

Амплитуды рассеяния и  
форм-факторы в  $N=4$   
Максимально  
суперсимметричной теории  
Янга-Миллса.

Л.В. Борк

ВНИИА, ФИАН

# N=4 SYM

- N=4 SYM - one may hope that this theory is exactly solvable.
- Physical content - resembles perturbative part of QCD (massless QED without running of the coupling). Tree amplitudes identical to QCD.
- Toy model for weakly coupled gauge theories (perturbative QCD included).
- There are numerous results for perturbative expansions of the amplitudes (S-matrix) and form factors/correlation functions and other “observables”. Some results valid in all orders of PT.
- Among these results is the low energy (Infrared) asymptotical behavior of the amplitudes and form factors.
- Let us discuss these results ...

# Амплитуды и форм факторы в N=4 SYM

- Что бы мы стали делать используя стандартные рецепты учебников по КТП:

$$A_n^{(k)} = \text{[Diagram: Circle with } A_n^{(k)} \text{ and } n \text{ wavy lines]} = \left\{ \text{[Diagram: Triangle with } n \text{ wavy lines]} \right\} + \left\{ \text{[Diagram: Triangle with } n \text{ wavy lines]} \right\} + \dots$$

Тысячи их ... ( $A_{2 \rightarrow 4}^{tree} \sim 220$  диаграмм, et.c.)

Вершина связанная с локальным оператором, например  $\mathcal{O}_2 = F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$

$$F_{n,(k)}^{\mathcal{O}} = \text{[Diagram: Circle with } F_{n,(k)}^{\mathcal{O}} \text{ and } n \text{ wavy lines]} = \left\{ \text{[Diagram: Triangle with } n \text{ wavy lines and a double line]} \right\} + \left\{ \text{[Diagram: Triangle with } n \text{ wavy lines and a double line]} \right\} + \dots$$

# Амплитуды и форм факторы в N=4 SYM

- Что бы мы стали делать используя стандартные рецепты учебников по КТП:

$$A_n^{(k)} = \text{circle}(A_n^{(k)}) = \left\{ \begin{array}{c} \text{wavy} \\ \text{wavy} \\ \text{wavy} \\ \dots \\ \text{wavy} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \text{wavy} \\ \text{wavy} \\ \text{wavy} \\ \dots \\ \text{wavy} \end{array} \right\} + \dots$$

Тысячи их ... ( $A_{2 \rightarrow 4}^{tree} \sim 220$  диаграмм, et.c.)

$$F_{n,(k)}^{\mathcal{O}} = \text{circle}(F_{n,(k)}^{\mathcal{O}}) = \left\{ \begin{array}{c} \text{double line} \\ \text{wavy} \\ \text{wavy} \\ \dots \\ \text{wavy} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \text{double line} \\ \text{wavy} \\ \text{wavy} \\ \dots \\ \text{wavy} \end{array} \right\} + \dots$$

- “Умные люди Фейнмановские диаграммы не считают.” Г.Корчемский

# Параметризация кинематики. Спиральные спиноры (helicity spinors).

- В D=4 калибровочных теориях удобно использовать следующие переменные для описания кинематики:

Если у нас есть безмассовые импульсы  $p_i^\nu p_{i,\nu} \equiv p_i^2 = 0$  то

$$p_i^\nu (\sigma_\nu)^{\alpha\dot{\alpha}} = \lambda^\alpha(p_i) \tilde{\lambda}^{\dot{\alpha}}(p_i) \equiv \lambda_i^\alpha \tilde{\lambda}_i^{\dot{\alpha}}$$

Для обозначения произведения спиноров используются общепринятые обозначения (“скобочки”):

$$\epsilon_{\alpha\beta} \lambda_i^\alpha \lambda_j^\beta \equiv \langle ij \rangle \quad (\langle ij \rangle)^* = [ij]$$

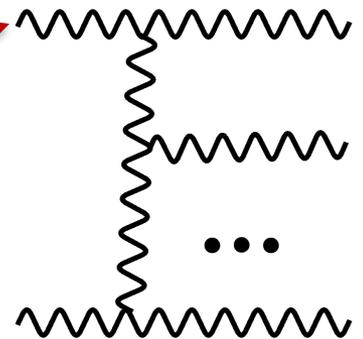
Используя эти переменные можно переписать все Ф. правила. Например:

$$\epsilon_-^{\alpha\dot{\alpha}}(p_i, q) = \frac{\lambda_i^\alpha \tilde{\lambda}_q^{\dot{\alpha}}}{[iq]}, \quad \epsilon_+^{\alpha\dot{\alpha}}(p_i, q) = \frac{\lambda_q^\alpha \tilde{\lambda}_i^{\dot{\alpha}}}{\langle iq \rangle} \quad \epsilon_\pm(p_i, q)$$

В итоге все амплитуды и форм факторы могут быть записаны как (после цветового упорядочения):

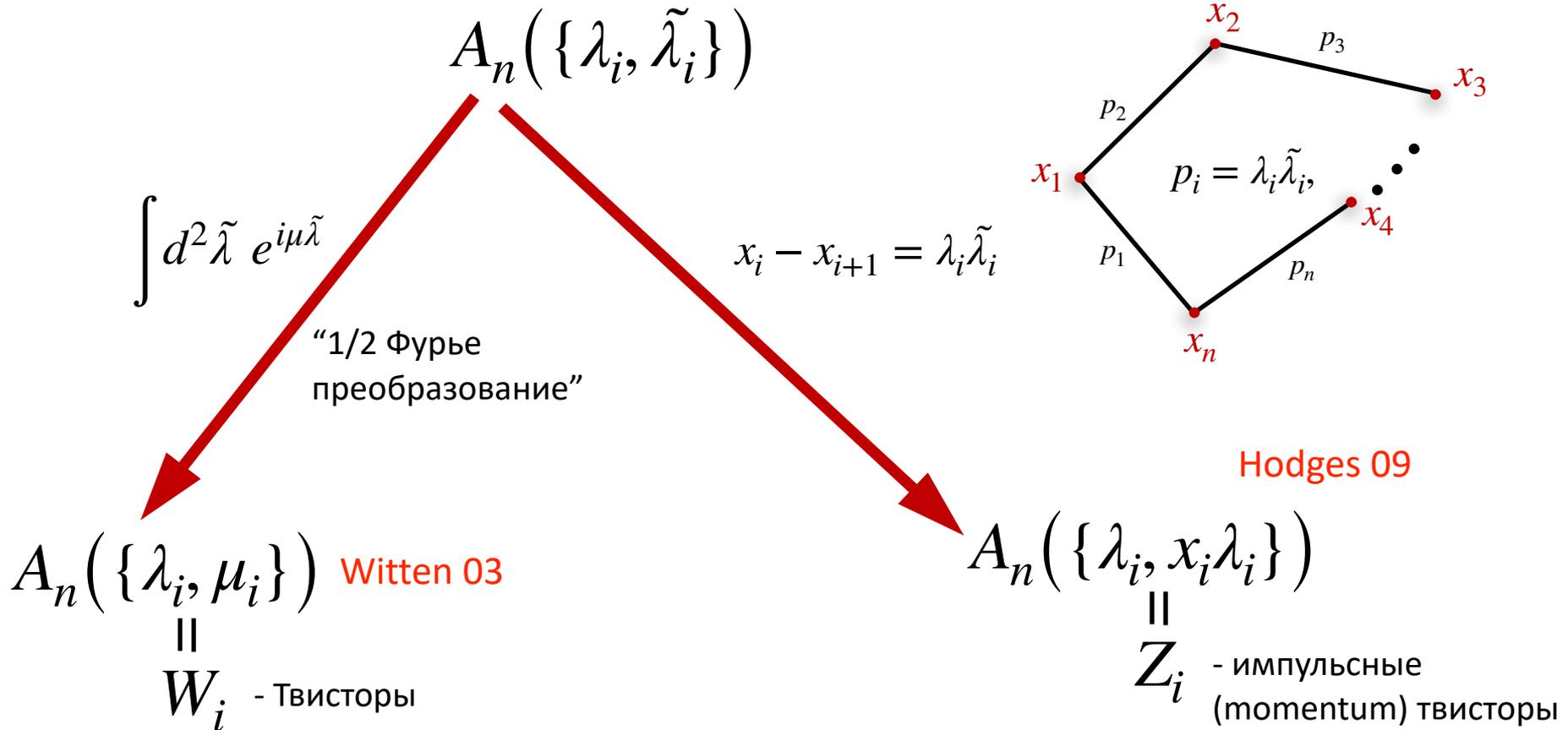
$$A_n^{(k)} = A_n^{(k)}(\{\lambda_i^\alpha, \tilde{\lambda}_i^{\dot{\alpha}}\}_{i=1}^n) = \delta^4\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^\alpha \tilde{\lambda}_i^{\dot{\alpha}}\right) \hat{A}_n^{(k)}(\{\lambda_i^\alpha, \tilde{\lambda}_i^{\dot{\alpha}}\}_{i=1}^n)$$

$$F_{n,(k)}^{\mathcal{O}} = F_{n,(k)}^{\mathcal{O}}(\{\lambda_i^\alpha, \tilde{\lambda}_i^{\dot{\alpha}}\}_{i=1}^n, q) = \delta^4\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^\alpha \tilde{\lambda}_i^{\dot{\alpha}} - q\right) \hat{F}_{n,(k)}^{\mathcal{O}}(\{\lambda_i^\alpha, \tilde{\lambda}_i^{\dot{\alpha}}\}_{i=1}^n)$$



# Параметризация кинематики. Спиноры, твисторы и всё такое...

- Помимо спиральных спиноров можно использовать и другие более специфические способы параметризация кинематики:



В случае наличия суперсимметрии добавляются "суперпартнёры" к W и Z

# N=4 суперпространство массовой поверхности (on-shell momentum superspace)

- В случае N=4 SYM нам бы хотелось сохранить суперсимметрию при описании амплитуд и форм факторов
- Этого можно добиться используя следующее суперпространство:

$$\begin{array}{ccc}
 SL(2, \mathbb{C}) \text{ спиноры} & \{ \lambda_i^\alpha, \tilde{\lambda}_i^{\dot{\alpha}}, \eta_i^A \} & SU(4)_R \text{ векторы,} \\
 & & \text{Лоренцевы скаляры}
 \end{array}$$

Используя это суперпространство можно собрать все операторы рождения/уничтожения из N=4 супермультиплета на *массовой поверхности* в один “супероператор”:

$$\Omega(p, \eta) = g^-(p) + \eta^A \Psi_A(p) + \eta^A \eta^B \phi_{AB}(p) + \epsilon_{ABCD} \eta^B \eta^C \eta^D \bar{\Psi}^A(p) + \epsilon_{ABCD} \eta^A \eta^B \eta^C \eta^D g^+(p)$$

Глюон,  
 $h = -1$  #1

Фермионы,  
 $h = -1/2$ , #4

Скаляры,  
 $h = 0$ , #6

Фермионы,  
 $h = +1/2$ , #4

Глюон,  
 $h = +1$  #1

$$1+1+6=4+4$$

Так что бы собрать все компонентные амплитуды и форм факторы в суперсимметричные выражения:

$$A_n(\{ \lambda_i^\alpha, \tilde{\lambda}_i^{\dot{\alpha}}, \eta_i^A \}_{i=1}^n) = \langle 0 | \Omega_1 \dots \Omega_n S | 0 \rangle$$

$$F_n(\{ \lambda_i^\alpha, \tilde{\lambda}_i^{\dot{\alpha}}, \eta_i^A \}_{i=1}^n, \dots) = \langle 0 | \Omega_1 \dots \Omega_n \mathcal{O} S | 0 \rangle$$

# N=4 суперпространство массовой поверхности (on-shell momentum superspace)

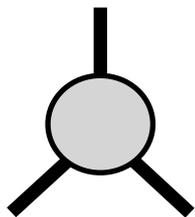
Генераторы суперсимметрии реализованы на этом суперпространстве как:

$$q_\alpha^A = \sum_{i=1}^n \lambda_{i,\alpha} \eta_i^A, \quad \bar{q}_{\dot{\alpha},A} = \sum_{i=1}^n \tilde{\lambda}_{i,\dot{\alpha}} \frac{\partial}{\partial \eta_i^A}, \quad p_{\alpha\dot{\alpha}} = \sum_{i=1}^n \lambda_{i,\alpha} \tilde{\lambda}_{i,\dot{\alpha}}$$

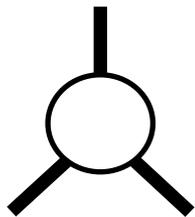
$$\{q_\alpha^A, \bar{q}_{\dot{\alpha},B}\} = \delta_B^A p_{\alpha\dot{\alpha}}$$

(супер) Лоренцева инвариантность и *локальность* позволят полностью зафиксировать вид 3ёх точечных супер амплитуд, не прибегая к рассмотрению Лагранжиана и правил Фейнмана:

$$p_{\alpha\dot{\alpha}} A_3^{(k)} = q_\alpha^B A_3^{(k)} = \bar{q}_{\dot{\alpha},B} A_3^{(k)} = 0$$



$$A_3^{(2)} = \delta^4 \left( \sum_{i=1}^3 \lambda_i^\alpha \tilde{\lambda}_i^{\dot{\alpha}} \right) \frac{\delta^8 \left( \sum_{i=1}^3 \lambda_i^\alpha \eta_i \right)}{\langle 12 \rangle \langle 23 \rangle \langle 31 \rangle} \quad \begin{array}{l} (\lambda_i)^* \neq \tilde{\lambda}_i \\ \tilde{\lambda}_1 \sim \tilde{\lambda}_2 \sim \tilde{\lambda}_3 \end{array} \quad p_i \in \mathbb{C}$$



$$A_3^{(1)} = \delta^4 \left( \sum_{i=1}^3 \lambda_i^\alpha \tilde{\lambda}_i^{\dot{\alpha}} \right) \frac{\delta^4 \left( [12] \eta_3 + [23] \eta_1 + [31] \eta_2 \right)}{[12][23][31]} \quad \begin{array}{l} (\lambda_i)^* \neq \tilde{\lambda}_i \\ \lambda_1 \sim \lambda_2 \sim \lambda_3 \end{array} \quad p_i \in \mathbb{C}$$

# N=4 суперпространство массовой поверхности (on-shell momentum superspace)

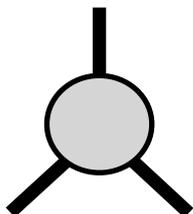
Генераторы суперсимметрии реализованы на этом суперпространстве как:

$$q_\alpha^A = \sum_{i=1}^n \lambda_{i,\alpha} \eta_i^A, \quad \bar{q}_{\dot{\alpha},A} = \sum_{i=1}^n \tilde{\lambda}_{i,\dot{\alpha}} \frac{\partial}{\partial \eta_i^A}, \quad p_{\alpha\dot{\alpha}} = \sum_{i=1}^n \lambda_{i,\alpha} \tilde{\lambda}_{i,\dot{\alpha}}$$

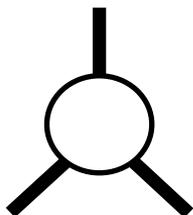
$$\{q_\alpha^A, \bar{q}_{\dot{\alpha},B}\} = \delta_B^A p_{\alpha\dot{\alpha}}$$

(супер) Лоренцева инвариантность и *локальность* позволят полностью зафиксировать вид 3ёх точечных супер амплитуд, не прибегая к рассмотрению Лагранжиана и правил Фейнмана:

$$p_{\alpha\dot{\alpha}} A_3^{(k)} = q_\alpha^B A_3^{(k)} = \bar{q}_{\dot{\alpha},B} A_3^{(k)} = 0$$



$$A_3^{(2)} = \delta^4 \left( \sum_{i=1}^3 \lambda_i^\alpha \tilde{\lambda}_i^{\dot{\alpha}} \right) \frac{\delta^8 \left( \sum_{i=1}^3 \lambda_i^\alpha \eta_i \right)}{\langle 12 \rangle \langle 23 \rangle \langle 31 \rangle}$$



$$A_3^{(1)} = \delta^4 \left( \sum_{i=1}^3 \lambda_i^\alpha \tilde{\lambda}_i^{\dot{\alpha}} \right) \frac{\delta^4 \left( [12] \eta_3 + [23] \eta_1 + [31] \eta_2 \right)}{[12][23][31]}$$

Индекс  $k$  связан с  $\sim \eta^{4k}$ ,

что в свою очередь однозначно определяет суммарную спиральность частиц в амплитуде.

$k=2$   $h_{tot} = n - 4$  MHV амплитуда

$k=3$   $h_{tot} = n - 6$  NMHV амплитуда

et.c.

$k=1$   $h_{tot} = n - 4$   $\overline{\text{MHV}}$  амплитуда

# N=4 суперпространство массовой поверхности (on-shell momentum superspace)

Реализация всей PSU(2,2|4) на суперпространстве массовой поверхности:

$$P^{ab} = - \sum_i |i\rangle^{\dot{a}} [i]^b ,$$

$$\tilde{Q}_A^{\dot{a}} = \sum_i |i\rangle^{\dot{a}} \eta_{iA}$$

$$Q^{aA} = \sum_i [i]^a \partial_{\eta_{iA}}$$

$$M_{\dot{a}b} = \sum_i \langle i |_{(\dot{a}} \partial_{|i]^b)}$$

$$D = \sum_i \left( \frac{1}{2} |i\rangle^{\dot{a}} \partial_{|i]^{\dot{a}}} + \frac{1}{2} [i]_a \partial_{[i]_a} + 1 \right)$$

$$M_{ab} = \sum_i |i]_{(a} \partial_{[i]^b)}$$

$$R_A{}^B = \sum_i \left( \eta_{iA} \partial_{\eta_{iB}} - \frac{1}{4} \delta_A{}^B \eta_{iC} \partial_{\eta_{iC}} \right)$$

$$S_{aA} = \sum_i \partial_{[i]^a} \eta_{iA}$$

$$\tilde{S}_{\dot{a}}^A = \sum_i \partial_{|i]^{\dot{a}}} \partial_{\eta_{iA}}$$

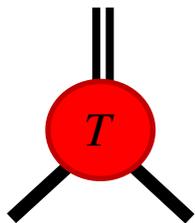
$$K_{a\dot{a}} = -\partial_{|i]^{\dot{a}}} \partial_{[i]^a} .$$

$$|i\rangle^{\dot{a}} \equiv \lambda^\alpha |i]^\alpha \equiv \tilde{\lambda}^{\dot{\alpha}} \quad \tilde{Q} \equiv q \quad Q \equiv \bar{q} \quad P \equiv p$$

from Henrietta Elvang's and Yu-Tin Huang lectures 13

# N=4 суперпространство массовой поверхности (on-shell momentum superspace)

- (супер) Лоренцева инвариантность и локальность позволят полностью зафиксировать так же и вид минимальных форм факторов различных операторов. Рассмотрим два примера:



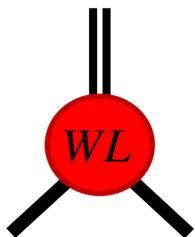
$$F_{2,(2)}^T = \delta^4 \left( \sum_{i=1}^2 \lambda_i^\alpha \tilde{\lambda}_i^{\dot{\alpha}} - q \right) \frac{\delta^8 \left( \sum_{i=1}^2 \lambda_i^\alpha \eta_i + \gamma \right)}{\langle 12 \rangle \langle 21 \rangle}$$

Форм фактор оператора из супермультиплета Тензора Энергии Импульса (Т, ТЭИ)

Bork et al. 11

$\frac{\partial^4}{\partial^4 \gamma_\alpha^A} \dots \gamma_\alpha^A = 0$

T:  $\text{tr}(\phi^{AB} \phi^{AB}), \dots, \text{tr}(T^{\mu\nu}), \dots, \text{tr}(\mathcal{L}_{\text{chiral}})$



$$F_{2,(2)}^{\text{WL}} = \frac{1}{\kappa_1^*} \delta^4 \left( q + \sum_{i=2}^3 \lambda_i^\alpha \tilde{\lambda}_i^{\dot{\alpha}} \right) \frac{\delta^8 \left( \lambda_p \tilde{\eta} + \sum_{i=2}^3 \lambda_i^\alpha \eta_i \right)}{\langle p2 \rangle \langle 23 \rangle \langle 3p \rangle}$$

Форм фактор оператора Вильсоновской линии (WL) Bork et al. 15

$\frac{\partial^4}{\partial^4 \tilde{\eta}^A}$

WL:  $\mathcal{W} = \text{tr} \left( T^c \mathcal{P} \exp \left[ i \int_{-\infty}^{+\infty} ds (pA)(x^\nu + sp^\nu) \right] \right)$

$$\kappa_1^* = \frac{\langle p|q|l \rangle}{[pl]}$$

# BCFW рекурсия для древесных амплитуд и форм факторов

- Используя минимальные амплитуды и форм факторы можно рекурсивно вычислять любые n-частичные амплитуды и форм факторы:

$$A_n^{(k)} = \sum \text{Diagram}$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{\lambda}_i &= \lambda_i + z \lambda_{i+1} \\ \tilde{\lambda}_{i+1} &= \tilde{\lambda}_{i+1} - z \tilde{\lambda}_i \\ \hat{\eta}_{i+1} &= \eta_{i+1} - z \eta_i \end{aligned} \right\} [i, j]$$

Для каждого BCFW вклада значение  $z$  известно в явном виде.

$$F_{n,(k)}^{T,WL} = \sum \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2}$$

Примеры решений BCFW рекурсии (MHV сектор, формулы Парке-Тэйлора и ей обобщения):

$$A_n^{(2)} = \delta^4 \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i^\alpha \tilde{\lambda}_i^{\dot{\alpha}} \right) \frac{\delta^8 \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i^\alpha \eta_i \right)}{\langle 12 \rangle \dots \langle n1 \rangle} \quad \& \quad F_{n,(2)}^T = \delta^4 \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i^\alpha \tilde{\lambda}_i^{\dot{\alpha}} - q \right) \frac{\delta^8 \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i^\alpha \eta_i + \gamma \right)}{\langle 12 \rangle \dots \langle n1 \rangle}$$

Bork et al. 11

# BCFW рекурсия для древесных амплитуд и форм факторов

- Используя минимальные амплитуды и форм факторы можно рекурсивно вычислять любые n-частичные амплитуды и форм факторы:

$$A_n^{(k)} = \sum \begin{array}{c} \hat{i} \\ \vdots \\ \textcircled{L} \times \textcircled{R} \\ \vdots \\ j \qquad \qquad \qquad \widehat{i+1} \\ \vdots \\ j+1 \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{\lambda}_i = \lambda_i + z \lambda_{i+1} \\ \tilde{\lambda}_{i+1} = \tilde{\lambda}_{i+1} - z \tilde{\lambda}_i \\ \hat{\eta}_{i+1} = \eta_{i+1} - z \eta_i \end{array} \right\} [i, j]$$

Для каждого BCFW вклада значение z известно в явном виде.

$$F_{n,(k)}^{T,WL} = \sum \begin{array}{c} \hat{i} \\ \vdots \\ \textcircled{L} \times \textcircled{R} \\ \vdots \\ j \qquad \qquad \qquad \widehat{i+1} \\ \vdots \\ j+1 \end{array} + \begin{array}{c} \hat{i} \\ \vdots \\ \textcircled{L} \times \textcircled{R} \\ \vdots \\ j \qquad \qquad \qquad \widehat{i+1} \\ \vdots \\ j+1 \end{array}$$

Примеры решений BCFW рекурсии (MHV сектор, формулы Парке-Тэйлора и ей обобщения):

$$A_n^{(2)} = \delta^4 \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i^\alpha \tilde{\lambda}_i^{\dot{\alpha}} \right) \frac{\delta^8 \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i^\alpha \eta_i \right)}{\langle 12 \rangle \dots \langle n1 \rangle} \quad \& \quad F_{n,(2)}^{WL} = \frac{1}{\kappa_1^*} \delta^4 \left( q + \sum_{i=2}^n \lambda_i^\alpha \tilde{\lambda}_i^{\dot{\alpha}} \right) \frac{\delta^8 \left( \lambda_p \tilde{\eta} + \sum_{i=2}^n \lambda_i^\alpha \eta_i \right)}{\langle p2 \rangle \dots \langle np \rangle}$$

Bork et al. 15





# BCFW рекурсия и $gl(4|4)$ интегрируемые спиновые цепочки

- BCFW рекурсивные соотношения можно записать в виде:

$$A_n^{(k)} = \sum_{\substack{\hat{i} \\ \vdots \\ j}} \text{Diagram } L \times \text{Diagram } R = \sum_{\substack{j+1 \\ \vdots \\ i+1}} \text{Diagram } L \text{ --- } \text{Diagram } R$$

Arkani Hamed et al. 12

$$\int \frac{d^2\lambda \, d^2\tilde{\lambda}}{\text{Vol}[GL(1)]} d^4\tilde{\eta} \equiv \text{---}$$

Рассмотрим каждый член BCFW рекурсии по отдельности:

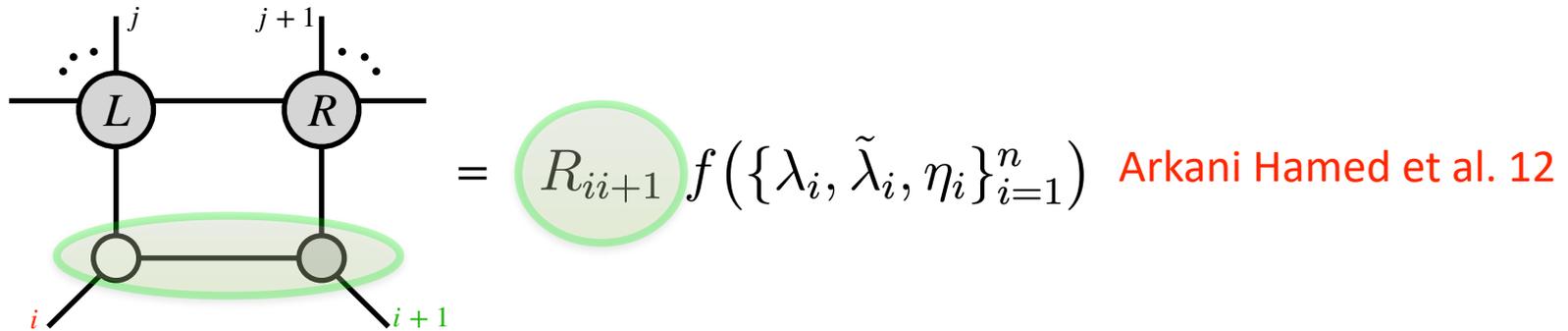
$$= R_{ii+1} f(\{\lambda_i, \tilde{\lambda}_i, \eta_i\}_{i=1}^n)$$

Chicherin et al. 13

$$R_{ij}(u) = \Gamma(-u) (x_j \cdot p_i)^u = \int_0^\infty \frac{d\alpha}{\alpha^{1+u}} e^{-\alpha(x_j \cdot p_i)}, \quad R_{ij}(0) \equiv R_{ij}$$

# BCFW рекурсия и $gl(4|4)$ интегрируемые спиновые цепочки

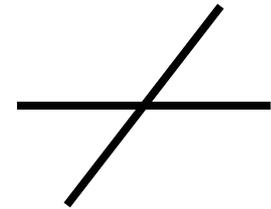
- Каждое слагаемое BCFW рекурсии получается действием R оператора на комбинацию предыдущих слагаемых:



$$= R_{ii+1} f(\{\lambda_i, \tilde{\lambda}_i, \eta_i\}_{i=1}^n) \text{ Arkani Hamed et al. 12}$$

Причём R-оператор совпадает с R-матрицей  $gl(4|4)$  спиновой цепочки:

$$R_{ij}(u) = \Gamma(-u)(x_j \cdot p_i)^u = \int_0^\infty \frac{d\alpha}{\alpha^{1+u}} e^{-\alpha(x_j \cdot p_i)}, \quad R_{ij}(0) \equiv R_{ij}$$



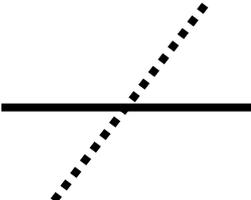
Здесь  $x$  и  $p$  образуют Гейзенберговскую пару  $[x, p] = \mathbb{1}$  и реализованы как:

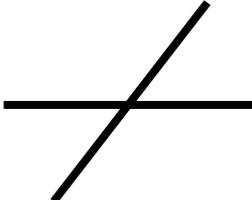
$$x^a = \left( \lambda^\alpha, -\frac{\partial}{\partial \tilde{\lambda}^{\dot{\alpha}}}, \frac{\partial}{\partial \eta^A} \right), \quad p^b = \left( \frac{\partial}{\partial \lambda^\alpha}, \tilde{\lambda}^{\dot{\alpha}}, \eta^A \right) \text{ Chicherin et al. 13}$$

Генераторы самой  $gl(4|4)$  реализованы в терминах  $x$  и  $p$  как:  $J^{ab} = x^a p^b$

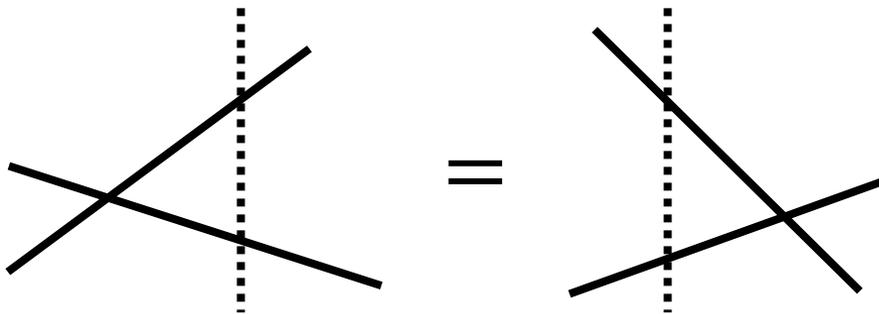
# BCFW рекурсия и $gl(4|4)$ интегрируемые спиновые цепочки

- Для  $gl(4|4)$  мы можем определить R и L операторы удовлетворяющие RLL соотношению:

$$L(u, v) = (u - v)\mathbb{I}_{ab} + \sum_{a,b} e_{ab} J_{ba} \quad \text{---} \quad \text{---}$$


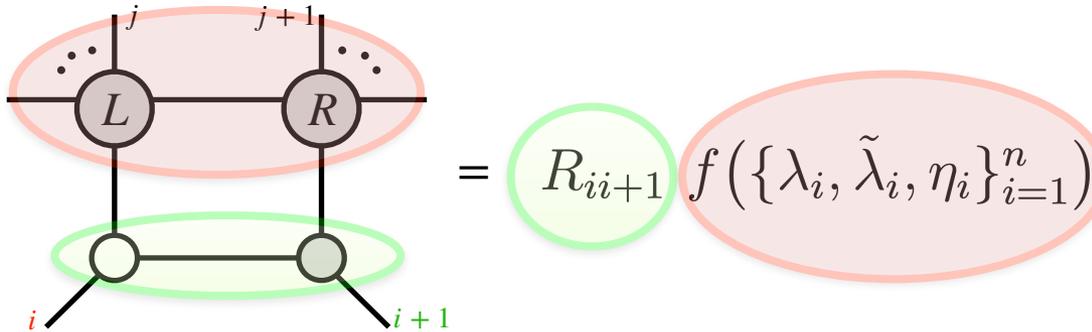
$$R_{ij}(u) = \Gamma(-u)(x_j \cdot p_i)^u = \int_0^\infty \frac{d\alpha}{\alpha^{1+u}} e^{-\alpha(x_j \cdot p_i)}, \quad R_{ij}(0) \equiv R_{ij} \quad \text{---} \quad \text{---}$$


$$R_{12}(u - v)L_1(u)L_2(v) = L_1(v)L_2(u)R_{12}(u - v)$$



Chicherin et al. 13

# BCFW рекурсия и $gl(4|4)$ интегрируемые спиновые цепочки



Каждое слагаемое BCFW рекурсии может быть представлено как цепочка R-операторов действующая на MHV3 и anti-MHV3:

$$|\text{BCFW}_{j_Q}\rangle = R_{i_1, j_1} \dots R_{i_Q, j_Q} |\text{MHV}_3, \overline{\text{MHV}}_3\rangle_{k, n}$$

В свою очередь можно показать что для MHV3 и anti-MHV3 справедливо:

$$A_3^{(2)} = R_{23}R_{12}|\mathbf{0}\rangle_{2,3} \text{MHV}_3 \quad A_3^{(1)} = R_{12}R_{23}|\mathbf{0}\rangle_{2,3} \overline{\text{MHV}}_3$$

Где “вакуум”  $|\mathbf{0}\rangle$  явно реализован как:

$$|\mathbf{0}\rangle_{k, n} = \delta_1^+ \dots \delta_{n-k}^+ \delta_{n-k+1}^- \dots \delta_n^- \quad \text{где:} \quad \delta_i^+ \equiv \delta^2(\lambda_i), \quad \delta_i^- \equiv \delta^2(\tilde{\lambda}_i)\delta^4(\tilde{\eta}_i)$$

Следовательно любое слагаемое BCFW рекурсии может быть представимо в виде:

$$|\text{BCFW}_{j_P}\rangle = R_{i_1, j_1} \dots R_{i_P, j_P} |\mathbf{0}\rangle_{k, n}$$

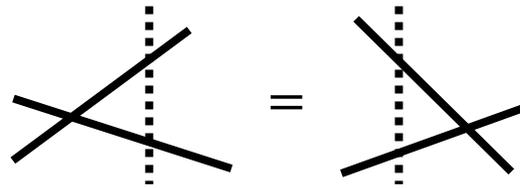
Chicherin et al. 13

# BCFW рекурсия и $gl(4|4)$ интегрируемые спиновые цепочки

Тогда определив матрицу монодромии для  $gl(4|4)$  “спиновой цепочки”:

$$M(u, \{v_i\}) = L_1(u, v_1) \dots L_k(u, v_k) L_{k+1}(u, v_{k+1}) \dots L_n(u, v_n)$$

Используя RLL соотношение и свойства “вакуума”  $|\mathbf{0}\rangle_{k,n} = \delta_1^+ \dots \delta_{n-k}^+ \delta_{n-k+1}^- \dots \delta_n^-$



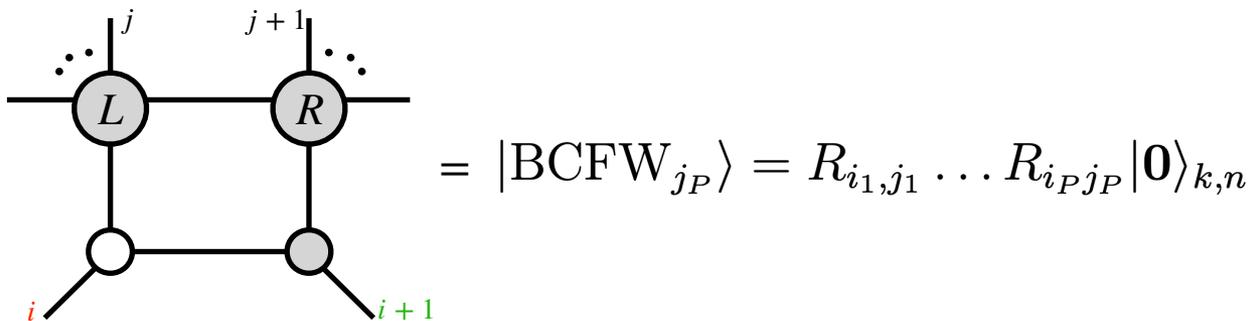
Можно показать что для состояний вида:  $|\text{BCFW}_{j_P}\rangle = R_{i_1, j_1} \dots R_{i_P, j_P} |\mathbf{0}\rangle_{k,n}$

Выполняется соотношение:

$$M_{ab}(u) |\text{BCFW}_{j_P}\rangle \sim C_{ab} |\text{BCFW}_{j_P}\rangle$$

- Почему это важно ?

# BCFW рекурсия и $gl(4|4)$ интегрируемые спиновые цепочки



Из того что  $M_{ab}(u)|\text{BCFW}_{j_P}\rangle \sim C_{ab}|\text{BCFW}_{j_P}\rangle$  следует, что и вся амплитуда  $A_n^{(k)} = \sum_j |\text{BCFW}_{j_P}\rangle$

будет с.в. матрицы монодромии. А следовательно и её коэфф. при разложении по спектральному параметру:

$$M_{ab}(u) = \sum_{m=-1}^{n-1} u^{n-m-1} J_{ab}^{(m)} \quad J_{ab}^{(-1)} \equiv \mathbb{I}_{ab}, \quad J_{ab}^{(0)} \equiv J_{ab}, \quad J_{ab}^{(1)} \equiv \hat{J}_{ab}$$

Chicherin et al. 13

Drummond 09

$J_{ab} A_n^{(k)} \sim A_n^{(k)}, \quad \hat{J}_{ab} A_n^{(k)} \sim A_n^{(k)}$  ↗ переопределив генераторы ↘ 
 $J'_{ab} A_n^{(k)} = \hat{J}'_{ab} A_n^{(k)} = 0$

Мы видим что амплитуда инвариантна относительно действия  $J$  и  $\hat{J}$

# Древесные амплитуда рассеяния в N=4 SYM и Янгиан-симметрия

Генераторы  $J$  и  $\hat{J}$  образуют Янгиан-алгебру (Янгиан- $gl(4|4)$ , генераторы  $PSU(2,2|4)$  содержатся в  $J$ )

**First Realization.** Given a finite-dimensional simple Lie algebra  $\mathfrak{g}$  with generators  $J_a$ , the Yangian  $Y[\mathfrak{g}]$  is defined as the algebra generated by  $J_a$  and  $\hat{J}_a$  with the relations

$$[J_a, J_b] = f_{abc} J_c, \quad [J_a, \hat{J}_b] = f_{abc} \hat{J}_c, \quad (3.19)$$

and the following Serre relations constrain the commutator of two level-one generators<sup>23</sup>

$$[\hat{J}_a, [\hat{J}_b, J_c]] - [J_a, [\hat{J}_b, \hat{J}_c]] = \hbar^2 g_{abcdef} \{J_d, J_e, J_f\}, \quad (3.20)$$

$$[[\hat{J}_a, \hat{J}_b], [J_r, \hat{J}_s]] + [[\hat{J}_r, \hat{J}_s], [J_a, \hat{J}_b]] = \hbar^2 (g_{abcdef} f_{rsc} + g_{rscdef} f_{abc}) \{J_d, J_e, J_f\}. \quad (3.21)$$

Here the  $f_{abc}$  denote the structure constants of the algebra  $\mathfrak{g}$  and we have

$$g_{abcdef} = \frac{1}{24} f_{adi} f_{bej} f_{cfk} f_{ijk}, \quad \{x_1, x_2, x_3\} = \sum_{i \neq j \neq k} x_i x_j x_k. \quad (3.22)$$

For completeness we already note that the Yangian defined by the above relations is a Hopf algebra (discussed in more detail below) with the coproduct<sup>24</sup>

$$\Delta(J_a) = J_a \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes J_a, \quad \Delta(\hat{J}_a) = \hat{J}_a \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \hat{J}_a - \frac{1}{2} \hbar f_{abc} J_b \otimes J_c. \quad (3.23)$$

Амплитуды рассеяния в N=4 SYM обладают Янгиан симметрией на древесном уровне!

$$\xrightarrow{\hspace{10em}} J'_{ab} A_n^{(k)} = \hat{J}'_{ab} A_n^{(k)} = 0$$

# BCFW рекурсия, форм факторы и $gl(4|4)$ интегрируемые спиновые цепочки

- А что с форм факторами ?

$$F_{n,(k)}^{T,WL} = \sum \left[ \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} \right]$$

Wilhelm et al. 15

$$|\text{BCFW}_{j_P}\rangle = R_{i_1, j_1} \dots R_{i_P, j_P} |\mathbf{0}, \text{FF}\rangle_{k,n} \longrightarrow |\mathbf{0}, \text{FF}\rangle_{k,n} = \hat{A}_{n+1, n+2} [ |\mathbf{0}\rangle_{k, n+2} ]$$

“Вакуумы” форм факторов и амплитуд связаны действием *оператора склейки*:

$$\hat{A}_{n+1, n+2} [ f ] \equiv \int \prod_{i=n+1}^{n+2} \frac{d^2 \lambda_i d^2 \tilde{\lambda}_i d^4 \tilde{\eta}_i}{\text{Vol}[GL(1)]} F_{2,(2)}^{T,WL} \times f (\{ \lambda_i, \tilde{\lambda}_i, \tilde{\eta}_i \}_{i=1}^{n+2})$$

Для форм факторного “вакуума” выполняются соотношения:

Bork et al. 17

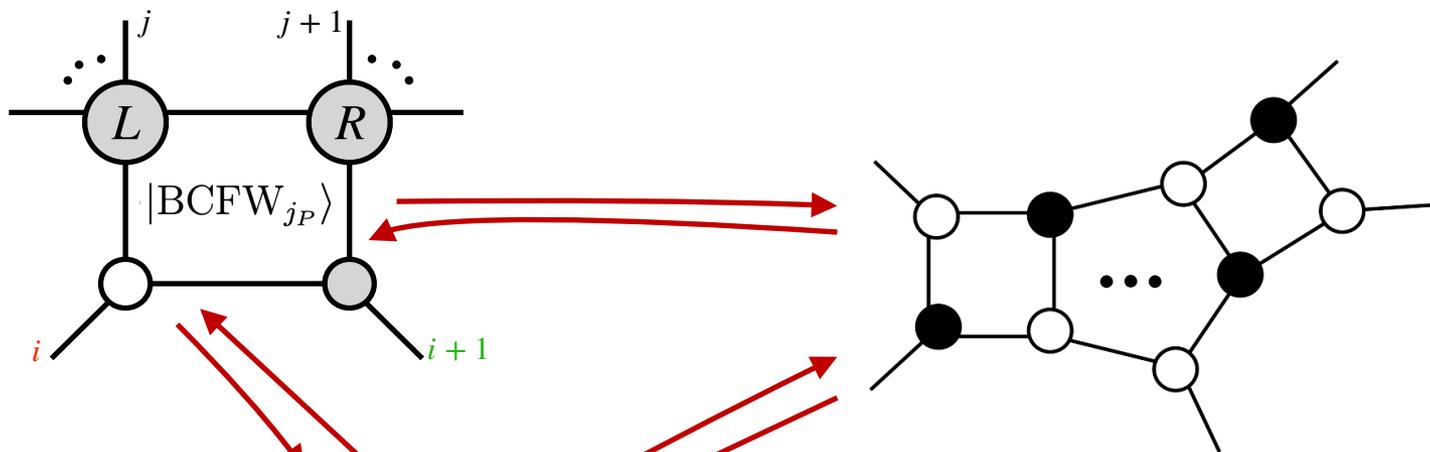
$$M_{ab}(u) |\mathbf{0}, \text{FF}\rangle_{k,n} \neq C_{ab} |\mathbf{0}, \text{FF}\rangle_{k,n} \quad \text{str}[M_{ab}(u)] |\mathbf{0}, \text{FF}\rangle_{k,n} = C_{ab} |\mathbf{0}, \text{FF}\rangle_{k,n}$$

# BCFW рекурсия, Янгиан инварианты и интегралы по Грассманиану

- Мы видим что Янгиан инвариантность для форм факторов нарушена (частично ?) из за различия в “вакуумах”.

$$M_{ab}(u) \frac{F_{n,(k)}}{F_{n,(2)}} = ?$$

- А как вообще строить Янгиан инварианты наиболее общего вида (рациональные)?



- Перестановки (decorated permutations)

Arkani Hamed et al. 12

# BCFW рекурсия, Янгиан инварианты и интегралы по Грассманиану

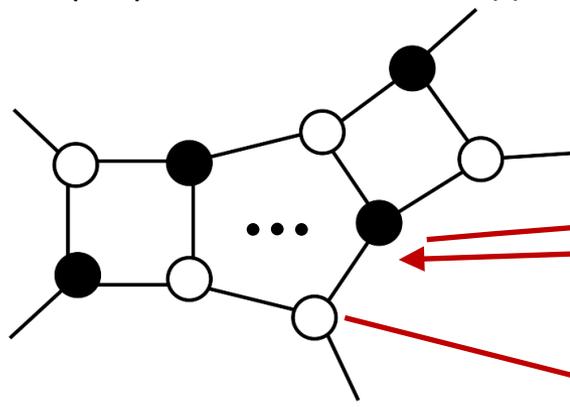
- MHV3 и anti-MHV3 амплитуды могут быть представлены как интегралы по “маленьким” Грассманианам

$$A_3^{(2)} = \int \frac{d^{3 \times 2} C}{\text{Vol}[GL(2)]} \frac{1}{(12)(23)(31)} \prod_{a=1}^2 \delta^{4|4} \left( \sum_{i=1}^3 C_{ai} W_i \right) \longrightarrow \text{Gr}(3,2)$$

Arkani Hamed et al. 12

$$A_3^{(1)} = \int \frac{d^{3 \times 1} C}{\text{Vol}[GL(2)]} \frac{1}{(1)(2)(3)} \delta^{4|4} \left( \sum_{i=1}^3 C_{1i} W_i \right) \longrightarrow \text{Gr}(3,1)$$

Комбинации MHV3 и anti-MHV3 могут быть объединены в интегралы по подмножествам  $\text{Gr}(n,k)$ . В том числе и каждое слагаемое в BCFW рекурсии может быть представлено так:



$$\Omega = \int_{\text{Gr}(n,k)} \prod_{i=1}^{n_I - n_b - n_w} \frac{d\alpha_i}{\alpha_i} \prod_{a=1}^k \delta^{4|4} \left( \sum_{i=1}^n C_{ai}(\alpha) W_i \right)$$

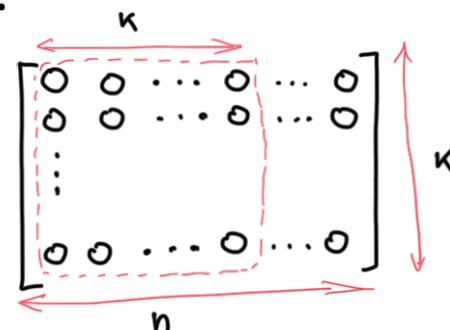
С каждым таким интегралом связана своя перестановка. В общем случае  $C_{ai}$  содержит линейно зависимые столбцы.

# BCFW рекурсия, Янгиан инварианты и интегралы по Грассманиану

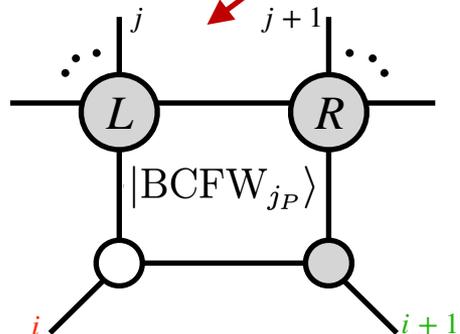
- Какая “самая общая” перестановка (отсутствие линейных зависимостей в C) ?
- Циклический сдвиг на +k.
- Соответствующей этой перестановке интеграл по Грассманиану:

Arkani Hamed et al.

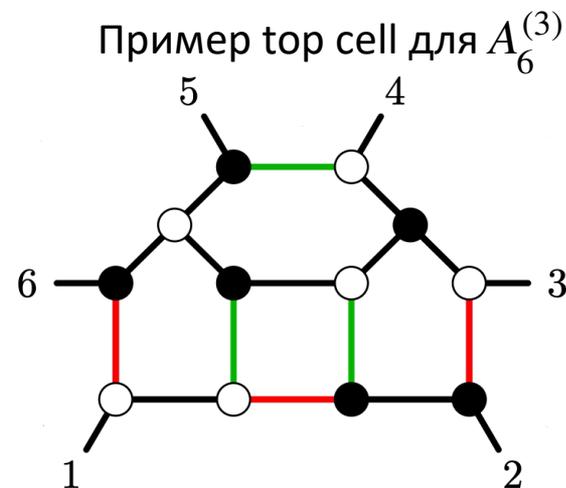
$$\Omega_{\text{top}}[\Gamma] = \int_{\Gamma} \frac{d^{n \times k} C}{\text{Vol}[GL(k)]} \frac{\prod_{a=1}^k \delta^{4|4}(\sum_{i=1}^n C_{ai} W_i)}{(1 \dots k) \dots (n \dots k-1)}$$



$Res[\dots]$  Содержит в себе все члены BCFW рекурсии как **вычеты**



Рациональный Янгаин инвариант наиболее общего вида с циклической симметрией!



# BCFW рекурсия, Янгиан инварианты и интегралы по Грассманиану

- **Оператор склейки позволяет получить аналогичное представление решений BCFW рекурсии для форм факторов  $F_{n,(k)}$ :**

$$\hat{A}_{n+1,n+2} \left[ \Omega_{\text{top}} \right] \Big|_{\Gamma_{\text{tree}}^*} = F_{n,(k)}^{\text{T,WL}}$$

Bork et al. 15,16,17

Начнём с форм факторов оператор Вильсоновских линий:

$$\Omega_{\text{top}}^{\text{WL}}[\Gamma_{\text{tree}}^*] = \int_{\Gamma_{\text{tree}}^*} \frac{d^{n+2 \times k} C}{\text{Vol}[GL(k)]} (\text{Reg.})_{n+1} \frac{\prod_{a=1}^k \delta^{4|4} \left( \sum_{i=1}^{n+2} C_{ai} W_i \right)}{(1 \dots k) \dots (n+2 \dots k-1)}$$

Здесь Reg. фактор определён как:  $(\text{Reg.})_{n+1} = \frac{\langle \xi p \rangle (n+2 \dots 1 \dots k-1)}{\kappa^* (n+1 \dots 1 \dots k-1)}$

Аналогичным образом можно получить представление для обобщённых форм факторов (много W вставок)  $\langle 0 | \Omega_1 \dots \Omega_n \mathcal{W}_1 \dots \mathcal{W}_n S | 0 \rangle$

$$\Omega_{\text{top}}^{\text{WL} \times m}[\Gamma_{\text{tree}}^*] = \int_{\Gamma_{\text{tree}}^*} \frac{d^{n+2 \times k} C}{\text{Vol}[GL(k)]} \prod_{j=m}^{n+1} (\text{Reg.})_j \frac{\prod_{a=1}^k \delta^{4|4} \left( \sum_{i=1}^{n+2m} C_{ai} W_i \right)}{(1 \dots k) \dots (n+2 \dots k-1)}$$

# BCFW рекурсия, Янгиан инварианты и интегралы по Грассманиану

- Оператор *склейки* позволяет получить аналогичное представление решений BCFW рекурсии для форм факторов:

$$\hat{A}_{n+1,n+2} \left[ \Omega_{\text{top}} \right] \Big|_{\Gamma_{\text{tree}}^*} = F_{n,(k)}^{\text{T,WL}} \quad \text{Bork et al. 15,17}$$

Wilhelm et al. 15

Аналогичный результат можно получить и для форм факторов операторов из ТЭИ:

$$\Omega_{\text{top}}^{\text{T}}[\Gamma_{\text{tree}}^*] = \int_{\Gamma_{\text{tree}}^*} \frac{d^{n+2 \times k} C}{\text{Vol}[GL(k)]} (\text{Reg.})_{n+1}^{\text{T}} \frac{\prod_{a=1}^k \delta^{4|4} \left( \sum_{i=1}^{n+2} C_{ai} W_i \right)}{(1 \dots k) \dots (n+2 \dots k-1)} + \text{perm.}$$

Здесь Reg. фактор определён как:

$$(\text{Reg.})_{n+1}^{\text{T}} = \langle \xi_A \xi_B \rangle^2 \frac{Y}{1-Y}, \quad Y = \frac{(n-k+2 \dots n n+1)(n+2 1 \dots k-1)}{(n-k+2 \dots n n+2)(n+1 1 \dots k-1)}$$

- Эти представления помогают “что то” вычислить ?
- Да!

# Форм факторы, импульсные твисторы и дуальная конформная инвариантность

- Рассмотрим форм факторы Вильсоновских линий. Запишем их используя импульсные твисторы:

$$\omega_{\text{top}}^{\text{WL}}[\Gamma_{\text{tree}}^*] = \int_{\Gamma_{\text{tree}}^*} \frac{d^{n+2 \times k-2} D}{\text{Vol}[GL(k)]} (\text{reg.})_{n+1} \frac{\prod_{a=1}^{k-2} \delta^{4|4} (\sum_{i=1}^{n+2} D_{ai} Z_i)}{(1 \dots k) \dots (n+2 \dots k-3)}$$

Здесь reg. фактор определён как  $(\text{reg.})_{n+1} = \left[ 1 + \frac{(n+2 \dots k-2)}{(1 \dots k-2)} \right]^{-1}$

Беря интеграл вычетами можно получить для  $k=3$  (NMHV сект.):

$$\omega[\Gamma_{3,n+2}] = \frac{F_{n,(3)}^{\text{WL}}}{F_{n,(2)}^{\text{WL}}} = \sum_{i < j}^{n+2} c_j [1 \ i - 1 \ i \ j - 1 \ j]$$

Дуальный конформный инвариант (подгруппа Янгиана- $\text{psu}(2,2|4)$ ).  
Часть Янгиан симметрии выжила!

$$c_{n+2} = \frac{1}{1 + \frac{\langle 1 \ i - 1 \ i \ n+1 \rangle}{\langle i - 1 \ i \ n+1 \ n+2 \rangle}}, \text{ and } c_j = 1 \text{ if } j < n+2$$

$$\langle abcd \rangle \equiv \epsilon_{ABCD} Z_a^A Z_b^B Z_c^C Z_d^D$$

Bork et al. 15

Здесь мы используем обозначение:

$$[i \ j \ k \ l \ m] = \frac{\delta^4(\langle i \ j \ k \ l \rangle \eta_m + \text{cyclic permutation})}{\langle i \ j \ k \ l \rangle \langle j \ k \ l \ m \rangle \langle k \ l \ m \ i \rangle \langle l \ m \ i \ j \rangle \langle m \ i \ j \ k \rangle}$$

# Форм факторы, импульсные твисторы и дуальная конформная инвариантность

- Рассмотрим форм факторы Вильсоновских линий. Запишем их используя импульсные твисторы:

$$\omega_{\text{top}}^{\text{WL}}[\Gamma_{\text{tree}}^*] = \int_{\Gamma_{\text{tree}}^*} \frac{d^{n+2 \times k-2} D}{\text{Vol}[GL(k)]} (\text{reg.})_{n+1} \frac{\prod_{a=1}^{k-2} \delta^{4|4} (\sum_{i=1}^{n+2} D_{ai} Z_i)}{(1 \dots k) \dots (n+2 \dots k-3)}$$

Здесь reg. фактор определён как  $(\text{reg.})_{n+1} = \left[ 1 + \frac{(n+2 \dots k-2)}{(1 \dots k-2)} \right]^{-1}$

Беря интеграл вычетами можно получить для  $k=3$ :

$$\omega[\Gamma_{3,n+2}] = \frac{F_{n,(3)}^{\text{WL}}}{F_{n,(2)}^{\text{WL}}} = \sum_{i < j}^{n+2} c_j [1 \ i - 1 \ i \ j - 1 \ j]$$

Дуальный конформный инвариант (подгруппа Янгиана- $\text{psu}(2,2|4)$ ).  
Часть Янгиан симметрии выжила!

$$c_{n+2} = \frac{1}{1 + \frac{\langle 1 \ i - 1 \ i \ n + 1 \rangle}{\langle i - 1 \ i \ n + 1 \ n + 2 \rangle}}, \text{ and } c_j = 1 \text{ if } j < n + 2$$

Частный результат для  $n=4$

$$F_{4,(3)}^{\text{WL}}(g_1^+ g_2^+ g_3^- g_4^-) = \frac{1}{\kappa^*} \frac{\langle p|3+4|2\rangle^3}{\langle p1\rangle[23][34]s_{234}\langle 1|2+3|4\rangle} + \frac{1}{\kappa} \frac{\langle 3|1+2|p\rangle^3}{\langle 12\rangle\langle 23\rangle[4p]s_{123}\langle 1|2+3|4\rangle}$$

# Форм факторы, импульсные твисторы и дуальная конформная инвариантность

- Аналогичные результаты можно получить и для форм факторов из ТЭИ:

$$\Omega_{\text{top}}^T[\Gamma_{\text{tree}}^*] = \int_{\Gamma_{\text{tree}}^*} \frac{d^{n+2 \times k} C}{\text{Vol}[GL(k)]} (\text{Reg.})_{n+1}^T \frac{\prod_{a=1}^k \delta^{4|4} (\sum_{i=1}^{n+2} C_{ai} W_i)}{(1 \dots k) \dots (n+2 \dots k-1)} + \text{perm.}$$

- Перейдя к импульсным твисторам можно показать что:

Wilhelm et al. 15

$$F_{n,(3)}^T = F_{n,(2)}^T \left( \sum_{i=2}^{n-1} \tilde{R}_{1ii}^{(1)} + \sum_{i=2}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} R_{1ji}^{(1)} + \sum_{i=2}^{n-2} \sum_{j=i+2}^n R_{1ji}^{(2)} \right)$$

Bork 14

$$R_{1st}^{(1)} = [1, t, t+1, s-n, s+1-n]$$

$$\tilde{R}_{1tt}^{(1)} = c_t^{(n)} [1, t, t+1, t-n, t+1-n]$$

$$R_{1st}^{(2)} = [1, t, t+1, s, s+1]$$

$$c_t^{(n)} = \frac{\langle 1, t, t+1, t-n \rangle \langle 1, t-n, t+1-n, t+1 \rangle}{\langle 1, t, t+1, 1+n \rangle \langle t, t+1, t-n, t+1-n \rangle}$$

Дуальная конформная симметрия сохранилась (подгруппа Янгиана- $\text{psu}(2,2|4)$ ), т.е. часть Янгиан симметрии снова выжила!

# Форм факторы, импульсные твисторы и дуальная конформная инвариантность

- Можно сформулировать VCFW рекурсию так что бы дуальная конформная симметрия была явной (для ф.ф. ТЭИ):

$$\frac{F_n^{(k)}(\dots, \mathcal{Z}_{-n+2}, \mathcal{Z}_{-n+3}, \dots, \mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2, \mathcal{Z}_3, \dots, \mathcal{Z}_n, \mathcal{Z}_{n+1}, \dots)}{F_n^{(0)}} \stackrel{=}{=} F_{n,(k)}^T \equiv F_n^{(k)}$$

Bork 14

$$= \frac{F_{n-1}^{(k)}}{F_{n-1}^{(0)}}(\dots, \mathcal{Z}_{1-n}, \dots, \mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_3, \mathcal{Z}_4, \dots, \mathcal{Z}_{1+n}, \dots)$$

$$+ \sum_{j=3}^n [1, 2, 3, j, j+1] \times \frac{A_{n_1}^{(k_1)}}{A_{n_1}^{(0)}}(\mathcal{Z}_I, \hat{\mathcal{Z}}_2, \dots, \mathcal{Z}_j) \times \frac{F_{n_2}^{(k_2)}}{F_{n_2}^{(0)}}(\dots, \mathcal{Z}_0, \mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_I, \mathcal{Z}_{j+1}, \dots)$$

$$+ \sum_{j=3}^{n-1} [1, 2, 3, j-n, j+1-n] \times \frac{F_{n_1}^{(k_1)}}{F_{n_1}^{(0)}}(\dots, \mathcal{Z}_{j-n}, \mathcal{Z}_I, \hat{\mathcal{Z}}_2, \mathcal{Z}_3, \dots) \times \frac{A_{n_2}^{(k_2)}}{A_{n_2}^{(0)}}(\mathcal{Z}_I, \mathcal{Z}_1, \dots, \mathcal{Z}_{j+1-n})$$

$$+ c_2^{(n)} [1, 2, 3, 2-n, 3-n] \times \frac{F_2^{(k_1)}}{F_2^{(0)}}(\dots, \mathcal{Z}_{2-n}, \mathcal{Z}_I, \hat{\mathcal{Z}}_2, \mathcal{Z}_3, \dots) \times \frac{A_n^{(k_2)}}{A_n^{(0)}}(\mathcal{Z}_I, \mathcal{Z}_1, \dots, \mathcal{Z}_{-n+3}).$$

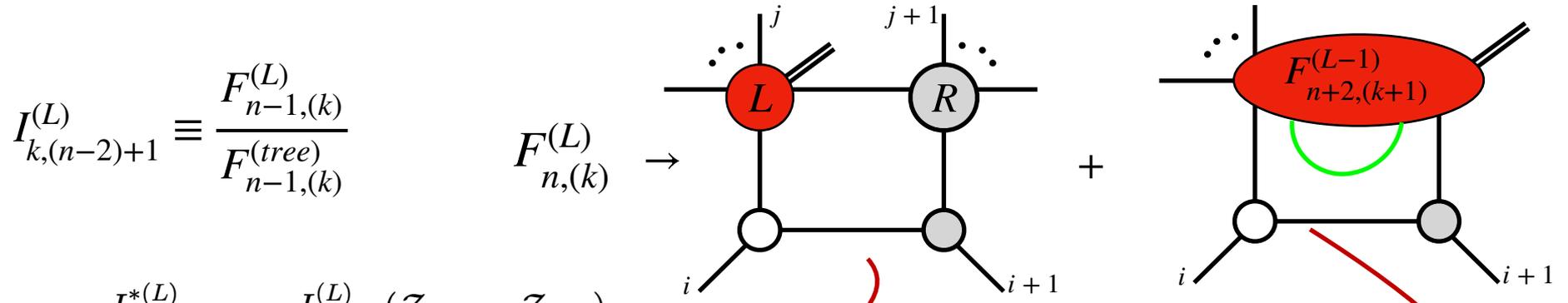
$$\mathcal{Z}_I = (jj+1) \cap (123) \text{ and } \hat{\mathcal{Z}}_2 = (12) \cap (0jj+1)$$

$$(jj+1) \cap (klm) = \mathcal{Z}_j \langle j+1klm \rangle + \mathcal{Z}_{j+1} \langle jklm \rangle$$

$\mathcal{Z}$  это Z и его “фермионная” часть

# BCFW рекурсия не только для деревьев!

## BCFW рекурсия для интеграндов. Пример форм факторов В.линий



$$I_{k, (n-2)+1}^{(L)} \equiv \frac{F_{n-1, (k)}^{(L)}}{F_{n-1, (k)}^{(tree)}}$$

$$F_{n, (k)}^{(L)} \rightarrow$$

$$I_{k, (n-2)+1}^{*(L)} = I_{k, n-1}^{(L)}(\mathcal{Z}_1, \dots, \mathcal{Z}_{n-1}) + \sum_{j=2}^{n-2} [j-1, j, n-1, n^*, 1] I_{k_1, n+2-j}^{(L_1)}(\mathcal{Z}_{I_j}, \mathcal{Z}_j, \mathcal{Z}_{j+1}, \dots, \hat{\mathcal{Z}}_{n_j}^*) I_{k_2, j}^{(L_2)}(\mathcal{Z}_{I_j}, \mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2, \dots, \mathcal{Z}_{j-1}) + \int \frac{d^{4|4} \mathcal{Z}_A d^{4|4} \mathcal{Z}_B}{\text{Vol}[GL(2)]} \int_{GL(2)} [A, B, n-1, n^*, 1] I_{k+1, n+2}^{(L-1)}(\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2, \dots, \hat{\mathcal{Z}}_{n_{AB}}^*, \mathcal{Z}_A, \mathcal{Z}_B),$$

where  $\hat{\mathcal{Z}}_{n_j} = (n-1, n^*) \cap (1, j-1, j)$ ,  $\mathcal{Z}_{I_j} = (j-1, j) \cap (1, n-1, n)$ ,  $\hat{\mathcal{Z}}_{n_{AB}} = (n-1, n^*) \cap (A, B, 1)$  and  $k_1 + k_2 + 1 = k$ .  $\mathcal{Z}_n^*$  is given by

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{Z}}_n^* &= (n-1, n^*) \cap (A, B, 1), \\ \hat{\mathcal{Z}}_B &= (A, B) \cap (n-1, n, 1), \\ \mathcal{Z}_n^* &= \mathcal{Z}_n + \frac{\langle p\xi \rangle}{\langle p1 \rangle} \mathcal{Z}_1. \end{aligned}$$

Bork et al. 17

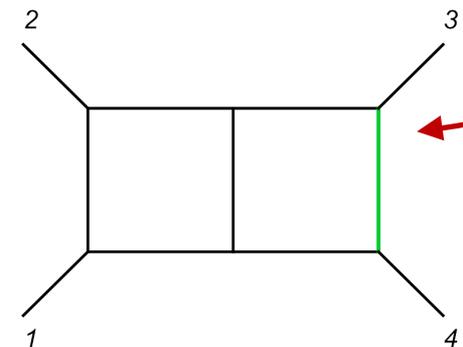
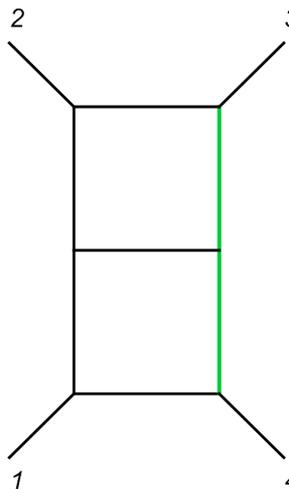
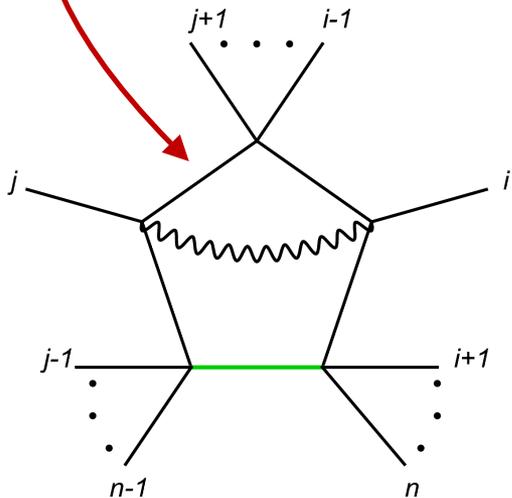
# BCFW рекурсия не только для деревьев!

## BCFW рекурсия для интеграндов.

$$I_{k,(n-2)+1}^{(L)} \equiv \frac{F_{n-1,(k)}^{(L)}}{F_{n-1,(k)}^{(tree)}} \quad Z_n^* = Z_n - \frac{\langle p\xi \rangle}{\langle p1 \rangle} Z_1 \quad d^4l = \langle ABd^2A \rangle \langle ABd^2B \rangle = \frac{d^4Z_A d^4Z_B}{\text{Vol}[GL(2)]}$$

$$I_{2,(n-2)+1}^{*(1)} = \sum_{i < j} \frac{\langle AB(i-1 \ i \ i+1) \cap (j-1 \ j \ j+1) \rangle \langle n-1 \ n^* \ i \ j \rangle}{\langle AB \ n-1 \ n^* \rangle \langle AB \ i-1 \ i \rangle \langle AB \ i \ i+1 \rangle \langle AB \ j-1 \ j \rangle \langle AB \ j \ j+1 \rangle}$$

$$I_{2,2+1}^{*(2)} = \frac{\langle 2341 \rangle \langle 3412 \rangle \langle 4123 \rangle}{\langle AB41 \rangle \langle AB12 \rangle \langle AB23 \rangle \langle CD23 \rangle \langle CD34^* \rangle \langle CD41 \rangle \langle ABCD \rangle} + \frac{\langle 3412 \rangle \langle 4123 \rangle \langle 1234 \rangle}{\langle AB12 \rangle \langle AB23 \rangle \langle AB34^* \rangle \langle CD34^* \rangle \langle CD41 \rangle \langle CD12 \rangle \langle ABCD \rangle}$$



Bork et al. 17

# Подводя промежуточные итоги

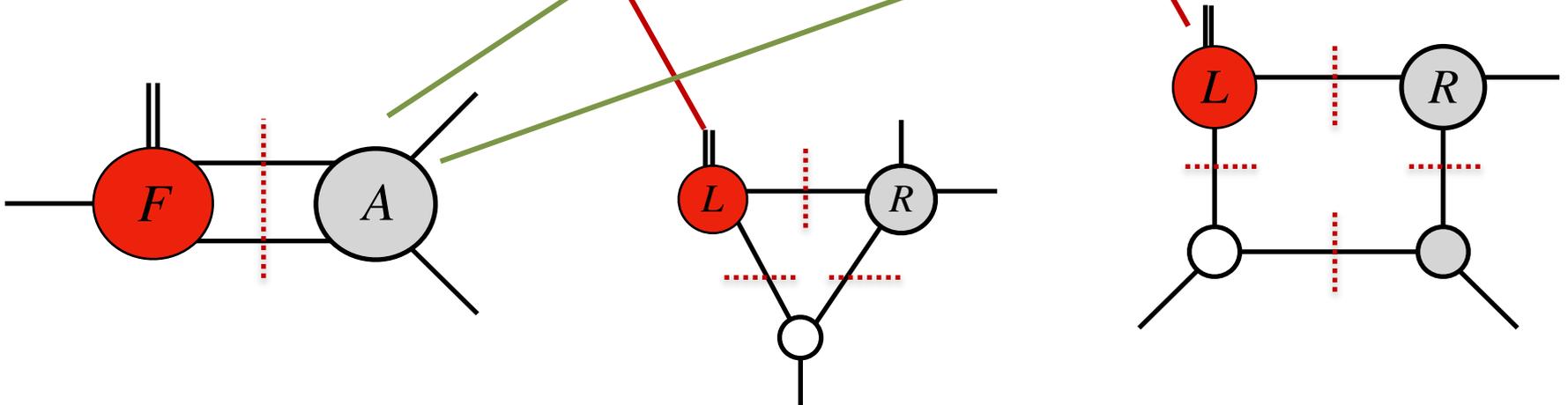
- Мы имеем замкнутые выражения для любых древесных (обобщённых) форм факторов операторов  $V$ -линий и операторов из мультиплета ТЭИ.
- Это важно для петлевых вычислений *методами унитарных разрезов*.
- Эти форм факторы сохраняют (как минимум!) часть Янгиан-симметрий амплитуд рассеяния.
- Это важно для построения коллинеарного ОПЕ для форм факторов (интегрируемость в петлях)
- VCFW рекурсия позволяет вычислять как древесные ответы для петлевых интеграндов (аналог метода унитарных разрезов).
  - Пора двигаться к петлям!

# Методы унитарности и петли. Амплитуды и форм факторы.

- **Метод унитарных разрезов позволяет получать разложение амплитуды или форм фактора по скалярным в L петлям интегралам используя знания ответов в L-1 петле.**
- **Начинаем с деревьев!**

- **Поясним на примере:**

$$F_3^{(1)} = \sum_{n=0}^2 \mathbb{P}^n \left[ (s_{12} + s_{13}) \text{Tri}(p_1, p_2 + p_3) + \frac{1}{2} s_{12} s_{23} \text{Box}(p_1, p_2, p_3) \right]$$



# Методы унитарности и петли. Амплитуды и форм факторы.

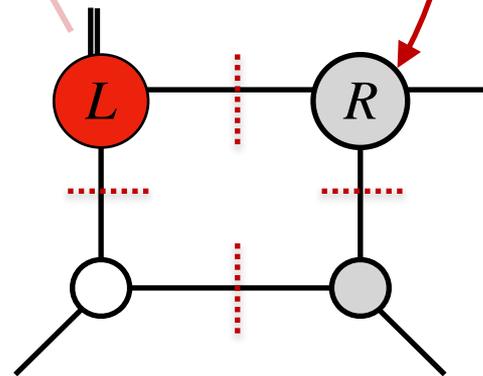
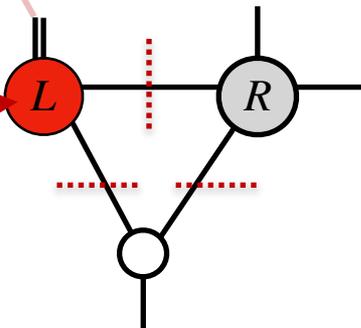
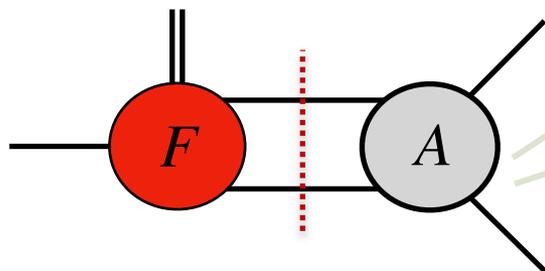
- Метод унитарных разрезов позволяет получать разложение амплитуды или форм фактора по скалярным в L петлям интегралам используя знания ответов в L-1 петле.

- Начинаем с деревьев!

- Поясним на примере:

$$A_3^{(2)} = \delta^4 \left( \sum_{i=1}^3 \lambda_i^\alpha \tilde{\lambda}_i^{\dot{\alpha}} \right) \frac{\delta^8 \left( \sum_{i=1}^3 \lambda_i^\alpha \eta_i \right)}{\langle 12 \rangle \langle 23 \rangle \langle 31 \rangle}$$

$$F_3^{(1)} = \sum_{n=0}^2 \mathbb{P}^n \left[ (s_{12} + s_{13}) \text{Tri}(p_1, p_2 + p_3) + \frac{1}{2} s_{12} s_{23} \text{Box}(p_1, p_2, p_3) \right]$$



$$F_{2,(2)}^T = \delta^4 \left( \sum_{i=1}^2 \lambda_i^\alpha \tilde{\lambda}_i^{\dot{\alpha}} - q \right) \frac{\delta^8 \left( \sum_{i=1}^2 \lambda_i^\alpha \eta_i + \gamma \right)}{\langle 12 \rangle \langle 21 \rangle}$$

# Спиральные спиноры. Не только D=4.

- Можно рассматривать суперпространства массовой поверхности в SYM теориях в высших размерностях:

$$\mathcal{N} = (1, 1) \text{ D=6 on-shell harmonic superspace} = \{\lambda_a^A, \tilde{\lambda}_A^{\dot{a}}, \eta_a^-, \bar{\eta}_{\dot{a}}^+\} \leftarrow \text{SO(4)}$$

$$p^{AB} = \sum_i^n \lambda^{Aa}(i) \lambda_a^B(i), \quad q^{-A} = \sum_i^n \lambda_a^A(i) \eta_i^{-a}, \quad \bar{q}_A^+ = \sum_i^n \tilde{\lambda}_A^{\dot{a}}(i) \bar{\eta}_{\dot{a},i}^+$$

$\frac{SU(2)_R}{U(1)} \times \frac{SU(2)_R}{U(1)}$   
Гармоники

$$\mathcal{N} = 1 \text{ D=8 on-shell superspace} = \{\lambda^{Aa}, \tilde{\lambda}_a^{A'}, \eta_a\} \text{ SO(6)}$$

$$p^{AB'} = \sum_{i=1}^n \lambda^{Aa}(i) \tilde{\lambda}_a^{B'}(i), \quad q^A = \sum_{i=1}^n \lambda^{Aa}(i) \eta_a, \quad \bar{q}^{B'} = \sum_{i=1}^n \tilde{\lambda}_a^{B'}(i) \frac{\partial}{\partial \eta_a}$$

Используя  $p, q, \bar{q}$  ограничения получаем:

Bork et al. 15

$$\mathcal{A}_4^{tree} : \quad \mathcal{A}_4^{(0)} = \delta^6(p^{AB}) \delta^4(q^A) \delta^4(\bar{q}_A) \frac{1}{st} \quad \text{D=6} \quad \mathcal{A}_4^{(0)} = \delta^8(p^{AB}) \delta^8(q^A) \frac{1}{st} \quad \text{D=8}$$

# Спиральные спиноры. Не только D=4.

- Рассматривая итерированные 2-ух частичные разрезы можно получить что для любого D:

$$\frac{\mathcal{A}_4}{\mathcal{A}_4^{(0)}} = 1 + \sum_L M_4^{(L)}(s, t) =$$

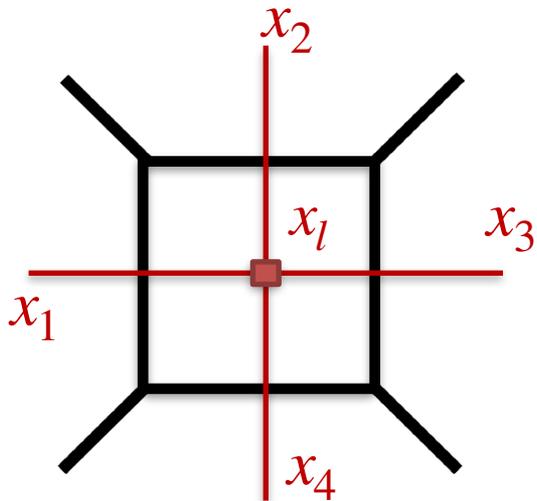
$$= 1 - g^2 st \text{ (square diagram)} + g^4 s^2 t \text{ (two squares side-by-side)} + st^2 \text{ (two squares stacked)} - g^6 s^3 t \text{ (three squares side-by-side)} + 2s^2 t \text{ (square with dashed arc)} + 2st^2 \text{ (square with dashed arc)} + st^3 \text{ (three squares stacked)} + \dots$$

Аналогичные результаты справедливы для 5-точечной амплитуды (до двух петель), 2 и 3 частичных форм факторов операторов из ТЭИ, n-частичных форм факторов оператора  $\text{tr}(\phi_{AB}^n)$

# Интегранды амплитуд рассеяния и форм факторов в $D > 4$

## Кулоновская ветвь $D=4$ теории

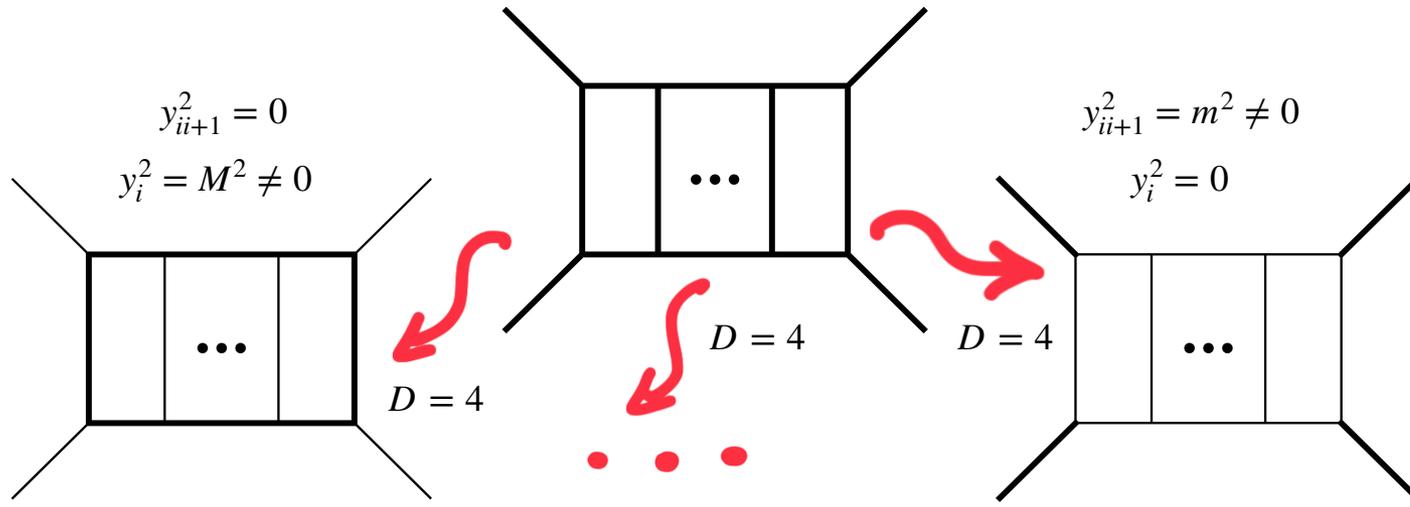
- Мы можем ограничить петлевое интегрирование  $D=4$  подмногообразием и рассматривать различные “кинематические режимы”
- Рассмотрим однопетлевой пример. Вводя дуальные координаты мы можем развить их на  $D=4$  и  $D > 4$  части:



Let us split  $D$  dimensional coordinates as

$$x_{li}^2 = x_{li}^{2, D=4} + y_{il}^2$$

# Интегранды амплитуд рассеяния и форм факторов в $D > 4$ Кулоновская ветвь $D=4$ теории



$$\delta^{D-4}(y_l) \text{ и } y_i^2 = 0$$

$$M_4 = 1 + \frac{a st}{2} \text{ [diagram]} + \frac{a^2 s^2 t}{4} \text{ [diagram]} + \frac{a^2 s t^2}{4} \text{ [diagram]} + \dots$$

$$\delta^{D-4}(y_l) \text{ и } y_{ii+1}^2 = 0$$

$$M_4 = 1 + \frac{a st}{2} \text{ [diagram]} + \frac{a^2 s^2 t}{4} \text{ [diagram]} + \frac{a^2 s t^2}{4} \text{ [diagram]} + \dots$$

# Интегранды амплитуд рассеяния и форм факторов в $D>4$ Кулоновская ветвь $D=4$ теории

Амплитуды полученные таким образом воспроизводят результаты для Кулоновской ветви  $N=4$  SYM:

$$M_4 = 1 + \frac{a st}{2} \text{ (square)} + \frac{a^2 s^2 t}{4} \text{ (rectangle)} + \frac{a^2 s t^2}{4} \text{ (vertical rectangle)} + \dots$$

Пример выбора vev (модулей теории) соответствующий амплитуде выше:

$$\hat{S}_{\mathcal{N}=4}^{U(N+M)} = \int d^4x \text{Tr} \left( -\frac{1}{4} \hat{F}_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{2} (D_\mu \hat{\Phi}_I)^2 + \frac{g^2}{4} [\hat{\Phi}_I, \hat{\Phi}_J]^2 + \frac{i}{2} \hat{\Psi} \Gamma^\mu D_\mu \hat{\Psi} + \frac{g}{2} \hat{\Psi} \Gamma^I [\hat{\Phi}_I, \hat{\Psi}] \right)$$

$$\hat{A}_\mu = \begin{pmatrix} (A_\mu)_{ab} & (A_\mu)_{aj} \\ (A_\mu)_{ia} & (A_\mu)_{ij} \end{pmatrix}, \quad \hat{\Phi}_I = \begin{pmatrix} (\Phi_I)_{ab} & \frac{m_i^I}{g} \delta_{ij} + (\Phi_I)_{ij} \\ (\Phi_I)_{ia} & (\Phi_I)_{ij} \end{pmatrix}, \quad \hat{\Psi} = \begin{pmatrix} (\Psi)_{ab} & (\Psi)_{aj} \\ (\Psi)_{ia} & (\Psi)_{ij} \end{pmatrix}$$

$a, b = 1, \dots, N, i, j = N + 1, \dots, N + M,$

for example:  $\delta_{I9} \frac{m_i}{g}$

( see [arXiv: 0908.0684](https://arxiv.org/abs/0908.0684) J.Henn et al. for a particular example )

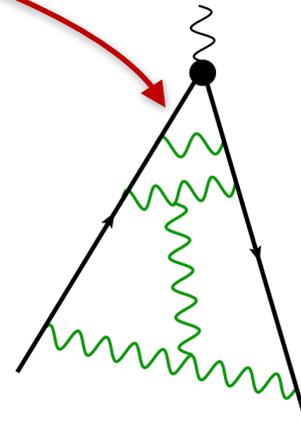
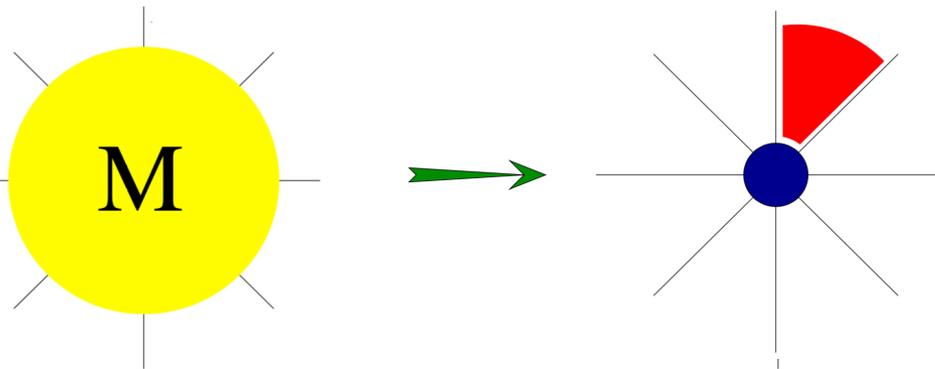
# Инфракрасные асимптотики в калибровочных теориях. Факторизация.

- In a planar theory without running of the coupling such as N=4 SYM:

$$\log M_n = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \log F_2 \left( \frac{\mu^2}{s_{ii+1}}, g, \varepsilon \right) + \boxed{\mathcal{F}_n(\{p_i\}, g) - n c(g)} + O(\varepsilon)$$

This factor contains all IR effects (divergences) and can be interpreted as matrix element - **Sudakov form factor**

Log of hard function, finite as  $\varepsilon \rightarrow 0$



Typical Feynman diagram contributing to quark em. current form factor.

$$F_2 = \Gamma_{2,\mu} / \Gamma_{2,\mu}^{tree}$$

$$\Gamma_{2,\mu} = \langle 0 | J_\mu(q) | k_1^{\lambda_1} k_2^{\lambda_2} \rangle$$

# Судаковский форм фактор в N=4 SYM

Explicit computations up to four loops [1112.4524](#), [2110.13166](#) (*van Neerven 86 and many others - Bork 10, J.Henn et al. 11, R. N. Lee 21*) are in full agreement with general expectation:

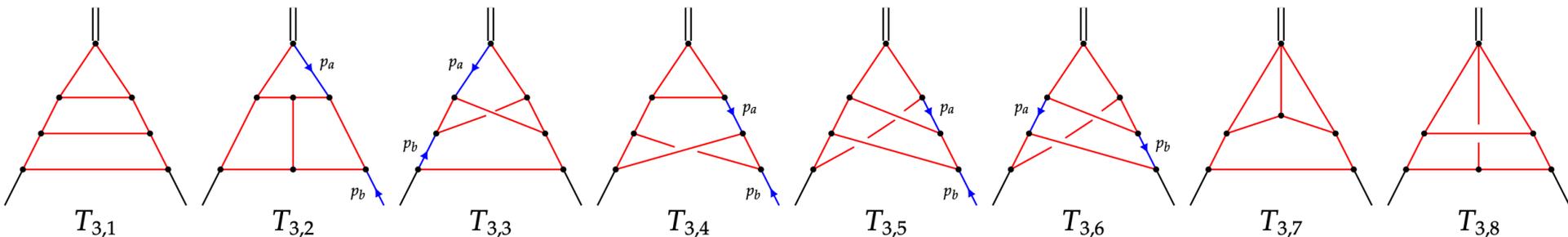
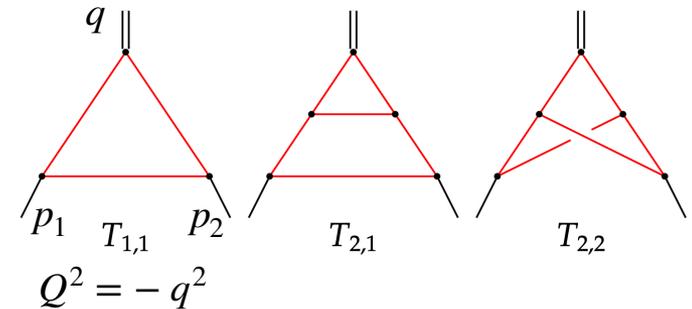
$$\log F_2\left(\frac{\mu^2}{Q^2}, a, \epsilon\right) = - \sum_{l=1}^{\infty} \frac{a^l}{2} \left( \frac{\Gamma_{cusp}^{(l)}}{(l\epsilon)^2} + \frac{G^{(l)}}{(l\epsilon)} + f^{(l)} \right) \left( \frac{\mu^2}{Q^2} \right)^{l\epsilon} + O(\epsilon)$$

Up to three loop computations can be organized as follows ( see [1112.4524](#)):

$$F = 1 + \frac{a}{2} F_1 + \frac{a^2}{4} F_2 + \frac{a^3}{8} F_3 + \dots$$

$$F_1 = 2Q^2 T_{1,1}, \quad F_2 = Q^4 (4T_{2,1} + T_{2,2})$$

$$F_3 = Q^4 (Q^2 8T_{3,1} - 2T_{3,2} + 4T_{3,3} + 4T_{3,4} - 4T_{3,5} - 4T_{3,6} - 4T_{3,7} + 2T_{3,8})$$



# Судаковский форм фактор в N=4 SYM

Let us also note that:  $\Gamma_2 = \langle 0 | \mathcal{T}(Q) | \Omega_1 \Omega_2 \rangle$  and  $F = \Gamma_2 / \Gamma_2^{tree}$

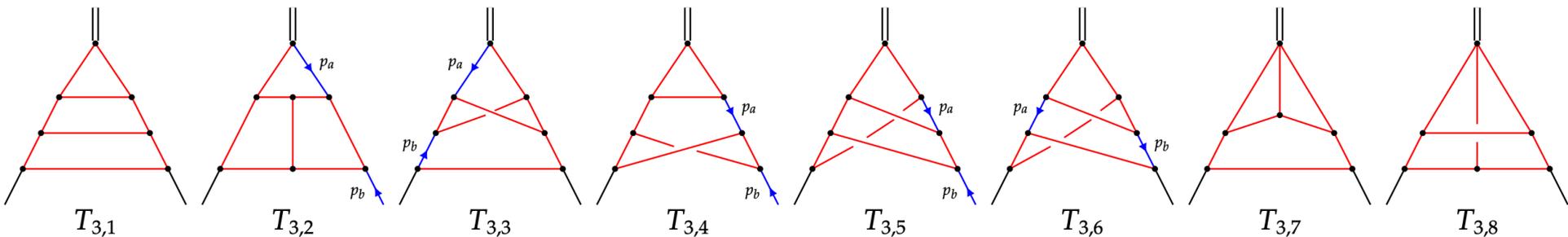
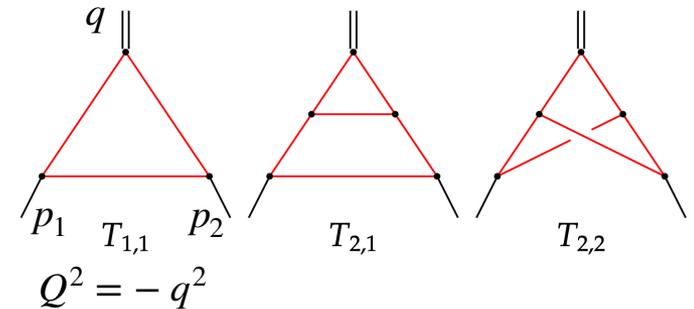
Any operator from  
street tensor supermultiplet,  
for example:  $tr(\Phi_I \Phi_J)$

Two particle on-shell state

Three loop computations can be organised as follows:  $F = 1 + \frac{a}{2} F_1 + \frac{a^2}{4} F_2 + \frac{a^3}{8} F_3 + \dots$   
( see [1112.4524](#) )

$$F_1 = 2Q^2 T_{1,1}, \quad F_2 = Q^4 (4T_{2,1} + T_{2,2})$$

$$F_3 = Q^4 (Q^2 8T_{3,1} - 2T_{3,2} + 4T_{3,3} + 4T_{3,4} - 4T_{3,5} - 4T_{3,6} - 4T_{3,7} + 2T_{3,8})$$



# Касповая аномальная размерность в N=4 SYM

$$\Gamma_{cusp}(a) = a \left[ \mathbb{Q} \frac{1}{1 + \mathbb{K}} \right]_{11},$$

See for example [1010.5237](#) and references therein (*B.Basso 10*).

where the elements  $(\mathbb{K})_{nm}$  and  $(\mathbb{Q})_{nm}$  are given by:

$$(\mathbb{K})_{nm} = 2m(-1)^{m(n+1)} \int_0^\infty \frac{dt}{t} \frac{J_n(\sqrt{2at}) J_m(\sqrt{2at})}{e^t - 1}, \quad (\mathbb{Q})_{nm} = \delta_{nm} n (-1)^{n+1}.$$

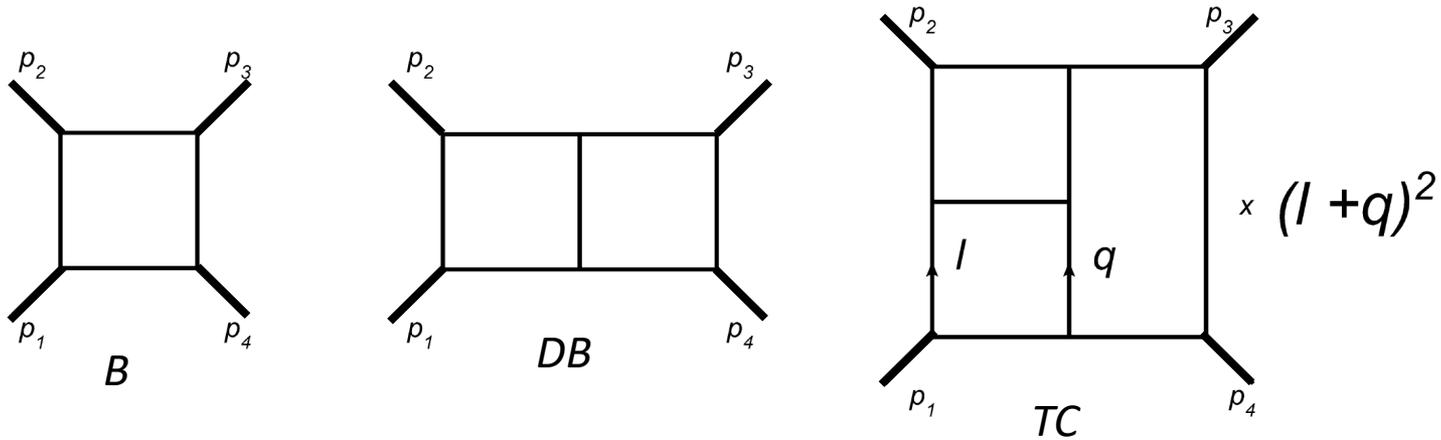
This definition is especially useful in weak coupling limit. For example one can easily get (6 loop result):

**GammaCuspPhys + O[g] ^ (L + 2)**

$$\begin{aligned} & 1 - \frac{\pi^2 g^2}{3} + \frac{11 \pi^4 g^4}{45} + \left( -\frac{73 \pi^6}{315} + 8 \text{Zeta}[3]^2 \right) g^6 + \left( \frac{3548 \pi^8}{14175} - \frac{16}{3} \pi^2 \text{Zeta}[3]^2 - 160 \text{Zeta}[3] \text{Zeta}[5] \right) g^8 + \\ & \left( -\frac{136883 \pi^{10}}{467775} + \frac{64}{15} \pi^4 \text{Zeta}[3]^2 + \frac{320}{3} \pi^2 \text{Zeta}[3] \text{Zeta}[5] + 816 \text{Zeta}[5]^2 + 1680 \text{Zeta}[3] \text{Zeta}[7] \right) g^{10} + \\ & \left( \frac{15360178 \pi^{12}}{42567525} - \frac{752}{189} \pi^6 \text{Zeta}[3]^2 + 64 \text{Zeta}[3]^4 - \frac{1312}{15} \pi^4 \text{Zeta}[3] \text{Zeta}[5] - 544 \pi^2 \text{Zeta}[5]^2 - \right. \\ & \left. 1120 \pi^2 \text{Zeta}[3] \text{Zeta}[7] - 17472 \text{Zeta}[5] \text{Zeta}[7] - 18816 \text{Zeta}[3] \text{Zeta}[9] \right) g^{12} + O[g]^{14} \end{aligned}$$

$g^2 \sim a$

# Амплитуды рассеяния на кулоновской ветви N=4 SYM. “Квази-оффшельная” кинематика



$$M_4^{(1)} = \frac{1}{2} st B(s, t) + O(m^2), \quad M_4^{(2)} = \frac{1}{4} (s^2 t DB(s, t) + st^2 DB(t, s)) + O(m^2),$$

$$M_4^{(3)} = \frac{1}{8} (s^3 t TB(s, t) + st^3 TB(t, s) + 2s^2 t TC(s, t) + 2ts^2 TC(t, s)) + O(m^2)$$

Using “magical identities” one can show that **all** these integrals are proportional to Ussyukina-Davydychev box functions (do not mix them with form factors from previous slides!!):

$$M_4^{(1)} = \frac{1}{2} F_1(x, x) + O(m^2), \quad M_4^{(2)} = \frac{1}{2} F_2(x, x) + O(m^2), \quad M_4^{(3)} = \frac{3}{4} F_3(x, x) + O(m^2)$$

$x = m^4/st$

# Амплитуды рассеяния на кулоновской ветви N=4 SYM. “Квази-оффшельная” кинематика

$$M_4^{(1)} = \frac{1}{2}F_1(x, x) + O(m^2), \quad M_4^{(2)} = \frac{1}{2}F_2(x, x) + O(m^2), \quad M_4^{(3)} = \frac{3}{4}F_3(x, x) + O(m^2)$$

With:

$$\begin{aligned} F_1(x, x) &= \log^2(x) + 2\zeta_2 + O(m^2), \\ F_2(x, x) &= \frac{\log^4(x)}{4} + 3\zeta_2 \log^2(x) + \frac{21\zeta_4}{2} + O(m^2), \\ F_3(x, x) &= \frac{\log^6(x)}{36} + \frac{5\zeta_2}{6} \log^4(x) + \frac{35\zeta_4}{2} \log^2(x) + \frac{155\zeta_6}{4} + O(m^2). \end{aligned} \quad x = \frac{m^4}{st}$$

Results into:

$$\log M_4 = \left( -\frac{a}{2} + \zeta_2 a^2 - 8\zeta_4 a^3 + \dots \right) \log^2(x) + \left( -\zeta_2 a + 4\zeta_4 a^2 - \frac{64}{3}\zeta_6 a^3 + \dots \right) + O(m^2)$$

Which is exactly:

$$\log M_4 = -\frac{\Gamma_{oct}(a)}{4} \log^2\left(\frac{m^4}{st}\right) - \frac{D(a)}{2} \quad \begin{aligned} \Gamma_{oct}(a) &= \frac{2}{\pi^2} \log\left(\cosh\left(\pi\sqrt{2a}\right)\right) = 2a - 4\zeta_2 a^2 + 32\zeta_4 a^3 + \dots, \\ D(a) &= \frac{1}{4} \log\left(\frac{\sinh(2\pi\sqrt{2a})}{2\pi\sqrt{2a}}\right) = 2\zeta_2 a - 8\zeta_4 a^2 - \frac{128\zeta_6}{3} a^3 + \dots \end{aligned}$$

# Амплитуды рассеяния на кулоновской ветви N=4 SYM. “Квази-оффшельная” кинематика

[arXiv: 1811.03282](https://arxiv.org/abs/1811.03282) (F. Coronado et al.)

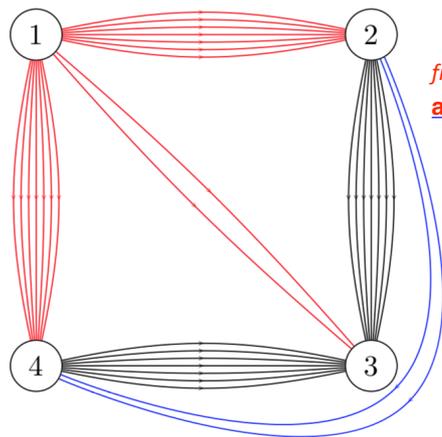
[arXiv: 1907.13131](https://arxiv.org/abs/1907.13131)

$$G_4 = \langle \mathcal{O}_1(x_1) \dots \mathcal{O}_4(x_4) \rangle, \quad K \gg 1$$

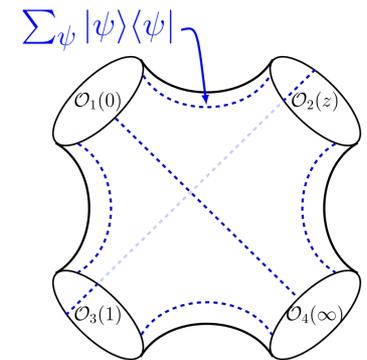
where  $\mathcal{O}_1 = \text{Tr}(\bar{X}^{2K})$ ,  $\mathcal{O}_2 = \text{Tr}(X^K \bar{Z}^K)$ ,  $\mathcal{O}_3 = \text{Tr}(Z^{2K})$  and  $\mathcal{O}_4 = \text{Tr}(Z^K \bar{X}^K)$

X, Y and Z are 3 complex scalars from N=4 SYM Lagrangian

$$G_4 = \frac{\mathbb{O}_0^2}{(x_{12}^2 x_{23}^2 x_{34}^2 x_{41}^2)^K}$$



from  
[arXiv:2106.03892](https://arxiv.org/abs/2106.03892)



$$\mathbb{O}_0 = \det(1 - \mathbb{K}_0),$$

$$(\mathbb{K}_0)_{nm} = \sum_{l=n+m-1}^{\infty} C_{nm}^{(l)} (-a/2)^l F_l(z, \bar{z}),$$

Ussyukina-Davydychev  
box functions

$$C_{nm}^{(l)} = \frac{-(2m-1)(2l)!(l-1)!l!}{(l-(n+m-1))!(l+(n+m-1))!(l-|n+m|)!(l+|n+m|)!}$$

# Амплитуды рассеяния на кулоновской ветви N=4 SYM. “Квази-оффшельная” кинематика

An example of (relatively) similar correlator-amplitude duality see [1007.3246](#) (Korchemsky et al.)

$$\log M_4 = \log \mathbb{O}_0 + O(m^2)$$

**Conjecture** from [arXiv:2106.03892](#) (verified up to **four loops** Coronado, Caron-Huot)

Original result for correlation function (octagon) when  $x_{ii-1}^2 \ll 1$ :

$$\log \mathbb{O}_0 = -\frac{\Gamma_{oct}(a)}{8} \log^2 \left( \frac{x_{12}^2 x_{23}^2 x_{34}^2 x_{41}^2}{(x_{13}^2 x_{24}^2)^2} \right) - \frac{a}{4} \log^2 \left( \frac{x_{12}^2 x_{34}^2}{x_{23}^2 x_{41}^2} \right) - \frac{D(a)}{2}$$

For the amplitude in equal mass of external particles limit this translates into:

$$\log M_4 = -\frac{\Gamma_{oct}(a)}{4} \log^2 \left( \frac{m^4}{st} \right) - \frac{D(a)}{2} + O(m^2)$$

$$p_i = x_i - x_{i-1}$$

$$\Gamma_{oct}(a) = \frac{2}{\pi^2} \log \left( \cosh \left( \pi \sqrt{2a} \right) \right) = 2a - 4\zeta_2 a^2 + 32\zeta_4 a^3 + \dots,$$

$$D(a) = \frac{1}{4} \log \left( \frac{\sinh(2\pi \sqrt{2a})}{2\pi \sqrt{2a}} \right) = 2\zeta_2 a - 8\zeta_4 a^2 - \frac{128\zeta_6}{3} a^3 + \dots$$

[arXiv: 1907.13131](#)  
(Belitsky, Korchemsky)

# Амплитуды рассеяния на кулоновской ветви N=4 SYM. “Квази-оффшельная” кинематика

An example of (relatively) similar correlator-amplitude duality see [1007.3246](#) (Korchensky et al.)

$$\log M_4 = \log \mathbb{O}_0 + O(m^2)$$

**Conjecture** from [arXiv:2106.03892](#) (verified up to **four loops** Coronado, Caron-Huot)

For the amplitude in equal mass of external particles limit this translates into:

$$\log M_4 = -\frac{\Gamma_{oct}(a)}{2} \left( \log^2 \left( \frac{m^2}{s} \right) + \log^2 \left( \frac{m^2}{t} \right) \right) + \tilde{\mathcal{F}}_4 + O(m^2)$$

To compare with “internal massive particles” case:

$$\log M_n = \sum_{i=1}^n \left( -\frac{\Gamma_{cusp}(a)}{8} \log^2 \left( \frac{m^2}{s_{ii+1}} \right) + \frac{\tilde{G}(a)}{2} \log \left( \frac{m^2}{s_{ii+1}} \right) \right) + \mathcal{F}_n + O(m^2)$$

- This “quasi off-shell” IR limit **is NOT controlled** by Gamma Cusp!!!

# Форм факторы на Кулоновской ветви N=4 SYM

- What can we tell about form factors in this massive (off-shell) regime ?
- Will factorization formula hold ?
- Which anomalous dimension will control  $\log(m^2)$ ?

As before we will assume that the expansion in terms of master integrals is universal.

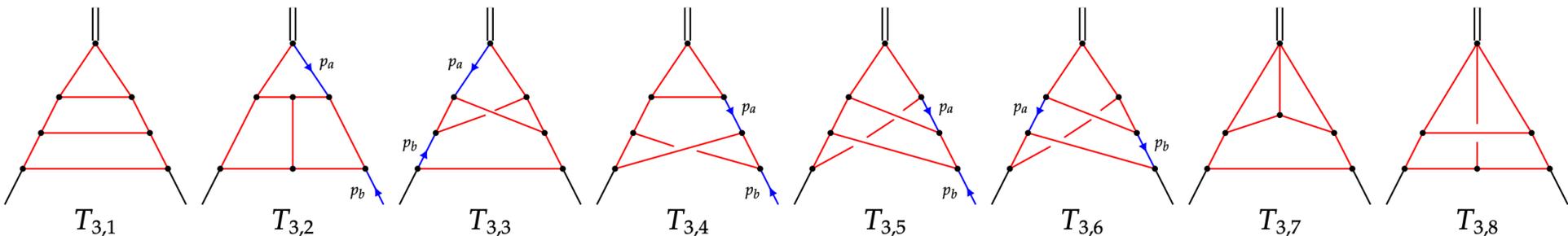
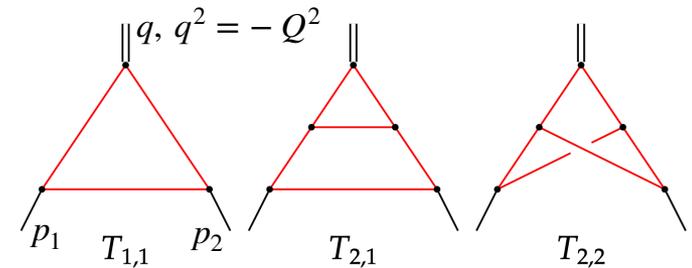
$$F_1 = 2Q^2 T_{1,1}, \quad F_2 = Q^4 (4T_{2,1} + T_{2,2})$$

$$F = 1 + \frac{a}{2} F_1 + \frac{a^2}{4} F_2 + \frac{a^3}{8} F_3 + \dots$$

$$F_3 = Q^4 (Q^2 8T_{3,1} - 2T_{3,2} + 4T_{3,3} + 4T_{3,4} - 4T_{3,5} - 4T_{3,6} - 4T_{3,7} + 2T_{3,8})$$

All external black lines are now massive (off-shell)

$$p_i^2 = m^2 \ll 1$$



# Вычисление интегралов в “квази-оффшельной” кинематике

- Integrals where evaluated for general values of  $m$  in  $D=4$  using differential equation technique (see [2104.06958](#) ).
- Then they were expanded in powers of  $m$  ( $p_1^2 = p_2^2 = -m^2$ ).
- These expansions were additionally verified by expansion by regions method (see [2211.00009](#) V.Smirnov A.Belitsky and reference therein for details).

Typical answer ( $TT3 \sim T_{3,3}$ ) for the integral for general values of  $m$ . [HPL](#) is [Harmonic PolyLogarithm](#).  $z$  is proportional to  $t = m^2/Q^2$

$$\begin{aligned} TT3 = & ((31 * \text{Pi}^6 * z^2) / (945 * (-1 + z)^3 * (1 + z)) - (8 * \text{Pi}^4 * z^2 * \text{HPL}[\{-2\}, z]) / (9 * (-1 + z)^3 * (1 + z)) - (28 * \text{Pi}^2 * z^2 * \text{HPL}[\{4\}, z]) / (3 * (-1 + z)^3 * (1 + z)) - \\ & ((56 * \text{I}) * \text{Pi} * z^2 * \text{HPL}[\{5\}, z]) / ((-1 + z)^3 * (1 + z)) + (40 * z^2 * \text{HPL}[\{6\}, z]) / ((-1 + z)^3 * (1 + z)) - (((16 * \text{I}) / 3) * \text{Pi}^3 * z^2 * \text{HPL}[\{-2, 0\}, z]) / ((-1 + z)^3 * (1 + z)) + \\ & (32 * \text{Pi}^2 * z^2 * \text{HPL}[\{-2, 2\}, z]) / (3 * (-1 + z)^3 * (1 + z)) + ((64 * \text{I}) * \text{Pi} * z^2 * \text{HPL}[\{-2, 3\}, z]) / ((-1 + z)^3 * (1 + z)) - \\ & (96 * z^2 * \text{HPL}[\{-2, 4\}, z]) / ((-1 + z)^3 * (1 + z)) - (8 * \text{Pi}^2 * z^2 * \text{HPL}[\{2, 2\}, z]) / ((-1 + z)^3 * (1 + z)) - ((48 * \text{I}) * \text{Pi} * z^2 * \text{HPL}[\{2, 3\}, z]) / ((-1 + z)^3 * (1 + z)) + \\ & (80 * z^2 * \text{HPL}[\{2, 4\}, z]) / ((-1 + z)^3 * (1 + z)) - (4 * \text{Pi}^2 * z^2 * \text{HPL}[\{3, 0\}, z]) / (3 * (-1 + z)^3 * (1 + z)) + (8 * z^2 * \text{HPL}[\{3, 3\}, z]) / ((-1 + z)^3 * (1 + z)) - \\ & ((28 * \text{I}) * \text{Pi} * z^2 * \text{HPL}[\{4, 0\}, z]) / ((-1 + z)^3 * (1 + z)) + (56 * z^2 * \text{HPL}[\{4, 2\}, z]) / ((-1 + z)^3 * (1 + z)) + (56 * z^2 * \text{HPL}[\{5, 0\}, z]) / ((-1 + z)^3 * (1 + z)) + \\ & (112 * z^2 * \text{HPL}[\{5, 1\}, z]) / ((-1 + z)^3 * (1 + z)) + (64 * \text{Pi}^2 * z^2 * \text{HPL}[\{-2, 0, 0\}, z]) / (3 * (-1 + z)^3 * (1 + z)) + \\ & ((32 * \text{I}) * \text{Pi} * z^2 * \text{HPL}[\{-2, 2, 0\}, z]) / ((-1 + z)^3 * (1 + z)) - (64 * z^2 * \text{HPL}[\{-2, 2, 2\}, z]) / ((-1 + z)^3 * (1 + z)) - (64 * z^2 * \text{HPL}[\{-2, 3, 0\}, z]) / ((-1 + z)^3 * (1 + z)) - \\ & (128 * z^2 * \text{HPL}[\{-2, 3, 1\}, z]) / ((-1 + z)^3 * (1 + z)) - (52 * \text{Pi}^2 * z^2 * \text{HPL}[\{2, 0, 0\}, z]) / (3 * (-1 + z)^3 * (1 + z)) - \\ & (8 * \text{Pi}^2 * z^2 * \text{HPL}[\{2, 1, 0\}, z]) / (3 * (-1 + z)^3 * (1 + z)) + (16 * z^2 * \text{HPL}[\{2, 1, 3\}, z]) / ((-1 + z)^3 * (1 + z)) - \\ & ((24 * \text{I}) * \text{Pi} * z^2 * \text{HPL}[\{2, 2, 0\}, z]) / ((-1 + z)^3 * (1 + z)) + (48 * z^2 * \text{HPL}[\{2, 2, 2\}, z]) / ((-1 + z)^3 * (1 + z)) + (48 * z^2 * \text{HPL}[\{2, 3, 0\}, z]) / ((-1 + z)^3 * (1 + z)) + \\ & (96 * z^2 * \text{HPL}[\{2, 3, 1\}, z]) / ((-1 + z)^3 * (1 + z)) - ((4 * \text{I}) * \text{Pi} * z^2 * \text{HPL}[\{3, 0, 0\}, z]) / ((-1 + z)^3 * (1 + z)) + (28 * z^2 * \text{HPL}[\{4, 0, 0\}, z]) / ((-1 + z)^3 * (1 + z)) + \\ & ((48 * \text{I}) * \text{Pi} * z^2 * \text{HPL}[\{-2, 0, 0, 0\}, z]) / ((-1 + z)^3 * (1 + z)) - (32 * z^2 * \text{HPL}[\{-2, 2, 0, 0\}, z]) / ((-1 + z)^3 * (1 + z)) - \\ & (34 * \text{Pi}^2 * z^2 * \text{HPL}[\{0, 0, 0, 0\}, z]) / (3 * (-1 + z)^3 * (1 + z)) - ((40 * \text{I}) * \text{Pi} * z^2 * \text{HPL}[\{2, 0, 0, 0\}, z]) / ((-1 + z)^3 * (1 + z)) - \\ & ((8 * \text{I}) * \text{Pi} * z^2 * \text{HPL}[\{2, 1, 0, 0\}, z]) / ((-1 + z)^3 * (1 + z)) + (24 * z^2 * \text{HPL}[\{2, 2, 0, 0\}, z]) / ((-1 + z)^3 * (1 + z)) + \\ & (4 * z^2 * \text{HPL}[\{3, 0, 0, 0\}, z]) / ((-1 + z)^3 * (1 + z)) - (48 * z^2 * \text{HPL}[\{-2, 0, 0, 0, 0\}, z]) / ((-1 + z)^3 * (1 + z)) - \\ & ((20 * \text{I}) * \text{Pi} * z^2 * \text{HPL}[\{0, 0, 0, 0, 0\}, z]) / ((-1 + z)^3 * (1 + z)) + (40 * z^2 * \text{HPL}[\{2, 0, 0, 0, 0\}, z]) / ((-1 + z)^3 * (1 + z)) + \\ & (8 * z^2 * \text{HPL}[\{2, 1, 0, 0, 0\}, z]) / ((-1 + z)^3 * (1 + z)) + (20 * z^2 * \text{HPL}[\{0, 0, 0, 0, 0\}, z]) / ((-1 + z)^3 * (1 + z)) - \\ & (8 * z^2 * \text{HPL}[\{3\}, z] * \text{Zeta}[3]) / ((-1 + z)^3 * (1 + z)) - (16 * z^2 * \text{HPL}[\{2, 1, 0\}, z] * \text{Zeta}[3]) / ((-1 + z)^3 * (1 + z)) + (4 * z^2 * \text{Zeta}[3]^2) / ((-1 + z)^3 * (1 + z)) + \\ & \text{HPL}[\{2, 0\}, z] * (((4 * \text{I}) * \text{Pi}^3 * z^2) / ((-1 + z)^3 * (1 + z)) - (8 * z^2 * \text{Zeta}[3]) / ((-1 + z)^3 * (1 + z))) + \\ & \text{HPL}[\{0, 0, 0\}, z] * (((14 * \text{I}) / 3) * \text{Pi}^3 * z^2) / ((-1 + z)^3 * (1 + z)) - (4 * z^2 * \text{Zeta}[3]) / ((-1 + z)^3 * (1 + z)) + \\ & \text{HPL}[\{0, 0\}, z] * (((6 * \text{Pi}^4 * z^2) / (5 * (-1 + z)^3 * (1 + z)) + ((4 * \text{I}) * \text{Pi} * z^2 * \text{Zeta}[3]) / ((-1 + z)^3 * (1 + z))) + \\ & \text{HPL}[\{2\}, z] * ((4 * \text{Pi}^4 * z^2) / (9 * (-1 + z)^3 * (1 + z)) + ((8 * \text{I}) * \text{Pi} * z^2 * \text{Zeta}[3]) / ((-1 + z)^3 * (1 + z))) - ((20 * \text{I}) * \text{Pi} * z^2 * \text{Zeta}[5]) / ((-1 + z)^3 * (1 + z)) + \\ & \text{HPL}[\{0, 0\}, z] * (((-4 * \text{I}) / 45) * \text{Pi}^5 * z^2) / ((-1 + z)^3 * (1 + z)) + (4 * \text{Pi}^2 * z^2 * \text{Zeta}[3]) / (3 * (-1 + z)^3 * (1 + z)) + (20 * z^2 * \text{Zeta}[5]) / ((-1 + z)^3 * (1 + z)) \\ & ) / . z \rightarrow t; \end{aligned}$$

# Вычисление интегралов в “квази-оффшельной” кинематике

- Integrals were evaluated for general values of  $m$  in  $D=4$  using differential equation technique (see [2104.06958](#) ).
- Then they were expanded in powers of  $m$  ( $p_1^2 = p_2^2 = -m^2$ ).
- These expansions were additionally verified by expansion by regions method.

Typical answer (  $TT3 \sim T_{3,3}$  ) for the integral for general values of  $m$ . HPL is Harmonic PolyLogarithm.  $z$  is proportional to  $t = m^2/Q^2$ . For  $t \ll 1$  we have the following expansion:

Bork et al. 22

T3

$$\frac{32 \pi^6}{945} + \frac{3}{20} \pi^4 \text{Log}[t]^2 + \frac{1}{18} \pi^2 \text{Log}[t]^4 - \frac{\text{Log}[t]^6}{36} + \frac{2}{3} \text{Log}[t]^3 \text{Zeta}[3] - 4 \text{Zeta}[3]^2 + \text{Log}[t] \left( \frac{2}{3} \pi^2 \text{Zeta}[3] - 20 \text{Zeta}[5] \right)$$

Other examples:

T1

$$\frac{31 \pi^6}{756} + \frac{7}{36} \pi^4 \text{Log}[t]^2 + \frac{5}{36} \pi^2 \text{Log}[t]^4 + \frac{\text{Log}[t]^6}{36}$$

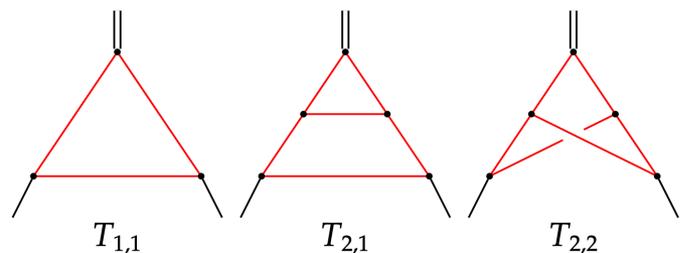
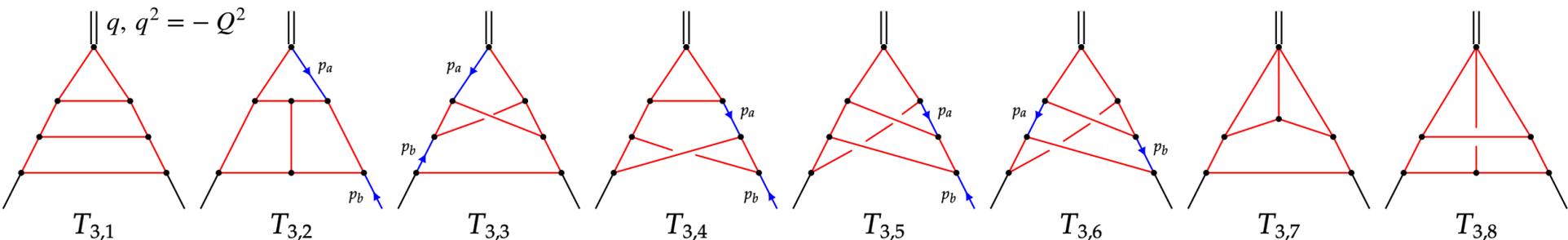
T2

$$\frac{31 \pi^6}{756} + \frac{7}{36} \pi^4 \text{Log}[t]^2 + \frac{5}{36} \pi^2 \text{Log}[t]^4 + \frac{\text{Log}[t]^6}{36}$$

T5

$$\frac{31 \pi^6}{945} + \frac{7}{36} \pi^4 \text{Log}[t]^2 + \frac{5}{18} \pi^2 \text{Log}[t]^4 + \frac{\text{Log}[t]^6}{12} + \frac{2}{3} \text{Log}[t]^3 \text{Zeta}[3] - 4 \text{Zeta}[3]^2 + \text{Log}[t] \left( \frac{2}{3} \pi^2 \text{Zeta}[3] - 20 \text{Zeta}[5] \right)$$

# Судаковский форм фактор на кулоновской ветви N=4 SYM



Up to three loops:

$$(-Q^2)^3 T_{3,1} = \Phi_3 + O(m^2),$$

$$(-Q^2)^2 T_{3,2} = \Phi_3 + O(m^2),$$

$$(-Q^2)^2 (T_{3,3} - T_{3,5}) = \frac{1}{2} (\Phi_3 - \Phi_1 \Phi_2) + O(m^2),$$

$$(-Q^2)^2 (T_{3,4} - T_{3,6}) = -\Phi_1 \Phi_2 + O(m^2),$$

$$(-Q^2)^2 T_{3,7} = \Phi_3 + O(m^2),$$

$$(-Q^2)^2 T_{3,8} = \Phi_1 \Phi_2 + O(m^2),$$

Up to two loops one can show that:

$$(-Q^2) T_{1,1} = \Phi_1, \quad (-Q^2)^2 T_{2,1} = \Phi_2, \quad (-Q^2)^2 T_{2,2} = \Phi_1^2.$$

$\Phi_l$  - is **Ussyukina-Davydychev box function**

$$\Phi_1 = \log^2(t) + 2\zeta_2 + O(m^2),$$

$$\Phi_2 = \frac{\log^4(t)}{4} + 3\zeta_2 \log^2(t) + \frac{21\zeta_4}{2} + O(m^2).$$

and

$$\Phi_3 = \frac{1}{36} \log^6(t) + \frac{5\zeta_2}{6} \log^4(t) + \frac{35\zeta_4}{2} \log^2(t) + \frac{155\zeta_6}{4} + O(m^2).$$

$t = m^2/Q^2$

# Судаковский форм фактор на кулоновской ветви N=4 SYM во всех порядках ТВ

One can show that up to three loops:

$$\log F \left( \frac{m^2}{Q^2}, a \right) = -\frac{\Gamma_{oct}(a)}{2} \log^2 \left( \frac{m^2}{Q^2} \right) + D(a)$$

with:

$$\Gamma_{oct}(a) = \frac{2}{\pi^2} \log \left( \cosh \left( \pi \sqrt{2a} \right) \right) = 2a - 4\zeta_2 a^2 + 32\zeta_4 a^3 + \dots,$$

$$D(a) = \frac{1}{4} \log \left( \frac{\sinh(2\pi \sqrt{2a})}{2\pi \sqrt{2a}} \right) = 2\zeta_2 a - 8\zeta_4 a^2 - \frac{128\zeta_6}{3} a^3 + \dots$$

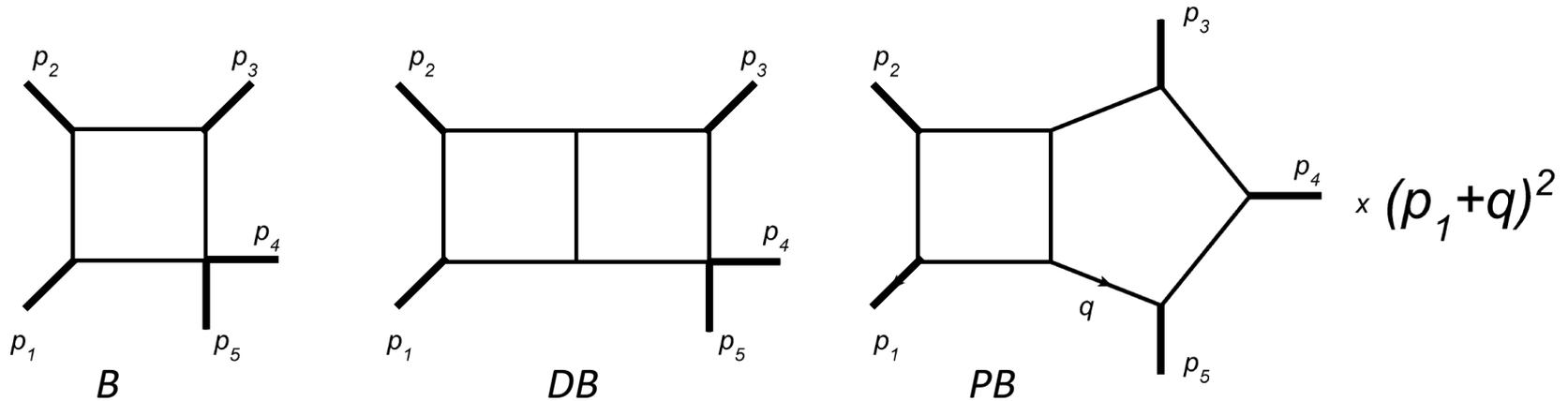
- We see that off-shell (massive) Sudakov form factor exponentiate
- $\log^2(m)$  is NOT controlled by Gamma cusp! Moreover:

$$\log F = 2 \log \mathbb{O}_0 + O(m^2).$$

Bork et al. 22

- We conjecture that this relation will hold for all loop orders

# О 5 частичной амплитуде на Кулоновской ветви ...



$$M_5^{(1)} = \frac{\mathbb{P}_5}{4} (s_1 s_2 B) + O(m^2),$$

Bork et al. 21

$$M_5^{(2)} = \frac{\mathbb{P}_5}{8} (s_1^2 s_2 DB^{(h)} + s_1 s_2^2 DB^{(v)} + s_2 s_3 s_5 PB) + O(m^2)$$

$$s_i = (p_i + p_{i+1})^2 \pmod{5}$$

One loop result can be rewritten as:

$$\begin{aligned} M_5^{(1)} &= \frac{\mathbb{P}_5}{4} F_1 \left( \frac{m^2 s_4}{s_1 s_2}, \frac{m^4}{s_1 s_2} \right) = \frac{\mathbb{P}_5}{4} \left( \log \left( \frac{m^2 s_4}{s_1 s_2} \right) \log \left( \frac{m^4}{s_1 s_2} \right) + 2\zeta_2 \right) + O(m^2) \\ &= \sum_{i=1}^5 \frac{1}{2} \log^2 \left( \frac{m^2}{s_i} \right) + \sum_{i=1}^5 \frac{1}{4} \log \left( \frac{s_i}{s_{i+1}} \right) \log \left( \frac{s_{i-1}}{s_{i+2}} \right) + \frac{5\zeta_2}{2} + O(m^2), \end{aligned}$$

# О 5 частичной амплитуде на Кулоновской ветви ...

- Evaluation of PB integral in general kinematics is out of our reach now. Work in progress...
- But for  $s_i = Q^2$  one ( *Bork et al. 22* ) one can show that:

$$s_1 s_2 B \Big|_{s_i=Q^2} = F_1(t, t^2) = 2 \log^2(t) + 2\zeta_2 + O(m^2), \quad t = m^2/Q^2$$

$$s_1 s_2^2 DB^{(h)} \Big|_{s_i=Q^2} = F_2(t, t^2) = \log^4(t) + \frac{13\zeta_2}{2} \log^2(t) + \frac{21\zeta_4}{2} + O(m^2),$$

$$s_3^2 s_4 DB^{(v)} \Big|_{s_i=Q^2} = F_2(t, t^2) = \log^4(t) + \frac{13\zeta_2}{2} \log^2(t) + \frac{21\zeta_4}{2} + O(m^2),$$

$$s_2 s_3 s_5 PB \Big|_{s_i=Q^2} = 3 \log^4(t) + 5\zeta_2 \log^2(t) + 5\zeta_4 + O(m^2).$$

Which is consistent with:

$$\log M_5 \Big|_{Div} = -\frac{\Gamma_{oct}(a)}{4} \sum_{i=1}^5 \log^2 \left( \frac{m^2}{s_i} \right) \quad \tilde{\mathcal{F}}_5 \stackrel{?}{=} -\frac{\Gamma_{oct}(a)}{8} \sum_{i=1}^5 \log \left( \frac{s_i}{s_{i+1}} \right) \log \left( \frac{s_{i-1}}{s_{i+2}} \right) + \tilde{c}_5(a).$$

# Инфракрасные асимптотики амплитуд и форм факторов на Кулоновской ветви N=4 SYM

We see that in the “off-shell” case the following factorization IR behavior holds for amplitudes:

$$\log M_n = -\frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \Gamma_{\text{oct}}(g) \log^2 \left( \frac{m^2}{s_{ii+1}} \right) + \tilde{\mathcal{F}}_n(\{p_i\}, g) + O(m),$$



The IR divergent part is still given by the product of Sudakov form factors. But now they have much simpler form. Also **The Log(m) terms are NOT controlled by  $\Gamma_{\text{cusp}}$ !**

$$\log F \left( \frac{m^2}{Q^2}, a \right) = -\frac{\Gamma_{\text{oct}}(a)}{2} \log^2 \left( \frac{m^2}{Q^2} \right) + D(a)$$

$$\Gamma_{\text{oct}}(a) = \frac{2}{\pi^2} \log \left( \cosh \left( \pi \sqrt{2a} \right) \right) = 2a - 4\zeta_2 a^2 + 32\zeta_4 a^3 + \dots,$$

$$D(a) = \frac{1}{4} \log \left( \frac{\sinh(2\pi \sqrt{2a})}{2\pi \sqrt{2a}} \right) = 2\zeta_2 a - 8\zeta_4 a^2 - \frac{128\zeta_6}{3} a^3 + \dots$$

# Многочастичные форм факторы оператора ТЭИ на кулоновской ветви N=4 SYM

Let us start with  $\langle 0 | \mathcal{O}_2 | \Omega_1 \Omega_2 \Omega_3 \rangle$ . One can expect that:

$$\log F_3 = -\frac{\Gamma_{\text{oct}}(g)}{4} \left[ \log^2 \left( \frac{m}{u} \right) + \log^2 \left( \frac{m}{v} \right) + \log^2 \left( \frac{m}{w} \right) \right] + \text{Fin}_3(u, v, w; g) + O(m^2)$$

Here  $u = s/q^2, v = t/q^2, w = u/q^2$  are dimensionless Mandelstam variables.

$$F_3 = gF_3^{(1)} + g^2F_3^{(2)} + \dots$$

$$F_3^{(1)} = \sum_{n=0}^2 \mathbb{P}^n \left[ (s_{12} + s_{13}) \text{Tri}(p_1, p_2 + p_3) + \frac{1}{2} s_{12} s_{23} \text{Box}(p_1, p_2, p_3) \right],$$

and

Bork et al. 23

$$F_3^{(2)} = \sum_{n=0}^2 \mathbb{P}^n \left[ \text{TriBox}(p_1, p_2 + p_3) + \text{TriBox}(p_3, p_1 + p_2) + \text{TriPent}(p_1, p_2, p_3) \right. \\ \left. + \text{DBox}(p_1, p_2, p_3) + \text{DBox}(p_3, p_2, p_1) + \text{NBox}(p_1, p_2, p_3) \right. \\ \left. + \text{NTriBox}(p_1 + p_2, p_3) \right].$$

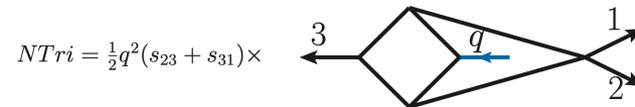
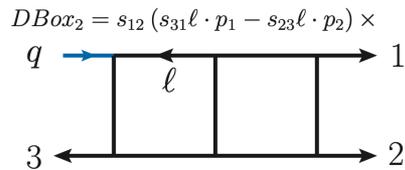
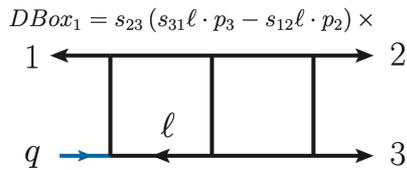
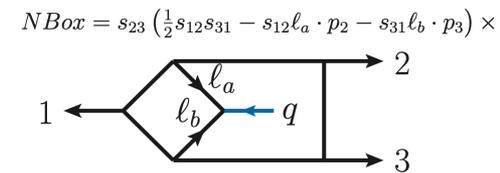
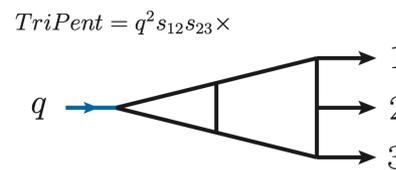
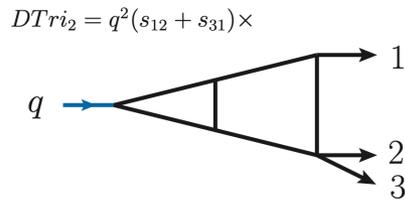
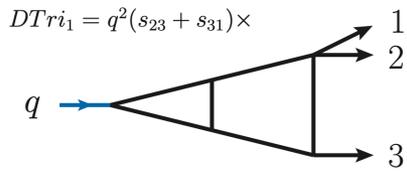
# Многочастичные форм факторы оператора ТЭИ на кулоновской ветви N=4 SYM

Let us start with  $\langle 0 | \mathcal{O}_2 | \Omega_1 \Omega_2 \Omega_3 \rangle$ . One can expect that:

$$\log F_3 = -\frac{\Gamma_{\text{oct}}(g)}{4} \left[ \log^2 \left( \frac{m}{u} \right) + \log^2 \left( \frac{m}{v} \right) + \log^2 \left( \frac{m}{w} \right) \right] + \text{Fin}_3(u, v, w; g) + O(m^2)$$

Here  $u = s/q^2, v = t/q^2, w = u/q^2$  are dimensionless Mandelstam variables.

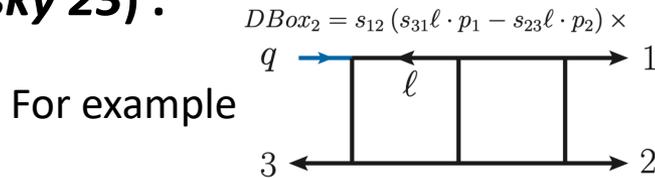
$$F_3 = gF_3^{(1)} + g^2F_3^{(2)} + \dots$$



Picture from <https://arxiv.org/pdf/1201.4170> ( Brandhuber et al. 12 )

# Многочастичные форм факторы оператора ТЭИ на кулоновской ветви N=4 SYM

- Evaluation of these scalar integrals in “quasi off-shell” kinematics is none trivial endeavor.
- Differential equation technique is key ingredient ( [2312.00641](#) V.Smirnov, A.Belitsky 23) .



final result for  $\log^1(m)$  coefficient:

```

FFdboxL1[u_-, v_-, w_-] :=
1
12 v (u+w)
(-4 pi^2 uvvG[0, w] - pi^2 v^2 G[0, w] + pi^2 uvvG[0, w] - 4 pi^2 vvvG[0, w] + pi^2 v^2 G[0, w] + 2 pi^2 uvvG[-v-w, u] + 2 pi^2 v^2 G[-v-w, u] + 2 pi^2 vvvG[-v-w, u] -
4 pi^2 v^2 G[-w, u] - 6 pi^2 uvvG[-w, v] + 2 pi^2 v^2 G[-w, v] + 2 pi^2 uvvG[-w, v] - 6 pi^2 vvvG[-w, v] + 6 pi^2 v^2 G[-w, v] + 6 uvvG[0, w] - G[-v-w, u] - G[-w, v] +
6 v^2 G[0, w] - G[-v-w, u] - G[-w, v] + 6 vvvG[0, w] - G[-v-w, u] - G[-w, v] + 12 v^2 G[0, w] - G[-w, u] - G[-w, v] - 30 uvvG[0, w] - G[0, 0, u] + 6 v^2 G[0, w] - G[0, 0, u] -
12 uvvG[0, w] - G[0, 0, u] - 30 vvvG[0, w] - G[0, 0, u] - 12 v^2 G[0, w] - G[0, 0, u] - 30 uvvG[-w, v] - G[0, 0, u] + 6 v^2 G[-w, v] - G[0, 0, u] - 12 uvvG[-w, v] - G[0, 0, u] -
30 vvvG[-w, v] - G[0, 0, u] - 12 v^2 G[-w, v] - G[0, 0, u] - 6 uvvG[0, w] - G[0, 0, v] + 6 v^2 G[0, w] - G[0, 0, v] - 6 uvvG[-v-w, u] - G[0, 0, v] - 6 v^2 G[-v-w, u] - G[0, 0, v] -
6 vvvG[-v-w, u] - G[0, 0, v] - 6 uvvG[-w, v] - G[0, 0, v] + 12 v^2 G[-w, v] - G[0, 0, v] + 18 uvvG[-v-w, u] - G[0, 0, w] + 18 v^2 G[-v-w, u] - G[0, 0, w] +
18 vvvG[-v-w, u] - G[0, 0, w] - 12 v^2 G[-w, u] - G[0, 0, w] - 42 uvvG[-w, v] - G[0, 0, w] + 18 v^2 G[-w, v] - G[0, 0, w] + 12 uvvG[-w, v] - G[0, 0, w] -
42 vvvG[-w, v] - G[0, 0, w] + 12 v^2 G[-w, v] - G[0, 0, w] + 12 uvvG[0, w] - G[0, -v-w, u] + 12 uvvG[-w, v] - G[0, -v-w, u] +
12 vvvG[-w, v] - G[0, -v-w, u] - 12 uvvG[0, w] - G[0, -w, u] - 18 v^2 G[0, w] - G[0, -w, u] + 6 uvvG[0, w] - G[0, -w, u] - 12 vvvG[0, w] - G[0, -w, u] +
6 w^2 G[0, w] - G[0, -w, u] - 12 uvvG[-w, v] - G[0, -w, u] - 18 v^2 G[-w, v] - G[0, -w, u] + 6 uvvG[-w, v] - G[0, -w, u] - 12 vvvG[-w, v] - G[0, -w, u] +
6 w^2 G[-w, v] - G[0, -w, u] + 12 uvvG[0, w] - G[0, -w, v] - 12 v^2 G[0, w] - G[0, -w, v] + 12 uvvG[0, w] - G[0, -w, v] + 12 vvvG[0, w] - G[0, -w, v] +
12 w^2 G[0, w] - G[0, -w, v] - 6 uvvG[-v-w, u] - G[0, -w, v] - 6 v^2 G[-v-w, u] - G[0, -w, v] - 6 vvvG[-v-w, u] - G[0, -w, v] - 6 uvvG[0, w] - G[-v-w, 0, u] -
6 v^2 G[0, w] - G[-v-w, 0, u] - 6 vvvG[0, w] - G[-v-w, 0, u] - 6 uvvG[-w, v] - G[-v-w, 0, u] - 6 v^2 G[-w, v] - G[-v-w, 0, u] - 6 vvvG[-w, v] - G[-v-w, 0, u] +
12 uvvG[0, w] - G[-v-w, -w, u] + 12 v^2 G[0, w] - G[-v-w, -w, u] + 12 uvvG[0, w] - G[-v-w, -w, u] + 12 vvvG[0, w] - G[-v-w, -w, u] + 12 v^2 G[-w, v] - G[-v-w, -w, u] +
12 vvvG[-w, v] - G[-v-w, -w, u] - 12 v^2 G[-w, v] - G[-w, 0, u] - 12 v^2 G[-w, v] - G[-w, 0, u] + 12 uvvG[0, w] - G[-w, 0, v] - 6 v^2 G[0, w] - G[-w, 0, v] +
6 uvvG[0, w] - G[-w, 0, v] + 12 vvvG[0, w] - G[-w, 0, v] + 6 w^2 G[0, w] - G[-w, 0, v] + 6 uvvG[-v-w, u] - G[-w, 0, v] + 6 v^2 G[-v-w, u] - G[-w, 0, v] +
6 vvvG[-v-w, u] - G[-w, 0, v] - 24 v^2 G[-w, u] - G[-w, 0, v] + 12 v^2 G[0, w] - G[-w, -v-w, u] + 12 v^2 G[-w, v] - G[-w, -v-w, u] - 24 v^2 G[0, w] - G[-w, -w, u] -
24 v^2 G[-w, v] - G[-w, -w, u] +
2 G[0, v] (5 pi^2 uvv-3 pi^2 uvw+5 pi^2 vvw-3 pi^2 w^2-3 v(u+v+w) G[0, w] - G[-v-w, u] + 3 (5 uvv-v^2+2 uvw+5 vvw+2 w^2) G[0, 0, u] - 6 v^2 G[0, 0, w] + 6 uvvG[0, 0, w] +
6 w^2 G[0, 0, w] - 12 uvvG[0, -v-w, u] - 3 v^2 G[0, -v-w, u] - 3 uvvG[0, -v-w, u] - 12 vvvG[0, -v-w, u] - 3 w^2 G[0, -v-w, u] + 6 uvvG[0, -w, u] +
9 v^2 G[0, -w, u] - 3 uvvG[0, -w, u] + 6 vvvG[0, -w, u] - 3 w^2 G[0, -w, u] - 3 uvvG[-v-w, 0, u] - 3 v^2 G[-v-w, 0, u] - 3 vvvG[-v-w, 0, u] + 3 uvvG[-v-w, -v-w, u] +
3 v^2 G[-v-w, -v-w, u] + 3 vvvG[-v-w, -v-w, u] - 6 uvvG[-v-w, -w, u] - 6 v^2 G[-v-w, -w, u] - 6 vvvG[-v-w, -w, u] + 6 v^2 G[-w, 0, u] - 12 v^2 G[-w, -v-w, u] +
12 v^2 G[-w, -w, u] - 54 uvvG[0, w] - G[-w, -w, v] + 6 v^2 G[0, w] - G[-w, -w, v] + 12 uvvG[0, w] - G[-w, -w, v] - 54 vvvG[0, w] - G[-w, -w, v] +
12 w^2 G[0, w] - G[-w, -w, v] + 6 uvvG[-v-w, u] - G[-w, -w, v] + 6 v^2 G[-v-w, u] - G[-w, -w, v] + 6 vvvG[-v-w, u] - G[-w, -w, v] + 12 v^2 G[-w, -w, v] - G[-w, -w, v] +
9 v^2 G[0, -w, u] - 3 uvvG[0, -w, u] + 6 vvvG[0, -w, u] - 3 w^2 G[0, -w, u] - 3 uvvG[-v-w, 0, u] - 3 v^2 G[-v-w, 0, u] - 3 vvvG[-v-w, 0, u] + 3 uvvG[-v-w, -v-w, u] +
3 v^2 G[-v-w, -v-w, u] + 3 vvvG[-v-w, -v-w, u] - 6 uvvG[-v-w, -w, u] - 6 v^2 G[-v-w, -w, u] - 6 vvvG[-v-w, -w, u] + 6 v^2 G[-w, 0, u] - 12 v^2 G[-w, -v-w, u] +
12 v^2 G[-w, -w, u] - 54 uvvG[0, w] - G[-w, -w, v] + 6 v^2 G[0, w] - G[-w, -w, v] + 12 uvvG[0, w] - G[-w, -w, v] - 54 vvvG[0, w] - G[-w, -w, v] +
18 uvvG[0, 0, v] + 30 vvvG[0, 0, v] - 18 w^2 G[0, 0, v] + 30 uvvG[0, 0, w] - 24 v^2 G[0, 0, w] + 6 uvvG[0, 0, w] + 30 vvvG[0, 0, w] + 6 w^2 G[0, 0, w] -
12 uvvG[0, -w, v] + 12 v^2 G[0, -w, v] - 12 uvvG[0, -w, v] - 12 vvvG[0, -w, v] - 12 w^2 G[0, -w, v] - 24 uvvG[-w, 0, v] - 6 v^2 G[-w, 0, v] - 6 uvvG[-w, 0, v] -
24 vvvG[-w, 0, v] - 6 w^2 G[-w, 0, v] + 42 uvvG[-w, -w, v] - 6 v^2 G[-w, -w, v] + 42 vvvG[-w, -w, v] + 18 uvvG[0, 0, 0, u] + 18 uvvG[0, 0, 0, u] +
18 vvvG[0, 0, 0, u] + 18 w^2 G[0, 0, 0, u] + 54 uvvG[0, 0, 0, v] - 54 uvvG[0, 0, 0, v] + 54 vvvG[0, 0, 0, v] - 54 w^2 G[0, 0, 0, v] - 18 uvvG[0, 0, 0, w] +
18 v^2 G[0, 0, 0, w] - 18 uvvG[0, 0, 0, w] - 30 uvvG[0, 0, -v-w, u] + 6 v^2 G[0, 0, -v-w, u] - 12 uvvG[0, 0, -v-w, u] - 30 vvvG[0, 0, -v-w, u] -
12 w^2 G[0, 0, -v-w, u] + 12 uvvG[0, 0, -w, u] - 12 w^2 G[0, 0, -w, u] + 12 uvvG[-v-w, -v-w, u] +
12 vvvG[-v-w, -v-w, u] - 18 v^2 G[0, 0, -w, -w, u] +
v, -w, v] - 12 v^2 G[0, -w, -w, v] + 12 uvvG[0, -w, -w, v] +
u] + 6 uvvG[-v-w, 0, 0, u] - 6 v^2 G[-v-w, 0, -v-w, u] -

```

(several pages like this)

# Многочастичные форм факторы оператора ТЭИ на кулоновской ветви N=4 SYM

- Evaluation of these scalar integrals in “quasi off-shell” kinematics is none trivial endeavor.
- Differential equation technique is key ingredient ( [2312.00641](#) V.Smirnov, A.Belitsky 23) .
- All answers for scalar integrals are expressed as UT functions of Multiple PolyLogarithms (MPLs):

MPLs can be defined recursively via the iterated integral ( $n \geq 0$ ) [2, 3]

$$G(a_1, \dots, a_n; z) = \int_0^z \frac{dt}{t - a_1} G(a_2, \dots, a_n; t), \quad (3.1)$$

with  $G(z) = 1$  and  $a_i$  and  $z$  are complex variables. We call the vector  $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$  the *weight vector*, and its length  $n$  is called the *weight*. In the special case where all the  $a_i$ 's are zero, we define, using the obvious vector notation  $\vec{a}_n = \underbrace{(a, \dots, a)}_n$ ,

$$G(\vec{0}_n; z) = \frac{1}{n!} \log^n z,$$

Screenshot from [1904.07279](#)  
( C.Duhra, F. Dulat 19 )

# Многочастичные форм факторы оператора ТЭИ на кулоновской ветви N=4 SYM

Let us start with  $\langle 0 | \mathcal{O}_2 | \Omega_1 \Omega_2 \Omega_3 \rangle$ . One can expect that (here  $m \mapsto m^2/q^2$ ):

$$\log F_3 = -\frac{\Gamma_{\text{oct}}(g)}{4} \left[ \log^2 \left( \frac{m}{u} \right) + \log^2 \left( \frac{m}{v} \right) + \log^2 \left( \frac{m}{w} \right) \right] + \text{Fin}_3(u, v, w; g) + O(m^2)$$

Here  $u = s/q^2, v = t/q^2, w = u/q^2$  are dimensionless Mandelstam variables.

$$\text{Fin}_3 = g^2 f_3^{(1)} + g^4 f_3^{(2)} + \dots$$

**Symbol Map** was heavily used to obtain this expression



$$f_3^{(1)}(u, v, w) = -\log u \log v - \log v \log w - \log w \log u \\ - 2\text{Li}_2(1-u) - 2\text{Li}_2(1-v) - 2\text{Li}_2(1-w) - 3\zeta_2.$$

$$f_3^{(2)}(u, v, w) = R_3^{(2)}(u, v, w) + 3\zeta_2 [\log(u) \log(v) + \log(v) \log(w) + \log(w) \log(u)] \\ - 4\zeta_2 \sum_{i=1}^3 \text{Li}_2(1-u_i^{-1}) + 9\zeta_2 \sum_{i=1}^3 \log^2 u_i + \frac{63\zeta_4}{4}.$$

$$u_1 = u, u_2 = v, u_3 = w$$

[arXiv:2402.18475](https://arxiv.org/abs/2402.18475)

# What about other form factors ?

$$f_3^{(2)}(u, v, w) = R_3^{(2)}(u, v, w) + 3\zeta_2 [\log(u) \log(v) + \log(v) \log(w) + \log(w) \log(u)] \\ - 4\zeta_2 \sum_{i=1}^3 \text{Li}_2(1 - u_i^{-1}) + 9\zeta_2 \sum_{i=1}^3 \log^2 u_i + \frac{63\zeta_4}{4}. \quad u_1 = u, u_2 = v, u_3 = w$$

$$R_3^{(2)}(u, v, w) = -2 \left[ \text{J}\left(-\frac{uv}{w}\right) + \text{J}\left(-\frac{vw}{u}\right) + \text{J}\left(-\frac{wu}{v}\right) \right] - 8 \sum_{i=1}^3 \left( \text{Li}_4(1 - u_i^{-1}) + \frac{\log^4 u_i}{4!} \right) \\ - 2 \left( \sum_{i=1}^3 \text{Li}_2(1 - u_i^{-1}) \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^3 \log^2 u_i \right)^2 - \frac{\log^4(uvw)}{4!},$$

with the  $\text{J}(z)$  function defined as

$$\text{J}(z) = \text{Li}_4(z) - \log(-z)\text{Li}_3(z) + \frac{\log^2(-z)}{2!}\text{Li}_2(z) - \frac{\log^3(-z)}{3!}\text{Li}_1(z) - \frac{\log^4(-z)}{4!}.$$

$R_3^{(2)}$  is actually full finite part in massless case! I.e. we have the same symbol for the finite part in massless/massive cases but different  $\pi^2 \times \log^2, \text{Li}_2$  terms. **I.e. different collinear behavior!!**

# Многочастичные форм факторы 1/2-BPS ораторов на кулоновской ветви N=4 SYM

Now let us consider us start with  $\langle 0 | \mathcal{O}_3 | \Omega_1 \Omega_2 \Omega_3 \rangle$ . One can expect that:

$$\mathcal{O}_k \text{ are}$$

$$\mathcal{O}_k = \text{tr}(\Phi_{AB}^k)$$

$$\log F_3 = -\frac{\Gamma_{\text{oct}}(g)}{4} \left[ \log^2 \left( \frac{m}{u} \right) + \log^2 \left( \frac{m}{v} \right) + \log^2 \left( \frac{m}{w} \right) \right] + \text{Fin}_3(u, v, w; g) + O(m^2)$$

Here  $u = s/q^2, v = t/q^2, w = u/q^2$  are dimensionless Mandelstam variables.

$$F_3 = gF_3^{(1)} + g^2F_3^{(2)} + \dots$$

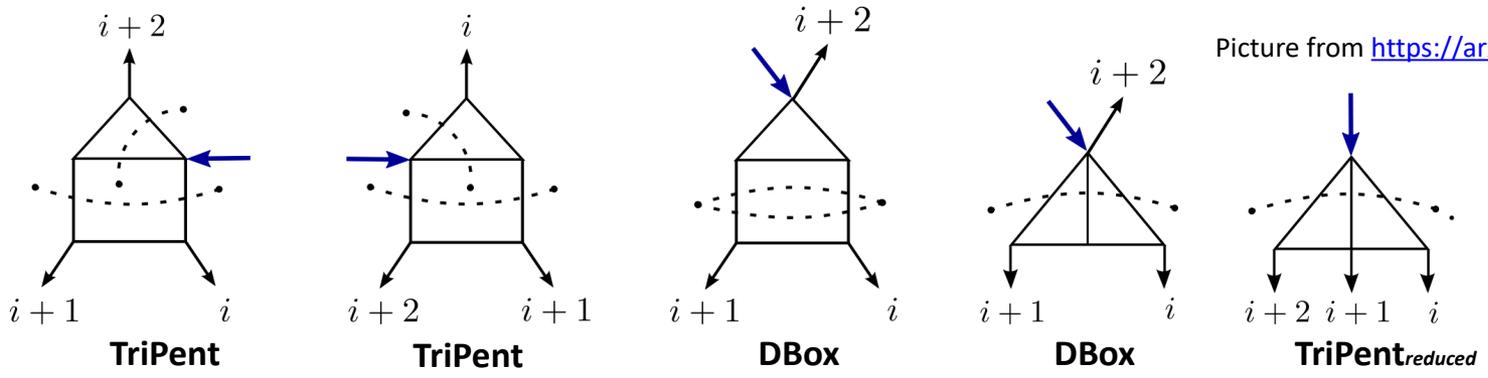
$$F_3^{(1)} = \sum_{n=0}^2 \mathbb{P}^n s_{12} \text{Tri}(p_1, p_2),$$

$$F_3^{(2)} = \sum_{n=0}^2 \mathbb{P}^n \left[ s_{12} \text{TriPent}(p_1, p_2, p_3) + s_{23} \text{TriPent}(p_3, p_1 + p_2) + \right.$$

$$\left. + s_{12} \text{DBox}(p_1, p_2) + s_{12} \text{DBox}(p_2, p_1) - q^2 \text{TriPent}_{\text{reduced}}(p_1, p_2, p_3) \right]$$

Bork et al. 23

Picture from <https://arxiv.org/pdf/1406.1443>



# Многочастичные форм факторы 1/2-BPS ораторов на кулоновской ветви N=4 SYM

Now let us consider us start with  $\langle 0 | \mathcal{O}_3 | \Omega_1 \Omega_2 \Omega_3 \rangle$ . One can expect that:

$$\log F_3 = -\frac{\Gamma_{\text{oct}}(g)}{4} \left[ \log^2 \left( \frac{m}{u} \right) + \log^2 \left( \frac{m}{v} \right) + \log^2 \left( \frac{m}{w} \right) \right] + \text{Fin}_3(u, v, w; g) + O(m^2)$$

Here  $u = s/q^2, v = t/q^2, w = u/q^2$  are dimensionless Mandelstam variables.

$$\text{Fin}_3^{(1)} = -3 \log^2 u - 3 \log^2 v - 3 \log^2 w + 6\zeta_2$$

$$\begin{aligned} \text{Fin}_3^{(2)} &= R_3^{(2)}(u, v, w) + \frac{\zeta_2}{2} [\log(u) \log(v) + \log(v) \log(w) + \log(w) \log(u)] \\ &+ \frac{\zeta_2}{4} [\log^2 u + \log^2 v + \log^2 w] + \zeta_3 [\log(u) + \log(v) + \log(w)] + \frac{327\zeta_4}{8} \end{aligned}$$

With:

$$\begin{aligned} R_3^{(2)}(u, v, w) &= -\frac{3}{2} \text{Li}_4(u) + \frac{3}{4} \text{Li}_4\left(-\frac{uv}{w}\right) - \frac{3}{2} \log(w) \text{Li}_3\left(-\frac{u}{v}\right) + \frac{1}{16} \log^2(u) \log^2(v) \\ &+ \text{perms}(u, v, w), \end{aligned}$$

Now let us consider us start with  $\langle 0 | \mathcal{O}_3 | \Omega_1 \Omega_2 \Omega_3 \rangle$  . One can expect that:

$$\begin{aligned} \text{Fin}_3^{(2)} &= R_3^{(2)}(u, v, w) + \frac{\zeta_2}{2} [\log(u) \log(v) + \log(v) \log(w) + \log(w) \log(u)] \\ &+ \frac{\zeta_2}{4} [\log^2 u + \log^2 v + \log^2 w] + \zeta_3 [\log(u) + \log(v) + \log(w)] + \frac{327\zeta_4}{8} \end{aligned}$$

With:

$$\begin{aligned} R_3^{(2)}(u, v, w) &= -\frac{3}{2} \text{Li}_4(u) + \frac{3}{4} \text{Li}_4\left(-\frac{uv}{w}\right) - \frac{3}{2} \log(w) \text{Li}_3\left(-\frac{u}{v}\right) + \frac{1}{16} \log^2(u) \log^2(v) \\ &+ \text{perms}(u, v, w) , \end{aligned}$$

As before  $R_3^{(2)}$  is equal to massless case! And we have the same symbol for the finite part in massless/massive cases but different  $\pi^2 \times \log^2, Li_2$  terms.

In this particular case functional

form of these terms is identical but rational coefficients are different

# Гипотеза об универсальном ИК поведении амплитуд и форм факторов в планарном N=4 SYM на кулоновской ветви

We conjecture that in the quasi off-shell regime in the Coulomb branch amplitudes and form factors factorizes like:

$$\log M_n = \underbrace{-\frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \Gamma_{\text{oct}}(g) \log^2 \left( \frac{m^2}{s_{ii+1}} \right)}_{\text{With IR divergent part given by the product of Sudakov form factors:}} + \underbrace{\tilde{\mathcal{F}}_n(\{p_i\}, g)}_{\text{Different collinear behavior compared to massless case.}} + O(m),$$

With IR divergent part given by the product of Sudakov form factors:

Different collinear behavior compared to massless case.

$$\log F \left( \frac{m^2}{Q^2}, a \right) = -\frac{\Gamma_{\text{oct}}(a)}{2} \log^2 \left( \frac{m^2}{Q^2} \right) + D(a)$$

$$\Gamma_{\text{oct}}(a) = \frac{2}{\pi^2} \log \left( \cosh \left( \pi \sqrt{2a} \right) \right) = 2a - 4\zeta_2 a^2 + 32\zeta_4 a^3 + \dots,$$

$$D(a) = \frac{1}{4} \log \left( \frac{\sinh(2\pi \sqrt{2a})}{2\pi \sqrt{2a}} \right) = 2\zeta_2 a - 8\zeta_4 a^2 - \frac{128\zeta_6}{3} a^3 + \dots$$

# Вместо заключения. формальная часть.

## Список тезисов выносимых на защиту:

- 1) Впервые была получена формулировка древесных форм факторов оператора Вильсоновской линии и форм факторов операторов из супермультиплета тензора энергии импульса (ТЭИ) на суперпространстве массовой поверхности.
- 2) Для  $N^k\text{MHV}$  древесных форм факторов оператора Вильсоновской линии и форм факторов операторов из супермультиплета ТЭИ впервые была высказана гипотеза о дуальной конформной инвариантности отношения  $N^k\text{MHV}/\text{MHV}$  форм факторов, которая подтверждалась результатами прямых вычислений форм факторов в MHV и NMHV секторах с произвольным числом частиц на древесном и однопетлевом уровне.
- 3) Для древесных форм факторов операторов Вильсоновских линий и форм факторов операторов из супермультиплета ТЭИ с произвольным числом частиц любой спиральности и их  $L$ -петлевых интеграндов были получены замкнутые выражения (производящие функции) в виде интегралов по Грассманиану. Был продемонстрирован вывод этого представления из амбигвисторной теории струн на древесном уровне и интегрируемость древесных форм факторов.
- 4) Впервые были проведены прямые аналитические вычисления Судаковского форм фактора в  $N=4$  SYM на кулоновской ветви теории (в “офф-шельной” кинематике) в трёх петлевом приближении и была высказана гипотеза о виде Судаковского форм фактора во всех порядках теории возмущений (ТВ) в планарном пределе, косвенно подтверждаемая результатами полученными методами теории интегрируемых систем..
- 5) На основании прямых двух петлевых вычислений пяти частичной амплитуды рассеяния и трёх частичных форм факторов  $1/2$ -BPS операторов на Кулоновской ветви а так же трёх петлевых вычислений Судаковского форм фактора была высказана гипотеза об универсальных инфракрасных асимптотиках многочастичных форм факторов  $1/2$ -BPS операторов и амплитуд рассеяния во всех порядках ТВ на Кулоновской ветви теории.
- 6) Предложен систематический метод суммирования вкладов в коллинеарное операторное разложение в режиме слабой связи в планарном  $N=4$  SYM в любом наперёд заданном порядке ТВ который был успешно верифицирован на воспроизведении древесного и однопетлевого вклада в 6-ти точечную NMHV амплитуду из коллинеарного операторного разложения.
- 7) Впервые были выполнены прямые аналитические расчеты лидирующих логарифмических ультрафиолетовых расходимостей в MSYM теориях в размерностях  $D=6, 8, 10$  в пяти петлевом приближении на основании которых было произведено исследование решений обобщённых уравнений ренормализационной группы для 4-ёх точечной амплитуды рассеяния в MSYM теориях во всех порядках ТВ для лидирующих логарифмических расходимостей.

# Вместо заключения. формальная часть.

План диссертации “Амплитуды и форм факторы в суперсимметричных калибровочных теориях в рамках теории возмущений и за её пределами”.

1. Введение.
2. Пертурбативные вычисления форм факторов в  $N=4$  SYM.
3. Инфракрасные асимптотики амплитуд рассеяния и форм факторов в планарной  $N=4$  SYM на Кулоновской ветви теории.
4. Коллинеарное операторное разложение и амплитуд рассеяния в планарной  $N=4$  SYM в любом порядке ТВ.
5. Ультрафиолетовые свойства амплитуд рассеяния в MSYM теориях в высших размерностях и ресуммирование ультрафиолетовых логарифмов.
6. Заключение.
7. Библиография.
8. Дополнения.

# Вместо заключения. формальная часть.

- **Подробное содержание**

**1. Введение.**

**2. Пертурбативные вычисления форм факторов в N=4 SYM.**

2.1 Формализм суперпространства массовой поверхности для древесных и петлевых форм факторов в N=4 SYM. Форм факторы операторов из 1/2-BPS супермультиплета и форм факторы операторов Вильсоновских линий.

2.2 BCFW рекурсивные соотношения для древесных 1/2-BPS операторов в N=4 SYM.

2.3 Симметричные свойства древесных форм факторов в N=4 SYM на древесном уровне. Янгиан симметрия и интегрируемость форм факторов в N=4 SYM на древесном уровне.

2.4 Форм факторы операторов супермультиплета тензора энергии (ТЭИ) импульса и операторов Вильсоновских линий и интеграл по Грассманиану.

2.5 Дуальное описание древесных форм факторов в N=4 SYM через амбитвисторную теорию струн.

2.6 Однопетлевая поправка к NMHV форм фактору операторов супермультиплета ТЭИ и метод обобщённой унитарности.

2.7 Форм факторы 1/2-BPS операторов в N=4 SYM в двухпетлевом приближении через унитарные разрезы и N=1 суперполя.

2.8 BCFW рекурсивные соотношения для интеграндов форм факторы операторов Вильсоновских линий в произвольном числе петель.

# Вместо заключения. формальная часть.

## **3. Инфракрасные асимптотики амплитуд рассеяния и форм факторов в планарной N=4 SYM на Кулоновской ветви теории.**

3.1 Инфракрасные асимптотики амплитуд рассеяния и форм факторов в четырёхмерных калибровочных теориях. Судаковские логарифмы, Вильсоновские линии, Касповая аномальная размерность и всё такое.

3.2 Кулоновская ветвь N=4 SYM и теории с максимальной суперсимметрией (MSYM) в высших размерностях.

3.3 Инфракрасные асимптотики Судаковского форм фактора на кулоновской ветви теории во всех порядках ТВ. Гипотеза о виде Судаковского форм фактора во всех порядках ТВ.

3.4 Инфракрасные асимптотики четырёх и пяти точечных амплитуда рассеяния в планарном N=4 SYM на кулоновской ветви.

3.5 Инфракрасные асимптотики форм факторов 1/2-BPS операторов в N=4 SYM на кулоновской ветви во всех порядках ТВ и конечные части в двухпетлевом приближении для трёх частичных форм факторов.

3.6 Гипотеза о виде универсальной инфракрасной асимптотики любых амплитуд рассеяния и форм факторов на Кулоновской ветви в планарном N=4 SYM.

## **4. Коллинеарное операторное разложение и амплитуд рассеяния в планарной N=4 SYM в любом порядке ТВ.**

4.1 Аномальные размерности операторов в планарной N=4 SYM и интегрируемость.

4.2 Коллинеарное операторное разложение для амплитуд рассеяния в планарной N=4 SYM.

4.3 Ресуммирование коллинеарного операторного разложения в N=4 SYM в режиме слабой связи. Пример NMHV шести точечной амплитуды на древесном и однопетлевом уровне.

# Вместо заключения. формальная часть.

## **5. Ультрафиолетовые свойства амплитуд рассеяния в MSYM теориях в высших размерностях и ресуммирование ультрафиолетовых логарифмов.**

5.1 R-операция и полюсные уравнения. Ультрафиолетовые логарифмические расходимости в неперенормируемых теориях и обобщённые уравнения ренормализационной группы.

5.2 Лидирующие ультрафиолетовые расходимости в четырёх частичной амплитуде рассеяния в MSYM теориях в размерностях  $D=6,8,10$  до пяти петель включительно.

5.3 Ресуммирование лидирующих ультрафиолетовых расходимостей в четырёх частичной амплитуде рассеяния в MSYM теориях в размерностях  $D=6,8,10$  используя уравнения обобщённой ренормализационной группы.

5.4 Ресуммирование конечных вкладов в четырёх частичной амплитуде рассеяния в MSYM  $D=6$   $N=(1,1)$  теории. Производящая функция для L-петевых скалярных интегралов типа лестница и  $D=6$  теории “рыболовной сети” (fish-net model).

**6. Заключение.**

**7. Библиография.**

**8. Дополнения.**

# Вместо заключения. формальная часть.

- **Список литературы**

См. следующий слайд.

# • Список литературы

## Пертурбативные вычисления форм факторов в $N=4$ SYM.

- 1) **On form factors in  $N=4$  SYM** L.V. Bork(Moscow, ITEP), D.I. Kazakov(Dubna, JINR and Moscow, ITEP), G.S. Vartanov(Potsdam, Max Planck Inst.) (Nov, 2010)  
Published in: JHEP 02 (2011) 063 • e-Print: 1011.2440 [hep-th]  
reference search [a\[1\]=81 citations](#)
- 2) **On MHV Form Factors in Superspace for  $N=4$  SYM Theory** L.V. Bork(Moscow, ITEP), D.I. Kazakov(Moscow, ITEP and Dubna, JINR), G.S. Vartanov(Potsdam, Max Planck Inst.) (Jul, 2011)  
Published in: JHEP 10 (2011) 133 • e-Print: 1107.5551 [hep-th]  
reference search [a\[2\]=66 citations](#)
- 3) **On NMHV form factors in  $N=4$  SYM theory from generalized unitarity** L.V. Bork(Moscow, ITEP) (Mar, 2012) Published in: JHEP 01 (2013) 049 • e-Print: 1203.2596 [hep-th]  
reference search [a\[3\]=50 citations](#)
- 4) **On form factors in  $N=4$  SYM theory and polytopes**  
L.V. Bork(Moscow, ITEP and Unlisted, RU) (Jul 21, 2014)  
Published in: JHEP 12 (2014) 111 • e-Print: 1407.5568 [hep-th]  
reference search [a\[4\]=40 citations](#)
- 5) **On soft theorems and form factors in  $N=4$  SYM theory**  
L.V. Bork(Unlisted, RU and Moscow, ITEP), A.I. Onishchenko(Moscow, MIPT and SINP, Moscow) (Jun 24, 2015)  
Published in: JHEP 12 (2015) 030 • e-Print: 1506.07551 [hep-th]  
reference search [a\[5\]=36 citations](#)
- 6) **Grassmannians and form factors with  $= 0$  in  $N=4$  SYM theory**  
L.V. Bork(Moscow RAS, IRE and Moscow, ITEP), A.I. Onishchenko(Dubna, JINR and SINP, Moscow and Moscow, MIPT) (Jul 2, 2016)  
Published in: JHEP 12 (2016) 076 • e-Print: 1607.00503 [hep-th]  
reference search [a\[6\]=20 citations](#)
- 7) **Wilson lines, Grassmannians and gauge invariant off-shell amplitudes in  $N=4$  SYM** L.V. Bork(Moscow RAS, IRE and Moscow, ITEP), A.I. Onishchenko(Dubna, JINR and Moscow, MIPT and SINP, Moscow) (Jul 8, 2016)  
Published in: JHEP 04 (2017) 019 • e-Print: 1607.02320 [hep-th]  
reference search [a\[7\]=22 citations](#)
- 8) **Grassmannian integral for general gauge invariant off-shell amplitudes in  $N=4$  SYM**  
L.V. Bork(Moscow RAS, IRE and Moscow, ITEP), A.I. Onishchenko(Dubna, JINR and SINP, Moscow and Moscow, MIPT) (Oct 30, 2016)  
Published in: JHEP 05 (2017) 040 • e-Print: 1610.09693 [hep-th]  
reference search [a\[8\]=11 citations](#)
- 9) **Four dimensional ambitwistor strings and form factors of local and Wilson line operators**  
L.V. Bork(Moscow RAS, IRE and Moscow, ITEP), A.I. Onishchenko(Dubna, JINR and Moscow, MIPT and SINP, Moscow) (Apr 16, 2017)  
Published in: Phys.Rev.D 97 (2018) 12, 126013 • e-Print: 1704.04758 [hep-th]  
reference search [a\[9\]=12 citations](#)
- 10) **The all-loop conjecture for integrands of reggeon amplitudes in  $N=4$  SYM**  
A.E. Bolshov(Dubna, JINR and Moscow, MIPT), L.V. Bork(Moscow, ITEP), A.I. Onishchenko(Dubna, JINR and Moscow, MIPT and SINP, Moscow) (Feb 12, 2018)  
Published in: JHEP 06 (2018) 129 • e-Print: 1802.03986 [hep-th]  
reference search [a\[10\]=10 citations](#)

# • Список литературы

**Инфракрасные асимптотики амплитуд рассеяния и форм факторов в планарной  $N=4$  SYM на Кулоновской ветви теории.**

**11) Infrared properties of five-point massive amplitudes in  $N=4$  SYM on the Coulomb branch**

L.V. Bork(Moscow, ITEP and Unlisted, RU), N.B. Muzhichkov(Unlisted, RU and Moscow State U.), E.S. Sozinov(Unlisted, RU and Moscow Phys. Eng. Inst.) (Jan 21, 2022)

Published in: JHEP 08 (2022) 173 • e-Print: 2201.08762 [hep-th]

reference search [a\[11\]=8 citations](#)

**12) Exact Off Shell Sudakov Form Factor in  $N=4$  Supersymmetric Yang-Mills Theory**

A.V. Belitsky(Arizona State U.), L.V. Bork(Moscow, ITEP), A.F. Pikelner(Dubna, JINR), V.A. Smirnov(SINP, Moscow) (Sep 19, 2022)

Published in: Phys.Rev.Lett. 130 (2023) 9, 091605 • e-Print: 2209.09263 [hep-th]

reference search [a\[12\]=7 citations](#)

**13) Off-shell form factor in  $N=4$  sYM at three loops**

A.V. Belitsky(Arizona State U.), L.V. Bork(Moscow, ITEP), V.A. Smirnov(SINP, Moscow) (Jun 29, 2023)

Published in: JHEP 11 (2023) 111 • e-Print: 2306.16859 [hep-th]

reference search [a\[13\]=4 citations](#)

**Коллинеарное операторное разложение и амплитуды рассеяния в планарной  $N=4$  SYM в любом порядке ТВ.**

**14) Pentagon OPE resummation in  $N=4$  SYM: hexagons with one effective particle contribution**

L.V. Bork(Moscow, ITEP), A.I. Onishchenko(Dubna, JINR and SINP, Moscow) (Sep 30, 2019)

Published in: Phys.Rev.D 102 (2020) 2, 026002 • e-Print: 1909.13675 [hep-th]

reference search [a\[14\]=10 citations](#)

**Ультрафиолетовые свойства амплитуд рассеяния в MSYM теориях в высших размерностях и ресуммирование ультрафиолетовых логарифмов.**

**15) On the amplitudes in  $N=(1,1)$   $D=6$  SYM**

L.V. Bork(Moscow, ITEP), D.I. Kazakov(Moscow, ITEP and Dubna, JINR), D.E. Vlasenko(Dubna, JINR and Moscow, MIPT) (Aug 1, 2013)

Published in: JHEP 11 (2013) 065 • e-Print: 1308.0117 [hep-th]

reference search [a\[15\]=14 citations](#)

**16) Challenges of  $D=6$   $N=(1,1)$  SYM theory**

L.V. Bork(Moscow, ITEP), D.I. Kazakov(Moscow, ITEP and Dubna, JINR and Moscow, MIPT), D.E. Vlasenko(Dubna, JINR and Moscow, MIPT) (Apr 28, 2014)

Published in: Phys.Lett.B 734 (2014) 111-115 • e-Print: 1404.6998 [hep-th]

reference search [a\[16\]=14 citations](#)

**17) Divergences in maximal supersymmetric Yang-Mills theories in diverse dimensions**

L.V. Bork(Moscow Phys. Eng. Inst. and Moscow RAS, IRE), D.I. Kazakov(Dubna, JINR and Moscow, ITEP and Moscow, MIPT), M.V. Kompaniets(St. Petersburg State U.), D.M. Tolkachev(Gomel State U. and Dubna, JINR), D.E. Vlasenko(Southern Federal U. and Dubna, JINR) (Aug 23, 2015)

Published in: JHEP 11 (2015) 059 • e-Print: 1508.05570 [hep-th]

reference search [a\[17\]=44 citations](#)

**18) Amplitudes in fishnet theories in diverse dimensions and Box ladder diagrams**

L.V. Bork(Moscow, ITEP and Dubna, JINR), R.M. Iakhimbaev(Dubna, JINR), N.B. Muzhichkov(Moscow State U.), E.S. Sozinov(Moscow Phys. Eng. Inst.) (Nov 6, 2020)

Published in: JHEP 02 (2021) 185 • e-Print: 2011.03295 [hep-th]

reference search [a\[18\]=5 citations](#)

# Вместо заключения. формальная часть.

$$\sum_{l=1}^{18} a[l] = 454$$

**total citations = (454 ссылки)**

(общее число работ 18 т.е. ~ 25 ссылок на работу.)