. В вакууме, пропагаторы таких осцилляций тоже диагональные. Именно поэтому в определенных пропагаторах присутствуют вклады и «нейтрино» и «антинейтрино».

Пропагаторы массовых состояний

В матричный элемент дают вклады только Σ_{12} и Σ_{21}

Ряды теории возмущений

$$-i\Sigma_{12} = (-iS_{1R})V(-iS_{2L}) + (-iS_{1R})V(-iS_{2L})(-V)(-iS_{1R})V(-iS_{2L}) + \dots$$

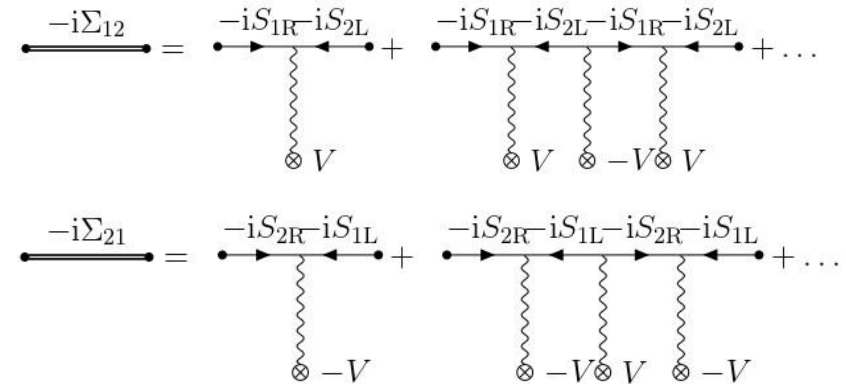
$$-i\Sigma_{21} = (-iS_{2R})(-V)(-iS_{1L}) + (-iS_{2R})(-V)(-iS_{1L})V(-iS_{2R})(-V)(-iS_{1L}) + \dots$$

$$V = i\mu(\sigma\mathbf{B})$$

Уравнения Дайсона

$$i\Sigma_{12}^{-1} = -(S_{1R}VS_{2L})^{-1} + V, \quad i\Sigma_{21}^{-1} = (S_{2R}VS_{1L})^{-1} - V$$

Фейнмановские диаграммы



Вакуумные пропагаторы (тонкие линии)

$$S_{aL,R}(p) = \frac{i}{2} \left[1 \mp \frac{(\sigma\mathbf{p})}{E_a} \right] \frac{1}{p_0 - E_a + i0}$$

Решение уравнения Дайсона для релятивистских частиц

При вычислении пропагаторов считаем, что $p/E_{1,2} < 1$ чтобы избежать расходимостей при оборачивании вакуумных пропагаторов. В конечном выражении находим предел $p/E_{1,2} \rightarrow 1$

$$\Sigma_{12} = -\Sigma_{21} = -\frac{\mu(\boldsymbol{\sigma} \cdot [\mathbf{B} + i(\hat{q} \times \mathbf{B}) - (\hat{q}\mathbf{B})\hat{q}])}{2[(E - E_1 + i0)(E - E_2 + i0) - \mu^2 B^2 + \mu^2(\hat{q}\mathbf{B})^2]}$$

Поскольку \mathbf{q} - это переменная интегрирования нельзя отбрасывать слагаемые $\propto (\hat{q}B)$ несмотря на то, что магнитное поле поперечное. Более того, подобные слагаемые не являются малыми по сравнению с другими вкладками в пропагатор

Результаты вычисления матричного элемента для 2-х поколений

Матричный элемент вычисляется на логично случаю взаимодействия с веществом. После вычисления 3D преобразования Фурье и усреднения по лептонным состояниям получаем

$$\mathcal{M}_{e \rightarrow \bar{\mu}} = -\frac{i\mu B E e^{iEL}}{2\pi \mathfrak{E} L} \left(\sin \mathfrak{E} L - \frac{i(\Delta m^2)^2}{32\mathfrak{E} E^3} \cos \mathfrak{E} L \right) \quad \mathfrak{E} = \sqrt{(\mu B)^2 + \left(\frac{\Delta m^2}{4E}\right)^2}$$

Вероятность перехода

$$P_{\nu_e \rightarrow \bar{\nu}_\mu} = P_{\nu_e \rightarrow \bar{\nu}_\mu}^{(0)} + \delta P_{\nu_e \rightarrow \bar{\nu}_\mu} \quad P_{\nu_e \rightarrow \bar{\nu}_\mu}^{(0)}(L) = \frac{(\mu B)^2}{(\mu B)^2 + \left(\frac{\Delta m^2}{4E}\right)^2} \sin^2 \left(\sqrt{(\mu B)^2 + \left(\frac{\Delta m^2}{4E}\right)^2} L \right)$$

$$\delta P_{\nu_e \rightarrow \bar{\nu}_\mu}(L) = \frac{(\mu B)^2 (\Delta m^2)^4}{4096 E^6 \left[(\mu B)^2 + \left(\frac{\Delta m^2}{4E}\right)^2 \right]^2} \sin^2 \left(2 \sqrt{(\mu B)^2 + \left(\frac{\Delta m^2}{4E}\right)^2} L \right)$$

Поправка к вероятности перехода возникает из слагаемых $\propto (\hat{q}B)$ в точных пропагаторах, т.е. это квантово-полевой эффект

Заключение

- Важными допущениями являются:
 - ✓ ультрарелятивизм лептонов (и нейтрино), который сильно упрощает вывод пропагаторов и вычисление 3D преобразований Фурье
 - ✓ однородность внешних полей: вывод диагональных пропагаторов, по-видимому, затруднен для произвольной зависимости внешнего поля от координат
 - ✓ рассмотрение только 2-х массовых состояний: для большего числа нейтрино суммирование формальных рядов, приводящих к уравнениям Дайсона, трудно осуществимо
- Малая поправка к вероятности спин-флейворных осцилляций обусловлена квантовой теорией поля