Семинар Объединенного Института Ядерных Исследований

Дубна, 22 июня 2016

К.В.Степаньянц

Физический факультет МГУ, кафедра теоретической физики

Некоторые особенности перенормировки $\mathcal{N}=1$ суперсимметричных калибровочных теорий

(На основе результатов работы K.S., ArXiv:1603.04801[hep-th])

Хорошо известно, что УФ поведение суперсимметричных теорий лучше благодаря некоторым теоремам о неперенормировке.

$\mathcal{N} = 4$ суперсимметричная теория Янга–Миллса (SYM) конечна во всех порядках.

Расходимости в $\mathcal{N} = 2$ SYM теориях существуют только в однопетлевом приближении. $\mathcal{N} = 2$ гипермультиплеты не перенормируются.

Суперпотенциал в $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричных теориях не имеет расходящихся квантовых поправок.
β-функция $\mathcal{N} = 1$ SYM теорий связана с аномальной размерностью суперполей материи т.н. NSVZ β-функцией. Для чистой $\mathcal{N} = 1$ SYM теории она дает точное выражение для β-функции в виде геометрической прогрессии.

В этом докладе доказывается, что в $\mathcal{N} = 1$ SYM теориях трехточечные духово-калибровочные вершины являются конечными.

Мы рассматриваем $\mathcal{N}=1$ SYM теорию, которая описывается действием

$$S=\frac{1}{2e_0^2}\,\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\int d^4x\,d^2\theta\,W^aW_a+\frac{1}{4}\int d^4x\,d^4\theta\,\phi^{*i}(e^{2V})_i{}^j\phi_j$$
$$+\Big\{\int d^4x\,d^2\theta\,\Big(\frac{1}{4}m_0^{ij}\phi_i\phi_j+\frac{1}{6}\lambda_0^{ijk}\phi_i\phi_j\phi_k\Big)+\text{к.с.}\Big\},$$

где суперсимметричная напряженность поля определяется как

$$W_a=\frac{1}{8}\bar{D}^2\left(e^{-2V}D_ae^{2V}\right).$$

Мы предполагаем, что теория является инвариантной относительно калибровочных преобразований

$$\phi\to e^A\phi;\qquad e^{2V}\to e^{-A^+}e^{2V}e^{-A},$$

где параметр $A=ie_0A^BT^B$ является произвольным киральным суперполем.

Регуляризация высшими ковариантными производными

Мы будем использовать регуляризацию высшими ковариантными производными

A.A.Slavnov, Nucl.Phys., **B31**, (1971), 301; Theor.Math.Phys. **13** (1972) 1064.

поскольку она является непротиворечивой регуляризацией, которая не нарушает суперсимметрию:

V.K.Krivoshchekov, Theor.Math.Phys. **36** (1978) 745;
P.West, Nucl.Phys. B268, (1986), 113.

Она также применима для $\mathcal{N}=2$ суперсимметричных теорий

V.K.Krivoshchekov, Phys.Lett. B **149** (1984) 128; I.L.Buchbinder, K.S., Nucl.Phys. **B883** (2014) 20; I.L.Buchbinder, N.G.Pletnev, K.S., Phys.Lett. **B751** (2015) 434.

Для того, чтобы регуляризовать теорию высшими производными, необходимо добавить слагаемое с высшими степенями ковариантных производных. Тогда расходимости остаются только в однопетлевом приближении. Эти остаточные расходимости регуляризуются добавлением детерминантов Паули–Вилларса.

A.A.Slavnov, Theor.Math.Phys. **33** (1977) 977.

Квантово-фоновое разделение осуществляется с помощью замены

$$e^{2V} \to e^{\boldsymbol{\Omega}^+} e^{2V} e^{\boldsymbol{\Omega}},$$

а фоновое калибровочное поле $\boldsymbol{V}$ определяется как $e^{2\boldsymbol{V}} = e^{\boldsymbol{\Omega}^+} e^{\boldsymbol{\Omega}}$.
Мы выбираем следующие слагаемое с высшими производными

$$S_\Lambda = \frac{1}{2e_0^2}\,\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\int d^4x\, d^2\theta\, e^{\Omega} e^{\boldsymbol{\Omega}} W^a e^{-\boldsymbol{\Omega}} e^{-\Omega}\Big[R\Big(-\frac{\bar\nabla^2\nabla^2}{16\Lambda^2}\Big)-1\Big]_{Adj}$$
$$\times e^{\Omega} e^{\boldsymbol{\Omega}} W_a e^{-\boldsymbol{\Omega}} e^{-\Omega} + \frac{1}{4}\int d^4x\, d^4\theta\, \phi^+ e^{\boldsymbol{\Omega}^+} e^{\Omega^+}\Big[F\Big(-\frac{\bar\nabla^2\nabla^2}{16\Lambda^2}\Big)-1\Big] e^{\Omega} e^{\boldsymbol{\Omega}}\phi,$$

и член, фиксирующий калибровку

$$S_{\mathrm{gf}} = \frac{1}{e_0^2}\mathrm{tr}\int d^4x\, d^4\theta\, \Big(16\xi_0\, f^+\Big[e^{\boldsymbol{\Omega}^+} K^{-1}\Big(-\frac{\bar{\boldsymbol{\nabla}}^2\boldsymbol{\nabla}^2}{16\Lambda^2}\Big)e^{\boldsymbol{\Omega}}\Big]_{Adj} f$$
$$+ e^{\boldsymbol{\Omega}} f e^{-\boldsymbol{\Omega}} \boldsymbol{\nabla}^2 V + e^{-\boldsymbol{\Omega}^+} f^+ e^{\boldsymbol{\Omega}^+} \bar{\boldsymbol{\nabla}}^2 V\Big),$$

где регуляторы R, F и K быстро возрастают на бесконечности.

Действия для духов Фаддеева–Попова и Нильсена–Каллош имеют вид

$$S_{\mathrm{FP}} = \frac{1}{e_0^2}\mathrm{tr}\int d^4x\, d^4\theta\, \Big(e^{\mathbf{\Omega}}\bar{c}e^{-\mathbf{\Omega}} + e^{-\mathbf{\Omega}^+}\bar{c}^+e^{\mathbf{\Omega}^+}\Big)$$
$$\times\Big\{\Big(\frac{V}{1-e^{2V}}\Big)_{Adj}\Big(e^{-\mathbf{\Omega}^+}c^+e^{\mathbf{\Omega}^+}\Big) + \Big(\frac{V}{1-e^{-2V}}\Big)_{Adj}\Big(e^{\mathbf{\Omega}}ce^{-\mathbf{\Omega}}\Big)\Big\};$$
$$S_{\mathrm{NK}} = \frac{1}{2e_0^2}\mathrm{tr}\int d^4x\, d^4\theta\, b^+\Big[e^{\mathbf{\Omega}^+}K\Big(-\frac{\bar{\mathbf{\nabla}}^2\mathbf{\nabla}^2}{16\Lambda^2}\Big)e^{\mathbf{\Omega}}\Big]_{Adj} b.$$

Полное действие калибровочной теории с фиксированной калибровкой инвариантно относительно BRST преобразований

$$\delta V = -\varepsilon\Big\{\Big(\frac{V}{1-e^{2V}}\Big)_{Adj}\Big(e^{-\mathbf{\Omega}^+}c^+e^{\mathbf{\Omega}^+}\Big) + \Big(\frac{V}{1-e^{-2V}}\Big)_{Adj}\big(e^{\mathbf{\Omega}}ce^{-\mathbf{\Omega}}\big)\Big\};$$

$$\delta\phi = \varepsilon c\phi; \qquad \delta\bar{c} = \varepsilon\bar{D}^2(e^{-2\boldsymbol{V}}f^+e^{2\boldsymbol{V}}); \qquad \delta\bar{c}^+ = \varepsilon D^2(e^{2\boldsymbol{V}}fe^{-2\boldsymbol{V}});$$
$$\delta c = \varepsilon c^2; \qquad \delta c^+ = \varepsilon(c^+)^2; \qquad \delta f = 0; \qquad \delta b = 0; \qquad \delta\mathbf{\Omega} = 0,$$

где ε — антикоммутирующий скалярный параметр.

В наших обозначениях константы перенормировки определяются равенствами

$$\frac{1}{\alpha_0} = \frac{Z_\alpha}{\alpha}; \qquad \frac{1}{\xi_0} = \frac{Z_\xi}{\xi}; \qquad \boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}_R; \qquad V = Z_V Z_\alpha^{-1/2} V_R;$$

$$b = \sqrt{Z_b}\, b_R; \qquad \bar{c}c = Z_c Z_\alpha^{-1} \bar{c}_R c_R; \qquad \phi_i = (\sqrt{Z_\phi})_i{}^j (\phi_R)_j;$$

$$m^{ij} = m_0^{mn} (Z_m)_m{}^i (Z_m)_n{}^j; \qquad \lambda^{ijk} = \lambda_0^{mnp} (Z_\lambda)_m{}^i (Z_\lambda)_n{}^j (Z_\lambda)_p{}^k.$$

Символ R обозначает перенормированные суперполя, α, λ и ξ — перенормированные константа связи, юкавские константы и параметр калибровки соответственно; m обозначает перенормированные массы.

Мы можем наложить следующие условия на эти константы перенормировки:

$$(Z_m)_i{}^j = (Z_\lambda)_i{}^j = (\sqrt{Z_\phi})_i{}^j; \qquad Z_\xi = Z_V^{-2}; \qquad Z_b = Z_\alpha^{-1}.$$

Мы будем доказывать, что трехточечные вершины с 2-мя духовыми линиями и 1-й линией квантового калибровочного суперполя конечны во всех порядках.

Имеется 4 таких вершины: $\bar c V c$, $\bar c^+ V c$, $\bar c V c^+$ и $\bar c^+ V c^+$.

Все они имеют одинаковую константу перенормировки $Z_\alpha^{-1/2} Z_c Z_V$.

Поэтому приведенное выше утверждение можно переписать в виде

$$\frac{d}{d\ln\Lambda}(Z_\alpha^{-1/2} Z_c Z_V) = 0.$$

В однопетлевом приближении это было замечено в работе

S.S.Aleshin, A.E.Kazantsev, M.B.Skopsov, K.S., JHEP **1605** (2016) 014.

Как следствие, существует схема вычитаний, в которой

$$-\frac{1}{2}\ln Z_\alpha + \ln Z_c + \ln Z_V = 0.$$

Важно: Далее мы увидим, что Z_c расходится. Поэтому функции Грина структуры $\bar c V^n c$ расходятся при $n \neq 1$.

Тождество Славнова–Тейлора может быть получено с помощью замены, которая по виду совпадает с BRST преобразованиями в производящем функционале, и может быть записано в виде

$$0 = \int d^4x\, d^4\theta_x\, \frac{\delta\Gamma}{\delta V_x^A} \left\langle \delta V_x^A \right\rangle + \int d^4x\, d^2\theta_x \left(\left\langle \delta\bar{c}_x^A \right\rangle \frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{c}_x^A} + \left\langle \delta c_x^A \right\rangle \frac{\delta\Gamma}{\delta c_x^A} \right.$$
$$\left. + \left\langle \delta\phi_i \right\rangle \frac{\delta\Gamma}{\delta\phi_i} \right) + \int d^4x\, d^2\bar{\theta}_x \left(\left\langle \delta\bar{c}_x^{*A} \right\rangle \frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{c}_x^{*A}} + \left\langle \delta c_x^{*A} \right\rangle \frac{\delta\Gamma}{\delta c_x^{*A}} + \left\langle \delta\phi^{*i} \right\rangle \frac{\delta\Gamma}{\delta\phi^{*i}} \right),$$

где мы сохранили зависимость от ε.

Также мы будем использовать еще одно тождество, которое может быть получено с помощью замены $\bar{c} \to \bar{c} + a$, где a — произвольное киральное суперполе:

$$\varepsilon\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{c}_x^A} = \frac{1}{4}\bar{D}^2 \left\langle \delta V_x^A \right\rangle; \qquad \varepsilon\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{c}_x^{*A}} = \frac{1}{4}D^2 \left\langle \delta V_x^A \right\rangle,$$

где для простоты фоновое калибровочное поле положено равным 0.

Продифференцируем тождество Славнова–Тейлора по $\bar{c}_y^{*B}$, c_z^C и c_w^D, положим поля равными 0 и используем равенства

$$\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\bar{c}_y^{*B}\delta c_x^A} = -\frac{D_y^2\bar{D}_x^2}{16}G_c\delta_{xy}^8\delta_{AB}; \qquad \frac{\delta}{\delta c_x^A}\left\langle \delta V_y^B\right\rangle = -\varepsilon\cdot\frac{1}{4}G_c\,\bar{D}^2\delta_{xy}^8\delta_{AB}.$$

В результате мы приходим к тождеству

$$\varepsilon\cdot G_c(\partial_w^2/\Lambda^2)\bar{D}_w^2\frac{\delta^3\Gamma}{\delta\bar{c}_y^{*B}\delta V_w^D\delta c_z^C} - \varepsilon\cdot G_c(\partial_z^2/\Lambda^2)\bar{D}_z^2\frac{\delta^3\Gamma}{\delta\bar{c}_y^{*B}\delta V_z^C\delta c_w^D}$$
$$+\frac{1}{2}G_c\left(\partial_y^2/\Lambda^2\right)D_y^2\frac{\delta^2}{\delta c_z^C\delta c_w^D}\left\langle\delta c_y^B\right\rangle = 0.$$

Аналогичным образом, дифференцируя по $\bar{c}_y^{*B}$, c_z^{*C} и c_w^D, мы получим

$$\varepsilon\cdot G_c(\partial_w^2/\Lambda^2)\bar{D}_w^2\frac{\delta^3\Gamma}{\delta\bar{c}_y^{*B}\delta V_w^D\delta c_z^{*C}} + \varepsilon\cdot G_c(\partial_z^2/\Lambda^2)D_z^2\frac{\delta^3\Gamma}{\delta\bar{c}_y^{*B}\delta V_z^C\delta c_w^D}$$
$$+\frac{1}{2}G_c\left(\partial_y^2/\Lambda^2\right)D_y^2\frac{\delta^2}{\delta c_z^{*C}\delta c_w^D}\left\langle\delta c_y^B\right\rangle = 0.$$

Явные выражения для трехточечных духово-калибровочных функций

Для упрощения этих тождеств мы используем явные выражения для функций Грина. Они могут быть получены с использованием соображений размерности и киральности:

$$\frac{\delta^3\Gamma}{\delta\bar{c}_x^{*A}\delta V_y^B\delta c_z^C} = -\frac{ie_0}{16} f^{ABC} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\Big(f(p,q)\partial^2\Pi_{1/2}$$

$$-F_\mu(p,q)(\gamma^\mu)_{\dot{a}}{}^b \bar{D}^{\dot{a}} D_b + F(p,q)\Big)_y \Big(D_x^2\delta_{xy}^8(q+p)\,\bar{D}_z^2\delta_{yz}^8(q)\Big);$$

$$\frac{\delta^3\Gamma}{\delta\bar{c}_x^{*A}\delta V_y^B\delta c_z^{*C}} = -\frac{ie_0}{16} f^{ABC} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\widetilde{F}(p,q) D_x^2\delta_{xy}^8(q+p) D_z^2\delta_{yz}^8(q),$$

где $\partial^2\Pi_{1/2} \equiv -D^a\bar{D}^2 D_a/8$ — суперсимметричный поперечный проектор, а

$$\delta_{xy}^8(p) \equiv \delta^4(\theta_x-\theta_y)e^{ip_\alpha(x^\alpha-y^\alpha)}.$$

Это соответствует тому, что $q+p$ — импульс $\bar{c}^*$, $-p$ — импульс V, а $-q$ — импульс c (или c^*).

Введем киральный источник $\mathcal{J}$ и добавим к действию слагаемое

$$-\frac{e_0}{2}\int d^4x\, d^2\theta\, f^{ABC}\mathcal{J}^A c^B c^C + \text{к.с.}$$

Тогда из соображений размерности и киральности мы получаем

$$\frac{\delta^2}{\delta c_z^C\,\delta c_w^D}\left\langle \delta c_y^B\right\rangle = -i\varepsilon\cdot\frac{\delta^3\Gamma}{\delta c_z^C\,\delta c_w^D\,\delta\mathcal{J}_y^B}$$

$$= -\frac{ie_0\varepsilon}{4} f^{BCD}\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{d^4q}{(2\pi)^4} H(p,q)\bar{D}_z^2\delta_{zy}^8(q+p)\bar{D}_w^2\delta_{yw}^8(q);$$

$$\frac{\delta^2}{\delta c_z^{*C}\,\delta c_w^D}\left\langle \delta c_y^B\right\rangle = -i\varepsilon\cdot\frac{\delta^3\Gamma}{\delta c_z^{*C}\,\delta c_w^D\,\delta\mathcal{J}_y^B}$$

$$= -\frac{ie_0\varepsilon}{64} f^{BCD}\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{d^4q}{(2\pi)^4} \widetilde{H}(p,q)\bar{D}_y^2 D_y^2\Big(D_z^2\delta_{zy}^8(q+p)\bar{D}_w^2\delta_{yw}^8(q)\Big).$$

где $[H(p,q)]=1$, $[\widetilde{H}(p,q)]=m^{-2}$, и, по построению,

$$H(p,q) = H(p,-q-p).$$

Тождества Славнова–Тейлора для трехточечных духово-калибровочных функций

Подставляя явные выражения для функций Грина в тождества Славнова–Тейлора, мы можем переписать эти тождества в виде

$$G_c(q)F(q,p) + G_c(p)F(p,q) = 2G_c(q+p)H(-q-p,q);$$

$$G_c(q)\widetilde{F}(q,p) - G_c(p)\Big(F(p,q) - 4p^\mu F_\mu(p,q)\Big)$$
$$= 2G_c(q+p)(q+p)^2\widetilde{H}(-q-p,q),$$

При этом здесь мы используем компактные обозначения $G_c(-q^2/\Lambda^2) \to G_c(q)$. Скалярные произведения векторов строятся с помощью метрики Минковского с сигнатурой $(+---)$.
Первое тождество будет использоваться далее для доказательства конечности трехточечных духово-калибровочных вершин.

Вначале докажем, что функция $H(p,q)$ конечна. H определяется диаграммами, в которых одна внешняя линия соответствует киральному источнику $\mathcal{J}$, а две другие внешние линии соответствуют киральным духовым суперполям c. Эти диаграммы содержат

$$\int d^4y\, d^2\theta_y\, \mathcal{J}_y^A\cdot \frac{\bar D_y^2 D_y^2}{4\partial^2}\delta^8_{y1}\cdot \frac{\bar D_y^2 D_y^2}{4\partial^2}\delta^8_{y2} = -2\int d^4y\, d^4\theta_y\, \mathcal{J}_y^A\cdot \frac{D_y^2}{4\partial^2}\delta^8_{y1}\cdot \frac{\bar D_y^2 D_y^2}{4\partial^2}\delta^8_{y2}.$$

Поэтому рассматриваемый вклад можно представить как интеграл по полному суперпространству, который включает интегрирование по

$$\int d^4\theta = -\frac{1}{2}\int d^2\theta\,\bar D^2 + \text{полные производные в координатном пространстве}.$$

Поэтому две левые спинорные производные должны действовать на киральные внешние линии. Следовательно, нетривиальный результат может быть получен только, если две правые спинорные производные также действуют на внешние линии. Это означает, что результат должен быть пропорционален по крайней мере второй степени внешнего импульса и является ультрафиолетово конечным.

Таким образом, функция $H(p,q)$ является УФ конечной.

Неперенормировка трехточечных духово-калибровочных функций

Умножим тождество Славнова–Тейлора на константу перенормировки Z_c (такую что $(G_c)_R = Z_c G$ конечно), продифференцируем по $\ln\Lambda$ и перейдем к пределу $\Lambda \to \infty$. Благодаря конечности $(G_c)_R$ и H в результате получится

$$\Big((G_c)_R(q)\frac{d}{d\ln\Lambda}F(q,p) + (G_c)_R(p)\frac{d}{d\ln\Lambda}F(p,q)\Big)\Big|_{\Lambda\to\infty} = 0.$$

Полагая $p=-q$, мы получим

$$\frac{d}{d\ln\Lambda}F(-q,q)\Big|_{\Lambda\to\infty} = 0.$$

Поэтому соответствующая константа перенормировки является конечной

$$\frac{d}{d\ln\Lambda}(Z_\alpha^{-1/2}Z_c Z_V) = 0.$$

Следовательно, функция $F(p,q)$ также конечна. Это означает, что все трехточечные духово-калибровочные вершины являются конечными.

Аномальные размерности мы будем определять в терминах голых констант связи с помощью равенств

$$(\gamma_\phi)_i{}^j(\alpha_0,\lambda_0) \equiv -\frac{d\ln(Z_\phi)_i{}^j(\alpha,\lambda,\Lambda/\mu)}{d\ln\Lambda} = \frac{d\ln(G_\phi)_i{}^j(\alpha_0,\lambda_0,\Lambda/p)}{d\ln\Lambda}\Big|_{p=0};$$

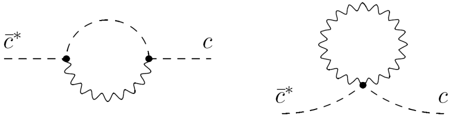
$$\gamma_V(\alpha_0,\lambda_0) \equiv -\frac{d\ln Z_V(\alpha,\lambda,\Lambda/\mu)}{d\ln\Lambda} = \frac{1}{2}\cdot\frac{d\ln G_V(\alpha_0,\lambda_0,\Lambda/p)}{d\ln\Lambda}\Big|_{p=0};$$

$$\gamma_c(\alpha_0,\lambda_0) \equiv -\frac{d\ln Z_c(\alpha,\lambda,\Lambda/\mu)}{d\ln\Lambda} = \frac{d\ln G_c(\alpha_0,\lambda_0,\Lambda/p)}{d\ln\Lambda}\Big|_{p=0}.$$

где дифференцирование производится при фиксированных значениях α и λ^{ijk}.

Такие ренормгрупповые функции

1. схемно независимы при фиксированной регуляризации;
2. зависят от регуляризации;
2. во всех петлях удовлетворяют NSVZ соотношению для $\mathcal{N}=1$ SQED с N_f ароматами, регуляризованной высшими производными.



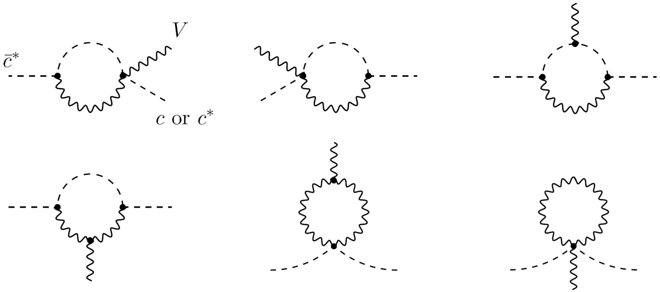
В евклидовом пространстве после поворота Вика

$$G_c(p) = 1 + e_0^2 C_2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \Big(\frac{\xi_0}{K_k} - \frac{1}{R_k} \Big) \Big(- \frac{1}{6k^4} + \frac{1}{2k^2(k+p)^2} - \frac{p^2}{2k^4(k+p)^2} \Big) + O(e_0^4, e_0^2\lambda_0^2),$$

где $R_k \equiv R(k^2/\Lambda)$ и $K_k \equiv K(k^2/\Lambda^2)$.
Мы видим, что эта функция расходится в ультрафиолетовой области (при бесконечном Λ).

$$\gamma_c(\alpha_0, \lambda_0) = \frac{d \ln G_c}{d \ln \Lambda}\Big|_{p=0;\, \alpha,\lambda=\mathrm{const}} = -\frac{\alpha_0 C_2 (1-\xi_0)}{6\pi} + O(\alpha_0^2, \alpha_0\lambda_0^2).$$

Однопетлевое вычисление: трехточечные духово-калибровочные функции Грина



$$\frac{ie_0}{4} f^{ABC} \int d^4\theta\, \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \bar{c}^{*A}(\theta, p+q) \Big(f(p,q) \partial^2 \Pi_{1/2} V^B(\theta, -p)$$

$$+ F_\mu(p,q) (\gamma^\mu)_{\dot{a}}{}^b D_b \bar{D}^{\dot{a}} V^B(\theta, -p) + F(p,q) V^B(\theta, -p) \Big) c^C(\theta, -q);$$

$$\frac{ie_0}{4} f^{ABC} \int d^4\theta\, \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \bar{c}^{*A}(\theta, p+q) \widetilde{F}(p,q) V^B(\theta, -p) c^{*C}(\theta, -q).$$

После вычисления этих диаграмм было получено

$$F(p,q) = 1 + \frac{e_0^2 C_2}{4}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\Big\{ -\frac{(q+p)^2}{R_k k^2 (k+p)^2 (k-q)^2} - \frac{\xi_0\, p^2}{K_k k^2 (k+q)^2 (k+q+p)^2}$$
$$+ \frac{\xi_0\, q^2}{K_k k^2 (k+p)^2 (k+q+p)^2} + \Big(\frac{\xi_0}{K_k} - \frac{1}{R_k}\Big)\Big(-\frac{2(q+p)^2}{k^4 (k+q+p)^2} + \frac{2}{k^2 (k+q+p)^2}$$
$$- \frac{1}{k^2 (k+q)^2} - \frac{1}{k^2 (k+p)^2}\Big)\Big\} + O(\alpha_0^2, \alpha_0\lambda_0^2).$$

$$\widetilde{F}(p,q) = 1 - \frac{e_0^2 C_2}{4}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\Big\{ \frac{p^2}{R_k k^2 (k+q)^2 (k+q+p)^2} + \frac{\xi_0\, (q+p)^2}{K_k k^2 (k-p)^2 (k+q)^2}$$
$$+ \frac{\xi_0\, q^2}{K_k k^2 (k+p)^2 (k+q+p)^2} + \frac{2\xi_0}{K_k k^2 (k+p)^2} - \frac{2\xi_0}{K_k k^2 (k+q+p)^2} + \Big(\frac{\xi_0}{K_k} - \frac{1}{R_k}\Big)$$
$$\times \Big(\frac{2q^2}{k^4 (k+q)^2} + \frac{1}{k^2 (k+q+p)^2} - \frac{1}{k^2 (k+q)^2}\Big)\Big\} + O(\alpha_0^2, \alpha_0\lambda_0^2).$$

Мы видим, что эти выражения являются конечными в ультрафиолетовой области.

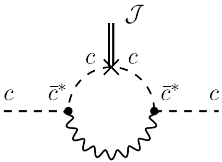
Выражения для функций f и F_μ являются очень большими и при их записи мы будем использовать обозначение

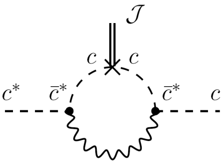
$$\Delta_q \equiv \frac{\xi_0}{K_q} - \frac{1}{R_q}.$$

Функция f имеет вид

$$f(p,q) = \frac{1}{4}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{e_0^2 C_2}{k^2(k+q)^2(k+q+p)^2}\Big\{\frac{2k_\mu q_\mu}{(k+q)^2}\Delta_{k+q} + \frac{2k^2}{(k+q+p)^2}\Delta_{k+q+p}$$
$$+R_p\Big(\frac{2k_\mu(q+p)^\mu}{(k+q+p)^2 R_{k+q}}\Delta_{k+q+p} + \frac{2k^2}{(k+q)^2 R_{k+q+p}}\Delta_{k+q} + \Big(\frac{k_\mu(k+q+p)^\mu}{(k+q+p)^2}$$
$$+\frac{k_\mu(k+q)^\mu}{(k+q)^2}\Big)\Delta_{k+q}\Delta_{k+q+p}\Big) - \frac{2k_\mu(k+q)^\mu}{R_{k+q}R_{k+q+p}}\cdot\frac{R_{k+q+p}-R_{k+q}}{(k+q+p)^2-(k+q)^2}$$
$$-\frac{2(R_{k+q+p}-R_p)}{(k+q+p)^2-p^2}\cdot\frac{1}{R_{k+q+p}}\Big(\frac{k_\mu q^\mu(k+q+p)^2 - k_\mu q^\mu p^2}{(k+q)^2}\Delta_{k+q} + \frac{k_\mu p^\mu}{R_{k+q}}\Big)$$
$$-\frac{2(R_{k+q}-R_p)}{(k+q)^2-p^2}\cdot\frac{1}{R_{k+q}}\Big(\frac{k^2(k+q)^2-k^2p^2}{(k+q+p)^2}\Delta_{k+q+p} + \frac{k_\mu(k+q)^\mu}{R_{k+q+p}}\Big)\Big\} + O(e_0^4, e_0^2\lambda_0^2).$$

$$
\begin{aligned}
&F_\mu(p,q) = \frac{1}{16}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\frac{e_0^2 C_2}{k^2(k+q)^2(k+q+p)^2}\Big\{\frac{2}{k^2}\Delta_k\Big[(q+p)_\mu\,k_\alpha(k+q)^\alpha + q_\mu\,k_\alpha\\
&\times(k+q+p)^\alpha + k_\mu\Big(k^2-q^2-q_\alpha p^\alpha\Big)\Big] - \frac{4k_\mu}{R_{k+q}} + \frac{2}{(k+q)^2}\Delta_{k+q}\Big[-q_\mu k_\alpha p^\alpha + p_\mu k^2\\
&+k_\mu q_\alpha p^\alpha - k_\mu(k+q)^2 + k_\alpha q^\alpha(2q+2k+p)_\mu\Big] + \frac{2}{(k+q+p)^2}\Delta_{k+q+p}\Big[q_\mu k_\alpha(q+p)^\alpha\\
&+(q+p)_\mu k_\alpha q^\alpha - k_\mu(q^2+q_\alpha p^\alpha+k^2) - p_\mu k^2\Big] - \frac{R_{k+q+p}-R_{k+q}}{(k+q+p)^2-(k+q)^2}(2q+2k+p)_\mu\\
&\times\frac{4k^\alpha q_\alpha}{R_{k+q}R_{k+q+p}} + \frac{2R_p}{(k+q)^2(k+q+p)^2}\Delta_{k+q+p}\Delta_{k+q}\Big[(p_\mu p^\nu-\delta_\mu^\nu p^2)\Big((k^2+q^2)(k_\nu+q_\nu)\\
&-(k+q)^2 q_\nu\Big) + p^2(q_\mu k_\alpha p^\alpha - k_\mu q_\alpha p^\alpha)\Big] + \frac{4R_p}{(k+q)^2 R_{k+q+p}}\Delta_{k+q}\,(q_\mu k_\alpha p^\alpha - k_\mu q_\alpha p^\alpha)\\
&+\frac{4(R_{k+q}-R_p)}{(k+q)^2-p^2}\,\frac{(k_\mu q_\alpha p^\alpha - q_\mu k_\alpha p^\alpha)}{R_{k+q}R_{k+q+p}} + \frac{4(R_{k+q+p}-R_p)}{(k+q+p)^2-p^2}\Big(\frac{(p_\mu p^\nu-\delta_\mu^\nu p^2)k_\nu}{R_{k+q+p}R_{k+q}} + \Delta_{k+q}\\
&\times\frac{\big((k+q+p)^2-p^2\big)}{(k+q)^2 R_{k+q+p}}\Big(q_\mu k_\alpha p^\alpha - k_\mu q_\alpha p^\alpha\Big)\Big)\Big\} + O(e_0^4, e_0^2\lambda_0^2).
\end{aligned}
$$





$$H(p,q) = 1 - \frac{e_0^2 C_2}{4}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left\{\frac{p^2}{R_k k^2(k+q)^2(k+q+p)^2}\right.$$
$$\left.+\frac{(q+p)^2}{k^4(k+q+p)^2}\left(\frac{\xi_0}{K_k}-\frac{1}{R_k}\right)+\frac{q^2}{k^4(k+q)^2}\left(\frac{\xi_0}{K_k}-\frac{1}{R_k}\right)\right\} + O(e_0^4, e_0^2\lambda_0^2);$$

$$\widetilde{H}(p,q) = \frac{e_0^2 C_2}{4}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{K_k k^2(k+q)^2(k+q+p)^2} + O(e_0^4, e_0^2\lambda_0^2).$$

Мы видим, что функция H конечна в ультрафиолетовой области и пропорциональна второй степени внешних импульсов.

Можно проверить, что построенные функции удовлетворяют тождествам Славнова–Тейлора

$$G_c(-q-p)H(-q-p,q) = 1 + \frac{e_0^2 C_2}{4}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\Big\{-\frac{(q+p)^2}{R_k k^2(k+p)^2(k-q)^2}$$
$$+\Big(\frac{\xi_0}{K_k}-\frac{1}{R_k}\Big)\Big(\frac{2}{k^2(k+q+p)^2}-\frac{2(q+p)^2}{k^4(k+q+p)^2}-\frac{p^2}{k^4(k+p)^2}-\frac{q^2}{k^4(k-q)^2}$$
$$-\frac{2}{3k^4}\Big)\Big\} + O(\alpha_0^2,\alpha_0\lambda_0^2) = \frac{1}{2}\Big(G_c(q)F(q,p)+G_c(p)F(p,q)\Big).$$

$$G_c(q)\widetilde{F}(q,p) - G_c(p)\Big(F(p,q)+4p^\mu F_\mu(p,q)\Big)$$
$$= -\frac{e_0^2C_2}{2}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{(q+p)^2}{K_k k^2(k-p)^2(k+q)^2} + O(\alpha_0^2,\alpha_0\lambda_0^2)$$
$$= -2G_c(q+p)(q+p)^2\widetilde{H}(-q-p,q).$$

Напомним, что ранее мы использовали импульсы в пространстве Минковского, тогда как здесь импульсы евклидовы. Поэтому благодаря равенству $(a_\mu b^\mu)_M = -(a_\mu b^\mu)_E$ некоторые знаки отличаются.

В $\mathcal{N}=1$ суперсимметричных теориях β-функция связана с аномальной размерностью суперполей материи равенством

$$\beta(\alpha) = -\frac{\alpha^2\Big(3C_2 - T(R) + C(R)_i{}^j\gamma_j{}^i(\alpha)/r\Big)}{2\pi(1-C_2\alpha/2\pi)}.$$

V.Novikov, M.A.Shifman, A.Vainshtein, V.I.Zakharov, Nucl.Phys. B 229, (1983), 381; Phys.Lett. 166B, (1985), 329; M.A.Shifman, A.I.Vainshtein, Nucl.Phys. B 277, (1986), 456.

NSVZ β-функция была получена из различных общих соображений: инстантонов, аномалий и т.д.

Для $\mathcal{N}=1$ SQED, регуляризованной высшими производными, NSVZ соотношение было получено явным суммированием супердиаграмм

K.S., Nucl.Phys. **B 852** (2011) 71; JHEP **1408** (2014) 096.

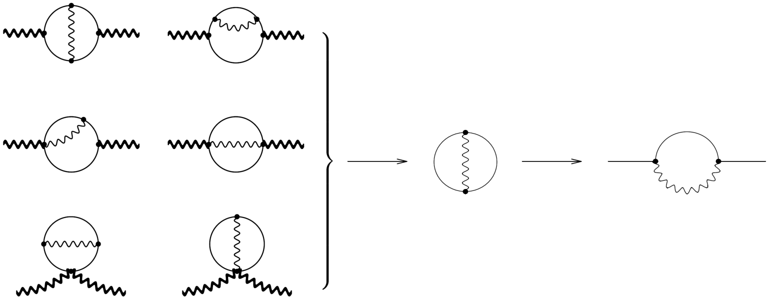
Обобщение этого результата на случай размерной редукции является сложной и пока еще нерешенной задачей

S.S.Aleshin, A.L.Kataev, K.S., JETP Lett. **103** (2016) 77.

Вывод NSVZ β-функции с помощью суммирования супердиаграмм в абелевом случае

Качественная картина:

A.V.Smilga, A.I.Vainshtein, Nucl.Phys. **B 704** (2005) 445.



NSVZ β-функция может быть эквивалентно переписана в виде

$$\frac{\beta(\alpha_0,\lambda_0)}{\alpha_0^2} = -\frac{3C_2 - T(R) + C(R)_i{}^j(\gamma_\phi)_j{}^i(\alpha_0,\lambda_0)/r}{2\pi} + \frac{C_2}{2\pi}\cdot\frac{\beta(\alpha_0,\lambda_0)}{\alpha_0}.$$

Выразим β-функцию в правой части через константу перенормировки Z_α:

$$\beta(\alpha_0,\lambda_0) = \frac{d\alpha_0(\alpha,\lambda,\Lambda/\mu)}{d\ln\Lambda}\Big|_{\alpha,\lambda=\text{const}} = -\alpha_0\frac{d\ln Z_\alpha}{d\ln\Lambda}\Big|_{\alpha,\lambda=\text{const}}.$$

Тогда, используя равенство $d(Z_\alpha^{-1/2}Z_V Z_c)/d\ln\Lambda = 0$, мы получаем

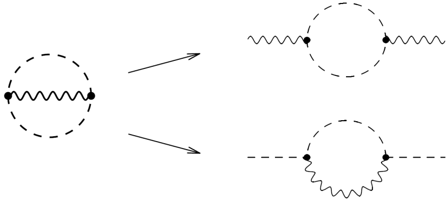
$$\beta(\alpha_0,\lambda_0) = -2\alpha_0\frac{d\ln(Z_c Z_V)}{d\ln\Lambda}\Big|_{\alpha,\lambda=\text{const}} = 2\alpha_0\Big(\gamma_c(\alpha_0,\lambda_0)+\gamma_V(\alpha_0,\lambda_0)\Big),$$

где γ_c и γ_V — аномальные размерности духов Фаддеева–Попова и квантового калибровочного суперполя (определенные в терминах голых констант связи) соответственно.

Подставляя это выражение в правую часть NSVZ соотношения, мы получаем

$$\frac{\beta(\alpha_0,\lambda_0)}{\alpha_0^2} = -\frac{1}{2\pi}\Big(3C_2 - T(R) - 2C_2\gamma_c(\alpha_0,\lambda_0)$$
$$-2C_2\gamma_V(\alpha_0,\lambda_0) + C(R)_i{}^j(\gamma_\phi)_j{}^i(\alpha_0,\lambda_0)/r\Big).$$

Из этой формы NSVZ β-функции мы видим, что суперполя материи и духи дают в правую часть вклады, имеющие одинаковую структуру.



Для $\mathcal{N}=1$ SQED, регуляризованной высшими производными, NSVZ β-функция получается из равенства

$$\frac{\beta(\alpha_0)}{\alpha_0^2} = \frac{d}{d\ln\Lambda}\left(d^{-1}(\alpha_0,\Lambda/p) - \alpha_0^{-1}\right)\Big|_{p=0}$$

$$= \frac{N_f}{\pi}\left(1 - \frac{d}{d\ln\Lambda}\ln G(\alpha_0,\Lambda/q)\Big|_{q=0}\right) = \frac{N_f}{\pi}\Big(1-\gamma(\alpha_0)\Big).$$

Функции d^{-1} и G определяются формулой

$$\Gamma^{(2)} - S^{(2)}_{\text{gf}} = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\, d^4\theta\,\Big(- \frac{1}{16\pi} V(-p)\,\partial^2\Pi_{1/2}V(p)\, d^{-1}(\alpha_0,\Lambda/p)$$

$$+\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{N_f}\Big(\phi_i^*(-p,\theta)\phi_i(p,\theta) + \widetilde{\phi}_i^*(-p,\theta)\widetilde{\phi}_i(p,\theta)\Big)\, G(\alpha_0,\Lambda/p)\Big),$$

где $\partial^2\Pi_{1/2}$ — суперсимметричный поперечный проектор.

$$\frac{\beta(\alpha_0)}{\alpha_0^2} = 2\pi N_f \frac{d}{d\ln\Lambda}\Big\{\sum_I c_I \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{\partial}{\partial q^\mu} \frac{\partial}{\partial q_\mu} \frac{\ln(q^2+M^2)}{q^2} + 4\pi \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^2}{k^2 R_k^2}$$

$$\times \frac{\partial}{\partial q^\mu} \frac{\partial}{\partial q_\mu} \Big(\frac{1}{q^2(k+q)^2} - \sum_I c_I \frac{1}{(q^2+M_I^2)((k+q)^2+M_I^2)}\Big) \Big[R_k \Big(1 + \frac{e^2 N_f}{4\pi^2}\ln\frac{\Lambda}{\mu}\Big)$$

$$-2e^2 N_f \Big(\int \frac{d^4t}{(2\pi)^4} \frac{1}{t^2(k+t)^2} - \sum_J c_J \int \frac{d^4t}{(2\pi)^4} \frac{1}{(t^2+M_J^2)((k+t)^2+M_J^2)}\Big)\Big]$$

$$+4\pi \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{e^4}{k^2 R_k l^2 R_l} \frac{\partial}{\partial q^\mu} \frac{\partial}{\partial q_\mu} \Big\{\Big(- \frac{2k^2}{q^2(q+k)^2(q+l)^2(q+k+l)^2}$$

$$+ \frac{2}{q^2(q+k)^2(q+l)^2}\Big) - \sum_I c_I \Big(- \frac{2(k^2+M_I^2)}{(q^2+M_I^2)((q+k)^2+M_I^2)((q+l)^2+M_I^2)}$$

$$\times \frac{1}{((q+k+l)^2+M_I^2)} + \frac{2}{(q^2+M_I^2)((q+k)^2+M_I^2)((q+l)^2+M_I^2)} - \frac{1}{(q^2+M_I^2)^2}$$

$$\times \frac{4M_I^2}{((q+k)^2+M_I^2)((q+l)^2+M_I^2)}\Big)\Big\}$$

Схемная зависимость в трехпетлевом приближении

(Трехпетлевой) результат для перенормированной константы связи определен неоднозначно (здесь $R_k = 1 + (k^2/\Lambda^2)^n$, $a_I = M_I/\Lambda$):

$$\frac{1}{\alpha_0} = \frac{1}{\alpha} - \frac{N_f}{\pi}\Big(\ln\frac{\Lambda}{\mu} + b_1\Big) - \frac{\alpha N_f}{\pi^2}\Big(\ln\frac{\Lambda}{\mu} + b_2\Big) - \frac{\alpha^2 N_f}{\pi^3}\Big(\frac{N_f}{2}\ln^2\frac{\Lambda}{\mu}$$
$$- \ln\frac{\Lambda}{\mu}\Big(N_f\sum_{I=1}^{n} c_I \ln a_I + N_f + \frac{1}{2} - N_f b_1\Big) + b_3\Big) + O(\alpha^3),$$

где b_i — произвольные конечные постоянные.

Аналогично, константа перенормировки Z для суперполей материи (в двухпетлевом приближении) также определена неоднозначно:

$$Z = 1 + \frac{\alpha}{\pi}\Big(\ln\frac{\Lambda}{\mu} + g_1\Big) + \frac{\alpha^2(N_f+1)}{2\pi^2}\ln^2\frac{\Lambda}{\mu}$$
$$-\frac{\alpha^2}{\pi^2}\ln\frac{\Lambda}{\mu}\Big(N_f\sum_{I=1}^{n} c_I \ln a_I - N_f b_1 + N_f + \frac{1}{2} - g_1\Big) + \frac{\alpha^2 g_2}{\pi^2} + O(\alpha^3),$$

где g_i — произвольные конечные постоянные.

Схема перенормировки задается при фиксации величин постоянных b_i и g_i.

РГ функции, определенные в терминах голой константы связи,

$$\beta\Big(\alpha_0(\alpha,\Lambda/\mu)\Big) \equiv \frac{d\alpha_0(\alpha,\Lambda/\mu)}{d\ln\Lambda}\Big|_{\alpha=\text{const}};$$
$$\gamma\Big(\alpha_0(\alpha,\Lambda/\mu)\Big) \equiv -\frac{d\ln Z(\alpha,\Lambda/\mu)}{d\ln\Lambda}\Big|_{\alpha=\text{const}}$$

является схемно независимыми.
РГ функции, определенные в терминах перенормированной константы связи,

$$\widetilde{\beta}\Big(\alpha(\alpha_0,\Lambda/\mu)\Big) \equiv \frac{d\alpha(\alpha_0,\Lambda/\mu)}{d\ln\mu}\Big|_{\alpha_0=\text{const}};$$
$$\widetilde{\gamma}\Big(\alpha(\alpha_0,\Lambda/\mu)\Big) \equiv \frac{d\ln Z(\alpha(\alpha_0,\Lambda/\mu),\Lambda/\mu)}{d\ln\mu}\Big|_{\alpha_0=\text{const}}$$

зависят от схемы перенормировки.
Можно доказать, что оба определения совпадают, если на константы перенормировки накладываются граничные условия

$$Z_3(\alpha,x_0)=1; \qquad Z(\alpha,x_0)=1,$$

где x_0 — некоторое фиксированное значение $\ln\Lambda/\mu$.

РГ, определенные в терминах голой константы связи, имеют вид

$$\frac{\beta(\alpha_0)}{\alpha_0^2} = \frac{N_f}{\pi} + \frac{\alpha_0 N_f}{\pi^2} - \frac{\alpha_0^2 N_f}{\pi^3}\Big(N_f\sum_{I=1}^{n} c_I \ln a_I + N_f + \frac{1}{2}\Big) + O(\alpha_0^3);$$

$$\gamma(\alpha_0) = -\frac{\alpha_0}{\pi} + \frac{\alpha_0^2}{\pi^2}\Big(N_f\sum_{I=1}^{n} c_I \ln a_I + N_f + \frac{1}{2}\Big) + O(\alpha_0^3).$$

Они не зависят от конечных постоянных b_i и g_i (т.е. они схемно-независимы) и удовлетворяют NSVZ соотношению.
РГ функции, определенные в терминах перенормированной константы связи, имеют вид

$$\frac{\widetilde{\beta}(\alpha)}{\alpha^2} = \frac{N_f}{\pi} + \frac{\alpha N_f}{\pi^2} - \frac{\alpha^2 N_f}{\pi^3}\Big(N_f\sum_{I=1}^{n} c_I \ln a_I + N_f + \frac{1}{2} + N_f(b_2 - b_1)\Big) + O(\alpha^3);$$

$$\widetilde{\gamma}(\alpha) = -\frac{\alpha}{\pi} + \frac{\alpha^2}{\pi^2}\Big(N_f + \frac{1}{2} + N_f\sum_{I=1}^{n} c_I \ln a_I - N_f b_1 + N_f g_1\Big) + O(\alpha^3)$$

и зависят от схемы перенормировки.

NSVZ схема определяется условиями

$$\alpha_0(\alpha_{\text{NSVZ}}, x_0) = \alpha_{\text{NSVZ}}; \qquad Z_{\text{NSVZ}}(\alpha_{\text{NSVZ}}, x_0) = 1.$$

Для простоты мы положим $g_1 = 0$ (эта константа может быть исключена переопределением μ). В этом случае $x_0 = 0$ и приведенные выше условия (определяющие NSVZ схему) дают

$$g_2 = b_1 = b_2 = b_3 = 0.$$

Тогда в рассматриваемых приближениях

$$\frac{\widetilde{\beta}(\alpha)}{\alpha^2} = \frac{N_f}{\pi} + \frac{\alpha N_f}{\pi^2} - \frac{\alpha^2 N_f}{\pi^3}\Big(N_f \sum_{I=1}^{n} c_I \ln a_I + N_f + \frac{1}{2}\Big) + O(\alpha^3) = \frac{\beta(\alpha)}{\alpha^2};$$

$$\widetilde{\gamma}(\alpha) = \frac{d\ln Z}{d\ln\mu} = -\frac{\alpha}{\pi} + \frac{\alpha^2}{\pi^2}\Big(N_f + \frac{1}{2} + N_f \sum_{I=1}^{n} c_I \ln a_I\Big) + O(\alpha^3) = \gamma(\alpha).$$

Как следствие, в этой схеме NSVZ соотношение действительно выполняется.

NSVZ-схема с регуляризацией высшими производными

$$\widetilde{\gamma}_{\text{NSVZ}}(\alpha) = -\frac{\alpha}{\pi} + \frac{\alpha^2}{\pi^2}\Big(\frac{1}{2} + N_f\sum_{I=1}^{n} c_I \ln a_I + N_f\Big) + O(\alpha^3);$$

$$\widetilde{\beta}_{\text{NSVZ}}(\alpha) = \frac{\alpha^2 N_f}{\pi}\Big(1 + \frac{\alpha}{\pi} - \frac{\alpha^2}{\pi^2}\Big(\frac{1}{2} + N_f\sum_{I=1}^{n} c_I \ln a_I + N_f\Big) + O(\alpha^3)\Big).$$

MOM-схема (Результаты для размерной редукции и регуляризации высшими производными совпадают.)

$$\widetilde{\gamma}_{\text{MOM}}(\alpha) = -\frac{\alpha}{\pi} + \frac{\alpha^2(1+N_f)}{2\pi^2} + O(\alpha^3);$$

$$\widetilde{\beta}_{\text{MOM}}(\alpha) = \frac{\alpha^2 N_f}{\pi}\Big(1 + \frac{\alpha}{\pi} - \frac{\alpha^2}{2\pi^2}\Big(1 + 3N_f\,(1-\zeta(3))\Big) + O(\alpha^3)\Big).$$

$\overline{\text{DR}}$-схема

$$\widetilde{\gamma}_{\overline{\text{DR}}}(\alpha) = -\frac{\alpha}{\pi} + \frac{\alpha^2(2+2N_f)}{4\pi^2} + O(\alpha^3);$$

$$\widetilde{\beta}_{\overline{\text{DR}}}(\alpha) = \frac{\alpha^2 N_f}{\pi}\Big(1 + \frac{\alpha}{\pi} - \frac{\alpha^2(2+3N_f)}{4\pi^2} + O(\alpha^3)\Big).$$

Теперь можно предложить неабелево обобщение приведенного выше равенства:

$$\frac{\beta(\alpha_0)}{\alpha_0^2} = \frac{d}{d\ln\Lambda}\Big(d^{-1} - \alpha_0^{-1}\Big)\Big|_{\alpha,\lambda=\text{const};\ p\to 0} = -\frac{3C_2 - T(R)}{2\pi}$$
$$-\frac{1}{2\pi}\frac{d}{d\ln\Lambda}\Big(-2C_2\ln G_c - C_2\ln G_V + C(R)_i{}^j\ln (G_\phi)_j{}^i/r\Big)\Big|_{\alpha,\lambda=\text{const};q\to 0}.$$

где функции d^{-1}, $(G_\phi)_i^j$, G_c и G_V связаны с двухточечными функциями Грина следующим образом:

$$\Gamma^{(2)} - S^{(2)}_{\text{gf}} = \frac{1}{4}\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,d^4\theta\,\phi^{*i}(\theta,-p)\phi_j(\theta,p)(G_\phi)_i{}^j(\alpha_0,\lambda_0,\Lambda/p)$$
$$+\text{tr}\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,d^4\theta\,\Big[-\frac{1}{8\pi}\boldsymbol{V}(\theta,-p)\,\partial^2\Pi_{1/2}\boldsymbol{V}(\theta,p)\,d^{-1}(\alpha_0,\lambda_0,\Lambda/p)$$
$$-\frac{1}{2e_0^2}\,V(\theta,-p)\,\partial^2\Pi_{1/2}V(\theta,p)\,G_V(\alpha_0,\lambda_0,\Lambda/p)$$
$$+\frac{1}{2e_0^2}\,\Big(-\bar c(\theta,-p)c^+(\theta,p) + \bar c^+(\theta,-p)c(\theta,p)\Big)G_c(\alpha_0,\lambda_0,\Lambda/p)\Big] + \ldots$$

РГ функции, определенные в терминах перенормированной константы связи являются схемнозависимыми и удовлетворяют NSVZ соотношению только в определенной схеме вычитаний. Аналогично работам

A.L.Kataev and K.S., Nucl.Phys. **B875** (2013) 459; Phys.Lett. **B730** (2014) 184; Theor.Math.Phys. 181 (2014) 1531.

мы видим, что в неабелевом случае РГ функции, определенные в терминах голых констант связи, совпадают с РГ функциями, определенными в терминах перенормированных констант связи, если на константы перенормировки накладываются граничные условия

$$Z_\alpha(\alpha,\lambda,x_0) = 1; \qquad (Z_\phi)_i{}^j(\alpha,\lambda,x_0) = \delta_i{}^j; \qquad Z_c(\alpha,\lambda,x_0) = 1,$$

где x_0 — некоторое фиксированное значение $\ln\Lambda/\mu$. (Например, возможно и удобно выбрать $x_0 = 0$.) Мы также предполагаем, что константы перенормировки удовлетворяют равенству

$$Z_V = Z_\alpha^{1/2} Z_c^{-1},$$

Возможно, эти условия задают NSVZ схему при использовании регуляризации высшими ковариантными производными.

- ✓ Для $\mathcal{N}=1$ SYM теорий трехточечные вершины с двумя духовыми внешними линиями и одной внешней линией квантового калибровочного суперполя являются конечными. Это было доказано с использованием тождеств Славнова–Тейлора во всех порядках и проверено явным однопетлевым вычислением.
- ✓ Благодаря неперенормировке тройных духово-калибровочной вершин константы перенормировки можно выбрать так, чтобы $Z_\alpha^{-1/2} Z_V Z_c = 1$.
- ✓ NSVZ β-функция может быть переписана в терминах аномальных размерностей квантового калибровочного поля, духов Фаддеева–Попова и суперполей материи. При этом духовый вклад имеет структуру, аналогичную структуре вклада суперполей материи. Получившееся выражение для NSVZ β-функции имеет очень простую качественную интерпретацию.
- ✓ Используя приведенные выше результаты, можно предположить вид простого предписания, дающего NSVZ схему в неабелевом случае, если для регуляризации используется метод высших ковариантных производных.

Спасибо за внимание!