

Расчёт характеристик критического поведения  
и нарушения скейлинга в скалярных моделях  
квантовой теории поля.

Кандидатская диссертация.

Письменский Артем Леонидович

научный руководитель: д. ф.-м. н., профессор Письмак Ю.М.

Санкт-Петербургский Государственный Университет, Физический  
факультет,

Кафедра физики высоких энергий и элементарных частиц.

28 апреля 2016

# Официальные оппоненты

- С. Э. Деркачев, д. ф.-м. н., Санкт-Петербургское отделение Математического Института им. В. А. Стеклова РАН, лаборатория математических проблем физики, ведущий научный сотрудник.
- А. Г. Шуваев, к. ф.-м. н., Петербургский Институт Ядерной Физики им. Б. П. Константинова, отделение теоретической физики, старший научный сотрудник.

# Ведущая организация

Объединённый институт ядерных исследований, Дубна.

# Аннотация.

Диссертация посвящена изучению поведения квантовополевых систем вблизи критической точки.

1. С помощью уравнения ренормгруппы исследуются инфракрасная асимптотика функций Грина скалярных теорий  $\phi^3$ ,  $\phi^4$ ,  $\phi^6$  в логарифмической размерности. Вычисляются логарифмические поправки к уже известному главному приближению.
2. Методом конформного бутстрапа проводится расчёт критического индекса  $\eta$  теории  $\phi^3$ . Сначала воспроизводится уже известный 3-петлевой результат, полученный ранее по уравнению ренормгруппы, затем вычисляется аналитически 4-петлевая поправка, для которой было известно только численное значение.

По теме диссертации имеется 3 публикации в научных журналах:

1. A. L. Pismensky and Yu.M. Pis'mak «Scaling violation in massless scalar quantum field models in logarithmic dimensions», J. Phys. A: Math. Theor. 48 (2015) 325401.
2. А. Л. Письменский «Расчет критического индекса  $\eta$  для теории  $\varphi^3$  методом конформного бутстрапа», ТМФ 85 (2015), 179–185.
3. A. L. Pismensky «Calculation of critical index  $\eta$  of the  $\varphi^3$ -theory in four-loop approximation by the conformal bootstrap technique», J of Modern Physics A, Vol. 30, No. 24 (2015) 1550138.

И 5 публикаций в сборниках трудов конференций:

1. А. Л. Письменский «About asymptotical behavior of Yang-Mills field», тезисы международной студенческой конференции «Наука и Прогресс – 2010».
2. А. Л. Письменский «Calculation of characteristics of critical behavior in logarithmic dimensions», тезисы международной студенческой конференции «Наука и Прогресс – 2011».
3. А. Л. Письменский «Calculation of propagator asymptotics in logarithmic dimensions for the models  $\varphi^3$  and  $\varphi^4$  by means of renormalization group method», тезисы международной студенческой конференции «Наука и Прогресс – 2012».
4. А. Л. Письменский «Calculation of self-energy diagrams in the  $\varphi^4$  theory with help of recurrence relations», тезисы международной студенческой конференции «Наука и Прогресс – 2013».
5. A. L. Pismenskii «Scaling violation in logarithmic dimensions in massless scalar quantum field theories», proceedings of 18th International Seminar on High Energy Physics «Quarks – 2014».

Уравнение ренормгруппы:

$$\left( -p \frac{\partial}{\partial p} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} + 2\gamma(g) - 2 \right) D(\mu, p, g) = 0.$$

Удобно ввести безразмерные величины:  $s \equiv \frac{p}{\mu}$ ,  $\Phi \equiv \mu^2 D$ .

$$\left( -s \frac{\partial}{\partial s} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} + 2\gamma(g) - 2 \right) \Phi(s, g) = 0.$$

Решение:

$$\Phi(s, g) = \Phi(1, \bar{g}(s, g)) s^{-2} \exp \left( 2 \int_g^{\bar{g}(s, g)} \frac{\gamma(x)}{\beta(x)} dx \right).$$

где  $\bar{g}(s, g)$  — инвариантный заряд, задающийся неявно уравнениями:

$$\bar{g}(1, g) = g; \quad \ln s = \int_g^{\bar{g}(s, g)} \frac{dx}{\beta(x)}.$$

Уравнение Дайсона-Швингера:

$$D^{-1}(p, g) = \Delta^{-1}(p) - \Sigma(p, g).$$

В схеме минимальных вычитаний (MS):

$$\Delta(p) = \frac{1}{p^2}.$$

Введём обозначение:  $\Xi \equiv \mu^{-2}\Sigma$ . Тогда

$$\Phi^{-1}(s, g) = s^2 - \Xi(s, g)$$

и

$$\Phi(1, g) = \frac{1}{1 - \Xi(1, g)}.$$

Решение уравнения РГ переписывается в виде:

$$\Phi(s, g) = \frac{1}{s^2} \frac{1}{1 - \Xi(1, \bar{g}(s, g))} \exp \left( 2 \int_g^{\bar{g}(s, g)} \frac{\gamma(x)}{\beta(x)} dx \right).$$

Введём функции  $\rho(g)$  и  $\sigma(g)$ , такие, что  $\rho'(g) = \frac{1}{\beta(g)}$ ,  $\sigma'(g) = \frac{\gamma(g)}{\beta(g)}$ . Тогда

$$\ln s = \rho(\bar{g}) - \rho(g), \quad \exp \left( 2 \int_g^{\bar{g}} \frac{\gamma(x)}{\beta(x)} dx \right) = e^{-2\sigma(g)} e^{2\sigma(\bar{g})}.$$

Используя обозначение  $s_1 \equiv e^{\rho(g)} s$ , можно записать:

$$\rho(\bar{g}) = \ln s_1,$$

то есть,  $\bar{g}$  зависит не по отдельности от  $s$  и  $g$ , а только от комбинации  $e^{\rho(g)} s$ :

$$\bar{g} = \rho^{-1}(\ln s_1).$$

Выражение для  $\Phi$  в терминах  $s_1$  принимает вид:

$$\Phi(s_1, g) = e^{2\rho(g)} e^{-2\sigma(g)} \frac{1}{s_1^2} \frac{1}{1 - \Xi(1, \bar{g}(s_1))} e^{2\sigma(\bar{g}(s_1))}.$$

А для пропагатора  $D$  получается:

$$D(\mu, p, g) = \frac{1}{\mu^2} e^{-2\sigma(g) + 2\rho(g)} \Psi(s_1),$$

$$\Psi(s_1) = \frac{1}{s_1^2} \frac{1}{1 - \Xi(1, \rho^{-1}(\ln s_1))} e^{2\sigma(\rho^{-1}(\ln s_1))}, \quad s_1 = e^{\rho(g)} \frac{p}{\mu}.$$

Таким образом, выражение для пропагатора факторизуется.



Исследование асимптотики.

$$\ln s = \int_g^{\bar{g}} \frac{dx}{\beta(x)}$$

$\bar{g} \rightarrow g_*$  при  $|\ln s| \rightarrow \pm\infty$ , где  $g_*$  — нуль  $\beta$ -функции.

В логарифмической размерности:  $\beta(g) = b_2 g^2 + \dots$ , и  $g_* = 0$ .

$$\int_g^{\bar{g}} \frac{dx}{b_2 x^2 + \dots} = \frac{1}{b_2} \int_g^{\bar{g}} \frac{1}{x^2} (1 + \dots) dx = -\frac{1}{b_2 \bar{g}} + \frac{1}{b_2 g} + \dots = -\frac{1}{b_2 \bar{g}} + \dots$$

В главном приближении:

$$\ln s = -\frac{1}{b_2 \bar{g}} + \dots$$

Величина  $\bar{g}$  того же знака, что и  $g$ .

Если  $b_2 g > 0$ , то мы извлекаем ИК-асимптотику.

Если  $b_2 g < 0$ , то УФ-асимптотику.

Поправки к главному приближению.

Допустим, мы знаем следующее приближение для функций  $\beta(g)$ ,  $\gamma(g)$  и  $\Xi(1, g)$ :

$$\beta(g) = b_2 g^2 + b_3 g^3 + b_4 g^4 + \mathcal{O}(g^5),$$

$$\gamma(g) = c_1 g + c_2 g^2 + c_3 g^3 + \mathcal{O}(g^4),$$

$$\Xi(1, g) = a_1 g + a_2 g^2 + \mathcal{O}(g^3).$$

$$D(\mu, p, g) = \frac{1}{\mu^2} e^{-2\sigma(g) + 2\rho(g)} \Psi(s_1),$$

$$\Psi(s_1) = \frac{1}{s_1^2} \frac{1}{1 - \Xi(1, \rho^{-1}(\ln s_1))} e^{2\sigma(\rho^{-1}(\ln s_1))}, \quad s_1 = e^{\rho(g)} \frac{p}{\mu}.$$

Функции  $\rho(g)$  и  $\sigma(g)$  определяются однозначно дифференциальными уравнениями с начальными условиями:

$$\begin{cases} \rho'(g) = \frac{1}{\beta(g)}, \\ \rho(g) = -\frac{1}{b_2 g} - \frac{b_3}{b_2^2} \ln |b_2 g| + \mathcal{O}(g). \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma'(g) = \frac{\gamma(g)}{\beta(g)}, \\ \sigma(g) = \frac{c_1}{b_2} \ln |b_2 g| + \mathcal{O}(g). \end{cases}$$

Выражение для  $\Psi(s_1)$  принимает вид:

$$\begin{aligned} \Psi(s_1) = & \frac{1}{s_1^2} |\ln s_1|^{-2c_1/b_2} \left[ 1 + \frac{2b_3c_1 \ln |\ln s_1|}{b_2^3 \ln s_1} + \frac{2b_3c_1 - b_2(2c_2 + b_2a_1)}{b_2^3} \frac{1}{\ln s_1} + \right. \\ & + \frac{b_3^2c_1(b_2 + 2c_1)}{b_2^6} \frac{(\ln |\ln s_1|)^2}{(\ln s_1)^2} + \frac{b_3(4b_3c_1^2 - b_2(b_2 + 2c_1)(2c_2 + b_2a_1))}{b_2^6} \frac{\ln |\ln s_1|}{(\ln s_1)^2} + \\ & + \frac{1}{b_2^6} [2b_3^2c_1^2 - b_2b_3c_1(b_3 + 4c_2) + b_2^3(c_3 + 2c_2a_1) + \\ & \left. + b_2^2(b_4c_1 + 2c_2^2 - b_3(c_2 + 2c_1a_1)) + b_2^4a_2 + b_2^4a_1^2] \frac{1}{(\ln s_1)^2} + \dots \right], \end{aligned}$$

которое можно ещё упростить преобразованием  $s_1 = e^A s_2$ ,  $A = const$ .

В терминах  $s_2$  получаем:

$$\begin{aligned}
\tilde{\Psi}(s_2) = & \frac{1}{s_2^2} |\ln s_2|^{-2c_1/b_2} \left[ 1 + \frac{2b_3c_1}{b_2^3} \frac{\ln |\ln s_2|}{\ln s_2} + \right. \\
& + \left( \frac{2b_3c_1 - b_2(2c_2 + b_2a_1)}{b_2^3} - \frac{2c_1}{b_2} A \right) \frac{1}{\ln s_2} + \frac{b_3^2c_1(b_2 + 2c_1)}{b_2^6} \frac{(\ln |\ln s_2|)^2}{(\ln s_2)^2} + \\
& + \left( \frac{b_3(4b_3c_1^2 - b_2(b_2 + 2c_1)(2c_2 + b_2a_1))}{b_2^6} - \frac{2b_2b_3c_1 + 4b_3c_1^2}{b_2^4} A \right) \frac{\ln |\ln s_2|}{(\ln s_2)^2} + \\
& + \left( \frac{1}{b_2^6} [2b_3^2c_1^2 - b_2b_3c_1(b_3 + 4c_2) + b_2^3(c_3 + 2c_2a_1) + \right. \\
& + b_2^2(b_4c_1 + 2c_2^2 - b_3(c_2 + 2c_1a_1)) + b_2^4a_2 + b_2^4a_1^2] + \\
& \left. + \frac{a_1b_2^3 + 2a_1b_2^2c_1 - 4b_3c_1^2 + 2b_2^2c_2 + 4b_2c_1c_2}{b_2^4} A + \frac{b_2c_1 + 2c_1^2}{b_2^2} A^2 \right) \frac{1}{(\ln s_2)^2} + \dots \Big],
\end{aligned}$$

где  $\Psi(s_1) = e^{-2A} \tilde{\Psi}(s_2)$ .

Как видно, имеются универсальные члены, которые не зависят от  $A$ , и неуниверсальные. Можно записать выражение в виде:

$$\tilde{\Psi}(s_2) = \frac{1}{s_2^2} |\ln s_2|^{-2c_1/b_2} \sum_{n=0}^2 \sum_{m=0}^n W_{nm} \frac{(\ln |\ln s_2|)^{n-m}}{(\ln s_2)^n} + \dots$$

Если  $c_1 \neq 0$ , то  $W_{n0}$  универсальны, и удобно выбрать  $A = \frac{2b_3c_1 - b_2(2c_2 + b_2a_1)}{2b_2^2c_1}$ , тогда коэффициент  $W_{11}$  исчезает и выражение для  $\Psi$  сильно упрощается:

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}(s_2) = & \frac{1}{s_2^2} |\ln s_2|^{-2c_1/b_2} \left[ 1 + \frac{2b_3c_1}{b_2^3} \frac{\ln |\ln s_2|}{\ln s_2} + \frac{b_3^2c_1(b_2 + 2c_1)}{b_2^6} \frac{(\ln |\ln s_2|)^2}{(\ln s_2)^2} - \frac{2b_3^2c_1}{b_2^5} \frac{\ln |\ln s_2|}{(\ln s_2)^2} \right. \\ & \left. - \frac{1}{4b_2^4c_1} [a_1^2b_2^2(b_2 - 2c_1) + 4a_1b_2^2c_2 - 4(a_2b_2^2c_1 + b_4c_1^2 - b_3c_1c_2 - b_2c_2^2 + b_2c_1c_3)] \frac{1}{(\ln s_2)^2} + \dots \right] \end{aligned}$$

Если  $c_1 = 0$ , то:

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}(s_2) = & \frac{1}{s_2^2} \left[ 1 - \frac{2c_2 + b_2a_1}{b_2^2} \frac{1}{\ln s_2} - \left( \frac{b_3(2c_2 + b_2a_1)}{b_2^4} \right) \frac{\ln |\ln s_2|}{(\ln s_2)^2} + \right. \\ & \left. + \left( \frac{a_1^2b_2^2 + a_2b_2^2 + 2a_1b_2c_2 - b_3c_2 + 2c_2^2 + b_2c_3}{b_2^4} + \frac{a_1b_2 + 2c_2}{b_2^2} A \right) \frac{1}{(\ln s_2)^2} + \dots \right] \end{aligned}$$

В этом случае коэффициенты  $W_{n0} = 0$  при  $n > 0$ , а  $W_{00} = 1$ . Коэффициенты  $W_{n1}$  становятся универсальными. Тогда мы выбираем  $A = -\frac{a_1^2b_2^2 + a_2b_2^2 + 2a_1b_2c_2 - b_3c_2 + 2c_2^2 + b_2c_3}{b_2^2(a_1b_2 + 2c_2)}$  и получаем следующий результат:

$$\tilde{\Psi}(s_2) = \frac{1}{s_2^2} \left[ 1 - \frac{2c_2 + b_2a_1}{b_2^2} \frac{1}{\ln s_2} - \left( \frac{b_3(2c_2 + b_2a_1)}{b_2^4} \right) \frac{\ln |\ln s_2|}{(\ln s_2)^2} + \dots \right]$$

Если предположить, что функции  $\beta(g)$ ,  $\gamma(g)$  и  $\Xi(1, g)$  представлены по теории возмущений, то общая форма асимптотического ряда для  $\tilde{\Psi}(s_2)$  при больших  $|\ln s_2|$ :

$$\tilde{\Psi}(s_2) = \frac{1}{s_2^2} |\ln s_2|^{-\frac{2c_1}{b_2}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n W_{nm} \frac{(\ln |\ln s_2|)^{n-m}}{(\ln s_2)^n}.$$

При  $c_1 \neq 0$  все универсальные коэффициенты  $W_{n0}$  выражаются через  $b_2, b_3, c_1$ :

$$W_{n0} = \frac{1}{n!} \frac{\Gamma\left(\frac{2c_1}{b_2} + n\right)}{\Gamma\left(\frac{2c_1}{b_2}\right)} \left(\frac{b_3}{b_2^2}\right)^n.$$

Можно просуммировать все универсальные члены:

$$\sum_{n=0}^{\infty} W_{n0} \frac{(\ln |\ln s_2|)^n}{(\ln s_2)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\Gamma\left(\frac{2c_1}{b_2} + n\right)}{\Gamma\left(\frac{2c_1}{b_2}\right)} \left(\frac{b_3 \ln |\ln s_2|}{b_2^2 \ln s_2}\right)^n = \left(1 - \frac{b_3 \ln |\ln s_2|}{b_2^2 \ln s_2}\right)^{-\frac{2c_1}{b_2}},$$

и функция  $\tilde{\Psi}(s_2)$  в универсальном приближении записывается

$$\tilde{\Psi}(s_2) \sim \frac{1}{s_2^2} |\ln s_2|^{-\frac{2c_1}{b_2}} \left(1 - \frac{b_3 \ln |\ln s_2|}{b_2^2 \ln s_2}\right)^{-\frac{2c_1}{b_2}}.$$

Коэффициенты  $W_{n1}$  — линейные функции  $A$  и выражаются через  $b_2, b_3, c_1, c_2, a_2$ ; все  $W_{nm}$  — полиномы степени  $m$  по  $A$  и зависят от  $b_2, \dots, b_{m+2}, c_1, \dots, c_{m+1}, a_1, \dots, a_m$ .

В случае  $c_1 = 0$  имеем  $W_{00} = 1$ , и  $W_{n0} = 0$  для  $n \geq 1$ . Коэффициенты  $W_{n1}$  являются универсальными и имеют следующий вид:

$$W_{n1} = -\frac{2c_2 + a_1b_2}{b_2^2} \left(\frac{b_3}{b_2^2}\right)^{n-1}.$$

Мы также можем просуммировать универсальные члены асимптотики:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} W_{n1} \frac{(\ln |\ln s_2|)^{n-1}}{(\ln s_2)^n} &= -\frac{2c_2 + a_1b_2}{b_2^2} \frac{1}{\ln s_2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{b_3 \ln |\ln s_2|}{b_2^2 \ln s_2}\right)^{n-1} = \\ &= -\frac{2c_2 + a_1b_2}{b_2^2} \frac{1}{\ln s_2} \left(1 - \frac{b_3 \ln |\ln s_2|}{b_2^2 \ln s_2}\right)^{-1}. \end{aligned}$$

Функция  $\tilde{\Psi}(s_2)$  в универсальном приближении имеет вид:

$$\tilde{\Psi}(s_2) \sim \frac{1}{s_2^2} \left[1 - \frac{2c_2 + a_1b_2}{b_2^2} \frac{1}{\ln s_2} \left(1 - \frac{b_3 \ln |\ln s_2|}{b_2^2 \ln s_2}\right)^{-1}\right].$$

Коэффициенты  $W_{n2}$  в этом случае являются линейной функцией  $A$ , и  $W_{nm}$  — полиномы степени  $m-1$  по  $A$ .

С помощью программы «Wolfram Mathematica» вычислены  $W_{nm}$  вплоть до  $n = 4$  в общем случае и до  $n = 5$  в случае  $c_1 = a_1 = 0$ .

Теория  $\phi^3$ .

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 + \frac{\lambda}{3!}\phi^3,$$

где  $\phi$  — скалярное поле,  $\lambda$  — константа связи.

Логарифмическая размерность  $d^* = 6$ .  $\beta(g)$  и  $\gamma(g)$  известны в 3-петлевом приближении: О. F. de Alcantara Bonfim, J. E. Kirkham and A. J. McKane, J. Phys A 13 (1980) 247-251, J. Phys A 14 (1981) 2391-2413:

$$\beta(g) = -\frac{3}{2}g^2 - \frac{125}{72}g^3 - \left(\frac{33085}{10368} + \frac{5\zeta_3}{4}\right)g^4 + \mathcal{O}(g^5),$$

$$\gamma(g) = \frac{1}{12}g + \frac{13}{432}g^2 + \left(\frac{5195}{62208} - \frac{\zeta_3}{24}\right)g^3 + \mathcal{O}(g^4),$$

где  $g = \frac{\lambda^2}{64\pi^3}$ .

Коэффициент  $b_2 = -\frac{3}{2} < 0$ . Если  $\lambda$  вещественно, то мы получаем  $g > 0$ ,  $b_2g < 0$ , и уравнение РГ описывает УФ-асимптотику. Если  $\lambda$  мнимое, то  $g < 0$ , и ИК-асимптотика.

Чтобы достичь нужной точности, нам потребуется  $\Xi(1, g) = a_1g + a_2g^2 + \mathcal{O}(g^3)$ . Нужно вычислить 3 диаграммы Фейнмана:

$$\Sigma = \frac{1}{2} \text{---} \bigcirc \text{---} + \frac{1}{2} \text{---} \text{---} \bigcirc \text{---} \text{---} + \frac{1}{2} \text{---} \triangle \text{---} + \dots$$



$$\Xi(1, g) = -\frac{8 + 3\tau}{36}g - \frac{1789 + 1116\tau + 180\tau^2}{5184}g^2 + \mathcal{O}(g^3),$$

где  $\tau = \ln 4\pi - \gamma_E$ ,  $\gamma_E = -\Gamma'(1)$  — постоянная Эйлера.

Для асимптотики пропагатора при больших  $|\ln s_2|$  получается:

$$D(p, g) = \frac{1}{\mu^2} e^{2\rho(g) - 2\sigma(g) - 2A} \tilde{\Psi}(s_2),$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}(s_2) = & \frac{1}{s_2^2} |\ln s_2|^{\frac{1}{9}} \left[ 1 + \frac{125}{1458} \frac{\ln |\ln s_2|}{\ln s_2} - \frac{15625}{531441} \frac{(\ln |\ln s_2|)^2}{(\ln s_2)^2} + \right. \\ & \left. + \frac{15625}{236196} \frac{\ln |\ln s_2|}{(\ln s_2)^2} - \frac{11291 - 30132\tau + 1296\zeta_3}{157464} \frac{1}{(\ln s_2)^2} + \dots \right], \end{aligned}$$

где

$$\sigma(g) = -\frac{1}{18} \ln \left( \frac{3}{2} |g| \right) + \frac{43}{972} g + \left( \frac{2375}{419904} + \frac{\zeta_3}{27} \right) g^2 + \mathcal{O}(g^3),$$

$$\rho(g) = \frac{2}{3g} + \frac{125}{162} \ln \left( \frac{3}{2} |g| \right) + \left( \frac{36755}{69984} + \frac{5\zeta_3}{9} \right) g + \mathcal{O}(g^2),$$

$$s_2 = e^{\rho(g) - A} \frac{p}{\mu}, \quad A = \frac{65}{81} + \frac{\tau}{2}.$$

$O(N)$ -симметричная теория  $\phi^4$  в пространстве Евклида.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 + \frac{\lambda}{4!}(\phi^2)^2,$$

где  $\phi$  —  $N$ -компонентное скалярное поле,  $\lambda$  — константа связи,  $\lambda > 0$ . Логарифмическая размерность  $d^* = 4$ ,  $\beta$ -функция и аномальная размерность поля известны в 5-петлевом приближении: H. Kleinert, J. Neu, V. Shulte-Frohlinde, K. G. Chetyrkin, S. A. Larin, Phys. Lett. B 272 (1991) 39-44:

$$\begin{aligned} \beta(g) = & \frac{N+8}{3}g^2 - \frac{3N+14}{3}g^3 + \frac{33N^2+922N+2960+96\zeta_3(5N+22)}{216}g^4 - \\ & - \frac{1}{3888}[-5N^3+6320N^2+80456N+196648+96\zeta_3(63N^2+764N+2332) - \\ & - 288\zeta_4(5N^2+62N+176)+1920\zeta_5(2N^2+55N+186)]g^5 + \\ & + \frac{1}{62208}[13N^4+12578N^3+808496N^2+6646336N+13177344+ \\ & + 16\zeta_3(-9N^4+1248N^3+67640N^2+552280N+1314336) - \\ & - 288\zeta_4(63N^3+1388N^2+9532N+21120)+ \\ & + 256\zeta_5(305N^3+7466N^2+66986N+165084) - \\ & - 9600\zeta_6(N+8)(2N^2+55N+186)+112896\zeta_7(14N^2+189N+526)+ \\ & + 768\zeta_3^2(-6N^3-59N^2+446N+3264)]g^6 + \mathcal{O}(g^7), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma(g) = & \frac{N+2}{36}g^2 - \frac{(N+2)(N+8)}{432}g^3 + \frac{5(N+2)(-N^2+18N+100)}{5184}g^4 - \\ & - \frac{(N+2)}{186624}[39N^3 + 296N^2 + 22752N + 77056 - \\ & - 48\zeta_3(N^3 - 6N^2 + 64N + 184) + 1152\zeta_4(5N + 22)]g^5 + \mathcal{O}(g^6), \end{aligned}$$

где  $g = \frac{\lambda}{16\pi^2} > 0$ .

Мы извлекаем ИК-асимптотику. Нам потребуется вычислить  $\Sigma(p, g)$  вплоть до 4 петель. Сначала рассмотрим случай  $N = 1$ :

$$\begin{aligned} \Sigma = & \frac{1}{6} \text{---} \bigcirc \text{---} + \frac{1}{4} \text{---} \bigcirc \! \! \! \bigcirc \text{---} + \frac{1}{8} \text{---} \bigcirc \! \! \! \bigcirc \! \! \! \bigcirc \text{---} + \frac{1}{12} \text{---} \bigcirc \! \! \! \bigcirc \! \! \! \bigcirc \! \! \! \bigcirc \text{---} + \\ & + \frac{1}{4} \text{---} \bigcirc \! \! \! \bigcirc \! \! \! \bigcirc \! \! \! \bigcirc \text{---} + \frac{1}{4} \text{---} \bigcirc \! \! \! \bigcirc \! \! \! \bigcirc \! \! \! \bigcirc \text{---} + \dots \end{aligned}$$

Рассмотрим эти диаграммы в размерности  $d = 4 - 2\varepsilon$  и обозначим их  $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4, \Sigma_5, \Sigma_6$ , соответственно.

Первые четыре диаграммы считаются явно, а две последние — с помощью рекуррентных соотношений. Результат применения R-операции в схеме MS:

$$R\Sigma_1 = -\frac{13 + 4\tau_s}{8(4\pi)^4} \lambda^2 p^2,$$

$$R\Sigma_2 = -\frac{167 + 84\tau_s + 12\tau_s^2}{24(4\pi)^6} \lambda^3 p^2,$$

$$R\Sigma_3 = -\frac{1851 + 1296\tau_s + 336\tau_s^2 + 32\tau_s^3 + 16\zeta_3}{64(4\pi)^8} \lambda^4 p^2,$$

$$R\Sigma_4 = \frac{543 + 184\tau_s + 16\tau_s^2}{128(4\pi)^8} \lambda^4 p^2,$$

$$R\Sigma_5 = -\frac{3333 + 2064\tau_s + 432\tau_s^2 + 32\tau_s^3 + 352\zeta_3}{192(4\pi)^8} \lambda^4 p^2,$$

$$R\Sigma_6 = -\frac{783 + 444\tau_s + 96\tau_s^2 + 8\tau_s^3 - 56\zeta_3}{24(4\pi)^8} \lambda^4 p^2,$$

где  $\tau_s \equiv \ln 4\pi - \gamma_E - 2 \ln s$ .

Для  $O(N)$ -симметричной теории у каждой диаграммы появляется дополнительный фактор  $A_i(N)$ :

$$\Sigma = \frac{1}{6}A_1(N)\Sigma_1 + \frac{1}{4}A_2(N)\Sigma_2 + \frac{1}{8}A_3(N)\Sigma_3 + \frac{1}{12}A_4(N)\Sigma_4 + \frac{1}{4}A_5(N)\Sigma_5 + \frac{1}{4}A_6(N)\Sigma_6 + \dots$$

Чтобы найти эти факторы, нужно свернуть тензорные структуры. Вершина — это симметризованная комбинация символов Кронекера:

$$\frac{a}{c} \frac{b}{d} = V_{abcd} = \frac{1}{3}(\delta_{ab}\delta_{cd} + \delta_{ac}\delta_{bd} + \delta_{ad}\delta_{bc}).$$

Для  $\Sigma_1$  получается:

$$V_{aijk}V_{ijkb} = \frac{N+2}{3}\delta_{ab}, \quad A_1(N) = \frac{N+2}{3}.$$

Результат для других факторов следующий:

$$A_2(N) = \frac{(N+2)(N+8)}{27}, \quad A_3(N) = \frac{(N+2)(N^2+6N+20)}{81},$$

$$A_4(N) = \frac{(N+2)^2}{9}, \quad A_5(N) = \frac{(N+2)(5N+22)}{81}, \quad A_6(N) = \frac{(N+2)(5N+22)}{81}.$$

Окончательный результат для  $\Xi(1, g)$ :

$$\begin{aligned} \Xi(1, g) = & -\frac{N+2}{144}[13+4\tau]g^2 - \frac{(N+2)(N+8)}{2592}[167+84\tau+12\tau^2]g^3 - \\ & - \frac{N+2}{41472}[1851N^2+41467N+174518+16(N^2-14N-68)\zeta_3+ \\ & + 24(54N^2+1081N+4466)\tau+16(21N^2+373N+1514)\tau^2+32(N+8)^2\tau^3]g^4 + \mathcal{O}(g^5), \end{aligned}$$

где  $\tau = \ln 4\pi - \gamma_E$ ,  $g = \frac{\lambda}{16\pi^2}$ .

Выражение для пропагатора:

$$D(p, g) = \frac{1}{\mu^2} e^{2\rho(g) - 2\sigma(g) - 2A} \tilde{\Psi}(s_2), \quad \tilde{\Psi}(s_2) = \frac{1}{s_2^2} \left[ 1 + \sum_{n=1}^4 \sum_{m=1}^n W_{nm} \frac{(\ln |\ln s_2|)^{n-m}}{(\ln s_2)^n} + \dots \right],$$

$$W_{11} = -\frac{N+2}{2(N+8)^2}, \quad W_{21} = \frac{3(N+2)(3N+14)}{2(N+8)^4}, \quad W_{22} = 0,$$

$$W_{31} = -\frac{9(N+2)(3N+14)^2}{2(N+8)^6}, \quad W_{32} = \frac{9(N+2)(3N+14)^2}{2(N+8)^6},$$

$$W_{33} = \frac{(N+2)}{48(N+8)^6} [319N^4 + 9942N^3 + 116469N^2 + 607364N + 1204452 + \\ + 24(N+8)^4(7\tau + \tau^2) - 384\zeta_3(N+8)(5N+22)],$$

$$W_{41} = \frac{27(N+2)(3N+14)^3}{2(N+8)^8}, \quad W_{42} = -\frac{135(N+2)(3N+14)^3}{4(N+8)^8},$$

$$W_{43} = -\frac{3(N+2)(3N+14)}{32(N+8)^8} [319N^4 + 9942N^3 + 115173N^2 + 595268N + \\ + 1176228 + 24(N+8)^4(7\tau + \tau^2) - 384\zeta_3(N+8)(5N+22)],$$

$$W_{44} = -\frac{N+2}{384(N+8)^8} [7068N^6 + 322295N^5 + 6183232N^4 + 63882945N^3 + 374808430N^2 + \\ + 1182947372N + 1567304328 + 96\zeta_3(N+8)(25N^3 + 1096N^2 + 9052N + 21984) + \\ + 1920\zeta_5(N+8)^2(2N^2 + 55N + 186) + 12(N+8)^4(461N^2 + 6606N + 25948)\tau + \\ + 24(N+8)^4(63N^2 + 953N + 3778)\tau^2 + 144(N+8)^6\tau^3],$$

Теория  $\phi^6$ .

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 + \frac{\lambda}{6!}\phi^6,$$

где  $\phi$  — скалярное поле,  $\lambda$  — константа связи,  $\lambda > 0$ .

Логарифмическая размерность  $d^* = 3$ . Известны 2 члена  $\beta(g)$  и  $\gamma(g)$ :

$$\beta(g) = \frac{20}{3}g^2 - \left( \frac{1124}{15} + \frac{15\pi^2}{2} \right) g^3 + \mathcal{O}(g^4),$$

$$\gamma(g) = \frac{1}{90}g^2 - \frac{2}{81}g^3 + \mathcal{O}(g^4),$$

где  $g = \frac{\lambda}{64\pi^2} > 0$ .

Мы извлекаем ИК-асимптотику. Потребуется одна диаграмма для  $\Sigma$ :

$$\Sigma = \frac{1}{120} \text{ (diagram) } + \dots$$

Она считается явно. После применения R-операции получаем:

$$\Xi(1, g) = -\frac{13 + 3\tau}{270}g^2 + \mathcal{O}(g^3).$$

Выражение для пропагатора:

$$D(p, g) = \frac{1}{\mu^2} e^{2\rho(g) - 2\sigma(g) - 2A} \tilde{\Psi}(s_2),$$

$$\tilde{\Psi}(s_2) = \frac{1}{s_2^2} \left( 1 - \frac{1}{2000} \frac{1}{\ln s_2} + \frac{3(2248 + 225\pi^2)}{8000000} \frac{\ln |\ln s_2|}{(\ln s_2)^2} + \dots \right),$$

где

$$s_2 = \exp [\rho(g) - A] \frac{p}{\mu}, \quad A = \frac{17881}{12000} + \frac{27\pi^2}{320} + \frac{\tau}{2},$$

$$\sigma(g) = \frac{1}{600}g + \left( \frac{2029}{270000} + \frac{3\pi^2}{3200} \right) g^2 + \mathcal{O}(g^3),$$

$$\rho(g) = -\frac{3}{20g} + \left( \frac{843}{500} + \frac{27\pi^2}{160} \right) \ln \left( \frac{20}{3}g \right) + \mathcal{O}(g).$$



**Обсуждение результатов.** Данные результаты опубликованы в статье:  
 A. L. Pismensky and Yu.M. Pis'mak «Scaling violation in massless scalar quantum field models in logarithmic dimensions», J. Phys. A: Math. Theor. 48 (2015) 325401.

Мы рассчитали ИК-асимптотику пропагатора для теорий  $\phi^3$ ,  $\phi^4$  и  $\phi^6$ .

$$D(p, g) = e^{-2\sigma(g)} \frac{1}{p^2} |\ln s|^\nu \sum_{n=0}^k \sum_{m=0}^n V_{nm} \frac{(\ln |\ln s|)^{n-m}}{(\ln s)^n} + \dots, \quad s = \frac{p}{\mu}.$$

Коэффициенты  $V_{n0}$  универсальны, другие включают  $\rho(g)$ . Однако, можно представить  $D(p, g)$  в следующем виде:

$$D(p, g) = \frac{1}{\mu^2} e^{-2\sigma(g)+2\rho(g)} \frac{1}{s_1^2} |\ln s_1|^{-\nu} \sum_{n=0}^k \sum_{m=0}^n \tilde{V}_{nm} \frac{(\ln |\ln s_1|)^{n-m}}{(\ln s_1)^n} + \dots,$$

где  $s_1 = e^{\rho(g)} s$ . В этом выражении все коэффициенты  $\tilde{V}_{nm}$  выражаются явно через коэффициенты функций  $\beta(g)$ ,  $\gamma(g)$  и  $\Xi(1, g)$  и не содержат  $\rho(g)$ . Это означает, что пропагатор  $D(p, g)$  факторизуется:

$$D(p, g) = \Omega(\mu, g) \Psi(s_1), \quad \Omega(\mu, g) = \frac{1}{\mu^2} e^{-2\sigma(g)+2\rho(g)}.$$

**Метод конформного бутстрапа** основан на уравнениях самосогласования, которые получаются в результате отбрасывания затравок в скелетных уравнениях для функций Грина.

$$\begin{array}{c} \bullet \diagdown \end{array} = \begin{array}{c} \diagdown \end{array} + \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \end{array} + \begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \end{array} + \dots \equiv \begin{array}{c} \diagdown \end{array} + \begin{array}{c} \diagdown \\ \hline \diagup \end{array}$$

$$\Sigma = \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \end{array} = \begin{array}{c} \diagdown \\ \hline \diagup \end{array} - \begin{array}{c} \diagdown \\ \hline \hline \diagup \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \diagdown \\ \hline \diagup \end{array} = \begin{array}{c} \diagdown \\ \hline \hline \diagup \end{array}, \quad D^{-1} = -\Sigma = \begin{array}{c} \diagdown \\ \hline \hline \hline \diagup \end{array} - \begin{array}{c} \diagdown \\ \hline \diagup \end{array}$$

Метод конформного бутстрапа для теории  $\varphi^3$ .

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 + \frac{\lambda}{3!}\varphi^3, \quad d = 6 + 2\varepsilon.$$

В критической точке пропагатор и вершинная функция — степенные функции:

$$D(x_1, x_2) = \frac{A}{(x_1 - x_2)^{2\alpha}}, \quad \Gamma(x_1, x_2, x_3) = \frac{C}{(x_1 - x_2)^{2a}(x_1 - x_3)^{2a}(x_2 - x_3)^{2a}},$$

$$\alpha = \frac{d}{2} - 1 + \frac{\eta}{2}, \quad a = \frac{d - \alpha}{2},$$

где  $\eta$  — критический индекс, который мы ищем в виде  $\varepsilon$ -разложения:

$$\eta = \eta_1\varepsilon + \eta_2\varepsilon^2 + \eta_3\varepsilon^3 + \mathcal{O}(\varepsilon^4).$$

Система уравнений конформного бутстрапа имеет вид:

$$\begin{cases} V(\alpha, u; \omega)|_{\omega=0} = 1 \\ 2p(\alpha) = uS(\alpha) \frac{\partial V(\alpha, u; \omega)}{\partial \omega} \Big|_{\omega=0}, \end{cases}$$

где  $p(\alpha) = \pi^{-d}H(\alpha - d/2, d/2 - \alpha)$ ,  $S(\alpha) = \pi^{2d} \frac{H(\alpha, \alpha, \alpha, a, a, a, d/2 + a - \alpha)}{\Gamma(d/2)}$ ,

$H(z) = \frac{\Gamma(z')}{\Gamma(z)}$ ,  $z' = d/2 - z$ ,  $H(z_1, z_2, z_3, \dots) = H(z_1)H(z_2)H(z_3)\dots$ ,

$u = C^2 A^3$  (ренорм-инвариантная комбинация амплитуд).

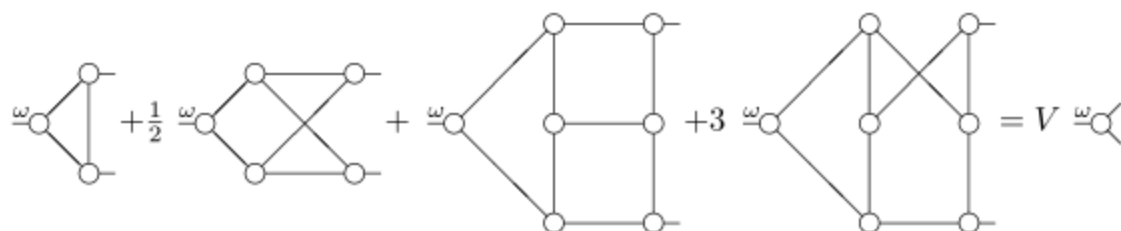
Функция  $V(\alpha, u; \omega)$  определяется условием:

$$\begin{array}{c} \varepsilon \\ \circ \\ \diagup \quad \diagdown \\ \circ \quad \circ \\ \diagdown \quad \diagup \\ \circ \end{array} + \frac{1}{2} \begin{array}{c} \varepsilon \\ \circ \\ \diagup \quad \diagdown \\ \circ \quad \circ \\ \diagdown \quad \diagup \\ \circ \quad \circ \\ \diagup \quad \diagdown \\ \circ \quad \circ \\ \diagdown \quad \diagup \\ \circ \end{array} + \dots = V(\alpha, u; \omega) \begin{array}{c} \omega \\ \circ \\ \diagup \quad \diagdown \\ \circ \quad \circ \\ \diagdown \quad \diagup \\ \circ \end{array}$$

Кружок — вершинная функция, кружок со значком  $\omega$  — регуляризованная вершинная функция:

$$\begin{array}{c} \circ \\ \diagup \quad \diagdown \\ \circ \quad \circ \\ \diagdown \quad \diagup \\ \circ \end{array} = \alpha \begin{array}{c} \alpha \\ \diagup \quad \diagdown \\ \alpha \quad \alpha \\ \diagdown \quad \diagup \\ \alpha \end{array} \quad \begin{array}{c} \varepsilon \\ \circ \\ \diagup \quad \diagdown \\ \circ \quad \circ \\ \diagdown \quad \diagup \\ \circ \quad \circ \\ \diagup \quad \diagdown \\ \circ \quad \circ \\ \diagdown \quad \diagup \\ \circ \end{array} = \alpha + 2\omega \begin{array}{c} \alpha \\ \diagup \quad \diagdown \\ \alpha - \omega \quad \alpha + \omega \\ \diagdown \quad \diagup \\ \alpha \end{array}$$

Для 3-петлевого расчёта потребуются следующие диаграммы:



Эти диаграммы вычисляются путём применения уже известных методов: преобразование инверсии, интегрирование цепочек, метод уникальностей, интегрирование по частям, переход в импульсное представление.

Результат: А.Л. Письменский, ТМФ, 185 (2015), 179-185:

$$\eta = \frac{2}{9}\varepsilon - \frac{172}{729}\varepsilon^2 + \left( \frac{16750}{59049} - \frac{128\zeta_3}{243} \right) \varepsilon^3 + \mathcal{O}(\varepsilon^4), \quad d = 6 + 2\varepsilon.$$

Этот результат совпадает с уже известным: O. F. de Alcantara Bonfim, J. E. Kirkham, A. J. McKane, J. Phys A 13 (1980) 247-251, J. Phys A, 14 (1981) 2391Ц2413:

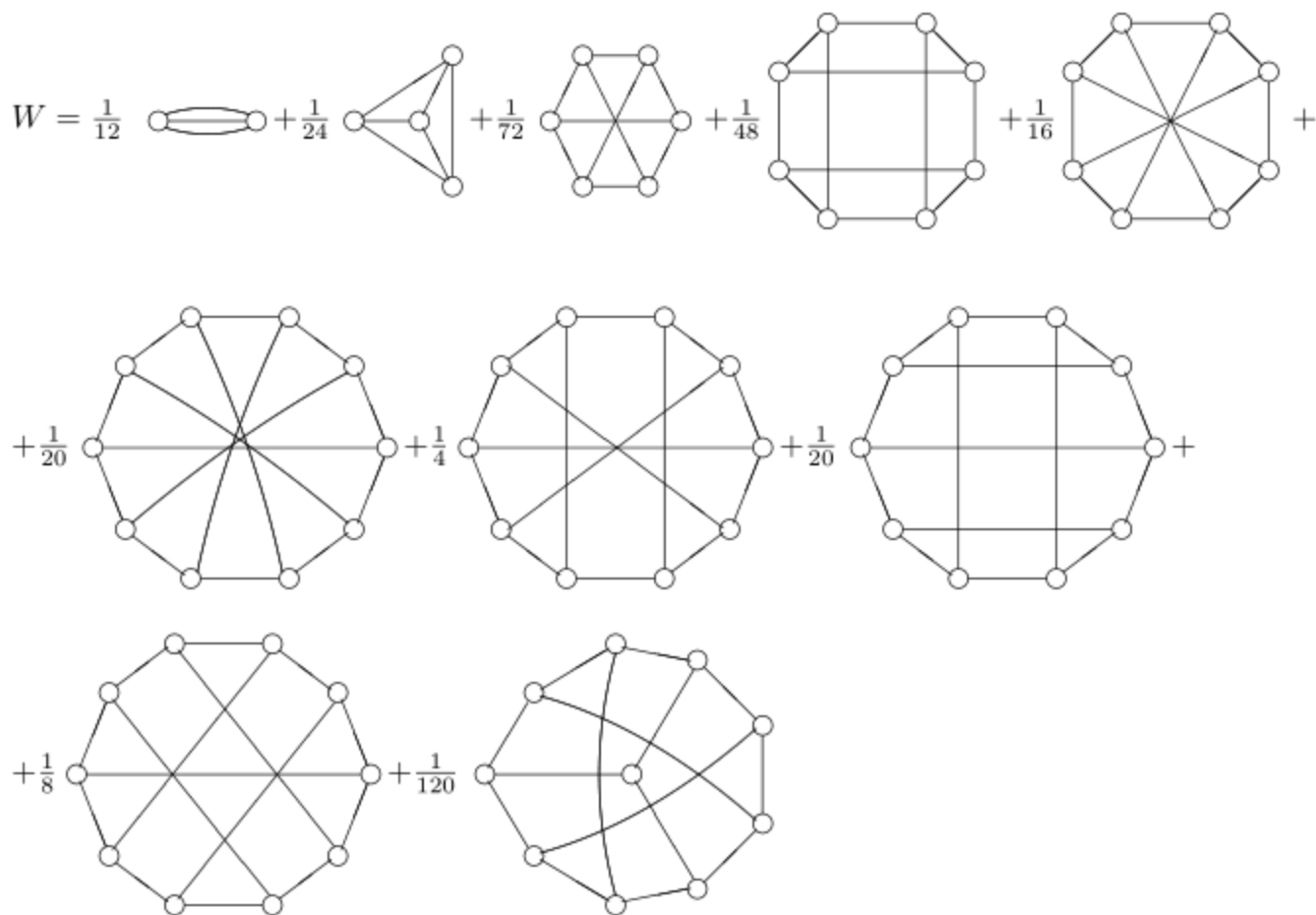
$$\eta = -\frac{1}{9}\epsilon - \frac{43}{729}\epsilon^2 + \left( -\frac{8375}{2^2 3^{10}} + \frac{16\zeta_3}{3^5} \right) \epsilon^3 + \mathcal{O}(\epsilon^4), \quad d = 6 - \epsilon.$$

Таким образом, с помощью метода конформного бутстрапа мы воспроизвели уже известный трёхпетлевой результат, при этом вычисляя значительно меньше фейнмановских диаграмм.

Расчёт 4-петлевой поправки аналитически.

$$\eta = \eta_1 \varepsilon + \eta_2 \varepsilon^2 + \eta_3 \varepsilon^3 + \eta_4 \varepsilon^4 + \mathcal{O}(\varepsilon^5).$$

Для нахождения  $\eta_4$  нам потребуются вклады в функцию  $V(\alpha, u; \omega)$  вплоть до порядка  $u^4$ . Сначала построим все вакуумные 3-неприводимые диаграммы вплоть до 10-вершинных:



Путём дифференцирования по вершине получаем диаграммы для функции  $V$ :

$$\begin{aligned}
 V(\alpha, u; \omega) \varepsilon \text{---} \circ &= \varepsilon \text{---} \circ \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ \end{array} + \frac{1}{2} \varepsilon \text{---} \circ \begin{array}{c} \circ \\ / \backslash \\ \circ \end{array} + \varepsilon \text{---} \circ \begin{array}{c} \circ \quad \circ \\ | \quad | \\ \circ \quad \circ \\ | \quad | \\ \circ \quad \circ \end{array} + \varepsilon \text{---} \circ \begin{array}{c} \circ \quad \circ \\ | \quad | \\ \circ \quad \circ \\ / \backslash \\ \circ \quad \circ \end{array} + \\
 &+ \varepsilon \text{---} \circ \begin{array}{c} \circ \quad \circ \\ | \quad | \\ \circ \quad \circ \\ / \backslash \\ \circ \quad \circ \end{array} + \varepsilon \text{---} \circ \begin{array}{c} \circ \quad \circ \\ | \quad | \\ \circ \quad \circ \\ / \backslash \\ \circ \quad \circ \end{array} + 3 \varepsilon \text{---} \circ \begin{array}{c} \circ \quad \circ \quad \circ \\ | \quad | \quad | \\ \circ \quad \circ \quad \circ \\ | \quad | \quad | \\ \circ \quad \circ \quad \circ \end{array} + 3 \varepsilon \text{---} \circ \begin{array}{c} \circ \quad \circ \quad \circ \\ | \quad | \quad | \\ \circ \quad \circ \quad \circ \\ / \backslash \\ \circ \quad \circ \end{array} + \\
 &+ 6 \varepsilon \text{---} \circ \begin{array}{c} \circ \quad \circ \quad \circ \\ | \quad | \quad | \\ \circ \quad \circ \quad \circ \\ / \backslash \\ \circ \quad \circ \end{array} + 6 \varepsilon \text{---} \circ \begin{array}{c} \circ \quad \circ \quad \circ \\ | \quad | \quad | \\ \circ \quad \circ \quad \circ \\ / \backslash \\ \circ \quad \circ \end{array} + 3 \varepsilon \text{---} \circ \begin{array}{c} \circ \quad \circ \quad \circ \\ | \quad | \quad | \\ \circ \quad \circ \quad \circ \\ | \quad | \quad | \\ \circ \quad \circ \quad \circ \end{array} + \frac{3}{2} \varepsilon \text{---} \circ \begin{array}{c} \circ \quad \circ \quad \circ \\ | \quad | \quad | \\ \circ \quad \circ \quad \circ \\ / \backslash \\ \circ \quad \circ \end{array} + \\
 &+ 3 \varepsilon \text{---} \circ \begin{array}{c} \circ \quad \circ \quad \circ \\ | \quad | \quad | \\ \circ \quad \circ \quad \circ \\ / \backslash \\ \circ \quad \circ \end{array} + 3 \varepsilon \text{---} \circ \begin{array}{c} \circ \quad \circ \quad \circ \\ | \quad | \quad | \\ \circ \quad \circ \quad \circ \\ / \backslash \\ \circ \quad \circ \end{array} + \frac{1}{2} \varepsilon \text{---} \circ \begin{array}{c} \circ \quad \circ \quad \circ \\ | \quad | \quad | \\ \circ \quad \circ \quad \circ \\ / \backslash \\ \circ \quad \circ \end{array}
 \end{aligned}$$

$\gamma_1$        $\gamma_2$        $\gamma_{31}$        $\gamma_{32a}$        $\gamma_{32b}$        $\gamma_{32c}$        $\gamma_{41}$        $\gamma_{42}$        $\gamma_{43}$        $\gamma_{44}$        $\gamma_{45}$        $\gamma_{46}$        $\gamma_{47}$        $\gamma_{48}$        $\gamma_{49}$

Для получения результата использовались известные методы расчёта (интегрирование цепочек, метод уникальностей, интегрирование по частям, преобразование инверсии, переход в импульсное представление, группа симметрии диаграммы «петля с перекладиной»), а также был разработан новый метод для расчёта диаграмм типа «веер»:

$$G_n(m_1, \dots, m_n, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}) = \text{Diagram} \quad ,$$

$m_1, m_2, \dots, m_n$  — положительные целые числа,  $\beta_1, \dots, \beta_{n-1}$  — произвольные. Эта диаграмма вычисляется явно в произвольной размерности пространства путём многократного применения формулы интегрирования по частям:

$$\begin{array}{c} \bullet \xrightarrow{z_2} \bullet \xrightarrow{z_3} \bullet \\ | \\ \bullet \\ z_1 \end{array} = \frac{1}{d-2z_1-z_2-z_3} \left\{ z_2 \left[ \begin{array}{c} \bullet \xrightarrow{z_2+1} \bullet \xrightarrow{z_3} \bullet \\ | \\ \bullet \\ z_1-1 \end{array} - \begin{array}{c} \bullet \xrightarrow{z_2+1} \bullet \xrightarrow{z_3} \bullet \\ / \backslash \\ \bullet \quad \bullet \\ -1 \quad z_1 \end{array} \right] + z_3 \left[ \begin{array}{c} \bullet \xrightarrow{z_2} \bullet \xrightarrow{z_3+1} \bullet \\ | \\ \bullet \\ z_1-1 \end{array} - \begin{array}{c} \bullet \xrightarrow{z_2} \bullet \xrightarrow{z_3+1} \bullet \\ / \backslash \\ \bullet \quad \bullet \\ z_1 \quad -1 \end{array} \right] \right\}$$



**Результат.** A. L. Pismensky «Calculation of critical index  $\eta$  of the  $\varphi^3$ -theory in four-loop approximation by the conformal bootstrap technique», J of Modern Physics A, Vol. 30, No. 24 (2015) 1550138.

$$\eta = \frac{2}{9}\epsilon - \frac{172}{729}\epsilon^2 + \left(\frac{16750}{3^{10}} - \frac{128\zeta_3}{3^5}\right)\epsilon^3 +$$

$$+ \left(-\frac{3883409}{3^{14}} - \frac{11456\zeta_3}{3^9} + \frac{64\zeta_4}{3^4} - \frac{1280\zeta_5}{3^7}\right)\epsilon^4 + \mathcal{O}(\epsilon^5), \quad d = 6 + 2\epsilon.$$

Результат хорошо согласуется с 4-петлевым численным: L. Ts. Adzhemyan, M. V. Kompaniets, Theor. Mat. Phys. 169(1) (2011) 1450–1459:

$$\eta = -0.1111\epsilon - 0.0588\epsilon^2 + 0.0436\epsilon^3 - 0.081\epsilon^4 + \mathcal{O}(\epsilon^5), \quad d = 6 - \epsilon.$$

Если мы выберем  $d = 6 - \epsilon$ , то наш результат будет:

$$\eta = -\frac{1}{9}\epsilon - \frac{43}{729}\epsilon^2 + \left(-\frac{8375}{2^2 3^{10}} + \frac{16\zeta_3}{3^5}\right)\epsilon^3 + \left(-\frac{3883409}{2^4 3^{14}} - \frac{716\zeta_3}{3^9} + \frac{4\zeta_4}{3^4} - \frac{80\zeta_5}{3^7}\right)\epsilon^4 + \mathcal{O}(\epsilon^5),$$

т.е.,  $\eta_4 = -\frac{3883409}{2^4 3^{14}} - \frac{716\zeta_3}{3^9} + \frac{4\zeta_4}{3^4} - \frac{80\zeta_5}{3^7} = -0.07895\dots$  Числа  $-0.081$  и  $-0.07895$  близки.

Позднее методом РГ был получен результат: J.A. Gracey, arXiv: 1506.03357 [hep-th]:

$$\eta = -\frac{2}{9}\epsilon - \frac{172}{729}\epsilon^2 + 2[15552\zeta_3 - 8375]\frac{\epsilon^3}{59049} +$$

$$+ [-2783808\zeta_3 + 3779136\zeta_4 - 2799360\zeta_5 - 3883409]\frac{\epsilon^4}{4782969} + \mathcal{O}(\epsilon^5), \quad d = 6 - 2\epsilon,$$

который совпадает с нашим.

Кроме критического индекса, мы нашли ренорм-инвариантную комбинацию амплитуд  $u$ :

$$\begin{aligned}
 u = & \frac{64}{27\pi^{18}}\varepsilon^3 + \frac{64(217 - 162\tau)}{729\pi^{18}}\varepsilon^4 + \\
 & + \frac{32(4814 + 36\tau(-217 + 81\tau) + 81\pi^2 - 720\zeta_3)}{2187\pi^{18}}\varepsilon^5 + \\
 & + \frac{32}{14348907\pi^{18}}[69182381 + 4271211\pi^2 - 42655248\zeta_3 - 12597120\zeta_5 - \\
 & - 39366(-3906\tau^2 + 972\tau^3 - 2\pi^4 + \tau(4814 + 81\pi^2 - 720\zeta_3))]\varepsilon^6 + \mathcal{O}(\varepsilon^7),
 \end{aligned}$$

$$\tau = \gamma_E + \ln \pi.$$

Выражение для  $u$  связано с координатой нуля  $\beta$ -функции

$$\begin{aligned}
 g_* \equiv \pi^d (H(a, a, \alpha))^2 \sqrt[3]{u} = & \frac{4}{3}\varepsilon - \frac{428}{243}\varepsilon^2 + \left( \frac{43088}{19683} - \frac{160\zeta_3}{81} \right) \varepsilon^3 + \\
 & + \left( -\frac{5994238}{1594323} + \frac{11288\zeta_3}{6561} + \frac{8\pi^4}{243} - \frac{1280\zeta_5}{243} \right) \varepsilon^4 + \mathcal{O}(\varepsilon^5)
 \end{aligned}$$

в специальной схеме ренормировок.

Первый член инвариантен:  $g_* = \frac{4}{3}\varepsilon + \dots$  верно в любой схеме.

А последующие члены уже зависят от схемы.

## Заключение.

В диссертации методом уравнения ренормгруппы исследована инфракрасная асимптотика скалярных теорий  $\phi^3$ ,  $\phi^4$  и  $\phi^6$  в логарифмической размерности, вычислены логарифмические поправки к уже известному главному приближению. Метод конформного бутстрапа использовался для расчёта критического индекса теории  $\phi^3$ .

(1) Показано, что в логарифмической размерности пространства поправки к главному приближению пропагатора выражаются через логарифм и логарифм логарифма импульса. Имеются универсальные члены, коэффициенты которых не зависят от константы связи, и неуниверсальные.

(2) Установлено, что  $O(N)$ -симметричная теория  $\phi^4$  при произвольном  $N$  не является тривиальной: только главное приближение пропагатора — чистая степень импульса, а поправки содержат логарифмы. Однако в пределе  $N \rightarrow \infty$  теория становится тривиальной.

(3) Для теории  $\phi^3$  с помощью метода конформного бутстрапа воспроизведён уже известный 3-петлевой аналитический результат для критического индекса  $\eta$ . Тем самым показано, что по сравнению с ренормгрупповым подходом, этот метод требует вычисления значительно меньшего количества диаграмм Фейнмана.

(4) С помощью того же метода получена 4-петлевая поправка к критическому индексу  $\eta$  аналитически. Результат хорошо согласуется с его численным значением, полученным другими авторами. Аналитический 4-петлевой результат, полученный позднее третьим автором, также совпадает с нашим.

**Спасибо за внимание!!!**