

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ИРКУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

УДК 524.1:539.14

Синеговская Татьяна Сергеевна

МЕХАНИЗМЫ ГЕНЕРАЦИИ АТМОСФЕРНЫХ
МЮОНОВ И НЕЙТРИНО ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

01.04.02 - теоретическая физика

диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель -
кандидат физ.-мат. наук,
с. н. с. Наумов В.А.

Иркутск–1999

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
1 Ядерно-каскадный процесс в атмосфере	10
1.1 Особенности ядерного каскада	10
1.2 Решение системы кинетических уравнений для нуклонов	13
1.3 Решение системы кинетических уравнений для пионов	18
1.4 Решение системы кинетических уравнений для каонов	23
1.5 Поправки к нуклонной и пионной компонентам	26
1.6 Ядерный каскад при сверхвысоких энергиях	29
1.7 Мюоны и нейтрино в атмосфере	33
1.7.1 Решение кинетических уравнений для мюонов	33
1.7.2 Решение кинетических уравнений для нейтрино	37
2 Трехчастичные распады	40
2.1 Спектральные функции для μ_{e3} -распада	40
2.2 Полулептонные распады каонов	42
2.2.1 Спектральные функции	51
2.2.2 Анализ данных и результаты расчета	54
2.3 Спектральные функции для распадов очарованных частиц	62
3 Потоки вторичных космических лучей	66
3.1 Модель спектра и состава первичных космических лучей	66
3.2 Модели инклюзивных и полных неупругих сечений	69
3.3 Нуклоны	77
3.4 Мюоны	82
3.4.1 Мюоны на уровне моря	82
3.4.2 Мюоны под землей и под водой	96
3.5 Нейтрино	105
Заключение	113
Литература	118

Список рисунков

2.1	Разброс в измерениях параметров формфакторов λ_+ и ξ	56
2.2	Нормированные спектры вторичных частиц от $K_{\ell 3}^0$ распадов	60
2.3	Абсолютные спектры вторичных частиц от $K_{\ell 3}$ распадов	61
3.1	Нормированные дифференциальные сечения Кимеля-Мохова	71
3.2	Импульсные распределения пионов под углом 3.5° в pBe -взаимодействиях	72
3.3	Дифференциальные сечения рождения $\pi^\pm$ в pBe -взаимодействиях при 19.2 ГэВ/с	73
3.4	Дифференциальные сечения рождения $K^\pm$ в pBe -взаимодействиях при 19.2 ГэВ/с	74
3.5	Дифференциальные сечения рождения $\pi^\pm$ в pBe -взаимодействиях при 24 ГэВ/с	75
3.6	Инвариантные инклюзивные дифференциальные сечения рождения $\pi^\pm$ в протон-ядерных взаимодействиях при 100 ГэВ/с для разных поперечных импульсах	76
3.7	$Z_\pm$ как функции энергии и глубины	78
3.8	Дифференциальные энергетические спектры нуклонов на глубинах $h = 20, 200$ и 530 г/см ²	79
3.9	Дифференциальный энергетический спектр протонов на высоте 3.2 км над у.м.	80
3.10	Дифференциальный энергетический спектр протонов на у.м.	80
3.11	Дифференциальный энергетический спектр нейтронов на уровне моря	81
3.12	Вклады различных распадов пионов и каонов в вертикальные и горизонтальные дифференциальные спектры мюонов на уровне моря.	83
3.13	Вклады цепочек $K \rightarrow \pi^\pm \rightarrow \mu^\pm$	84
3.14	Дифференциальные спектры мюонов на уровне моря	86
3.15	Интегральные спектры мюонов на уровне моря	87
3.16	Дифференциальные энергетические спектры мюонов на уровне моря для зенитных углов $45^\circ, 72^\circ$ и 89°	91
3.17	Данные спектрометра DEIS	92
3.18	μ^+/μ^- -отношение на уровне моря	93
3.19	Расчеты спектров (π, K) -мюонов	94

3.20	Зенитно-угловые распределения (π, K) -мюонов	95
3.21	Кривая поглощения мюонов в грунте KGF и данные измерений	97
3.22	Данные Баксана	99
3.23	Данные установки Fréjus	100
3.24	Данные MACRO	102
3.25	Данные LVD	103
3.26	Кривая поглощения мюонов в воде и данные измерений	104
3.27	Данные нейтринных телескопов НТ Байкал и AMANDA	105
3.28	Вклады различных распадов в спектры электронных нейтрино	107
3.29	Вклады различных распадов в спектры мюонных нейтрино	108
3.30	Сравнение расчетов спектров $\nu_e + \bar{\nu}_e$ и $\nu_\mu + \bar{\nu}_\mu$	110
3.31	$\nu/\bar{\nu}$ -отношение при $\vartheta = 0^\circ$ и 90°	111
3.32	Флейворное отношение R_ν как функция энергии	112

Список таблиц

1.1	Минимальная недостающая масса в $i + A \rightarrow \pi^\pm + X$	19
1.2	Минимальная недостающая масса в $i + A \rightarrow K + X$	24
1.3	Минимальная недостающая масса в $M + A \rightarrow N + X$	28
1.4	Основные каналы распадов.	34
2.1	Параметры формфакторов для $K_{\ell 3}$ распадов	54
2.2	Ширины $K_{\ell 3}$ распадов.	54
2.3	Коэффициенты c_n^ν для $K_{\ell 3}^0$	57
2.4	Коэффициенты c_n^ν для $K_{\ell 3}^\pm$	57
2.5	Коэффициенты c_n^ℓ для $K_{\ell 3}^0$	58
2.6	Коэффициенты c_n^ℓ для $K_{\ell 3}^\pm$	58
2.7	Коэффициенты c_n^π для $K_{\ell 3}^0$	59
2.8	Коэффициенты c_n^π для $K_{\ell 3}^\pm$	59
3.1	Параметры первичного спектра космических лучей для $E < 10^3$ ГэВ. . .	67
3.2	Параметры первичного спектра космических лучей для $E > 10^3$ ГэВ. . .	67
3.3	Параметры формул 3.4- 3.5 для pBe -взаимодействия	70
3.4	Логарифмические моменты $z_{ij}^{(n)}(\gamma)$ инклюзивных распределений нуклонов, пионов и каонов	77
3.5	Отношения расчетов вертикальных спектров (π, K) -мюонов	95

Введение

Атмосферные мюоны и нейтрино генерируются в разветвленных цепочках распадов нестабильных частиц, которые рождаются как в столкновениях космических лучей (КЛ) с ядрами атомов воздуха, так и в результате распадов. Поскольку толщина атмосферы в 10-12 раз превышает пробег адрона до взаимодействия, то частицы КЛ многократно взаимодействуют с ядрами атомов воздуха, генерируя новые частицы и теряя энергию в электромагнитных и ядерных взаимодействиях. Расчет ядерно-каскадного процесса в атмосфере требует знания спектра и химического (зарядового) состава первичного космического излучения, дифференциальных и полных сечений взаимодействий адронов с легкими ядрами, а также эксклюзивных и инклюзивных ширин распадов нестабильных частиц (пионов, каонов, очарованных адронов и мюонов) дифференциальных по энергии продуктов распадов в широкой области энергий.

Исследование механизмов генерации мюонов и нейтрино космических лучей имеет многолетнюю историю. Первые оценки их потоков были сделаны еще в начале 60х, в работах Грейзена [1] и Маркова и Железных [2]. После классического исследования Зацепина и Кузьмина [3, 4] расчеты спектров и зенитно-угловых распределений мюонов и нейтрино неоднократно уточнялись и детализировались многими авторами [5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13] (см. также [14, 15]).

В последние годы интерес к мюонам и нейтрино космических лучей резко возрос с появлением неожиданных результатов в экспериментах на больших подземных детекторах IMB [16], Kamiokande [17, 18], SOUDAN 2 [19], Super-Kamiokande [20, 21, 22] и MACRO [23], которые свидетельствуют о проявлении свойств нейтрино, выходящих за рамки стандартной теории электрослабых взаимодействий. Наиболее перспективным кажется объяснение “нейтринной аномалии”, связанное с гипотезой нейтринных осцилляций [24, 25]. Однако не исключены и более экзотические объяснения, включающие, например, гипотезы об изменяющих флейвор νN -взаимодействиях, нарушении принципа эквивалентности и др. [26, 27]). Таким образом, детальная информация о спектрах и угловых распределениях атмосферных нейтрино (АН) необходима прежде всего

для однозначной интерпретации результатов подземных экспериментов, связанных с нестандартными свойствами нейтрино.

Другой важный аспект проблемы АН связан с астрофизическими экспериментами на подводных нейтринных телескопах высоких энергиях. В этих экспериментах выделение (на фоне, создаваемом атмосферными нейтрино) событий, вызванных внеземными нейтрино (в том числе нейтрино от гравитационных коллапсов массивных звезд, от яркой фазы галактической эволюции, от активных галактических ядер и др. [28, 29]), нейтрино, которые могли бы генерироваться в Солнце и Земле при аннигиляции частиц "холодной темной материи" [30], а также релятивистских массивных слабо взаимодействующих частиц (например, фотино) [31] возможно только с помощью сравнения наблюдаемых энергетических и пространственных распределений событий в детекторе с ожидаемыми от нейтрино космических лучей.

Кроме того, измерения спектров и зенитно-угловых распределений атмосферных мюонов дает возможность проверки моделей ядерного каскада в атмосфере, т.е. параметров первичного космического излучения (энергетический спектр, химический состав) и взаимодействий частиц. В частности, измерения мюонной компоненты высоких энергий могут дать информацию о механизмах рождения чарма в адрон-ядерных столкновениях. Исследование рождения чарма представляет интерес не только для физики частиц, но и имеет важный прикладной аспект в нейтринной астрономии высоких энергий, поскольку именно АН от распада очарованных частиц являются основным источником фона при детектировании нейтрино внеземного происхождения.

Остановимся подробнее на проблеме исследования нейтринных осцилляций в экспериментах с АН. Проблема низкоэнергетического нейтринного потока ($E_\nu < 10 - 15$ ГэВ) связана с наблюдаемыми аномалиями в зенитно-угловом распределении и флейворном отношении $R_\nu = (\nu_\mu + \bar{\nu}_\mu)/(\nu_e + \bar{\nu}_e)$, которые наблюдались в экспериментах Kamiokande [17, 18] и IMB-3 [16], а позднее на установке SOUDAN 2 [19]. Эти аномалии были недавно подтверждены с существенно более высокой статистикой в экспериментах на детекторе Super-Kamiokande [20, 21]. Предварительные результаты детектора MACRO в Гран Сассо по низкоэнергетическим нейтринным событиям также свидетельствуют о наличии аномалии во флейворном отношении [23]. Как уже отмечалось, наблюдаемые аномалии дают указания в пользу существования нейтринных осцилляций. Следует отметить, что в двух других экспериментах, Fréjus [32, 33] и NUSEX [34] никаких аномалий обнаружено не было. Это противоречие до сих пор не получило общепринятого объяснения. Фактически, единственным формальным основанием, позволяющим "забыть" о нем является пренебрежимо малая статистика экспериментов Fréjus

и NUSEX по сравнению с совокупной статистикой остальных детекторов.

Для энергий $E_\nu < 1$ ГэВ объяснение аномалии во флейворном отношении R_ν существенно зависит от того, имеется ли дефицит мюоноподобных событий (нейтринные осцилляции?) или же избыток электроноподобных событий (распад протона? [35]). Не исключено, что имеют место сразу оба эффекта. Эта возможность, хотя и кажется маловероятной, в последнее время подкрепляется новыми аргументами.

При высоких энергиях ($E_\nu > 10$ ГэВ) убедительные указания на существование нейтринных осцилляций дают данные по угловому распределению “проходящих” мюонов (т.е. мюонов, рожденных атмосферными нейтрино в Земле и попадающих в детектор снизу вверх), измеренному MACRO [23], Kamiokande и Super-Kamiokande [21, 22]. Однако на сегодняшний день ситуация здесь неясна прежде всего из-за неопределенностей в теоретических предсказаниях для потока проходящих мюонов. Эти неопределенности включают неопределенности в дифференциальных сечениях процессов $\nu_\mu N \rightarrow \mu^- X$ и $\bar{\nu}_\mu N \rightarrow \mu^+ X$ и ошибки расчета потока АН. Последние связаны в конечном итоге с неопределенностями в данных о сечениях рождения π - и K -мезонов в нуклон-ядерных взаимодействиях и с недостатком информации о спектре и химическом составе первичных КЛ. Дальнейший набор статистики в эксперименте Super-Kamiokande, ввод в строй нового подземного детектора ICARUS [36], а также использование потенциала подводных (подледных) детекторов (AMANDA [37], Байкальский нейтринный телескоп [38], NESTOR [39], ANTARES [40] и др.) потребуют качественного улучшения точности расчета потока АН.

Для однозначной интерпретации современных и будущих данных по проходящим мюонам поток нейтрино должен быть рассчитан по крайней мере с 10-процентной точностью. Вследствие этого, возникает необходимость “нормировки” расчетного (модельно-зависимого) потока АН. При этом под “нормировкой” здесь понимается фитирование неизвестных (или известных с плохой точностью) параметров ядерно-каскадной модели. Поток мюонов, генерируемых в атмосфере в тех же процессах что и нейтрино, является естественным инструментом для подобной нормировки. Однако, несмотря на то, что мюонная компонента космических лучей наиболее пригодна для измерений, экспериментальная ситуация продолжает оставаться неудовлетворительной. Хотя большинство экспериментов имеют хорошую статистическую обеспеченность, данные наземных измерений потоков мюонов высоких энергий и подземных детекторов настолько противоречивы [41, 42], что можно говорить о наличии неучтенных систематических эффектов в некоторых экспериментах. К тому же точность измерений на подземных установках существенно ограничена неопределенностями плотности и химического со-

става окружающего установку грунта. Эти проблемы подземных экспериментов могут быть решены измерениями на подводных черенковских установках, обладающих такими преимуществами как высокая степень однородности вещества-поглотителя (вода, лед) и большой детекторный объем. Можно надеяться, что уже в ближайшем будущем эксперименты на детекторе L3 (CERN) [43], а также на подводных нейтринных телескопах качественно улучшат точность измерения потока атмосферных мюонов.

Отметим, что знания спектров мюонов еще недостаточно для прецизионной нормировки потока АН, поскольку двух- и трехчастичные распады каонов, дающие сравнительно небольшой вклад в потоки мюонов, являются основными источниками атмосферных нейтрино высоких энергий ($E > 1\text{ТэВ}$). Поэтому детальное изучение вклада распадов каонов – это необходимый элемент расчета и нормировки АН. В отличие от двухчастичной моды, расчет $K_{\ell 3}$ -распадов нетривиален, поскольку требует учета динамики, т. е. формфакторов распада.

Основной целью данного исследования является детальный анализ вклада многоступенчатых цепочек распадов каонов ($K^{\pm} \rightarrow \mu^{\pm}\nu_{\mu}$, $K^{\pm} \rightarrow \pi^0\mu^{\pm}\nu_{\mu}$, $K_{L,S}^0 \rightarrow \pi^{\mp}\mu^{\pm}\nu_{\mu}$, $K_S^0 \rightarrow \pi^+\pi^-$, $K^{\pm} \rightarrow \pi^{\pm}\pi^0$) в измеряемые характеристики потоков мюонов и нейтрино (энергетические спектры, зенитно-угловые распределения, зарядовое и флейворное отношения) и сопоставление результатов расчета с данными измерений различных экспериментов, включая измерения нуклонной компоненты на различных высотах атмосферы, и уровне моря, а также интенсивности мюонов на больших глубинах в воде и грунте.

В настоящей работе для расчета спектров и угловых распределений мюонов и нейтрино высоких энергий используется подход, основанный на решении кинетических уравнений переноса излучения в атмосфере. Для расчета ядерного каскада предлагается простой и эффективный итерационный (Z -факторный) метод решения одномерных уравнений переноса адронов космических лучей, применимый при достаточно высоких энергиях без использования каких-либо упрощающих предположений о форме первичного спектра, дифференциальных и полных сечений адрон-ядерных взаимодействий. Преимущество этого метода заключается в том, что он не требует разложения по какому-либо малому параметру и не имеет ограничений по глубине, свойственных большинству аналитических и численных алгоритмов решения каскадных уравнений (включая метод Монте-Карло). При сверхвысоких энергиях (выше 1 ТэВ для вертикального направления и 10 ТэВ для направлений близких к горизонтальному) применялись дополнительные приближения. Так, на стадии развития адронного каскада (но, разумеется, не на стадии генерации лептонов) пионы считаются стабильными, предполагается справедливость фейнмановского скейлинга для инвариантных инклюзивных сечений (в

области фрагментации) и логарифмический (универсальный для всех адронов) рост с энергией полных неупругих сечений взаимодействий. С учетом перечисленных допущений Z -факторный метод значительно упрощается и для глубин эффективной генерации мюонов и нейтрино переходит в метод, развитый ранее в работе [44].

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы, из 160 наименований. Работа изложена на 129 страницах, иллюстрирована 35 рисунками и 17 таблицами.

В первой главе рассматривается ядерный каскад в атмосфере при высоких энергиях. Обсуждаются особенности ядерно-каскадного процесса для различных областей энергий и основные предположения, используемые в дальнейшем. Для расчета адронной компоненты ядерного каскада формулируется Z -факторный метод решения кинетических уравнений переноса нуклонов и мезонов космических лучей в атмосфере при высоких энергиях. Он является обобщением метода, разработанного для решения задачи переноса мюонных нейтрино в веществе [45]. Основная идея метода заключается в сведении интегро-дифференциального УП к (нелинейному) интегральному уравнению для " Z -фактора" – величины непосредственно связанной с эффективным пробегом поглощения. При этом соответствующий пробег поглощения становится зависящим от энергии частицы и глубины. Уравнение для Z -фактора решается затем с помощью простого итерационного алгоритма. Анализируются предельные случаи. Обсуждаются случаи небольших глубин и энергий много выше 1 ТэВ, воспроизводятся приближенные аналитические результаты ряда работ, в которых учитывался рост неупругих сечений взаимодействия с энергией [6, 44, 46, 47]. Рассматривается модель адронного каскада при энергиях много выше 1 ТэВ с логарифмическим растущим неупругим сечением и фейнмановским скейлингом для инвариантных инклюзивных сечений. Полученное в рамках этой модели решения кинетических уравнений переноса нуклонов и мезонов космических лучей в атмосфере справедливо для глубин $h < 500 - 600$ г/см². Для $h > 600$ г/см² приведены приближенные выражения для поправок к спектрам нуклонов, пионов и каонов. Эти поправки не сказываются заметно на потоке мюонов и нейтрино, большая часть которого формируется на глубинах $h \lesssim 300$ г/см², однако, они существенны для адронов на уровне моря. Приводятся решения кинетических уравнений для мюонов, нейтрино и антинейтрино (мюонных и электронных), генерируемых в распадах нестабильных частиц, при высоких энергиях.

Вторая глава посвящена расчету спектров вторичных частиц от распадов мюонов (μ_{e3}), каонов ($K_{e3}^0, K_{e3}^\pm$) и очарованных адронов ($D \rightarrow \mu\nu_\mu X, \Lambda_c \rightarrow \mu\nu_\mu X$). Представлены формулы для спектральных функций нейтрино от μ_{e3} -распада с учетом и без учета

эффекта поляризации родительского мюона. Проведен расчет методом ковариантного интегрирования энергетических спектров всех вторичных частиц (нейтрино, электронов, мюонов и пионов), образующихся в трехчастичных полуплептонных распадах нейтральных и заряженных каонов. В расчете учитывалась линейная по q^2 -зависимость $K_{\ell 3}$ формфакторов. Проводится сопоставление результатов расчета по полным ширинам $K_{\ell 3}$ -распадов с наилучшим фитом экспериментальных данных [48]. Анализируется разброс в данных разных экспериментов по измерению ширины и параметров формфакторов $K_{\ell 3}$ -распадов. Кратко резюмируется феноменологический подход, использовавшийся для оценки спектров лептонов от распадов чарма [49]. Приведены выражения для спектральных функций для инклюзивных полуплептонных распадов очарованных частиц.

В третьей главе полученные результаты применяются для расчета энергетических спектров адронов, мюонов и нейтрино. Обсуждается используемая в расчетах модель спектра и химического состава первичных космических лучей, а также параметризации инклюзивных и полных неупругих сечений. Представлено сравнение аппроксимаций дифференциальных инклюзивных сечений с экспериментальными данными. Измерения потоков вторичных протонов и нейтронов космических лучей могут дать ценную информацию о первичном космическом излучении и о взаимодействиях нуклонов и ядер при высоких энергиях. С другой стороны, быстрое развитие экспериментальной техники позволяет надеяться на качественное повышение точности измерений потоков как первичных, так и вторичных космических лучей высоких энергий уже в ближайшем будущем. Поэтому аккуратный расчет нуклонной компоненты вторичных космических становится актуальным сам по себе, независимо от задачи расчета атмосферных мюонов и нейтрино. В разделе 3.3 проводится сопоставление результатов расчета дифференциальных спектров протонов и нейтронов с имеющимися на сегодняшний день экспериментальными данными, полученные на разных высотах атмосферы и уровне моря. В разделе 3.4 исследуются механизмы образования атмосферных мюонов. В качестве дополнительных источников впервые рассматриваются распады $K_{S(\mu 3)}^0$ и пионов, родившихся в двух- и трехчастичных распадах каонов. В расчетах учитывается такой тонкий эффект, как q^2 -зависимость формфакторов $K_{\ell 3}$ -распадов. Учет этого эффекта существен, поскольку он по-разному сказывается на спектрах электронных и мюонных нейтрино, изменяя тем самым флейворное отношение – важную величину, измеримую в подземных и глубоководных экспериментах. Приводятся вклады мюонов, генерируемых в распадах очарованных адронов, рассчитанных в работе [49] в рамках рекомбинационной кварк-партонной модели (РКПМ) [50] и модели кварк-глюонных струн МКГС) [51].

Проводится подробное сопоставление результатов расчетов с большим массивом экспериментальных данных, полученных на наземных мюонных спектрометрах и на подземных установках.

В разделе 3.5 изучаются вклады в потоки атмосферных нейтрино и антинейтрино (электронных и мюонных) для энергий $E > 1$ ТэВ от $\pi_{\mu 2^-}$, $K_{\mu 2^-}$, $K_{\ell 3^-}$ и $\mu_{e 3^-}$ -распадов, а также от распадов K_S^0 -мезона и пионов, рожденных в распадах заряженных и нейтральных каонов. В рамках двух моделей рождения очарованных адронов РКПМ и МКГС сделаны оценки вкладов нейтрино "прямой генерации". Исследуется влияние эффекта q^2 -зависимости формфакторов $K_{\ell 3^-}$ -распадов на потоки электронных и мюонных нейтрино высоких энергий. Обсуждаются зависимости флейворного отношения R_ν и отношений $\nu_\mu/\bar{\nu}_\mu$, $\nu_e/\bar{\nu}_e$ от энергии. Приведены результаты сравнения с расчетами других авторов.

В Заключение формулируются основные результаты и выводы, полученные в диссертации.

Глава 1

Ядерно-каскадный процесс в атмосфере

1.1 Особенности ядерного каскада

В этой главе изучается прохождение вторичных космических лучей через атмосферу Земли. Нас будут интересовать дифференциальные спектры протонов, нейтронов, π - и K -мезонов высоких и сверхвысоких энергий ($E \sim 10$ ГэВ и выше). Нужно отметить, что разделение на низкие, высокие и сверхвысокие энергии очень условно и различно для разных вкладов (для пионов сверхвысокими энергиями являются $E \gtrsim 1$ ТэВ, а для каонов - $E \gtrsim 10$ ТэВ). Разделение связано с теми приближениями, которые мы будем использовать в разных энергетических областях, что, в свою очередь, обусловлено особенностями ядерно-каскадного процесса для различных энергий.

В области низких энергий ($E_0 \lesssim 20$ ГэВ) при изучении прохождения адронов космических лучей через атмосферу необходимо учитывать следующее: нестепенной характер первичного спектра протонов и ядер, его зависимость от уровня солнечной активности; геомагнитное обрезание спектра на границе атмосферы; энергетическую зависимость адрон-ядерных инклюзивных сечений взаимодействий (нарушение скейлинга); потери энергии заряженными частицами на ионизацию и возбуждение атомов воздуха. В то же время, имеются и упрощающие факторы: генерация нуклонов вторичными π - и K -мезонами, регенерация ядер с $Z \geq 2$, регенерация и перезарядка пионов и каонов не существенны; полные неупругие сечения взаимодействия адронов с ядрами воздуха практически не зависят от энергии; ионизационные потери можно считать постоянными. Для энергий выше 1 ГэВ можно пренебречь неоднородностью каскадного размножения. Приближение коллимированного каскада применимо благодаря сильной анизотропии в угловом распределении вторичных частиц, а также падающему характеру энергетического спектра первичного излучения. В этой энергетической области мы основыва-

емя на результатах работ [52, 53], полученных с использованием довольно подробной ядерно-каскадной модели, включающей в себя метод решения системы кинетических уравнений для нуклон-ядерной компоненты каскада, специально приспособленный для низких энергий. Метод основан на аппроксимации парциальных моментов от инклюзивных сечений полиномами по обратным степеням полной энергии и позволяет учесть отмеченные особенности адронного каскада для низких энергий. Численные результаты были проверены на большом массиве экспериментальных данных по вторичным нуклонам, мезонам и мюонам для различных географических широт и глубин.

Для сверхвысоких энергий (выше 1 ТэВ) ядерно-каскадный процесс отличается от низкоэнергетического, прежде всего тем, что геомагнитные эффекты, солнечная активность и ионизационные потери энергии вторичными частицами в этой области не существенны, процессами регенерации и неупругой перезарядки для нуклонов и пионов, а также генерацией нуклонов в πA -столкновениях нельзя пренебрегать. В то же время, для направлений, близких к вертикальному, можно не учитывать распад пиона. Как показывают эксперименты, проведенные на ускорителях в области нескольких десятков ГэВ, для описания ядерных взаимодействий адронов применима модель скейлинга, согласно которой характеристики вторичных частиц зависят не от их энергии, а от отношения этой энергии к энергии первичной частицы. Такая модель используется в физике космических лучей уже давно [54]. Помимо этого, исходя из экспериментальных данных по космическим лучам, необходимо учитывать энергетический рост неупругих и полных адрон-ядерных сечений взаимодействий, процессы регенерации и неупругой перезарядки для нуклонов и пионов. Аналитическая модель адронного каскада, учитывающая выше перечисленные особенности, была предложена в работе [44], и проверена на экспериментальных данных по спектрам адронов на различных глубинах атмосферы при энергиях от 1 ТэВ до 600 ТэВ. Более подробно рассмотрим её позже.

Исходя из выше сказанного, в рамках аналитической модели невозможно описать весь ядерный каскад для всех энергий единым методом (в качестве краткого обзора см. [47]). Особенно, это касается области высоких энергий (между низкими и сверхвысокими). Здесь трудно сказать какие процессы и эффекты можно учитывать, а какие нет. Поэтому для этой области энергий был разработан так называемый "Z - факторный" метод решения системы кинетических уравнений (КУ), описывающих перенос нуклонов и мезонов высоких энергий в атмосфере. Он является обобщением метода, предварительно разработанного для прохождения нейтрино высоких энергий через вещество [45]. Однако ядерный каскад имеет свою специфику. Это связано с тем, что пробеги нейтрино всех энергий таковы, что все процессы происходят в основном в Земле, пробеги

же адронов до взаимодействия в отличие от нейтрино не велики, и поэтому ядерный каскад развивается в атмосфере. Таким образом, математический подход остается таким же, как для прохождения нейтрино через вещество, но его реализация совсем другая.

Обсудим основные физические приближения, которые будут использоваться в дальнейшем.

1. Мы ограничимся изучением коллимированного каскада (приближение "прямо-вперёд"). Это приближение основано на сильной анизотропии в угловом распределении вторичных частиц, образующихся при неупругих взаимодействиях нуклонов и ядер и оправдано при импульсах $p \gg \bar{p}_T \sim 0.4 \text{ ГэВ/с}$. Благодаря падающему характеру энергетического спектра первичных космических лучей и, как следствие, преимущественной роли в развитии каскада процессов с $p_T \ll p_L$, область применимости приближения "прямо-вперёд" несколько расширяется (для направлений близких к вертикальному). Точность его сильно ухудшается с уменьшением энергии, однако, начиная с нескольких ГэВ приближение "прямо-вперёд" работает хорошо [55, 56].

2. Геомагнитные поправки для этих энергий становятся не существенными.

3. Ядра первичных космических лучей фрагментируют в верхних слоях атмосферы, так как их пробег взаимодействия существенно меньше пробега нуклона. Это позволяет использовать для ядерной компоненты модель суперпозиций свободных нуклонов. Тем самым задача вычисления дифференциальных энергетических спектров нуклонов сводится к решению однородной системы одномерных кинетических уравнений. Кроме того, для учёта вклада ядерной компоненты необходима информация об ядро-ядерных сечениях взаимодействий.

4. В рассматриваемом энергетическом интервале можно не учитывать энергетические потери для нуклонов, пионов и каонов.

5. Учитываем процессы регенерации и перезарядки, и процессы рождения каонов пионами и пионов каонами (как в результате взаимодействий космических лучей с ядрами атмосферы: $\pi^\pm + A \rightarrow K^\pm + X$; $K^\pm + A \rightarrow \pi^\pm + X$; так и в распадах: $K \rightarrow 2\pi$, $K \rightarrow 3\pi$, $K \rightarrow \pi \ell \nu$ ($\ell = e, \mu$)).

6. Метод применим для произвольных инклюзивных и неупругих сечений взаимодействий; граничного спектра и химического состава первичного спектра; модели атмосферы, т.е. реализация метода не зависит от их конкретного вида. Этот факт позволяет нам учесть нарушение скейлинга во фрагментационной области, энергетическую зависимость полных неупругих сечений взаимодействий, нестепенной характер спектра и сложный (приближенный к реальному) химический состав первичного излучения.

Необходимо добавить, что в области сверхвысоких энергий в дополнение к распа-

дам пионов и каонов появляется ещё один источник атмосферных мюонов и нейтрино, а именно - распады короткоживущих очарованных адронов. Энергия, при которой потоки прямых лептонов (от распадов D -мезонов и Λ_c^+ -гиперонов) становятся сопоставимыми с потоками обычных мюонов и нейтрино (от π - и K - распадов) зависит от моделей рождения чарма (краткий обзор представлен в работе [41]). Так как время жизни очарованных адронов мало (см.табл. 1.4), то процессами взаимодействия чарма с атмосферой можно пренебрегать вплоть до энергий $\lesssim 10^6 \text{ГэВ}$. Выше этих энергий учет регенерации и перезарядки необходим, но отсутствие данных о полных и инклюзивных сечениях взаимодействия очарованных частиц с ядрами не позволяет оценить всерьёз величину этих эффектов. Таким образом, без учета взаимодействия чарма с атмосферой дифференциальные энергетические спектры очарованных частиц находятся так же, как и для пионов и каонов. Поэтому в этой главе мы рассмотрим адронный каскад без прохождения D -мезонов и Λ_c^+ -гиперонов через атмосферу.

1.2 Решение однородной системы кинетических уравнений для нуклонов

На первом шаге мы будем рассматривать перенос протонов и нейтронов независимо от порождаемых ими пионов и каонов, не пренебрегая процессами регенерации и перезарядки нуклонов. Вклад от мезонов учитываем потом в качестве поправки.

Задача вычисления дифференциальных энергетических спектров протонов $p(E, h)$ и нейтронов $n(E, h)$ (здесь и далее, где это возможно спектры частиц будем обозначать соответствующими символами) на глубине h сводится к решению однородной системы одномерных кинетических уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(E, h)}{\partial h} &= -\frac{p(E, h)}{\lambda_N(E)} + \frac{1}{\lambda_N(E)} \int_E^\infty \frac{1}{\sigma_{NA}^{\text{in}}(E)} \frac{d\sigma_{pp}(E, E_0)}{dE} p(E_0, h) dE_0 \\ &\quad + \frac{1}{\lambda_N(E)} \int_E^\infty \frac{1}{\sigma_{NA}^{\text{in}}(E)} \frac{d\sigma_{np}(E, E_0)}{dE} n(E_0, h) dE_0, \\ \frac{\partial n(E, h)}{\partial h} &= -\frac{n(E, h)}{\lambda_N(E)} + \frac{1}{\lambda_N(E)} \int_E^\infty \frac{1}{\sigma_{NA}^{\text{in}}(E)} \frac{d\sigma_{nn}(E, E_0)}{dE} n(E_0, h) dE_0 \\ &\quad + \frac{1}{\lambda_N(E)} \int_E^\infty \frac{1}{\sigma_{NA}^{\text{in}}(E)} \frac{d\sigma_{pn}(E, E_0)}{dE} p(E_0, h) dE_0. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь использовались следующие обозначения:

$$\frac{d\sigma_{NN'}(E, E_0)}{dE} = 2\pi \int_0^{p_T^{\text{max}}} \frac{p_T}{p_L} \left(E \frac{d^3\sigma_{NN'}}{d^3p} \right) dp_T;$$

$E d^3 \sigma_{NN'} / d^3 p$ – инвариантное дифференциальное сечение инклюзивной реакции $N + A \rightarrow N' + X$ (где A – ядро атома воздуха, а X – система всех недетектируемых вторичных частиц, включая продукты развала ядра A); E, p_T, p_L – полная энергия и составляющие импульса $\mathbf{p}$ частицы N' ; E_0 – энергия нуклона N ; $\lambda_N(E) = 1/(N_0 \sigma_{NA}^{\text{in}}(E))$ – пробег нуклона до взаимодействия; N_0 – число ядер A в 1 г воздуха. Величина p_T^{max} определяется условием $E^* \leq (s + m_N - s_X^{\text{min}})/2\sqrt{s}$, где E^* – энергия инклюзивной частицы в системе центра масс, s_X^{min} – минимальное значение квадрата инвариантной массы системы X . В пренебрежении кумулятивной кинематической областью

$$p_T^{\text{max}} = \sqrt{2m_N E(E - m_N)(1 - x)/(E - m_N x)},$$

$x = E/E_0$ – доля энергии, уносимая вторичным нуклоном N' .

В качестве граничного условия для системы (1.1) примем

$$p(E, 0) = p_0(E), \quad n(E, 0) = n_0(E),$$

где $p_0(E)$ и $n_0(E)$ – дифференциальные энергетические спектры протонов (первичные протоны и протоны в ядрах) и нейтронов (из ядерной компоненты первичных космических лучей) на границе атмосферы. Изотопическая симметрия NA – взаимодействия позволяет свести систему уравнений (1.1) к одномерным кинетическим уравнениям для линейных комбинаций $\tilde{N}^{\pm}(E, h) = p(E, h) \pm n(E, h)$:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \tilde{N}^{\pm}(E, h)}{\partial h} + \frac{\tilde{N}^{\pm}(E, h)}{\lambda_N(E)} = \\ & + \frac{1}{\lambda_N(E)} \int_E^{\infty} \frac{1}{\sigma_{NA}^{\text{in}}(E)} \left[\frac{d\sigma_{pp}(E, E_0)}{dE} \pm \frac{d\sigma_{pn}(E, E_0)}{dE} \right] \tilde{N}^{\pm}(E_0, h) dE_0. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Решение будем искать в виде:

$$\tilde{N}^{\pm}(E, h) = \tilde{N}^{\pm}(E, 0) \exp \left[-\frac{h}{\Lambda_{NN}^{\pm}(E, h)} \right], \quad (1.3)$$

где

$$\tilde{N}^{\pm}(E, 0) = p_0(E) \pm n_0(E).$$

Непосредственно из (1.1) легко увидеть, что $1/\Lambda^{\pm}(E, h)$ можно представить в виде:

$$\frac{1}{\Lambda^{\pm}(E, h)} = \frac{1 - Z_{NN}^{\pm}(E, h)}{\lambda_N(E)},$$

где $Z_{NN}^{\pm}(E, h)$ – некоторые положительные функции от E и h , так как почти во всей кинематической области процессы регенерации преобладают над процессами перезарядки.

Подставляя решение в уравнение на $\tilde{N}^\pm(E, h)$, получаем уравнение на Z-факторы:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial Z_{NN}^\pm(E, h)}{\partial h} + \frac{Z_{NN}^\pm(E, h)}{h} = \\ & + \frac{1}{h} \int_0^1 \Phi_{NN}^\pm(E, x) \eta_{NN}^\pm(E, x) \exp \left[-\frac{h}{\Lambda_{NN}^\pm(E/x, h)} + \frac{h}{\Lambda_{NN}^\pm(E, h)} \right] dx, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где

$$\Phi_{NN}^\pm(E, x) = \frac{E}{\sigma_{NA}^{\text{in}}(E)} \left[\frac{d\sigma_{pp}(E, E_0)}{dE} \pm \frac{d\sigma_{pn}(E, E_0)}{dE} \right]_{E_0=E/x}, \quad (1.5)$$

$$\eta_{NN}^\pm(E, x) = \frac{\tilde{N}^\pm(E/x, 0)}{x^2 \tilde{N}^\pm(E, 0)}. \quad (1.6)$$

Для реального спектра первичного излучения $\eta_{NN}^\pm(E, 0) = 0$, так как спектр убывает быстрее, чем E^{-2} .

Формальное решение (1.4) имеет вид:

$$Z_{NN}^\pm(E, h) = \frac{1}{h} \int_0^h dh' \int_0^1 \Phi_{NN}^\pm(E, x) \eta_{NN}^\pm(E, x) \exp \left[-h' D_{NN}^\pm(E, x, h') \right] dx,$$

где

$$D_{NN}^\pm(E, x, h) = \frac{1 - Z_{NN}^\pm(E/x, h)}{\lambda_N(E/x)} - \frac{1 - Z_{NN}^\pm(E, h)}{\lambda_N(E)}.$$

Полученное решение для Z-факторов на самом деле представляет собой нелинейное интегральное уравнение, однако, это уравнение гораздо удобно для решения итерационным методом, чем исходное. Скорость сходимости итераций определяется выбором нулевого приближения. Простейшим выбором является

$$Z_{NN}^{\pm(0)}(E, h) = 0.$$

Тогда

$$D_{NN}^\pm(E, x, h) = D_{NN}^{(0)}(E, x) = \frac{1}{\lambda_N(E/x)} - \frac{1}{\lambda_N(E)}.$$

И в первом приближении имеем:

$$Z_{NN}^{\pm(1)}(E, h) = \int_0^1 \Phi_{NN}^\pm(E, x) \eta_{NN}^\pm(E, x) \frac{1 - \exp \left[-h D_{NN}^{(0)}(E, x) \right]}{h D_{NN}^{(0)}(E, x)} dx; \quad (1.7)$$

Для малых глубин, при $hD_{NN}^{(0)} \ll 1$, для первого приближения получаем

$$Z_{NN}^{\pm(1)}(E, h) = \int_0^1 \Phi_{NN}^{\pm}(E, x) \eta_{NN}^{\pm}(E, x) \left[1 - \frac{hD_{NN}^{(0)}(E, x)}{2} + \dots \right] dx.$$

Для n -ного приближения находим

$$Z_{NN}^{\pm(n)}(E, h) = \frac{1}{h} \int_0^h dh' \int_0^1 \Phi_{NN}^{\pm}(E, x) \eta_{NN}^{\pm}(E, x) \exp \left[-h' D_{NN}^{\pm(n-1)}(E, x, h') \right] dx, \quad (1.8)$$

$$D_{NN}^{\pm(n)}(E, x, h) = \frac{1 - Z_{NN}^{\pm(n)}(E/x, h)}{\lambda_N(E/x)} - \frac{1 - Z_{NN}^{\pm(n)}(E, h)}{\lambda_N(E)}. \quad (1.9)$$

Как уже говорилось, скорость сходимости приближений зависит от выбора нулевого приближения, и так как процессы регенерации преобладают над процессами перезарядки, и $p_0(E) > n_0(E)$, то истинное решение будет находиться между 0 и $Z_{NN}^{\pm}(E, 0)$. Таким образом, в качестве нулевого приближения удобно выбрать следующее

$$Z_{NN}^{\pm(0)}(E, h) = \frac{Z_{NN}^{\pm}(E, 0)}{2}.$$

Этот выбор, приводит к ускорению сходимости при тривиальной модификации выше-приведенных формул (1.7-1.9). Z -фактор при $h = 0$ получить не сложно. Интегрируя уравнение (1.4) по глубине, и учитывая, что на границе атмосферы в NA - столкновениях принимают участие только нуклоны первичного излучения, находим

$$Z_{NN}^{\pm}(E, 0) = \frac{1}{\lambda_N(E)} \int_0^1 \Phi_{NN}^{\pm}(E, x) \eta_{NN}^{\pm}(E, x) dx.$$

Рассмотрим некоторые модели адронного каскада для $Z_{NN}^{\pm(0)}(E, h) = 0$. В случае степенного спектра $\tilde{N}^{\pm}(E, 0) \sim E^{-(\gamma+1)}$ и феймановского скейлинга для инвариантных инклюзивных сечений $E d^3\sigma_{ab}/d^3p$ выражения (1.5-1.6) принимают вид:

$$\Phi_{NN}^{\pm}(E, x) = \frac{\sigma_{NA}^0}{\sigma_{NA}^{\text{in}}} \omega_{NN}^{\pm}(x), \quad \eta_{NN}^{\pm}(E, x) = x^{\gamma+1},$$

где мы ввели

$$\omega_{NN}^{\pm}(x) = \frac{E}{\sigma_{NA}^0} \left[\frac{d\sigma_{pp}(E, E_0)}{dE} \pm \frac{d\sigma_{pn}(E, E_0)}{dE} \right], \quad \left(\sigma_{NA}^0 = \frac{1}{N_0 \lambda_N^0} \right).$$

Считая пробег нуклона до неупругого взаимодействия постоянным ($\lambda_N(E) = \lambda_N^0$) (это приближение использовалось в классических работах Зацепина [57]), то в нулевом приближении $D_{NN}^{(0)}(E, x) = 0$.

Тогда в первом приближении Z-фактор переходит в частичный момент $z_{NN}^{\pm}(\gamma)$:

$$Z_{NN}^{\pm(1)}(E, h) = z_{NN}^{\pm}(\gamma) = \int_0^1 x^{\gamma-1} \omega_{NN}^{\pm}(x) dx.$$

Поскольку Z-фактор перестает зависеть и от энергии, и от глубины, то следующие приближения совпадают с первым. В рамках указанных предположений дифференциальный энергетический спектр нуклонов на глубине h равен

$$\tilde{N}^{\pm}(E, h) = \tilde{N}^{\pm}(E, 0) \exp \left[-\frac{h(1 - z_{NN}^{\pm}(\gamma))}{\lambda_N^0} \right].$$

Рассмотрим логарифмический рост с энергией для полных неупругих сечений взаимодействий нуклонов с ядрами воздуха

$$\frac{1}{\lambda_N(E)} = \frac{1}{\lambda_N^0} \left[1 + \beta_N \ln \left(\frac{E}{E_0} \right) \right],$$

тогда для $D_{NN}^{(0)}(E, x)$ мы будем иметь:

$$D_{NN}^{(0)}(x) = -\frac{\beta_N}{\lambda_N^0} \ln x.$$

В первом приближении для $Z_{NN}^{\pm}$ получаем:

$$Z_{NN}^{\pm(1)}(E, h) = \frac{\lambda_N(E)}{\lambda_N^0} \int_0^1 x^{\gamma-1} \omega_{NN}^{\pm}(x) \frac{\exp[-\beta_N h \ln x / \lambda_N^0] - 1}{\beta_N h \ln x / \lambda_N^0} dx.$$

Для глубин $h \ll \lambda_N^0 / \beta_N \sim (60-70)\lambda_N^0$, пользуясь разложением экспоненты и пренебрегая членами порядка h^2 , находим:

$$Z_{NN}^{\pm(1)}(E) = \frac{\lambda_N(E)}{\lambda_N^0} \int_0^1 x^{\gamma-1} \omega_{NN}^{\pm}(x) dx = \frac{\lambda_N(E)}{\lambda_N^0} z_{NN}^{\pm}(\gamma). \quad (1.10)$$

Подставляя (1.10) в (1.3), получаем выражения для потоков нуклонов:

$$\tilde{N}^{\pm}(E, h) = \tilde{N}^{\pm}(E, 0) \exp \left[-\frac{h}{\Lambda_N^{\pm}(E)} \right], \quad (1.11)$$

где

$$\frac{1}{\Lambda_N^{\pm}(E)} = \frac{1}{\lambda_N(E)} - \frac{z_{NN}^{\pm}(\gamma)}{\lambda_N^0}. \quad (1.12)$$

Отсюда видно, что в пренебрежении процессами генерации нуклонов пионами функции $\Lambda_N^{+}(E)$ и $\Lambda_N^{-}(E)$ совпадают с пробегами нуклонов до поглощения и с пробегами "до выравнивания" $p - n$ (в том смысле, что при $h > 1/\Lambda_N^{\pm}(E)$ спектры протонов и нейтронов становятся равными), соответственно. Аналогичные формулы были получены другим методом в работе [44].

1.3 Решение системы кинетических уравнений для пионов

Основным каналом генерации пионов в атмосфере является взаимодействие нуклонов и пионов с ядрами атомов воздуха и распады каонов. В приближении "прямо-вперёд", в отсутствии геомагнитных эффектов система кинетических уравнений, описывающая перенос пионов в атмосфере с учетом процессов регенерации и неупругой перезарядки пионов имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi^\pm(E, h, \vartheta)}{\partial h} = & -\frac{\pi^\pm(E, h, \vartheta)}{\lambda_\pi(E)} - \frac{m_\pi \pi^\pm(E, h, \vartheta)}{p \tau_\pi \rho(h, \vartheta)} + \sum_i G_{i\pi^\pm}^{\text{int}}(E, h) + \sum_K G_{K\pi^\pm}^{\text{dec}}(E, h) \\ & + \frac{1}{\lambda_\pi(E)} \int_E^\infty \frac{1}{\sigma_{\pi A}^{\text{in}}(E)} \frac{d\sigma_{\pi^\pm \pi^\pm}(E, E_0)}{dE} \pi^\pm(E_0, h, \vartheta) dE_0 \\ & + \frac{1}{\lambda_\pi(E)} \int_{E_{\pi\pi}^{\text{min}}}^\infty \frac{1}{\sigma_{\pi A}^{\text{in}}(E)} \frac{d\sigma_{\pi^\mp \pi^\pm}(E, E_0)}{dE_0} \pi^\mp(E_0, h, \vartheta) dE_0, \end{aligned} \quad (1.13)$$

где $i = p, n, K^\pm, K^0, \overline{K^0}$; $K = K^\pm, K_L^0, K_S^0$.

Считаем, что на границе атмосферы пионы отсутствуют:

$$\pi^\pm(E, 0, \vartheta) = 0.$$

Здесь λ_π - средний пробег пиона до неупругого взаимодействия в воздухе, а m_π, τ_π, E и p - его масса, время жизни, полная энергия и импульс соответственно (далее мы полагаем $c = 1$); $\rho(h, \vartheta)$ - плотность воздуха на уровне H , соответствующем глубине h вдоль направления ϑ (угол ϑ отсчитывается от вертикали, проведенной через точку пересечения продолжения траектории частицы с поверхностью Земли). Остальные обозначения аналогичны использованным в разделе 1.2. Функции генерации пионов $G_{i\pi^\pm}^{\text{int}}(E, h)$ и $G_{K\pi^\pm}^{\text{dec}}(E, h)$ частицами i и K в процессе взаимодействий с ядрами воздуха и в распадах каонов имеют вид:

$$G_{i\pi^\pm}^{\text{int}}(E, h) = \frac{1}{\lambda_i(E)} \int_{E_{i\pi}^{\text{min}}}^\infty \frac{1}{\sigma_{iA}^{\text{in}}(E)} \frac{d\sigma_{i\pi^\pm}(E, E_0)}{dE} \mathcal{D}_i(E_0, h) dE_0, \quad (1.14)$$

$$\begin{aligned} G_{K\pi^\pm}^{\text{dec}}(E, h) = & B(K_{2\pi}) \frac{m_K}{\tau_K \rho(h, \vartheta)} \int_{E_{K_2}^{-(\pi)}}^{E_{K_2}^{+(\pi)}} \frac{dE_0}{p_0^2} F_\pi^{K_{2\pi}}(E, E_0) K(E_0, h, \vartheta) \\ & + B(K_{L,S}^0) \frac{m_K}{\tau_K \rho(h, \vartheta)} \int_{E_{K_3}^{-(\pi)}}^{E_{K_3}^{+(\pi)}} \frac{dE_0}{p_0^2} F_\pi^{K_{\epsilon_3}^0}(E, E_0) K_{L,S}^0(E_0, h, \vartheta), \end{aligned} \quad (1.15)$$

где $B(K_{2\pi})$ и $B(K_{L,S}^0)$ относительные вероятности распадов $K^\pm \rightarrow \pi^\pm \pi^0$, $K_S^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$ и $K_{L,S}^0 \rightarrow \pi^\pm \ell^\mp \nu_\ell$, а m_K, τ_K, E_0, p_0 - масса, время жизни, полная энергия и импульс каона соответственно; Здесь $\mathcal{D}_i(E_0, h)$ и $K(E_0, h, \vartheta)$ - дифференциальные спектры частиц i и K , соответственно. Величина $d\sigma_{i\pi}(E, E_0)/dE$ дается выражением:

$$\frac{d\sigma_{ij}(E, E_0)}{dE} = 2\pi \int_0^{p_{T(ij)}^{\max}} \frac{p_T}{p_L} \left(E \frac{d^3\sigma_{ij}}{d^3p} \right) \Theta(p_L^{\min}) dp_T, \quad (1.16)$$

где $E d^3\sigma_{ij}/d^3p$ - инвариантное дифференциальное сечение инклюзивной реакции $i + A \rightarrow j + X$. Пределы интегрирования в (1.13), (1.14) и (1.16) неодинаковы для разных реакций. В рамках кинематики NN -столкновения, которой мы ограничимся при расчетах,

$$\begin{aligned} E_{ij}^{\min} &= \frac{(m_N E_j - \Delta_{ij})(E_j - m_N + p\sqrt{D_{ij}})}{2m_N E_j - m_N^2 - m_j^2}, \\ \Delta_{ij} &= \frac{m_i^2 + m_N^2 + m_M^2 - s_X^{\min}}{2}, \\ D_{ij} &= 1 + \frac{m_i^2(2m_N E_j - m_N^2 - m_j^2)}{(m_N E_j - \Delta_{ij})^2}, \end{aligned} \quad (1.17)$$

$$p_{T(i,j)}^{\max} = \sqrt{p_j^2 - \frac{[E_j(E_i + m_N) + s_i(s^2 + m_j - s_X^{\min})/2]^2}{E_i^2 - m_i^2}}, \quad (1.18)$$

$$s_i^2 = m_i^2 + m_N^2 + 2m_N E_i.$$

Значения $s_X^{\min}$ для реакций $i + A \rightarrow \pi^\pm + X$ даны в табл. 1.1.

Таблица 1.1: Минимальная недостающая масса в инклюзивных реакциях $i + A \rightarrow \pi^\pm + X$.

Реакция	$\sqrt{s_X^{\min}}$	Реакция	$\sqrt{s_X^{\min}}$
$p \rightarrow \pi^+, n \rightarrow \pi^-$	$2m_N$	$\pi^\pm \rightarrow \pi^\pm$	m_N
$p \rightarrow \pi^-, n \rightarrow \pi^+$	$2m_N + m_\pi$	$\pi^\pm \rightarrow \pi^\mp$	$m_N + 2m_\pi$

Для расчетов было удобно ввести "спектральные функции"

$$F_j^m(E, E_0) = \frac{P_0}{\Gamma_j^m} \frac{d\Gamma_j^m(E, E_0)}{dE},$$

где E_0 и E - энергии распадающейся частицы ($i = K^\pm, K_L^0, K_S^0$) и вторичных пионов; m - распадная мода (табл. 1.4).

Для двухчастичного распада $K \rightarrow \pi_1 + \pi_2$ спектральные функции можно представить в виде:

$$F_{\pi_1}^{K_{2\pi}}(E_\pi, E_K) = \left[\left(1 + \frac{m_{\pi_1}^2}{m_K^2} - \frac{m_{\pi_2}^2}{m_K^2} \right)^2 - \frac{4m_{\pi_1}^2}{m_K^2} \right]^{-1/2}.$$

Явный вид $F_\pi^{K_0^*}(E, E_0)$ для полулептонных распадов каонов представляет собой достаточно сложное выражение и будет рассмотрен позже.

Пределы интегрирования в (1.15) равны

$$\begin{aligned} E_{K_2}^{\pm(\pi)} &= \frac{(m_K^2 + m_{\pi_1}^2 - m_{\pi_2}^2)E \pm p\sqrt{(m_K^2 + m_{\pi_1}^2 - m_{\pi_2}^2)^2 - 4m_K^2 m_{\pi_1}^2}}{2m_{\pi_1}^2}, \\ E_{K_3}^{\pm(\pi)} &= \frac{(m_K^2 + m_\pi^2 - m_\ell^2)E \pm p\sqrt{(m_K^2 + m_\pi^2 - m_\ell^2)^2 - 4m_K^2 m_\pi^2}}{2m_\pi^2}. \end{aligned}$$

Вклад в пионную компоненту от каонов мал, поэтому его учтем в качестве поправки. Будем искать решение системы (1.13) при отсутствии каонного источника пионов в виде:

$$\pi^\pm(E, h, \vartheta) \simeq \tilde{\pi}^\pm(E, h, \vartheta) = \frac{1}{2} \left[\tilde{\Pi}^+(E, h, \vartheta) \pm \tilde{\Pi}^-(E, h, \vartheta) \right].$$

Учитывая изотопическую симметрию $\pi\pi$ - взаимодействий и пренебрегая рождением пионов в процессах взаимодействия $K^\pm + A \rightarrow \pi^\pm + X$ и распадами каонов, приходим к следующей системе уравнений для функций $\tilde{\Pi}^\pm(E, h, \vartheta)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\Pi}^\pm(E, h, \vartheta)}{\partial h} &= -\frac{\tilde{\Pi}^\pm(E, h, \vartheta)}{\lambda_\pi(E)} - \frac{m_\pi \tilde{\Pi}^\pm(E, h, \vartheta)}{p\tau_\pi \rho(h, \vartheta)} + G_{N\pi}^\pm(E, h) \\ &\quad + \frac{1}{\lambda_\pi(E)} \int_0^1 \Phi_{\pi\pi}^\pm(E, x) \tilde{\Pi}^\pm(E/x, h, \vartheta) \frac{dx}{x^2}, \end{aligned} \quad (1.19)$$

где

$$\begin{aligned} G_{N\pi}^\pm(E, h) &= (G_{p\pi^+}^{\text{int}}(E, h) + G_{n\pi^+}^{\text{int}}(E, h)) \pm (G_{p\pi^-}^{\text{int}}(E, h) + G_{n\pi^-}^{\text{int}}(E, h)), \\ \Phi_{\pi\pi}^\pm(E, x) &= \frac{E}{\sigma_{\pi A}^{\text{in}}(E)} \left[\frac{d\sigma_{\pi^+\pi^+}(E, E_0)}{dE} \pm \Theta(E_0 - E_0^{\text{min}}) \frac{d\sigma_{\pi^+\pi^-}(E, E_0)}{dE} \right]_{E_0=E/x}. \end{aligned}$$

Вследствие изотопической симметрии и отсутствия ионизационных потерь протонами $G_{N\pi}^- > 0$ ($G_{N\pi}^+$ всегда больше нуля). Как и в случае с нуклонами, нетрудно понять, что учет регенерации и перезарядки пионов приводит к возрастанию ”эффективных пробегов”, поэтому введем

$$\int_0^1 \Phi_{\pi\pi}^\pm(E, x) \tilde{\Pi}^\pm(E/x, h, \vartheta) \frac{dx}{x^2} = \mathcal{Z}_{\pi\pi}^\pm(E, h, \vartheta) \tilde{\Pi}^\pm(E, h, \vartheta),$$

тогда система (1.19) запишется в следующей форме:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\Pi}^{\pm}(E, h, \vartheta)}{\partial h} = & -\frac{\tilde{\Pi}^{\pm}(E, h, \vartheta)}{\lambda_{\pi}(E)} - \frac{m_{\pi} \tilde{\Pi}^{\pm}(E, h, \vartheta)}{p\tau_{\pi}\rho(h, \vartheta)} + G_{N\pi}^{\pm}(E, h) \\ & + \frac{1}{\lambda_{\pi}(E)} \mathcal{Z}_{\pi\pi}^{\pm}(E, h, \vartheta) \tilde{\Pi}^{\pm}(E, h, \vartheta). \end{aligned} \quad (1.20)$$

Формальное решение (1.20) дается выражением:

$$\tilde{\Pi}^{\pm}(E, h, \vartheta) = \int_0^h dh' G_{N\pi}^{\pm}(E, h') \exp \left[- \int_{h'}^h dh'' \left(\frac{1 - \mathcal{Z}_{\pi\pi}^{\pm}(E, h'', \vartheta)}{\lambda_{\pi}(E)} + \frac{m_{\pi}}{p\tau_{\pi}\rho(h'', \vartheta)} \right) \right].$$

В полной аналогии с решением для нуклонной компоненты адронного каскада, решаем систему для пионов итерационным методом с нулевым приближением

$$\mathcal{Z}_{\pi\pi}^{\pm(0)}(E, h) = 0.$$

В первом приближении источником пионов являются протоны и нуклоны, процессы регенерации и перезарядки пионов не учитываются, тогда дифференциальный энергетический спектр пионов на глубине h в атмосфере, распространяющийся под зенитным углом ϑ , равен

$$\tilde{\Pi}^{\pm(1)}(E, h, \vartheta) = \int_0^h dh' G_{N\pi}^{\pm}(E, h') \exp \left[- \int_{h'}^h dh'' \left(\frac{1}{\lambda_{\pi}(E)} + \frac{m_{\pi}}{p\tau_{\pi}\rho(h'', \vartheta)} \right) \right], \quad (1.21)$$

$$\mathcal{Z}_{\pi\pi}^{\pm(1)}(E, h, \vartheta) = \int_0^1 \Phi_{\pi\pi}^{\pm}(E, x) \eta_{\pi\pi}^{\pm(1)}(E, x, h, \vartheta) dx,$$

$$\eta_{\pi\pi}^{\pm(1)}(E, x, h, \vartheta) = \frac{\tilde{\Pi}^{\pm(1)}(E/x, h, \vartheta)}{x^2 \tilde{\Pi}^{\pm(1)}(E, h, \vartheta)}.$$

На границе атмосферы, считая её для малых глубин изотермической $\rho(h, \vartheta) = h \cos \vartheta / H_0$ ($H_0 \simeq 6.44$ км - параметр изотермической атмосферы), для первого приближения получаем

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}^{\pm(1)}(E, h, \vartheta) &= \int_0^h dh' G_{N\pi}^{\pm}(E, 0) \left(\frac{h'}{h} \right)^{\varepsilon_{\pi}(\vartheta)-1} \exp \left[- \frac{h-h'}{\lambda_{\pi}(E)} \right] \\ &= G_{N\pi}^{\pm}(E, 0) \Gamma(\varepsilon_{\pi}(\vartheta)) \gamma^*(\varepsilon_{\pi}(\vartheta), -h/\lambda_{\pi}(E)) \exp \left[- \frac{h}{\lambda_{\pi}(E)} \right] h, \end{aligned} \quad (1.22)$$

где

$$G_{N\pi}^{\pm}(E, 0) = \frac{1}{\lambda_N(E)} \int_0^1 \Phi_{N\pi}^{\pm}(E, x) N_0^{\pm}(E/x) \frac{dx}{x^2},$$

$$\gamma^*(\alpha, y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 dt \quad t^{\alpha-1} e^{-yt} \quad (1.23)$$

– неполная гамма-функция, Γ - гамма-функция, а $\varepsilon_\pi(\vartheta) = m_\pi H_0 \sec \vartheta / p\tau_\pi + 1$.

Интегрируя (1.22) по глубине и используя представление неполной гаммы-функции в виде ряда, ограничиваясь первыми членами разложения, получаем

$$\tilde{\Pi}^{\pm(1)}(E, h, \vartheta) \sim \frac{G_{N\pi}^\pm(E, 0)h}{\varepsilon_\pi}.$$

В следующих приближениях в качестве источника включаются процессы регенерации и перезарядки и для n -ного приближения имеем:

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}^{\pm(n)}(E, h, \vartheta) = & \int_0^h dh' G_{N\pi}^\pm(E, h') \times \\ & \exp \left[- \int_{h'}^h dh'' \left(\frac{1 - \mathcal{Z}_{\pi\pi}^{\pm(n-1)}(E, h'', \vartheta)}{\lambda_\pi(E)} + \frac{m_\pi}{p\tau_\pi \rho(h'', \vartheta)} \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.24)$$

$$\mathcal{Z}_{\pi\pi}^{\pm(n)}(E, h, \vartheta) = \int_0^1 \Phi_{\pi\pi}^\pm(E, x) \eta_{\pi\pi}^{\pm(n)}(E, x, h, \vartheta) dx,$$

$$\eta_{\pi\pi}^{\pm(n)}(E, x, h, \vartheta) = \frac{\tilde{\Pi}^{\pm(n)}(E/x, h, \vartheta)}{x^2 \tilde{\Pi}^{\pm(n)}(E, h, \vartheta)}.$$

Полученное решение значительно упрощается для малых глубин в случае степенного спектра, фейнмановского скейлинга для инвариантных инклюзивных сечений. Используя (1.11), (1.14), и простейшую аппроксимацию для полных неупругих сечений взаимодействий пионов с ядрами воздуха $\sigma_{\pi A}^{\text{in}}(E) = \sigma_{\pi A}^0(1 + \beta_\pi \ln(E/E_0))$, считая пион стабильным ($E_\pi \gtrsim 1$ ТэВ), после элементарных преобразований, первое приближение запишется в виде:

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}^{\pm(1)}(E, h, \vartheta) = & \frac{N^\pm(E, 0) z_{N\pi}^\pm(\gamma)}{\lambda_N^0} \left(\frac{1}{\Lambda_N^\pm(E)} - \frac{1}{\lambda_\pi(E)} \right)^{-1} \times \\ & \left[\exp \left(-\frac{h}{\lambda_\pi(E)} \right) - \exp \left(-\frac{h}{\Lambda_N^\pm(E)} \right) \right], \\ z_{N\pi}^\pm(\gamma) = & \int_0^1 x^{\gamma-1} \omega_{N\pi}^\pm(x) dx, \quad \omega_{N\pi}^\pm(x) = \frac{E}{\sigma_{NA}^0} \left\{ \frac{d\sigma_{N\pi^+}(E, E_0)}{dE} \pm \frac{d\sigma_{N\pi^-}(E, E_0)}{dE} \right\}, \\ \mathcal{Z}_{\pi\pi}^{\pm(1)}(E) = & \frac{\lambda_\pi(E)}{\lambda_\pi^0} \int_0^1 x^{\gamma-1} \omega_{\pi\pi}^\pm(x) dx = \frac{\lambda_\pi(E)}{\lambda_\pi^0} z_{\pi\pi}^\pm(\gamma) \quad \omega_{\pi\pi}^\pm(x) = \frac{\sigma_{\pi A}^{\text{in}}}{\sigma_{\pi A}^0} \Phi_{\pi\pi}^\pm(E, x). \end{aligned}$$

Учитывая перезарядку и регенерацию во втором приближении, дифференциальный энергетический спектр пионов для небольших глубин имеет вид:

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}^{\pm(2)}(E, h, \vartheta) = & \frac{N^\pm(E, 0) z_{N\pi}^\pm(\gamma)}{\lambda_N^0} \left(\frac{1}{\Lambda_N^\pm(E)} - \frac{1}{\lambda_\pi(E)} \right)^{-1} \times \\ & \left[\exp \left(-\frac{h}{\Lambda_N^\pm(E)} \right) - \exp \left(-\frac{h}{\lambda_\pi(E)} \right) \right], \end{aligned} \quad (1.25)$$

где

$$\frac{1}{\Lambda_{\pi}^{\pm}(E)} = \frac{1}{\lambda_{\pi}(E)} - \frac{z_{\pi\pi}^{\pm}(\gamma)}{\lambda_{\pi}^0},$$

а $1/\Lambda_N^{\pm}(E)$ определяется формулой (1.12).

1.4 Решение системы кинетических уравнений для каонов

Основным источником каонов является нуклонная и пионная компоненты космических лучей. Кинетические уравнения, описывающие перенос заряженных (K^+ , K^-) и нейтральных (K_L^0 , K_S^0) каонов в атмосфере на глубине h , распространяющихся под зенитным углом ϑ , имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial K(E, h, \vartheta)}{\partial h} = & -\frac{K(E, h, \vartheta)}{\lambda_K(E)} - \frac{m_K K(E, h, \vartheta)}{p\tau_K \rho(h, \vartheta)} + G_{NK}(E, h) + G_{\pi K}(E, h, \vartheta) \\ & + \frac{1}{\lambda_K(E)} \sum_{K'} \int_{E_{K'K}^{\min}}^{\infty} \frac{1}{\sigma_{KA}^{\text{in}}(E)} \frac{d\sigma_{K'K}(E, E_0)}{dE} K'(E_0, h, \vartheta) dE_0, \end{aligned} \quad (1.26)$$

($K, K' = K^{\pm}, K_L^0, K_S^0$) с граничным условием $K(E, 0, \vartheta) = 0$. Функции источника $G_{NK}(E, h)$ и $G_{\pi K}(E, h, \vartheta)$ описывают рождение K -мезонов в NA - и πA - взаимодействиях, соответственно:

$$\begin{aligned} G_{NK}(E, h) = & \frac{1}{\lambda_N(E)} \int_{E_{NK}^{\min}}^{\infty} \frac{1}{\sigma_{NA}^{\text{in}}(E)} \frac{d\sigma_{pK}(E, E_0)}{dE} p(E_0, h) dE_0 \\ & + \frac{1}{\lambda_N(E)} \int_{E_{NK}^{\min}}^{\infty} \frac{1}{\sigma_{NA}^{\text{in}}(E)} \frac{d\sigma_{nK}(E, E_0)}{dE} n(E_0, h) dE_0, \end{aligned} \quad (1.27)$$

$$\begin{aligned} G_{\pi K}(E, h, \vartheta) = & \frac{1}{\lambda_{\pi}(E)} \int_{E_{\pi K}^{\min}}^{\infty} \frac{1}{\sigma_{\pi A}^{\text{in}}(E)} \frac{d\sigma_{\pi^+ K}(E, E_0)}{dE} \pi^+(E_0, h) dE_0 \\ & \frac{1}{\lambda_{\pi}(E)} \int_{E_{\pi K}^{\min}}^{\infty} \frac{1}{\sigma_{\pi A}^{\text{in}}(E)} \frac{d\sigma_{\pi^- K}(E, E_0)}{dE} \pi^-(E_0, h) dE_0. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Так как во взаимодействиях участвуют не K_L^0 и K_S^0 , а K^0 и $\bar{K}^0$, то для нейтральных каонов мы ввели следующие обозначения ($i = p, n, \pi^{\pm}, K^{\pm}$):

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{iK_L^0}(E, E_0)}{dE} &= \frac{d\sigma_{iK_S^0}(E, E_0)}{dE} = \frac{1}{2} \left(\frac{d\sigma_{iK^0}(E, E_0)}{dE} + \frac{d\sigma_{i\bar{K}^0}(E, E_0)}{dE} \right), \\ \frac{d\sigma_{K_L^0 K_L^0}(E, E_0)}{dE} &= \frac{d\sigma_{K_S^0 K_S^0}(E, E_0)}{dE} = \frac{1}{2} \left(\frac{d\sigma_{K^0 K^0}(E, E_0)}{dE} + \frac{d\sigma_{\bar{K}^0 \bar{K}^0}(E, E_0)}{dE} \right), \\ \frac{d\sigma_{K_L^0 K_S^0}(E, E_0)}{dE} &= \frac{d\sigma_{K_S^0 K_L^0}(E, E_0)}{dE} = \frac{1}{2} \left(\frac{d\sigma_{K^0 \bar{K}^0}(E, E_0)}{dE} + \frac{d\sigma_{\bar{K}^0 K^0}(E, E_0)}{dE} \right). \end{aligned}$$

Остальные обозначения аналогичны тем, которые использовались при рассмотрении нуклонов и пионов. Величины $d\sigma_{iK}(E, E_0)/dE$ ($i = p, n, \pi^\pm, K^\pm, K^0, \bar{K}^0$) определяются выражением (1.16). Пределы интегрирования в (1.16, 1.26-1.28) даны формулами (1.17, 1.18), значения $s_X^{\min}$ для которых представлены в табл. 1.2.

Таблица 1.2: Минимальная недостающая масса в инклюзивных реакциях $i + A \rightarrow K + X$.

Реакция	$\sqrt{s_X^{\min}}$	Реакция	$\sqrt{s_X^{\min}}$
$p \rightarrow K^+$	$m_N + m_{\Lambda^0}$	$\pi^+ \rightarrow K^-$	$m_N + m_\pi + m_K$
$n \rightarrow K^+$	$m_N + m_{\Sigma^-}$	$\pi^- \rightarrow K^-$	$m_N + m_{K^0}$
$p, n \rightarrow K^-$	$2m_N + m_K$	$\pi^+ \rightarrow K^0$	$m_{\Sigma^+} + m_\pi$
$p \rightarrow K^0$	$m_N + m_{\Sigma^+}$	$\pi^+ \rightarrow \bar{K}^0$	$m_N + m_\pi$
$n \rightarrow K^0$	$m_N + m_{\Lambda^0}$	$\pi^- \rightarrow K^0$	m_{Σ^-}
$p, n \rightarrow \bar{K}^0$	$2m_N + m_K$	$\pi^- \rightarrow \bar{K}^0$	$m_N + m_\pi + m_K$
$\pi^+ \rightarrow K^+$	m_{Σ^-}	$K^\pm \rightarrow K^\pm$	m_N
$\pi^- \rightarrow K^+$	$m_\pi + m_{\Sigma^-}$	$K^0(\bar{K}^0) \rightarrow K^0(\bar{K}^0)$	m_N
$K^+(K^0) \rightarrow K^-$	$m_N + 2m_K$	$\bar{K}^0 \rightarrow K^+$	$m_K + m_{\Lambda^0}$
$K^- \rightarrow K^+$	$m_K + m_{\Sigma^-}$	$K^0 \rightarrow \bar{K}^0$	$m_N + 2m_{K^0}$
$K^0(\bar{K}^0) \rightarrow K^\pm$	$m_N + m_\pi$	$\bar{K}^0 \rightarrow K^0$	$m_K + m_{\Sigma^-}$

Поскольку вклад каонов в ядерный каскад невелик, поэтому в первом приближении процессы перезарядки будем учитывать в виде поправки (см. ниже). Тогда система (1.26) сразу же расщепляется на четыре независимых уравнения:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{K}(E, h, \vartheta)}{\partial h} = & -\frac{\tilde{K}(E, h, \vartheta)}{\lambda_K(E)} - \frac{m_K \tilde{K}(E, h, \vartheta)}{p\tau_K \rho(h, \vartheta)} + G_{NK}(E, h) + G_{\pi K}(E, h, \vartheta) \\
& + \frac{1}{\lambda_K(E)} \int_{E_{KK}^{\min}}^{\infty} \frac{1}{\sigma_{KA}^{\text{in}}(E)} \frac{d\sigma_{KK}(E, E_0)}{dE} \tilde{K}(E_0, h, \vartheta) dE_0.
\end{aligned} \quad (1.29)$$

Эти уравнения подобны уравнениям (1.19), поэтому решаем их тем же итерационным методом, который использовался для пионов. Решение определяется формулами (1.21, 1.24) с заменой:

$$\begin{aligned}
\lambda_\pi, m_\pi, \tau_\pi & \rightarrow \lambda_K, m_K, \tau_K, \\
G_{N\pi}^\pm(E, h) & \rightarrow G_K(E, h, \vartheta) = G_{NK}(E, h) + G_{\pi K}(E, h, \vartheta), \\
Z_{\pi\pi}^\pm(E, h, \vartheta) & \rightarrow Z_{KK}(E, h, \vartheta),
\end{aligned}$$

$$\mathcal{Z}_{KK}(E, h, \vartheta) = \int_0^1 \Phi_{KK}(E, x) \eta_{KK}(E, x, h, \vartheta) dx,$$

$$\Phi_{KK}(E, x) = \frac{E}{\sigma_{KA}^{\text{in}}(E)} \left[\frac{d\sigma_{KK}(E, E_0)}{dE} \right]_{E_0=E/x},$$

$$\eta_{KK}(E, x, h, \vartheta) = \frac{\tilde{K}(E/x, h, \vartheta)}{x^2 \tilde{K}(E, h, \vartheta)}.$$

Приведем здесь конечные формулы для n -го приближения:

$$\tilde{K}^{(n)}(E, h, \vartheta) = \int_0^h dh' G_K(E, h', \vartheta) \exp \left[- \int_{h'}^h dh'' \left(\frac{1 - \mathcal{Z}_{KK}^{(n-1)}(E, h'', \vartheta)}{\lambda_K(E)} + \frac{m_K}{p\tau_K \rho(h'', \vartheta)} \right) \right].$$

Как уже говорилось выше, процессы перезарядки будем учитывать в виде поправки δK к полученным дифференциальным энергетическим спектрам $\tilde{K}(E, h, \vartheta)$:

$$K(E, h, \vartheta) = \tilde{K}(E, h, \vartheta) + \delta K(E, h, \vartheta). \quad (1.30)$$

Подставляя (1.30) в систему (1.26) и пренебрегая в интегралах, отвечающих за перезарядку, членами порядка δK , приходим к уравнению для поправки δK :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial h} \delta K(E, h, \vartheta) &= - \frac{\delta K(E, h, \vartheta)}{\lambda_K(E)} - \frac{m_K \delta K(E, h, \vartheta)}{p\tau_K \rho(h, \vartheta)} \\ &+ \frac{1}{\lambda_K(E)} \sum_{K' \neq K} \int_{E_{K'K}^{\min}}^{\infty} \frac{1}{\sigma_{KA}^{\text{in}}(E)} \frac{d\sigma_{K'K}(E, E_0)}{dE} \tilde{K}'(E_0, h, \vartheta) dE_0, \\ &+ \frac{1}{\lambda_K(E)} \int_{E_{KK}^{\min}}^{\infty} \frac{1}{\sigma_{KA}^{\text{in}}(E)} \frac{d\sigma_{KK}(E, E_0)}{dE} \delta K(E_0, h, \vartheta) dE_0. \end{aligned}$$

Решение для $\delta K(E, h, \vartheta)$ получается из решения для $\tilde{K}(E, h, \vartheta)$ простой заменой:

$$G_K(E, h, \vartheta) \rightarrow \frac{1}{\lambda_K(E)} \sum_{K' \neq K} \int_{E_{K'K}^{\min}}^{\infty} \frac{1}{\sigma_{KA}^{\text{in}}(E)} \frac{d\sigma_{K'K}(E, E_0)}{dE} \tilde{K}'(E_0, h, \vartheta) dE_0.$$

В качестве примера рассмотрим простую модель (степенной спектр, скейлинг, логарифмический рост сечений) и применим её для малых h и энергий много выше 1 ТэВ, считая атмосферу изотермической. В этих приближениях, пренебрегая для малых глубин процессами регенерации и перезарядки, формулы упрощаются и дифференциальный энергетический спектр каонов дается выражением:

$$\tilde{K}(E, h, \vartheta) = \int_0^h \exp \left[- \frac{(h - h')}{\lambda_K(E)} \right] \left(\frac{h'}{h} \right)^{\varepsilon_K(\vartheta) - 1} G_K(E, h') dh', \quad (1.31)$$

где $\varepsilon_K(\vartheta) = m_K H_0 \sec \vartheta / p\tau_K + 1$. Функцию генерации каонов нуклонами и пионами $G_K(E, h)$, используя выражения для потоков (1.11) и (1.25), после элементарных преобразований, можно записать в виде:

$$G_K(E, h) = \frac{1}{2} \sum_{\kappa} \left[\frac{z_{NK}^{\kappa}(\gamma)}{\lambda_N^0} N^{\kappa}(E, h) + \frac{z_{\pi K}^{\kappa}(\gamma)}{\lambda_{\pi}^0} \Pi^{\kappa}(E, h) \right], \quad (\kappa = \pm). \quad (1.32)$$

Фигурирующие здесь величины $z_{iK}^{\pm}$ ($i = N, \pi$) представляют собой моменты от инклюзивных распределений $\omega_{iK}^{\pm}(x)$:

$$z_{iK}^{\pm}(\gamma) = \int_0^1 x^{\gamma-1} \omega_{iK}^{\pm}(x) dx,$$

$$\omega_{NK}^{\pm}(x) = \frac{E}{\sigma_{NA}^0} \left[\frac{d\sigma_{pK}(E, E_0)}{dE} \pm \frac{d\sigma_{nK}(E, E_0)}{dE} \right]_{E_0=E/x},$$

$$\omega_{\pi K}^{\pm}(x) = \frac{E}{\sigma_{\pi A}^0} \left[\frac{d\sigma_{\pi+K}(E, E_0)}{dE} \pm \frac{d\sigma_{\pi-K}(E, E_0)}{dE} \right]_{E_0=E/x}.$$

Интегрируя (1.31) с источником (1.32), приходим к следующему выражению для потоков каонов:

$$\begin{aligned} \tilde{K}(E, h, \vartheta) = & \Gamma(\varepsilon_K(\vartheta)) \exp \left[-\frac{h}{\lambda_K(E)} \right] \sum_{\kappa} N_0^{\kappa}(E) \left[z_{NK}^{\kappa}(\gamma) \gamma^* \left(\varepsilon_K(\vartheta), \frac{h}{\lambda_{NK}^{\kappa}(E)} \right) \frac{h}{2\lambda_N^0} \right. \\ & \left. + z_{\pi K}^{\kappa}(\gamma) \left(\frac{1}{\lambda_N^{\pm}(E)} - \frac{1}{\lambda_{\pi}^{\pm}(E)} \right)^{-1} \gamma^* \left(\varepsilon_K(\vartheta), \frac{h}{\lambda_{\pi K}^{\kappa}(E)} \right) \frac{h}{2\lambda_{\pi}^0} \right], \end{aligned}$$

где γ^* -неполная гамма-функция (1.23),

$$\frac{1}{\lambda_{NK}^{\pm}(E)} = \frac{1}{\lambda_N^{\pm}(E)} - \frac{1}{\lambda_K(E)}, \quad \frac{1}{\lambda_{\pi K}^{\pm}(E)} = \frac{1}{\lambda_{\pi}^{\pm}(E)} - \frac{1}{\lambda_K(E)}.$$

Подобные выражения были получены другим методом в работе [44] в приближении $\omega_{\pi N}^{\pm}(x) = 0$.

1.5 Поправки к нуклонной и пионной компонентам

Как уже обсуждалось в разделе 1.2, вклад в потоки нуклонов в результате πA -взаимодействия будем учитывать в виде поправки к уже найденным нуклонным спектрам (1.3). Кинетические уравнения для комбинаций протонов и нейтронов с учетом

процессов регенерации, перезарядки и генерации нуклонов пионами запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N^\pm(E, h, \vartheta)}{\partial h} = & -\frac{N^\pm(E, h, \vartheta)}{\lambda_N(E)} \\ & + \frac{1}{\lambda_N(E)} \int_E^\infty \frac{1}{\sigma_{NA}^{\text{in}}(E)} \left(\frac{d\sigma_{pp}(E, E_0)}{dE} \pm \frac{d\sigma_{pn}(E, E_0)}{dE} \right) N^\pm(E_0, h, \vartheta) dE_0 \\ & + \frac{1}{\lambda_\pi(E)} \int_{E_{\pi N}^{\text{min}}}^\infty \frac{1}{\sigma_{\pi A}^{\text{in}}(E)} \left(\frac{d\sigma_{\pi^+p}(E, E_0)}{dE} \pm \frac{d\sigma_{\pi^+n}(E, E_0)}{dE} \right) \Pi^\pm(E_0, h, \vartheta) dE_0. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Решение будем искать в виде:

$$N^\pm(E, h, \vartheta) = \tilde{N}^\pm(E, h) + \delta N_\pi^\pm(E, h, \vartheta),$$

где $\tilde{N}^\pm(E, h)$ - решение системы (1.2), а $\delta N_\pi^\pm(E, h, \vartheta)$ - нуклоны, рожденные взаимодействиями пионов. Вычитая из (1.33) уравнения (1.2) на функции $\tilde{N}^\pm(E, h)$, мы приходим к уравнениям для поправок от пионов:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial h} \delta N_\pi^\pm(E, h, \vartheta) = & -\frac{\delta N_\pi^\pm(E, h, \vartheta)}{\lambda_N(E)} + G_{\pi N}^\pm(E, h, \vartheta) \\ & + \frac{1}{\lambda_N(E)} \int_0^1 \Phi_{\pi N}^\pm(E, x) \delta N_\pi^\pm(E/x, h, \vartheta) \frac{dx}{x^2}. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Здесь

$$\begin{aligned} G_{\pi N}^\pm(E, h, \vartheta) = & \frac{1}{\lambda_\pi(E)} \int_0^1 \Phi_{\pi N}^\pm(E, x) \Pi^\pm(E/x, h, \vartheta) \frac{dx}{x^2}, \\ \Phi_{\pi N}^\pm(E, x) = & \frac{E_{\pi N}^{\text{min}}}{\sigma_{\pi A}^{\text{in}}(E)} \left[\frac{d\sigma_{\pi^+p}(E, E_0)}{dE} \pm \frac{d\sigma_{\pi^+n}(E, E_0)}{dE} \right]_{E_0=E/x}, \end{aligned}$$

а $\Phi_{\pi N}^\pm(E, x)$ определяется формулой (1.5). Величины $d\sigma_{ij}(E, E_0)/dE$ даются выражением (1.16). Пределы интегрирования в (1.33, 1.16) даны формулами (1.17, 1.18), значения s_X^{min} для реакций $M + A \rightarrow N + X$ ($M = \pi^\pm, K^\pm, K^0, \bar{K}^0$) представлены в табл. 1.3.

Полученные уравнения (1.34) подобны уравнениям для пионов, если в (1.19) пренебречь распадом пиона. Поэтому, как и в случае с каонами, применяем ту же идеологию, которая изложена в разделе 1.3. Формальное решение (1.34) дается выражением:

$$\delta N_\pi^\pm(E, h, \vartheta) = \int_0^h dh' G_{\pi N}^\pm(E, h', \vartheta) \exp \left[- \int_{h'}^h dh'' \frac{1 - \mathcal{Z}_{NN}^\pm(E, h'')}{\lambda_N(E)} \right].$$

В первом приближении пренебрегаем процессами регенерации нуклонов, родившихся при взаимодействии пионов с ядрами атмосферы, тогда

$$\delta N_\pi^{\pm(1)}(E, h, \vartheta) = \int_0^h dh' G_{\pi N}^\pm(E, h', \vartheta) \exp \left[- \frac{h - h'}{\lambda_N(E)} \right],$$

Таблица 1.3: Минимальная недостающая масса в инклюзивных реакциях $MA \rightarrow NX$.

Реакция	$\sqrt{s_X^{\min}}$	Реакция	$\sqrt{s_X^{\min}}$
$\pi^+ \rightarrow p$	$m_{\pi^\pm}$	$K^0(\overline{K}^0) \rightarrow p(n)$	$m_{\pi^\pm} + m_{K^0}$
$\pi^- \rightarrow p$	$2m_{\pi^0}$	$K^+(K^0) \rightarrow \pi^+(\pi^-)$	$m_N + m_{K^0}$
$\pi^- \rightarrow n$	$m_{\pi^\pm}$	$K^- \rightarrow \pi^+$	$m_{\pi^0} + m_{\Sigma^-}$
$\pi^+ \rightarrow n$	$2m_{\pi^\pm}$	$K^+ \rightarrow \pi^-$	$m_N + m_{\pi^0} + m_{K^\pm}$
$K^+(\overline{K}^0) \rightarrow p$	m_{K^0}	$K^- \rightarrow \pi^-$	m_{Σ^+}
$K^+ \rightarrow n$	$m_{\pi^\pm} + m_{K^\pm}$	$K^0 \rightarrow \pi^+$	$m_N + m_{\pi^\pm} + m_{K^0}$
$K^-(K^0) \rightarrow n$	m_{K^0}	$\overline{K}^0 \rightarrow \pi^+$	m_{Σ^-}
$K^- \rightarrow p$	$m_{\pi^\pm} + m_{K^0}$	$\overline{K}^0 \rightarrow \pi^-$	$m_{\pi^\pm} + m_{\Sigma^+}$

$$\mathcal{Z}_{NN}^{\pm(1)}(E, h) = \int_0^1 \Phi_{NN}^\pm(E, x) \eta_{NN}^{\pm(1)}(E, x, h, \vartheta) dx,$$

$$\eta_{NN}^{\pm(1)}(E, x, h, \vartheta) = \frac{\delta N_\pi^{\pm(1)}(E/x, h, \vartheta)}{x^2 \delta N_\pi^{\pm(1)}(E, h, \vartheta)}.$$

Для n-ного приближения имеем:

$$\delta N_\pi^{\pm(n)}(E, h, \vartheta) = \int_0^h dh' G_{\pi N}^\pm(E, h', \vartheta) \exp \left[- \int_{h'}^h dh'' \left(\frac{1 - \mathcal{Z}_{NN}^{\pm(n-1)}(E, h'')}{\lambda_N(E)} \right) \right],$$

$$\mathcal{Z}_{NN}^{\pm(n)}(E, h) = \int_0^1 \Phi_{NN}^\pm(E, x) \eta_{NN}^{\pm(n)}(E, x, h, \vartheta) dx,$$

$$\eta_{NN}^{\pm(n)}(E, x, h, \vartheta) = \frac{\delta N_\pi^{\pm(n)}(E/x, h, \vartheta)}{x^2 \delta N_\pi^{\pm(n)}(E, h, \vartheta)}.$$

Вклад каонов в нуклонную компоненту заведомо мал, и поэтому мы не будем его рассматривать, хотя учесть его не сложно (функция источника $G_{\pi N}^\pm(E, h, \vartheta)$ заменится на $G_{\pi N}^\pm(E, h, \vartheta) + G_{KN}^\pm(E, h, \vartheta)$). Совершенно аналогично можно учесть поправки к пионам от каонов. Решение определится выражениями (1.21, 1.24) с заменой

$$G_{N\pi}^\pm(E, h) \rightarrow G_{N\pi}^\pm(E, h) + G_{K\pi}^\pm(E, h),$$

где

$$G_{K\pi}^\pm(E, h) = \left[\sum_i G_{i\pi^+}^{\text{int}}(E, h) + G_{i\pi^+}^{\text{dec}}(E, h) \right] \pm \left[\sum_i G_{i\pi^-}^{\text{int}}(E, h) + G_{i\pi^-}^{\text{dec}}(E, h) \right],$$

($i = K^\pm, K_L^0, K_S^0$), а $G_{i\pi^\pm}^{\text{int}}(E, h)$ и $G_{i\pi^\pm}^{\text{dec}}(E, h)$ даны формулами (1.14) и (1.15), соответственно.

1.6 Ядерный каскад при сверхвысоких энергиях

При сверхвысоких энергиях (много выше 1 ТэВ) распад пиона можно не учитывать ($E_\pi^{\text{cr}}(0) = m_\pi H_0/\tau_\pi \simeq 0.115$ ТэВ - критическая энергия пиона) и допустимо использовать дополнительные приближения:

1. Для инвариантных инклюзивных сечений $Ed^3\sigma_{ij}/d^3p$ предположим справедливость фейнмановского скейлинга исходя из отсутствия экспериментальных данных и серьезных теоретических указаний на его нарушение во фрагментационной области (в области пионизации нарушение скейлинга не оказывает большое влияние на развитие каскада, так как область малых $x \ll 1$ подавлена падающим характером первичного спектра).

2. В такой же степени, как и данные по инвариантным инклюзивным сечениям, так и экспериментальные данные по полным сечениям неопределенны. Поэтому полные неупругие сечения взаимодействия могут быть представлены в виде линейной комбинации по степеням $\ln(E/E_0)$. В работе [44] показано, что такое приближение следует из фемениологической модели упругой амплитуды, основанной на концепции кратного померона с надкритическим интерсептом в рамках u -матричного подхода. Таким образом, для полных сечений взаимодействий адронов с ядрами можно использовать простейшую аппроксимацию

$$\sigma_{hA}^{\text{in}}(E) = \sigma_{hA}^0(1 + \beta_h \ln(E/E_0)),$$

считая параметр наклона $\sigma_{hA}^0\beta_h$ не зависящим от сорта адрона.

3. Не учитываем генерацию нуклонов и пионов в каон-ядерных столкновениях и рождение пионов в распадах K_L^0 .

4. Учитываем вклад процессов неупругой перезарядки и генерации каонов и нуклонов в πA -соударениях.

Основываясь на этих приближениях, система кинетических уравнений, описывающая перенос протонов, нейтронов и пионов в атмосфере, с учетом процессов регенерации и перезарядки, а также генерации нуклонов в πA -взаимодействиях, имеет вид:

$$\left[\frac{\partial}{\partial h} + \frac{1}{\lambda_j(E)} \right] \mathcal{D}_j(E, h) = \sum_i \frac{1}{\lambda_i^0} \int_0^1 \mathcal{W}_{ij}(x) \mathcal{D}_i\left(\frac{E}{x}, h\right) \frac{dx}{x^2}, \quad (1.35)$$

($i, j = p, n, \pi^+, \pi^-$) с граничными условиями

$$\mathcal{D}_p(E, 0) = \mathcal{D}_p^0(E), \quad \mathcal{D}_n(E, 0) = \mathcal{D}_n^0(E), \quad \mathcal{D}_{\pi^+}(E, 0) = \mathcal{D}_{\pi^-}(E, 0) = 0.$$

Здесь $\mathcal{D}_i(E, h)$ - дифференциальный энергетический спектр частиц i на глубине h в

атмосфере,

$$\mathcal{W}_{ij}(x) = \frac{\pi}{\sigma_{iA}^0} \int_0^{(p_{T(ij)}^{\max})^2} \frac{E}{p_L} \left(E \frac{d^3 \sigma_{ij}}{d^3 p} \right) dp_T^2,$$

$$\lambda_j(E) = \frac{1}{N_0 \sigma_{jA}^{\text{in}}(E)}, \quad \lambda_j^0 = \frac{1}{N_0 \sigma_{jA}^0}.$$

Остальные обозначения аналогичны тем, что использовались в пунктах 1.2 - 1.3

Приближенное решение системы (1.35) может быть найдено в виде разложений по степеням безразмерного параметра h/λ_A , где $\lambda_A = 1/(N_0 \sigma_{jA}^0 \beta_j) \simeq 14.5 \lambda_N^0$. На степенных участках первичного спектра дифференциальные энергетические спектры N - и π -компонент каскада могут быть представлены в виде:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_p(E, h) &= \frac{1}{2} [N^+(E, h) + N^-(E, h)], & \mathcal{D}_n(E, h) &= \frac{1}{2} [N^+(E, h) - N^-(E, h)], \\ \mathcal{D}_{\pi+}(E, h) &= \frac{1}{2} [\Pi^+(E, h) + \Pi^-(E, h)], & \mathcal{D}_{\pi-}(E, h) &= \frac{1}{2} [\Pi^+(E, h) - \Pi^-(E, h)], \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} N^\kappa(E, h) &= \frac{\mathcal{D}_p^0(E) + \kappa \mathcal{D}_n^0(E)}{2j^\kappa} \sum_{\kappa'} (j^\kappa + \kappa') \exp \left[-\frac{h}{\Lambda_{N\pi}^{\kappa\kappa'}(E)} \right] + \delta N^\kappa, \\ \Pi^\kappa(E, h) &= \frac{\mathcal{D}_p^0(E) + \kappa \mathcal{D}_n^0(E)}{2j^\kappa} z_{N\pi}^\kappa(\gamma) \left(\frac{\Lambda_\kappa}{\lambda_N^0} \right) \sum_{\kappa'} (-\kappa') \exp \left[-\frac{h}{\Lambda_{N\pi}^{\kappa\kappa'}(E)} \right] + \delta \Pi^\kappa, \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\Lambda_{N\pi}^{\kappa\kappa'}(E)} = \frac{1 + \kappa' j^\kappa(E)}{2\Lambda_N^\kappa(E)} + \frac{1 - \kappa' j^\kappa(E)}{2\Lambda_\pi^\kappa(E)} \quad (\kappa, \kappa' = \pm),$$

$$j^\kappa(E) = \sqrt{1 + \delta_N^\kappa \delta_\pi^\kappa} \simeq 1 + \frac{\delta_N^\kappa \delta_\pi^\kappa}{2},$$

$$\delta_N^\kappa(E) = \frac{z_{N\pi}^{\kappa(0)} \Lambda_\kappa}{\lambda_N^0}, \quad \delta_\pi^\kappa(E) = \frac{z_{\pi N}^{\kappa(0)} \Lambda_\kappa}{\lambda_\pi^0},$$

$$\frac{1}{\Lambda_i^\kappa(E)} = \frac{1}{\lambda_i(E)} - \frac{z_{ii}^{\kappa(0)}}{\lambda_i^0}, \quad \frac{1}{\Lambda_\kappa} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\Lambda_N^\kappa(E)} - \frac{1}{\Lambda_\pi^\kappa(E)} \right],$$

$$z_{NN}^{\kappa(0)} = z_{pp}^{(0)} + \kappa z_{pn}^{(0)}, \quad z_{\pi\pi}^{\kappa(0)} = z_{\pi^+\pi^+}^{(0)} + \kappa z_{\pi^-\pi^+}^{(0)},$$

$$z_{N\pi}^{\kappa(0)} = z_{p\pi^+}^{(0)} + \kappa z_{n\pi^+}^{(0)}, \quad z_{\pi N}^{\kappa(0)} = z_{\pi^+\pi}^{(0)} + \kappa z_{\pi^-\pi}^{(0)},$$

$$z_{ij}^{(n)}(\gamma) = \int_0^1 x^{\gamma-1} (-\ln x)^n \mathcal{W}_{ij}(x) dx. \quad (1.36)$$

Функции $\Lambda_{N\pi}^{\kappa\kappa'}(E)$ имеют смысл обобщенных пробегов поглощения. Действительно, если пренебречь процессами $\pi A \rightarrow NX (\mathcal{W}_{\pi N} = 0)$ получаем очевидные соотношения

$$\Lambda_{N\pi}^{\kappa+}(E) = \Lambda_N^{\kappa}(E), \quad \Lambda_{N\pi}^{\kappa-}(E) = \Lambda_{\pi}^{\kappa}(E),$$

$$N^{\kappa}(E, h) \sim \exp \left[-\frac{h}{\Lambda_N^{\kappa}(E)} \right], \quad \Pi^{\kappa}(E, h) \sim \exp \left[-\frac{h}{\Lambda_{\pi}^{\kappa}(E)} \right] - \exp \left[-\frac{h}{\Lambda_{N\pi}^{\kappa}(E)} \right],$$

аналогичные формулам (1.11- 1.25). Как показано в [44], этим решением можно пользоваться до глубин $h < 500 - 600$ г/см². Для $h > 600$ г/см² следует учесть поправки δN^{κ} и $\delta \Pi^{\kappa} \sim \mathcal{O}(h/\lambda_A)$ к приведенным выше формулам. Используя метод, изложенный в [44], и ограничиваясь первыми членами разложения по параметру h/λ_A , получаем приближенные выражения для поправок δN^{κ} и $\delta \Pi^{\kappa}$:

$$\begin{aligned} \delta N^{\kappa} &= \frac{\mathcal{D}_p^0(E) + \kappa \mathcal{D}_n^0(E)}{(2j^{\kappa})^3} \sum_{\kappa'} \exp \left[-\frac{h}{\Lambda_{N\pi}^{\kappa\kappa'}(E)} \right] \left[N_0^{\kappa} + N_1^{\kappa} \left(\frac{h}{\Lambda_{\kappa}} \right) + N_2^{\kappa} \left(\frac{h}{\Lambda_{\kappa}} \right)^2 \right], \\ \delta \Pi^{\kappa} &= \frac{\mathcal{D}_p^0(E) + \kappa \mathcal{D}_n^0(E)}{(2j^{\kappa})^3} \sum_{\kappa'} \exp \left[-\frac{h}{\Lambda_{N\pi}^{\kappa\kappa'}(E)} \right] \left[\Pi_0^{\kappa} + \Pi_1^{\kappa} \left(\frac{h}{\Lambda_{\kappa}} \right) + \Pi_2^{\kappa} \left(\frac{h}{\Lambda_{\kappa}} \right)^2 \right], \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} N_0^{\kappa} &= \kappa' (\xi_{\pi N}^{\kappa} \delta_N^{\kappa} - \xi_{N\pi}^{\kappa} \delta_{\pi}^{\kappa}), \\ N_1^{\kappa} &= (j^{\kappa} - \kappa') \xi_{\pi N}^{\kappa} \delta_N^{\kappa} - (j^{\kappa} + \kappa') \xi_{N\pi}^{\kappa} \delta_{\pi}^{\kappa} - \kappa' (\xi_{NN}^{\kappa} + \xi_{\pi\pi}^{\kappa}) \delta_N^{\kappa} \delta_{\pi}^{\kappa}, \\ N_2^{\kappa} &= j^{\kappa} [(1 - \kappa' j^{\kappa}) (2\xi_{NN}^{\kappa} - \xi_{\pi N}^{\kappa} \delta_N^{\kappa} - \xi_{N\pi}^{\kappa} \delta_{\pi}^{\kappa}) + (\xi_{NN}^{\kappa} - \xi_{\pi\pi}^{\kappa}) \delta_N^{\kappa} \delta_{\pi}^{\kappa}], \\ \Pi_0^{\kappa} &= \kappa' [\xi_{N\pi}^{\kappa} (\delta_{\pi}^{\kappa} - 1) - \delta_N^{\kappa} (\xi_{NN}^{\kappa} - \xi_{\pi\pi}^{\kappa})], \\ \Pi_1^{\kappa} &= (j^{\kappa} + \kappa') (\xi_{\pi\pi}^{\kappa} \delta_N^{\kappa} + \xi_{N\pi}^{\kappa} (\delta_{\pi}^{\kappa} - 1) - \xi_{NN}^{\kappa} \delta_N^{\kappa}) - \kappa' \delta_N^{\kappa} (\xi_{\pi N}^{\kappa} \delta_N^{\kappa} - \xi_{N\pi}^{\kappa} \delta_{\pi}^{\kappa}), \\ \Pi_2^{\kappa} &= j^{\kappa} [\delta_N^{\kappa} (\xi_{\pi N}^{\kappa} \delta_N^{\kappa} + \xi_{N\pi}^{\kappa} \delta_{\pi}^{\kappa} + (1 - \kappa' j^{\kappa}) \xi_{\pi\pi}^{\kappa} - (1 + \kappa' j^{\kappa}) \xi_{NN}^{\kappa}) + (1 + \kappa' j^{\kappa}) \xi_{N\pi}^{\kappa} (1 + \delta_{\pi}^{\kappa})], \\ \xi_{ij}^{\kappa} &= \frac{\beta_j \Lambda_{\kappa}}{\lambda_j} z_{ij}^{(1)}(\gamma). \end{aligned}$$

Эти поправки не сказываются заметно на мюоны и нейтрино, поскольку большая часть их генерируется на глубинах $h \lesssim 300$ г/см², однако, они существенны для адронов на уровне моря.

Перейдем теперь к расчету спектров K -мезонов, пренебрегая их регенерацией и перезарядкой. Кроме того, распад каона существенен даже при очень высоких энергиях и,

как следствие этого, дифференциальные энергетические спектры каонов $\mathcal{D}_K(E, h, \vartheta)$, зависят от зенитного угла ϑ . В этих приближениях, и считая атмосферу изотермической, кинетические уравнения для каонов можно записать в виде:

$$\left[\frac{\partial}{\partial h} + \frac{1}{\lambda_K(E)} + \frac{E_K^{\text{cr}}(\vartheta)}{Eh} \right] \mathcal{D}_K(E, h, \vartheta) = G_K(E, h), \quad (K = K^\pm, K_L^0, K_S^0), \quad (1.37)$$

где $E_K^{\text{cr}}(\vartheta) = m_K H_0 \sec \vartheta / \tau_K$ - критическая энергия каона (при $\vartheta \lesssim 75^\circ$), m_K и τ_K - масса и время жизни каона. Функция источника $G_K(E, h)$ описывает рождение каонов в NA и πA столкновениях. Используя вышеприведенные выражения для нуклонных и пионных спектров, мы имеем

$$\begin{aligned} G_K(E, h) &= \sum_{i=p, n, \pi^+, \pi^-} \frac{1}{\lambda_i^0} \int_0^1 \mathcal{W}_{iK}(x) \mathcal{D}_i\left(\frac{E}{x}, h\right) \frac{dx}{x^2} \\ &\simeq \frac{1}{2} \sum_{\kappa} \left[\frac{z_{NK}^{\kappa(0)}(\gamma_h)}{\lambda_N^0} N^\kappa(E, h) + \frac{z_{\pi K}^{\kappa(0)}(\gamma_h)}{\lambda_\pi^0} \Pi^\kappa(E, h) \right], \end{aligned} \quad (1.38)$$

где

$$z_{NK}^{\kappa(0)}(\gamma_h) = z_{pK}^{(0)}(\gamma_h) + \kappa z_{nK}^{(0)}(\gamma_h), \quad z_{\pi K}^{\kappa(0)}(\gamma_h) = z_{\pi^+ K^+}^{(0)}(\gamma_h) + \kappa z_{\pi^- K^+}^{(0)}(\gamma_h),$$

а $\gamma_h = \gamma + h/\lambda_A$.

Интегрируя уравнения (1.37) с функцией генерации (1.38) и пренебрегая слабой зависимостью каонных z -факторов от глубины h , находим

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_K(E, h, \vartheta) &= \int_0^h \exp \left[-\frac{(h-h')}{\lambda_K(E)} \right] \left(\frac{h'}{h} \right)^{E_K^{\text{cr}}(\vartheta)/E} G_K(E, h') dh' \\ &\simeq \exp \left[-\frac{h}{\lambda_K(E)} \right] \sum_{\kappa} z_{NK}^{\kappa(0)}(\gamma) \left(\frac{h}{\lambda_N^0} \right) N_K^\kappa(E, h, \vartheta) \\ &+ \exp \left[-\frac{h}{\lambda_K(E)} \right] \sum_{\kappa} z_{\pi K}^{\kappa(0)}(\gamma) \left(\frac{h}{\lambda_\pi^0} \right) \Pi_K^\kappa(E, h, \vartheta) + \delta K^\kappa(E, h, \vartheta), \end{aligned} \quad (1.39)$$

$$N_K^\kappa(E, h, \vartheta) = \frac{\mathcal{D}_p^0(E) + \kappa \mathcal{D}_n^0(E)}{4j^\kappa} \Gamma(\varepsilon_K(\vartheta)) \sum_{\kappa'} (j^\kappa + \kappa') \gamma^* \left(\varepsilon_K(\vartheta), \frac{h}{\Lambda_K^{\kappa\kappa'}(E)} \right), \quad (1.40)$$

$$\begin{aligned} \Pi_K^\kappa(E, h, \vartheta) &= \frac{\mathcal{D}_p^0(E) + \kappa \mathcal{D}_n^0(E)}{4j^\kappa} \Gamma(\varepsilon_K(\vartheta)) z_{N\pi}^{\kappa(0)}(\gamma) \left(\frac{\Lambda_\kappa}{\lambda_N^0} \right) \times \\ &\sum_{\kappa'} (-\kappa') \gamma^* \left(\varepsilon_K(\vartheta), \frac{h}{\Lambda_K^{\kappa\kappa'}(E)} \right). \end{aligned} \quad (1.41)$$

Здесь $\varepsilon_K(\vartheta) = E_K^{\text{cr}}(\vartheta)/E + 1$,

$$\frac{1}{\Lambda_K^{\kappa\kappa'}(E)} = \frac{1}{\Lambda_{N\pi}^{\kappa\kappa'}(E)} - \frac{1}{\lambda_K(E)}.$$

Поправки $\delta K^\kappa(E, h, \vartheta)$ малы ($\sim \mathcal{O}(h/\lambda_A)$) для глубин $h \lesssim 500$ г/см². Их нетрудно получить с помощью приведенных формул, учитывая поправки к нуклонам и пионам, а также зависимость $z_{NK}^{(0)}$ и $z_{\pi K}^{(0)}$ от h :

$$\begin{aligned} \delta K^\kappa = & \frac{\mathcal{D}_p^0(E) + \kappa \mathcal{D}_n^0(E)}{2(2j^\kappa)^3} \Gamma(\varepsilon_K(\vartheta)) \exp \left[-\frac{h}{\lambda_K(E)} \right] \sum_{\kappa'} \frac{h}{\lambda_N^0} \left[N_0^\kappa z_{NK}^{\kappa(0)} \gamma^* \left(\varepsilon_K(\vartheta), \frac{h}{\Lambda_K^{\kappa\kappa'}(E)} \right) \right. \\ & + \varepsilon_K(\vartheta) \left(N_1^\kappa z_{NK}^{\kappa(0)} - [N_0^\kappa + (2j^\kappa)^2(j^\kappa + \kappa')] \mu z_{NK}^{\kappa(1)} \Lambda_\kappa \right) \gamma^* \left(\varepsilon_K(\vartheta) + 1, \frac{h}{\Lambda_K^{\kappa\kappa'}(E)} \right) \left(\frac{h}{\Lambda_\kappa} \right) \\ & + \varepsilon_K(\vartheta)(\varepsilon_K(\vartheta) + 1) \left(N_2^\kappa z_{NK}^{\kappa(0)} - N_1^\kappa \mu z_{NK}^{\kappa(1)} \Lambda_\kappa \right) \gamma^* \left(\varepsilon_K(\vartheta) + 2, \frac{h}{\Lambda_K^{\kappa\kappa'}(E)} \right) \left(\frac{h}{\Lambda_\kappa} \right)^2 \Big] \\ & + \frac{\mathcal{D}_p^0(E) + \kappa \mathcal{D}_n^0(E)}{2(2j^\kappa)^3} \Gamma(\varepsilon_K(\vartheta)) \exp \left[-\frac{h}{\lambda_K(E)} \right] \sum_{\kappa'} \frac{h}{\lambda_\pi^0} \left[\Pi_0^\kappa z_{\pi K}^{\kappa(0)} \gamma^* \left(\varepsilon_K(\vartheta), \frac{h}{\Lambda_K^{\kappa\kappa'}(E)} \right) \right. \\ & + \varepsilon_K(\vartheta) \left(\Pi_1^\kappa z_{\pi K}^{\kappa(0)} - (\Pi_0^\kappa - \kappa' (2j^\kappa)^2 \delta_N^\kappa) \mu z_{\pi K}^{\kappa(1)} \Lambda_\kappa \right) \gamma^* \left(\varepsilon_K(\vartheta) + 1, \frac{h}{\Lambda_K^{\kappa\kappa'}(E)} \right) \left(\frac{h}{\Lambda_\kappa} \right) \\ & + \varepsilon_K(\vartheta)(\varepsilon_K(\vartheta) + 1) \left(\Pi_2^\kappa z_{\pi K}^{\kappa(0)} - \Pi_1^\kappa \mu z_{\pi K}^{\kappa(1)} \Lambda_\kappa \right) \gamma^* \left(\varepsilon_K(\vartheta) + 2, \frac{h}{\Lambda_K^{\kappa\kappa'}(E)} \right) \left(\frac{h}{\Lambda_\kappa} \right)^2 \Big], \end{aligned}$$

$$\mu = \beta_N / \lambda_N^0 = \beta_\pi / \lambda_\pi^0.$$

При расчете потоков очарованных адронов (D -мезонов и Λ_c -гиперонов) будем пренебрегать их регенерацией, что допустимо при энергиях $E \lesssim E_{D,\Lambda_c}^{\text{cr}}$, где $E_{D,\Lambda_c}^{\text{cr}}(\vartheta) = m_{D,\Lambda_c} H_0 \sec \vartheta / \tau_{D,\Lambda_c}$ - критическая энергия очарованных частиц. В данном приближении дифференциальные энергетические спектры D -мезонов и Λ_c -гиперонов даются выражениями (1.39, 1.40, 1.41) с заменой

$$\begin{aligned} z_{NK}^{\kappa(0)}(\gamma) &\rightarrow z_{Nj}^{\kappa(0)}(\gamma), \quad z_{\pi K}^{\kappa(0)}(\gamma) \rightarrow z_{\pi j}^{\kappa(0)}(\gamma), \\ \frac{1}{\lambda_K(E)} &\rightarrow \frac{1}{\lambda_j(E)}, \quad \varepsilon_K(\vartheta) \rightarrow \varepsilon_j(\vartheta), \quad (j = D^\pm, D^0, \bar{D}^0, \Lambda_c^+). \end{aligned}$$

1.7 Мюоны и нейтрино в атмосфере

1.7.1 Решение кинетических уравнений для мюонов

Атмосферные мюоны рождаются в распадах пионов (генерируемых как непосредственно при столкновениях космических лучей с ядрами атмосферы, так и в результате распадов: $K_S^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$, $K^\pm \rightarrow \pi^\pm \pi^0$, $K_{L,S}^0 \rightarrow \pi^\pm \ell^\mp \nu$, $\ell = e, \mu$) и в двух-, трехчастичных распадах каонов (см. табл. 1.4).

Таблица 1.4: Основные каналы распадов.

Частица	Распадная мода	Вероятность распада	$E^{\text{cr}}(0)$, ГэВ
$\pi^\pm$	$\mu^\pm + \nu_\mu(\bar{\nu}_\mu)$	$\simeq 100\%$	115
$K^\pm$	$\mu^\pm + \nu_\mu(\bar{\nu}_\mu)$ $\pi^\pm + \pi^0$ $\pi^0 + e^\pm + \nu_e(\bar{\nu}_e)$ $\pi^0 + \mu^\pm + \nu_\mu(\bar{\nu}_\mu)$	$(63.51 \pm 0.18)\%$ $(21.16 \pm 0.14)\%$ $(4.82 \pm 0.06)\%$ $(3.18 \pm 0.08)\%$	857
K_L^0	$\pi^\pm + e^\mp + \bar{\nu}_e(\nu_e)$ $\pi^\pm + \mu^\mp + \bar{\nu}_\mu(\nu_\mu)$	$(38.78 \pm 0.27)\%$ $(27.17 \pm 0.25)\%$	206
K_S^0	$\pi^+ + \pi^-$ $\pi^\pm + e^\mp + \bar{\nu}_e(\nu_e)$ $\pi^\pm + \mu^\mp + \bar{\nu}_\mu(\nu_\mu)$	$(68.61 \pm 0.28)\%$ $(6.68 \pm 0.1) \times 10^{-4}$ $(4.66 \pm 0.07) \times 10^{-4}$	1.12×10^5
$\mu^\pm$	$e^\pm + \nu_e(\bar{\nu}_e) + \bar{\nu}_\mu(\nu_\mu)$	$\simeq 100\%$	1.03
$D^\pm$	$e^\pm + \nu_e(\bar{\nu}_e) + \text{адроны}$ $\mu^\pm + \nu_\mu(\bar{\nu}_\mu) + \text{адроны}$	$(17.2 \pm 1.9)\%$ —	3.797×10^7
D^0	$e^+ + \nu_e + \text{адроны}$ $\mu^+ + \nu_\mu + \text{адроны}$	$(6.75 \pm 0.29)\%$ $(6.6 \pm 0.8)\%$	9.65×10^7
$D_s^\pm$	$e^\pm + \nu_e(\bar{\nu}_e) + \text{адроны}$ $\mu^\pm + \nu_\mu(\bar{\nu}_\mu) + \text{адроны}$ $\tau^\pm + \nu_\tau(\bar{\nu}_\tau) + \text{адроны}$ $\tau^\pm + \nu_\tau(\bar{\nu}_\tau)$	$(8_{-5}^{+6})\%$ — — $(7 \pm 4)\%$	9.05×10^7
Λ_c^+	$e^+ + \nu_e + \text{адроны}$ $\mu^+ + \nu_\mu + \text{адроны}$	$(4.5 \pm 1.7)\%$ —	2.38×10^8

Одномерное кинетическое уравнение, описывающее перенос мюонов в атмосфере, имеет вид

$$\left[\frac{\partial}{\partial h} + \frac{E_\mu^{\text{cr}}(\vartheta)}{Eh} \right] \mu(E, h, \vartheta) = \frac{\partial}{\partial E} [\beta_\mu(E) \mu(E, h, \vartheta)] + G_\mu^{\pi, K}(E, h, \vartheta), \quad (1.42)$$

где $\mu(E, h, \vartheta)$ - дифференциальный энергетический спектр мюонов на глубине h , распространяющихся под зенитным углом ϑ ; $\beta_\mu(E) = -dE/dh = a_\mu(E) + b_\mu(E)E$ - непрерывные потери энергии мюоном на ионизацию $[a_\mu(E)]$ и радиационное и фотоядерное взаимодействия с воздухом $[b_\mu(E)E]$, а $G_\mu^{\pi, K}(E, h, \vartheta)$ - функция генерации мюонов в вы-

шеупомянутых распадах пионов и каонов.

$$\begin{aligned}
G_{\mu}^{\pi,K}(E, h, \vartheta) &= \sum_{M=\pi^{\pm}, K^{\pm}} B(M_{\mu 2}) \frac{m_M}{\tau_M \rho(h, \vartheta)} \int_{E_{M_2}^{-(\mu)}}^{E_{M_2}^{+(\mu)}} \frac{dE_0}{p_0^2} F_{\mu}^{M_{\mu 2}}(E, E_0) M(E_0, h, \vartheta) \\
&+ \sum_{K=K^{\pm}, K_L^0, K_S^0} B(K_{\mu 3}) \frac{m_K}{\tau_K \rho(h, \vartheta)} \int_{E_{K_3}^{-(\mu)}}^{E_{K_3}^{+(\mu)}} \frac{dE_0}{p_0^2} F_{\mu}^{K_{\mu 3}}(E, E_0) K(E_0, h, \vartheta). \quad (1.43)
\end{aligned}$$

Здесь $B(M_{\mu 2(3)})$ - относительные вероятности $\pi_{\mu 2}$, $K_{\mu 2}$, и $K_{\mu 3}$ распадов, $F_{\mu}^{M_{\mu 2,3}}(E, E_0)$ - мюонные спектральные функции; остальные обозначения аналогичны использованным в разделах 1.2-1.4.

В случае двухчастичных распадов мезонов функция $F_{\mu}^{M_{\mu 2}}$ определяется кинематикой распада:

$$F_{\mu}^{M_{\mu 2}} = \left(1 - \frac{m_{\mu}^2}{m_M^2}\right)^{-1}. \quad (1.44)$$

Явный вид спектральных функций для полулептонных распадов каонов представлен в главе 2. Пределы интегрирования в (1.43) равны

$$\begin{aligned}
E_{M_2}^{\pm(\mu)} &= \frac{(m_M^2 + m_{\mu}^2) E \pm (m_M^2 - m_{\mu}^2) p}{2m_{\mu}^2}, \\
E_{K_3}^{\pm(\mu)} &= \frac{(m_K^2 + m_{\mu}^2 - m_{\pi}^2) E \pm p \sqrt{(m_M^2 + m_{\mu}^2 - m_{\pi}^2)^2 - 4m_K^2 m_{\mu}^2}}{2m_{\mu}^2}.
\end{aligned}$$

Решение уравнения (1.42) дается выражением:

$$\mu(E, h, \vartheta) = \int_0^h W_{\mu}(E, h, h', \vartheta) G_{\mu}^{\pi,K}(\mathcal{E}(E, h - h'), h', \vartheta) dh',$$

в котором

$$W_{\mu}(E, h, h', \vartheta) = \frac{\beta_{\mu}(\mathcal{E}(E, h - h'))}{\beta_{\mu}(E)} \exp \left[- \int_{h'}^h \frac{m_{\mu}}{\tau_{\mu} \rho(h, \vartheta)} \frac{dh''}{\mathcal{E}(E, h - h'')} \right]$$

— вероятность выживания мюона при прохождении слоя воздуха от h до h'' в направлении ϑ ; $\mathcal{E}(E, h)$ - корень интегрального уравнения

$$\int_E^{\mathcal{E}} \frac{dE}{\beta_{\mu}(E)} = h,$$

это энергия, которую должен иметь мюон на верху атмосферы для того, чтобы достичь глубины h с энергией E .

Ограничимся приближением $a_\mu = \text{const}$ и $b_\mu = \text{const}$. Как показывает численный анализ, учет зависимости a_μ и b_μ от энергии приводит к поправкам не превышающим 5 % на горизонтали и убывающим с уменьшением зенитного угла. В таком приближении

$$\mathcal{E}(E, h) = \left(E + \frac{a_\mu}{b_\mu}\right) \exp(b_\mu h) - \frac{a_\mu}{b_\mu} \quad \text{и} \quad \frac{\beta_\mu(\mathcal{E}(E, h))}{\beta_\mu(E)} = \exp(b_\mu h).$$

Для дальнейших вычислений необходимо знать распределения плотности $\rho(h, \vartheta)$ или температуры в нижней атмосфере. Средняя температура воздуха зависит от времени года и региона, но соответствующие изменения относительно невелики [58] и слабо влияют на спектры вторичных космических лучей. Исходя из этого и учитывая, что основная генерация мюонов и нейтрино происходит на глубинах $h \lesssim 200$ г/см², будем считать атмосферу изотермической:

$$\rho(h, \vartheta) = \frac{h \cos \vartheta^*}{H_0},$$

где $H_0 = 6.44$ км - параметр изотермической атмосферы, а ϑ^* - “эффективный угол”. В пределе плоской атмосферы (реально, при $\vartheta \lesssim 70^\circ$) ϑ^* совпадает с зенитным углом ϑ . Для сферической изотермической атмосферы не трудно получить приближенную формулу

$$\sec \vartheta^* = \sqrt{\frac{\pi(R_3 + H)}{2H_0} \frac{\text{erfc}(\varkappa)}{\exp(\varkappa^2)}}, \quad (1.45)$$

$$\varkappa = \frac{R_3 \cos^2(\vartheta) + 2H}{2H_0} [1 + \mathcal{O}(H/R_3)],$$

где R_3 - радиус Земли, erfc - дополнительная функция ошибок.

При больших зенитных углах воспользуемся приближением, обоснованным в работе [3], заменив в (1.45) переменную H на параметр H^* , зависящий от ϑ и имеющий смысл эффективной высоты генерации лептонов. H^* определяется как уровень атмосферы, выше и ниже которого генерируются равные потоки лептонов космических лучей. Результаты [3] можно аппроксимировать в интервале зенитных углов ($70 - 90^\circ$) следующей формулой:

$$H^* = 34 - 10.5 \cos \vartheta - 120 \cos^2 \vartheta + 250 \cos^3 \vartheta \quad (\text{км}).$$

Используя эту модель атмосферы, и считая ϑ^* не зависящим от H ($H \rightarrow H^*$), получаем явное выражение для вероятности выживания мюона в виде

$$W_\mu(E, h, h', \vartheta) = \exp[b_\mu(h - h')] \left[\left(\frac{h'}{h} \right) \Psi(E, h, h') \right]^{E_\mu^{\text{cr}}(\vartheta)/\mathcal{P}(E, h)}. \quad (1.46)$$

В (1.46) введены следующие обозначения:

$$\Psi(E, h, h') = \frac{E\mathcal{E}(E, h) + p\mathcal{P}(E, h) - m_\mu^2}{\mathcal{E}(E, h - h')\mathcal{E}(E, h) + \mathcal{P}(E, h - h')\mathcal{P}(E, h) - m_\mu^2},$$

$$\mathcal{P}(E, h) = \sqrt{\mathcal{E}^2(E, h) - m_\mu^2},$$

а $E_\mu^{\text{cr}}(\vartheta) = m_\mu H_0 \sec \vartheta / \tau_\mu \simeq 1.03 \sec \vartheta$ ГэВ - критическая энергия мюона.

При энергиях $E \gg E_\mu^{\text{cr}}(\vartheta)$ распадом мюона можно пренебречь, тогда выражение (1.46) для W_μ нетрудно представить в следующей форме:

$$W_\mu(E, h, h', \vartheta) \simeq \exp[b_\mu(h - h')].$$

Тогда дифференциальный энергетический спектр мюонов можно записать следующим образом:

$$\mu(E, h, \vartheta) = \int_0^h G_\mu^{\pi, K}(\mathcal{E}(E, h - h'), h', \vartheta) \exp[b_\mu(h - h')] dh'.$$

Для ультрарелятивистских энергий ($E^2 \gg m_\mu^2$) выражение для вероятности выживания мюона значительно упрощается. Действительно, при этом

$$p \simeq E \left(1 - \frac{m_\mu^2}{2E^2}\right), \quad \mathcal{P}(E, h) \simeq \mathcal{E}(E, h) \left(1 - \frac{m_\mu^2}{2\mathcal{E}^2(E, h)}\right),$$

так что

$$\Psi(E, h, h') \simeq \frac{E}{\mathcal{E}(E, h - h')},$$

откуда получаем вместо (1.46)

$$W_\mu(E, h, h', \vartheta) \simeq \left[\left(\frac{h'}{h} \right) \frac{E}{\mathcal{E}(E, h - h')} \right]^{E_\mu^{\text{cr}}(\vartheta)/\mathcal{E}(E, h - h')}.$$

На небольшом интервале энергий $m_\mu \ll E \ll a_\mu/b_\mu \approx 0.57$ ТэВ радиационные и фотоядерные потери энергии становятся несущественными, тогда (1.46) имеет вид:

$$W_\mu(E, h, h', \vartheta) \simeq \left[\left(\frac{h'}{h} \right) \left(\frac{E}{E + a_\mu(h - h')} \right) \right]^{E_\mu^{\text{cr}}(\vartheta)/(E + a_\mu h)}.$$

1.7.2 Решение кинетических уравнений для нейтрино

Электронные и мюонные нейтрино (антинейтрино) рождаются в цепочках распадов нестабильных частиц (табл. 1.4), генерируемых при столкновениях первичных и вторичных космических лучей с ядрами воздуха. Доля τ нейтрино (антинейтрино) в потоке

атмосферных нейтрино очень мала, так как ν_τ и $\bar{\nu}_\tau$ возникают в распадах тяжелых частиц (таких как D_S - или B - мезонов), сечения рождения которых мало по сравнению с сечениями рождения более легких мезонов. В работах [59, 60] сделаны оценки потоков тау-нейтрино от распадов $D \rightarrow \nu_\tau \tau$ на основе пертурбативной модели КХД в интервале энергий от 10^2 до 10^6 ГэВ. Исходя из этих расчетов, можно заключить, что для энергий E_τ выше нескольких сотен ГэВ фоновые потоки ν_τ от распада чарма преобладают над потоками ν_τ от осцилляций $\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$.

Основными каналами генерации мюонных нейтрино являются двухчастичные распады пионов ($\pi_{\mu 2}$) и каонов ($K_{\mu 2}$). При высоких энергиях ($E_\nu > 10 - 15$ ГэВ) становится важным вклад от полулептонных распадов каонов ($K^\pm, K_L^0$). Источником электронных нейтрино до $E_\nu \simeq 1$ ТэВ остается распад мюона, но уже при энергиях выше 100 ГэВ (и вплоть до $E_\nu \simeq 10$ ТэВ) начинают доминировать распады $K_{e3}^\pm$ и K_{e3}^0 . Для сверхвысоких энергий ($E_\nu \gg 1$ ТэВ) ко всем вышеперечисленным источникам добавляется еще один - распады очарованных адронов (в основном $D^\pm$ -, D^0 -, $\bar{D}^0$ -мезонов и Λ_c^+ -гиперонов). Основные каналы генерации прямых нейтрино (нейтрино от распадов чарма) перечислены в таблице 1.4.

Дифференциальный энергетический спектр нейтрино на глубине h в атмосфере, распространяющийся под углом ϑ (без учета поляризации мюонов) равен

$$\nu(E, h, \vartheta) = \int_0^h G_\nu(E, h', \vartheta) dh', \quad \nu = \nu_e, \bar{\nu}_e, \nu_\mu, \bar{\nu}_\mu. \quad (1.47)$$

Функции генерации $G_\nu(E, h, \vartheta)$ имеют вид

$$\begin{aligned} G_{\nu_e(\bar{\nu}_e)}(E, h, \vartheta) = & \sum_{K=K^\pm, K_L^0, K_S^0} B(K_{e3}) \frac{m_K}{\tau_K \rho(h, \vartheta)} \int_{E_{K_{e3}}^{\min}}^{\infty} \frac{dE_0}{p_0^2} F_\nu^{K_{e3}}(E, E_0) K(E_0, h, \vartheta) \\ & + G_{\nu_e(\bar{\nu}_e)}^\mu(E, h, \vartheta), \end{aligned} \quad (1.48)$$

$$\begin{aligned} G_{\nu_\mu(\bar{\nu}_\mu)}(E, h, \vartheta) = & \sum_{M=\pi^\pm, K^\pm} B(M_{\mu 2}) \frac{m_M}{\tau_M \rho(h, \vartheta)} \int_{E_{M_{\mu 2}}^{\min}}^{\infty} \frac{dE_0}{p_0^2} F_\mu^{M_{\mu 2}}(E, E_0) M(E_0, h, \vartheta) \\ & + \sum_{K=K^\pm, K_L^0, K_S^0} B(K_{\mu 3}) \frac{m_K}{\tau_K \rho(h, \vartheta)} \int_{E_{K_{\mu 3}}^{\min}}^{\infty} \frac{dE_0}{p_0^2} F_\nu^{K_{\mu 3}}(E, E_0) K(E_0, h, \vartheta) \\ & + G_{\nu_\mu(\bar{\nu}_\mu)}^\mu(E, h, \vartheta). \end{aligned} \quad (1.49)$$

Функции генерации нейтрино в распадах мюонов $G_\nu^\mu(E, h, \vartheta)$ с учетом поляризации

определяются следующим образом [64]

$$G_{\nu_e(\bar{\nu}_e)}^\mu(E, h, \vartheta) = B(\mu_{e3}) \frac{m_\mu}{\tau_\mu \rho(h, \vartheta)} \int_{E_\mu^{\min}}^\infty \frac{dE_0}{p_0^2} \left\{ F_{\nu_e}^{\mu_{e3}}(E, E_0) [\mu_R^\pm(E_0, h, \vartheta) + \mu_L^\pm(E_0, h, \vartheta)] \right. \\ \left. + \tilde{F}_{\nu_e}^{\mu_{e3}}(E, E_0) [\mu_R^\pm(E_0, h, \vartheta) - \mu_L^\pm(E_0, h, \vartheta)] \right\}, \quad (1.50)$$

$$G_{\nu_\mu(\bar{\nu}_\mu)}^\mu(E, h, \vartheta) = B(\mu_{e3}) \frac{m_\mu}{\tau_\mu \rho(h, \vartheta)} \int_{E_\mu^{\min}}^\infty \frac{dE_0}{p_0^2} \left\{ F_{\nu_\mu}^{\mu_{e3}}(E, E_0) [\mu_R^\mp(E_0, h, \vartheta) + \mu_L^\mp(E_0, h, \vartheta)] \right. \\ \left. + \tilde{F}_{\nu_\mu}^{\mu_{e3}}(E, E_0) [\mu_R^\mp(E_0, h, \vartheta) - \mu_L^\mp(E_0, h, \vartheta)] \right\}. \quad (1.51)$$

Здесь $F(\tilde{F})_\nu^m(E, E_0)$ ($m = \pi_{\mu 2}, K_{\mu 2}, K_{\ell 3}, \mu_{e3}$) - спектральные функции нейтрино. Выражения для спектральных функций двухчастичных распадов мезонов $F_\nu^{M_{\mu 2}}$ даются формулой (1.44). В случае трехчастичных распадов вид спектральных функций будет представлен в главе 2.

Пределы интегрирования в (1.48-1.51) равны

$$E_{M_{\mu 2}}^{\min} = \frac{m_M^2 E}{m_M^2 - m_\mu^2} + \frac{m_M^2 - m_\mu^2}{4E}, \quad E_{\mu_{e3}}^{\min} = E + \frac{m_\mu^2}{4E}, \\ E_{K_{\ell 3}}^{\min} = \frac{m_K^2 E}{m_M^2 - m_\pi^2 + m_\ell^2} + \frac{m_M^2 - m_\pi^2 + m_\ell^2}{4E}.$$

Величины $\mu_R^\pm, \mu_L^\pm$ (потоков право- и левополяризованных мюонов от двухчастичных распадов пионов и каонов) даются выражением:

$$\mu_{R,L}^\pm(E, h, \vartheta) = \int_0^h W_\mu(E, h, h', \vartheta) G_{R,L}^\pm(\mathcal{E}(E, h - h'), h', \vartheta) dh',$$

в котором

$$G_{R,L}^\pm(E, h, \vartheta) = \sum_{M=\pi, K} B(M_{\mu 2}) \frac{m_M}{\tau_M \rho(h, \vartheta)} \int_{E_{M_2}^{-(\mu)}}^{E_{M_2}^{+(\mu)}} \frac{dE_0}{p_0^2} C_{R,L}^\pm F_\mu^{M_{\mu 2}}(E, E_0) M^\pm(E_0, h, \vartheta).$$

Здесь $C_{R,L}^\pm = (1 + \kappa_{R,L} \mathcal{P}_\mu^\mp(E_M, E_\mu)) / 2$ ($\kappa_R = 1, \kappa_L = -1$) - доля право- и левополяризованных мюонов от распадов мезонов, а $\mathcal{P}_\mu^\mp$ есть поляризация мюонов в лабораторной системе отсчета. Согласно ([61]), поляризация $\mu^\pm$ равна

$$\mathcal{P}_\mu^\mp(E_M, E_\mu) = \mp \left(\frac{E_\mu E_\mu^*}{p_\mu p_\mu^*} + \frac{E_M m_\mu^2}{m_M p_\mu p_\mu^*} \right).$$

Глава 2

Трехчастичные распады

Как уже говорилось выше, трехчастичные распады нестабильных частиц являются источниками атмосферных лептонов (табл. 1.4). Учет всех этих цепочек необходим для прецизионного расчета спектров мюонных и (особенно) электронных нейтрино, а также потока мюонов космических лучей у поверхности Земли, который обычно используется для нормировки расчетных спектров атмосферных нейтрино при энергиях выше нескольких ГэВ. Для такого расчета требуется, помимо прочего, точное знание спектров вторичных частиц от распадов мюонов (μ_{e3}), каонов ($K_{\ell 3}^0, K_{\ell 3}^{\pm}$) и очарованных адронов ($D \rightarrow \mu \nu_{\mu} X, \Lambda_c \rightarrow \mu \nu_{\mu} X$).

Для расчетов потоков вторичных космических лучей удобно ввести спектральные функции

$$F_i^m(E, E_0) = \frac{P_0}{\Gamma_i^m} \frac{d\Gamma_i^m(E, E_0)}{dE},$$

где

$$m = \mu_{e3}, K_{\ell 3}, D \rightarrow \ell \nu_{\ell} X, \Lambda_c \rightarrow \ell \nu_{\ell} X, \quad i = \nu, \ell, \pi,$$

а E_0 и E - энергии распадающейся и вторичной частиц, соответственно.

В этой главе представлены формулы для спектральных функций вторичных частиц (π, μ, e, ν).

2.1 Спектральные функции для μ_{e3} -распада

Спектральные функции для распада неполяризованого мюона впервые были рассчитаны в работе [4]:

$$F_{\nu_e}^{\mu_{e3}}(x) = 2(1 - 3x^2 + 2x^3),$$

$$F_{\nu_\mu}^{\mu e3}(x) = \frac{1}{3} (5 - 9x^2 + 4x^3) .$$

Здесь

$$x = \frac{2E_\nu}{E_\mu + p_\mu} .$$

Для низких энергий основными источниками мюонов являются двухчастичные распады пионов и каонов. Мюоны, возникающие в распадах $\pi_{\mu2}$ и $K_{\mu2}$, оказываются поляризованы в направлении движения или против него (в зависимости от знака заряда). Этот факт оказывается очень важным, так как спектры нейтрино, рожденные в μ_{e3} распадах зависят от поляризации мюона. В системе покоя мезона-родителя мюон полностью поляризован. В лабораторной системе часть мюонов, летящих вниз, представляет собой те мюоны, которые в системе покоя мезона были испущены вверх, следовательно, поляризация их относительно направления полета должна быть обратной. Таким образом, поляризация всех мюонов, летящих вниз, является неполной. Первые оценки эффекта поляризации были даны Зацепиным и Кузьминым [4], а затем Волковой и Зацепиным в работе [62]. Детальный расчет потоков атмосферных нейтрино с учетом поляризации родительского мюона впервые был сделан в работе [63]. Для распада поляризованного мюона функции $\tilde{F}_{\nu}^{\mu e3}$ согласно работе [64] имеют вид:

$$\tilde{F}_{\nu_e}^{\mu e3}(x, v_\mu) = 2 \left[3x - \frac{1-x}{v_\mu} \right] (1-x)^2 ,$$

$$\tilde{F}_{\nu_\mu}^{\mu e3}(x, v_\mu) = \left[\frac{(1+2x)(1-x)}{3v_\mu} - 2x^2 \right] (1-x) ,$$

где $v_\mu = p_\mu / E_\mu$.

При сверхвысоких энергиях ($E_\nu \gg 1$ ТэВ) появляется дополнительный источник мюонов - трехчастичные распады каонов. Учет поляризации мюона от $K_{\mu3}$ -распада достаточно сложен. Оценка зависимости поляризации от отношения двух формфакторов ξ на основе V-A теории были сделаны в [65]. В этой работе предполагалось, что вероятное значение ξ находится между 1 и 1.5. Это не противоречит тому разбросу в экспериментальных данных по измерению параметра ξ , который приведен в [48], хотя наилучший фит результатов экспериментов [48] дает значения $\xi = -0.11$ и -0.33 для $K_{\mu3}^0$ и $K_{\mu3}^\pm$ соответственно. По оценкам, приведенным в работе [66], в которой использовались формулы [65] в предположении $\xi = 1$, $\gamma = 2.65$ (показатель спектра каонов), средняя поляризация мюона от полулептонных распадов каонов может иметь знак минус ($\overline{\mathcal{P}}_\mu = -0.273$) в отличие от других мод распадов. Для этой энергетической области мы будем учитывать поляризацию мюона (в общем случае зависящую от энергий самого

мюона и родительского мезона, а для мюона от трехчастичных полулептонных распадов каонов – еще и от параметров формфакторов каонов) приближенно ($\mathcal{P}_\mu^\pm = \pm \overline{\mathcal{P}}_\mu$), поскольку потоки нейтрино от распадов мюонов малы по сравнению с потоками от распадов пионов и каонов (за исключением узкой области вблизи горизонтали при $E \sim 1$ ТэВ), к тому же неопределенность в измерении параметров формфакторов слишком велика для аккуратного учета эффекта поляризации. Поэтому спектральные функции для трехчастичного распада поляризованного мюона в ультрарелятивистском пределе можно записать в следующей форме [64]:

$$\tilde{F}_{\nu_e}^{\mu e 3}(x) = 2(1-x)^2(4x-1), \quad \tilde{F}_{\nu_\mu}^{\mu e 3}(x) = \frac{1}{3}(1-x)(1+x-8x^2).$$

Исходя из экспериментальных данных [67], в расчетах использовалась средняя по всем модам распадов поляризация $\overline{\mathcal{P}}_\mu = 0.33$ (см. также [68, 69]).

2.2 Полулептонные распады каонов

В стандартной теории слабого взаимодействия матричный элемент $K_{\ell 3}$ распада имеет вид [70]:

$$M = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \sin \theta_C [f_+(q^2)(p_K + p_\pi)^\mu + f_-(q^2)(p_K - p_\pi)^\mu] \bar{\ell} \gamma_\mu (1 + \gamma_5) \nu_\ell. \quad (2.1)$$

Здесь G_F и θ_C – константа Ферми и угол Кабиббо, p_K и p_π – 4-импульсы каона и пиона, $f_\pm(q^2)$ – формфакторы, зависящие от $q^2 = (p_K - p_\pi)^2$, квадрата 4-импульса, передаваемого лептонной паре и $\ell = e, \mu$. Мы используем общепринятую линейную параметризацию

$$f_\pm(q^2) = f_\pm(0) \left(1 + \lambda_\pm \frac{q^2}{m_\pi^2} \right).$$

В пределе точной $SU(3)$ -симметрии, $f_+(0) = 1$ для $K_{\ell 3}^0$ и $f_+(0) = 1/\sqrt{2}$ для $K_{\ell 3}^\pm$, тогда как $f_-(0)$ обращается в нуль. В соответствии с теоремой Адемолло-Гатто можно ожидать, что отношение $\xi = f_-(0)/f_+(0)$ будет мало по абсолютной величине для $K_{e 3}$ -распада [70]. В случае $K_{\mu 3}$ -распада теорема Адемолло-Гатто не работает, так что здесь допустимо $|\xi| \sim 1$. Реальная ситуация до сих пор не вполне ясна, т. к. разброс значений ξ , измеренных в различных экспериментах, очень велик ([48]). В расчетах мы будем использовать наилучший фит, полученный в [48] из анализа всех экспериментальных данных.

Дифференциальная вероятность распада в произвольной системе отсчета имеет вид

$$d\Gamma = \frac{|M|^2}{2(2\pi)^5 E_K} \delta^4(p_K - p_\pi - p_\ell - p_\nu) \frac{d^3 p_\pi}{2E_\pi} \frac{d^3 p_\ell}{2E_\ell} \frac{d^3 p_\nu}{2E_\nu}.$$

Используя стандартные методы вычисления квадрата матричного элемента, находим

$$\begin{aligned} |M|^2 = & 16G_F^2 \sin^2 \theta_C \left\{ f_+^2(q^2) [2(p_K p_\ell)(p_K p_\nu) - m_K^2(p_\nu p_\ell)] \right. \\ & \left. - m_\ell^2 f_+(q^2) [f_+(q^2) - f_-(q^2)] (p_K p_\nu) + \frac{m_\ell^2}{4} [f_+(q^2) - f_-(q^2)]^2 (p_\nu p_\ell) \right\}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Нетрудно видеть, что расчет дифференциальных спектров продуктов $K_{\ell 3}$ распада сводится к вычислению следующих трех интегралов:

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^3 p_\pi}{2E_\pi} \frac{d^3 p_\ell}{2E_\ell} \delta^4(q_\nu - p_\pi - p_\ell) |M|^2, \\ & \int \frac{d^3 p_\pi}{2E_\pi} \frac{d^3 p_\nu}{2E_\nu} \delta^4(q_\ell - p_\pi - p_\nu) |M|^2, \\ & \int \frac{d^3 p_\ell}{2E_\ell} \frac{d^3 p_\nu}{2E_\nu} \delta^4(q_\pi - p_\ell - p_\nu) |M|^2, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где $q_i = (p_K - p_i)$, $i = \pi, \ell, \nu$. При этом, физическая область задается неравенствами

$$m_\pi + m_\ell \leq q_\nu \leq m_K,$$

$$m_\pi \leq q_\ell \leq m_K - m_\ell,$$

$$m_\ell \leq q_\pi \leq m_K - m_\pi.$$

Скалярные произведения 4-х импульсов, входящие в выражение для квадрата матричного элемента (2.2), можно представить в виде:

$$\begin{aligned} (p_K p_\ell) &= \frac{q_\nu^2 + q_\pi^2 - m_\pi^2}{2} = \frac{m_K^2 + m_\ell^2 - q_\ell^2}{2}, \\ (p_K p_\nu) &= \frac{q_\ell^2 + q_\pi^2 - m_K^2 - m_\ell^2}{2} = \frac{m_K^2 - q_\nu^2}{2}, \\ (p_\nu p_\ell) &= \frac{q_\pi^2 - m_\ell^2}{2}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Для расчета мы использовали метод ковариантного интегрирования [65]. Выберем систему координат

$$\mathbf{q}_\nu = \mathbf{p}_K - \mathbf{p}_\nu = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{q}_\ell = \mathbf{p}_K - \mathbf{p}_\ell = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{q}_\pi = \mathbf{p}_K - \mathbf{p}_\pi = \mathbf{0}.$$

для интегралов (2.3), соответственно. Трехмерная δ -функция снимет интегрирование по импульсу лептона и нейтрино

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^3 p_\pi}{2E_\pi 2E_\ell} \delta(q_\nu^0 - E_\pi - E_\ell) |M|^2, \\ & \int \frac{d^3 p_\pi}{2E_\pi 2E_\nu} \delta(q_\ell^0 - E_\pi - E_\nu) |M|^2, \\ & \int \frac{d^3 p_\ell}{2E_\ell 2E_\nu} \delta(q_\pi^0 - E_\ell - E_\nu) |M|^2. \end{aligned}$$

Применяя равенство $|\mathbf{p}|d|\mathbf{p}| = EdE$, свойства δ -функции и переходя к полярным координатам, получаем выражения:

$$\begin{aligned} & \frac{\pi}{2q_\nu^0} |\mathbf{p}_\pi| \int_{-1}^1 d \cos \vartheta_1 |M|^2, \\ & \frac{\pi}{2q_\ell^0} |\mathbf{p}_\pi| \int_{-1}^1 d \cos \vartheta_1 |M|^2, \\ & \frac{\pi}{2q_\pi^0} |\mathbf{p}_\nu| \int_{-1}^1 d \cos \vartheta_2 |M|^2. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Используя определения кинематических инвариантов

$$q_\pi^2 = m_K^2 + m_\pi^2 - 2E_K E_\pi + 2|\mathbf{p}_K||\mathbf{p}_\pi| \cos \vartheta_1, \quad q_\nu^2 = m_K^2 - 2E_K E_\nu + 2|\mathbf{p}_K|E_\nu \cos \vartheta_2,$$

после новой замены переменных $\cos \vartheta_1 \rightarrow q_\pi^2$ и $\cos \vartheta_2 \rightarrow q_\nu^2$, интегралы (2.5) можно записать в следующей форме:

$$\begin{aligned} & \frac{\pi}{4\bar{q}_\nu^0 |\mathbf{p}_K|} \int_{\bar{\alpha}_\nu - \bar{\beta}_\nu}^{\bar{\alpha}_\nu + \bar{\beta}_\nu} d\bar{q}_\pi^2 |M|^2, \\ & \frac{\pi}{4\bar{q}_\ell^0 |\mathbf{p}_K|} \int_{\bar{\alpha}_\ell - \bar{\beta}_\ell}^{\bar{\alpha}_\ell + \bar{\beta}_\ell} d\bar{q}_\pi^2 |M|^2, \\ & \frac{\pi}{4\bar{q}_\pi^0 |\mathbf{p}_K|} \int_{\bar{\alpha}_\pi - \bar{\beta}_\pi}^{\bar{\alpha}_\pi + \bar{\beta}_\pi} d\bar{q}_\nu^2 |M|^2, \end{aligned} \tag{2.6}$$

где

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_\nu &= m_K^2 + m_\pi^2 - 2E_K E_\pi, & \bar{\beta}_\nu &= 2|\mathbf{p}_K||\mathbf{p}_\pi|, \\ \bar{\alpha}_\ell &= m_K^2 + m_\pi^2 - 2E_K E_\pi, & \bar{\beta}_\ell &= 2|\mathbf{p}_K||\mathbf{p}_\pi|, \\ \bar{\alpha}_\pi &= m_K^2 - 2E_K E_\nu, & \bar{\beta}_\pi &= 2|\mathbf{p}_K|E_\nu. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Здесь черточкой мы помечаем величины, записанные в системе $\mathbf{q}_i = 0$ ($i = \nu, \ell, \pi$). В

дальнейшем понадобятся следующие выражения:

$$\begin{aligned}
E_K &= \frac{(\vec{p}_K \vec{q}_\nu^0)}{\vec{q}_\nu^0} = \frac{(\vec{p}_K \vec{q}_\ell^0)}{\vec{q}_\ell^0} = \frac{(\vec{p}_K \vec{q}_\pi^0)}{\vec{q}_\pi^0}, \\
E_\pi &= \frac{(\vec{p}_\pi \vec{q}_\nu^0)}{\vec{q}_\nu^0} = \frac{(\vec{p}_\pi \vec{q}_\ell^0)}{\vec{q}_\ell^0}, \\
E_\nu &= \frac{(\vec{p}_\pi \vec{q}_\pi^0)}{\vec{q}_\pi^0},
\end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned}
|\mathbf{p}_K| &= \sqrt{E_K^2 - m_K^2}, \quad |\mathbf{p}_\pi| = \sqrt{E_\pi^2 - m_\pi^2}, \\
(\vec{p}_K \vec{q}_i^0) &= \frac{\vec{q}_i^{02} + m_K^2 - m_i^2}{2}, \quad i = \nu, \ell, \pi, \\
(\vec{p}_\pi \vec{q}_\nu^0) &= \frac{\vec{q}_\nu^{02} + m_\pi^2 - m_\ell^2}{2}, \\
(\vec{p}_\pi \vec{q}_\ell^0) &= \frac{\vec{q}_\ell^{02} + m_\pi^2}{2}, \\
(\vec{p}_\nu \vec{q}_\pi^0) &= \frac{\vec{q}_\pi^{02} - m_\ell^2}{2}.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Подставляя (2.9) в выражения для интегралов (2.6), имеем

$$\begin{aligned}
&\frac{\pi}{4\sqrt{(\vec{p}_K \vec{q}_\nu^0)^2 - (m_K \vec{q}_\nu^0)^2}} \int_{\vec{\alpha}_\nu - \vec{\beta}_\nu}^{\vec{\alpha}_\nu + \vec{\beta}_\nu} d\vec{q}_\pi^2 |M|^2, \\
&\frac{\pi}{4\sqrt{(\vec{p}_K \vec{q}_\ell^0)^2 - (m_K \vec{q}_\ell^0)^2}} \int_{\vec{\alpha}_\ell - \vec{\beta}_\ell}^{\vec{\alpha}_\ell + \vec{\beta}_\ell} d\vec{q}_\pi^2 |M|^2, \\
&\frac{\pi}{4\sqrt{(\vec{p}_K \vec{q}_\ell^0)^2 - (m_K \vec{q}_\ell^0)^2}} \int_{\vec{\alpha}_\pi - \vec{\beta}_\pi}^{\vec{\alpha}_\pi + \vec{\beta}_\pi} d\vec{q}_\nu^2 |M|^2.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Поскольку величины α_i и β_i являются релятивистскими инвариантами, можно записать их явный вид, используя (2.8) и (2.9), в произвольной системе отсчета:

$$\begin{aligned}
\alpha_\nu &= m_K^2 + m_\pi^2 - \frac{1}{2q_\nu^2} (q_\nu^2 + m_K^2)(q_\nu^2 + m_\pi^2 - m_\ell^2), \\
\alpha_\ell &= m_K^2 + m_\pi^2 - \frac{1}{2q_\ell^2} (q_\ell^2 + m_\pi^2)(q_\ell^2 + m_K^2 - m_\ell^2), \\
\alpha_\pi &= m_K^2 - \frac{1}{2q_\pi^2} (q_\pi^2 - m_\ell^2)(q_\pi^2 + m_K^2 - m_\pi^2), \\
\beta_\nu &= \frac{1}{2q_\nu^2} (q_\nu^2 - m_K^2) \sqrt{(q_\nu^2 + m_\pi^2 - m_\ell^2)^2 - 4m_\pi^2 q_\nu^2}, \\
\beta_\ell &= \frac{1}{2q_\ell^2} (q_\ell^2 - m_\pi^2) \sqrt{(q_\ell^2 + m_K^2 - m_\ell^2)^2 - 4m_K^2 q_\ell^2}, \\
\beta_\pi &= \frac{1}{2q_\pi^2} (q_\pi^2 - m_\ell^2) \sqrt{(q_\pi^2 + m_K^2 - m_\pi^2)^2 - 4m_K^2 q_\pi^2}.
\end{aligned}$$

Переходя в выражениях (2.10) к лабораторной системе, получаем

$$\begin{aligned}
& \frac{\pi}{4\sqrt{(p_K q_\nu)^2 - m_K^2 q_\nu^2}} \int_{\alpha_\nu - \beta_\nu}^{\alpha_\nu + \beta_\nu} dq_\pi^2 |M|^2, \\
& \frac{\pi}{4\sqrt{(p_K q_\ell)^2 - m_K^2 q_\ell^2}} \int_{\alpha_\ell - \beta_\ell}^{\alpha_\ell + \beta_\ell} dq_\pi^2 |M|^2, \\
& \frac{\pi}{4\sqrt{(p_K q_\pi)^2 - m_K^2 q_\pi^2}} \int_{\alpha_\pi - \beta_\pi}^{\alpha_\pi + \beta_\pi} dq_\nu^2 |M|^2.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Подставляя (2.4), (2.8) и (2.9) в (2.11) и опуская громоздкие промежуточные выкладки, выражения для дифференциальных ширин распадов можно представить в виде:

$$\begin{aligned}
E_\nu \frac{d^3 \Gamma_\nu}{d^3 p_\nu} &= \frac{G_F^2 \sin^2 \theta_C f_+^2(0)}{768 \pi^4 E_K \sqrt{(p_K q_\nu)^2 - m_K^2 q_\nu^2}} \left\{ -q_\nu^2 I_2(1, \lambda_1, 1, \lambda_1; \alpha_\nu, \beta_\nu) \right. \\
&\quad - [m_K^2 (m_\pi^2 - m_\ell^2) + (q_\pi^2)^2 - (m_K^2 + m_\pi^2) q_\pi^2] I_1(1, \lambda_1, 1, \lambda_1; \alpha_\nu, \beta_\nu) \\
&\quad - 2m_\ell^2 (m_K^2 - q_\nu^2) I_1(1, \lambda_1, c, \lambda_2; \alpha_\nu, \beta_\nu) + m_\ell^2 I_2(c, \lambda_2, c, \lambda_2; \alpha_\nu, \beta_\nu) \\
&\quad \left. - m_\ell^4 I_1(c, \lambda_2, c, \lambda_2; \alpha_\nu, \beta_\nu) \right\}, \\
E_\ell \frac{d^3 \Gamma_\ell}{d^3 p_\ell} &= \frac{G_F^2 \sin^2 \theta_C f_+^2(0)}{768 \pi^4 E_K \sqrt{(p_K q_\ell)^2 - m_K^2 q_\ell^2}} \left\{ (m_\ell^2 - q_\ell^2) I_2(1, \lambda_1, 1, \lambda_1; \alpha_\ell, \beta_\ell) \right. \\
&\quad - [(q_\ell^2)^2 - (m_K^2 + m_\pi^2 + 2m_\ell^2) q_\ell^2 + m_\ell^2 (m_\pi^2 + m_\ell^2) \\
&\quad + m_K^2 m_\pi^2] I_1(1, \lambda_1, 1, \lambda_1; \alpha_\ell, \beta_\ell) + m_\ell^2 I_2(c, \lambda_2, c, \lambda_2; \alpha_\ell, \beta_\ell) \\
&\quad + 2m_\ell^2 (m_\pi^2 + m_\ell^2 - q_\ell^2) I_1(1, \lambda_1, c, \lambda_2; \alpha_\ell, \beta_\ell) - m_\ell^4 I_1(c, \lambda_2, c, \lambda_2; \alpha_\ell, \beta_\ell) \left. \right\}, \\
E_\pi \frac{d^3 \Gamma_\pi}{d^3 p_\pi} &= \frac{G_F^2 \sin^2 \theta_C f_+^2(0)}{768 \pi^4 E_K \sqrt{(p_K q_\pi)^2 - m_K^2 q_\pi^2}} \left\{ (1 + \lambda_1 q_\pi^2)^2 [I_2(m_K^2 + m_\pi^2, -1, 1, 0; \alpha_\pi, \beta_\pi) \right. \\
&\quad - q_\pi^2 I_2(1, 0, 1, 0; \alpha_\pi, \beta_\pi) - I_1(m_K^2 (m_\pi^2 - m_\ell^2), 0, 1, 0; \alpha_\pi, \beta_\pi)] \\
&\quad - 2m_\ell^2 (1 + \lambda_1 q_\pi^2) (c + \lambda_2 q_\pi^2) I_1(m_K^2, -1, 1, 0; \alpha_\pi, \beta_\pi) \\
&\quad \left. + m_\ell^2 (c + \lambda_2 q_\pi^2)^2 (q_\pi^2 - m_\ell^2) I_1(1, 0, 1, 0; \alpha_\pi, \beta_\pi) \right\},
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
I_1(x, y, v, u; \alpha, \beta) &= \int_{\alpha - \beta}^{\alpha + \beta} dt (x + yt)(v + ut) \\
&= 2\beta \left[xv + (xu + yv)\alpha + yu \left(\alpha^2 + \frac{\beta^2}{3} \right) \right], \\
I_2(x, y, v, u; \alpha, \beta) &= \int_{\alpha - \beta}^{\alpha + \beta} dt t (x + yt)(v + ut) \\
&= 2\beta \left[xv\alpha + (xu + yv) \left(\alpha^2 + \frac{\beta^2}{3} \right) + yu\alpha (\alpha^2 + \beta^2) \right],
\end{aligned}$$

$$\lambda_1 = \frac{\lambda_+}{m_\pi^2}, \quad \lambda_2 = \frac{\lambda_+ - \xi \lambda_-}{2m_\pi^2}, \quad c = \frac{1 - \xi}{2}.$$

Выражения в фигурных скобках в формулах для $E_i d^3 \Gamma_i / d^3 p_i$ являются полиномами по q_i^2 ($i = \nu, \ell, \pi$). Это позволяет переписать дифференциальные ширины распадов в более компактной форме:

$$\begin{aligned} E_\nu \frac{d^3 \Gamma_\nu}{d^3 p_\nu} &= \frac{G_F^2 \sin^2 \theta_C m_K^2}{768 \pi^4 E_K} f_+^2(0) \sqrt{(q_\nu^2)^2 - 2\mu_+ q_\nu^2 + \mu_-^2} \sum_{n=-4}^3 c_n^\nu \left(\frac{q_\nu^2}{m_K^2} \right)^n, \\ E_\ell \frac{d^3 \Gamma_\ell}{d^3 p_\ell} &= \frac{G_F^2 \sin^2 \theta_C m_K^2}{768 \pi^4 E_K} f_+^2(0) (q_\ell^2 - m_\pi^2) \sum_{n=-4}^3 c_n^\ell \left(\frac{q_\ell^2}{m_K^2} \right)^n, \\ E_\pi \frac{d^3 \Gamma_\pi}{d^3 p_\pi} &= \frac{G_F^2 \sin^2 \theta_C m_K^2}{768 \pi^4 E_K} f_+^2(0) (q_\pi^2 - m_\ell^2) \sum_{n=-3}^3 c_n^\pi \left(\frac{q_\pi^2}{m_K^2} \right)^n, \end{aligned}$$

где $\mu_\pm = m_\pi^2 \pm m_\ell^2$. Фигурирующие здесь коэффициенты c_n^i зависят от масс частиц и параметров формфакторов:

$$\begin{aligned} c_{-4}^\nu &= -6r_\ell(r_\pi - r_\ell)^3 v^2 \lambda^2, \\ c_{-3}^\nu &= 8r_\ell(r_\pi - r_\ell)^2 uv \lambda - 2(r_\pi - r_\ell) \{4(r_\pi - r_\ell)[r_\pi - r_\ell(1 - 4v)] \\ &\quad - r_\ell[3r_\pi(1 + 3r_\pi) - r_\ell(9 + 10r_\pi - r_\ell)]v^2\} \lambda^2, \\ c_{-2}^\nu &= -3r_\ell(r_\pi - r_\ell)u^2 + 4\{2(r_\pi - r_\ell)[2(r_\pi - r_\ell) + 3r_\ell(u + v)] \\ &\quad - r_\ell[r + r_\ell + (r_\pi - r_\ell)(3 + 4r_\pi - r_\ell)]uv\} \lambda + 8(r_\pi - r_\ell)[(r_\pi - r_\ell)(4 + 3r_\pi + r_\ell) \\ &\quad - (r_\pi + r_\ell)] \lambda^2 + 16r_\ell[r_\pi + r_\ell + 3(r_\pi - r_\ell)(1 + 2r_\pi)]v \lambda^2 \\ &\quad - 2r_\ell\{(r_\pi - r_\ell)[3(2 + 8r_\pi + 3r_\pi^2) - r_\ell(2r_\pi + r_\ell)] + (r_\pi + r_\ell)(3 + 3r_\pi + r_\ell)\}v^2 \lambda^2, \\ c_{-1}^\nu &= -3\{4r_\pi - r_\ell[4(1 - 2u) + (1 + r_\pi - r_\ell)u^2]\} - 4\{8r_\pi(1 + r_\pi) - 4r_\ell(4 + r_\pi + r_\ell) \\ &\quad + r_\ell[2(1 + 4r_\pi + r_\pi^2) - r_\ell(1 + r_\pi + r_\ell)]uv - 6r_\ell(1 + 2r_\pi(u + v))\} \lambda \\ &\quad - 8\{3r_\pi(1 + 3r_\pi + r_\pi^2) - r_\ell[5 + 16r_\pi + r_\pi^2 + r_\ell(1 + r_\pi + r_\ell)] \\ &\quad + 2r_\ell(5 + 15r_\pi + 6r_\pi^2 + 3r_\ell)v\} \lambda^2 + 2r_\ell\{3(1 + 10r_\pi + 10r_\pi^2 + r_\pi^3) \\ &\quad + r_\ell[3 + 4r_\pi + r_\pi^2 + r_\ell(4 + r_\pi + r_\ell)]\}v^2 \lambda^2, \\ c_0^\nu &= 3\{4(1 + r_\pi) - r_\ell[4 + (u - 8)u]\} + 4\{4(1 + 4r_\pi + r_\pi^2) - r_\ell[4(5 - r_\pi + 2r_\ell) \\ &\quad - 6(2 + r_\pi + r_\ell)(u + v) + (4 + 4r_\pi + r_\ell)uv]\} \lambda + 8\{1 + 9r_\pi + 9r_\pi^2 + r_\pi^3 \\ &\quad - r_\ell[3 - 4r_\pi - r_\pi^2 + r_\ell(3 - r_\pi + 3r_\ell)]\} \lambda^2 + 2r_\ell\{16[3 + 6r_\pi + r_\pi^2 + r_\ell(3 + r_\pi + r_\ell)] \\ &\quad - [9(1 + 3r_\pi + r_\pi^2) + r_\ell(7 + 4r_\pi + r_\ell)]v\}v \lambda^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_1^\nu &= -12 - 8\{4(1 + r_\pi) - r_\ell[2 - 3(u + v) - uv]\}\lambda \\
&\quad - 2\{12(1 + 3r_\pi + r_\pi^2) - r_\ell[4(7 + 5r_\ell) - 32(3 + 2r_\pi + 2r_\ell)v + (9 + 9r_\pi + 5r_\ell)v^2]\}\lambda^2, \\
c_2^\nu &= 16\lambda + 2\{12(1 + r_\pi) - r_\ell[4 - (16 - 3v)v]\}\lambda^2, \\
c_3^\nu &= -8\lambda^2;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{-4}^\ell &= -6r_\pi^3 r_\ell(1 - r_\ell)^3(2 - v)^2\lambda^2, \\
c_{-3}^\ell &= 2r_\pi^2(1 - r_\ell)\{4r_\ell(1 - r_\ell)(4 + uv - 2(u + v))\lambda - 4(1 - r_\ell)[r(1 + 7r_\ell) + r_\ell^2(4 + v^2) \\
&\quad - 4r_\ell(r_\pi + r_\ell)v]\lambda^2 + 3r_\ell[r_\pi(1 + r_\ell) + (1 - r_\ell)(3 + 2r_\pi + r_\ell)(2 - v)^2\lambda]\}, \\
c_{-2}^\ell &= -3r_\pi r_\ell(1 - r_\ell)(2 - u)^2 + 4r_\pi\{4[r_\pi - 4r_\ell + r_\ell^2(5 - 3r_\pi - r_\ell)] \\
&\quad + 2r_\ell(u + v)[r_\pi + 4 - r_\ell(5 - r_\pi - r_\ell)] - r_\ell uv[4(1 + r_\pi) - r_\ell(5 + 2r_\pi - r_\ell)]\}\lambda \\
&\quad + 8r_\pi\{3r_\pi(1 + r_\pi) + r_\pi r_\ell(19 + 8r_\pi - 15r_\ell) - 3r_\pi r_\ell^2(r_\pi + r_\ell) + 4r_\ell^2(2 - r_\ell - r_\ell^2)\}\lambda^2 \\
&\quad - 8r_\pi r_\ell v\{4r_\pi(1 - r_\ell)^2 + (4r_\pi + r_\ell(4 - v))[2(1 + r_\pi) - r_\ell(1 + r_\pi + r_\ell)]\}\lambda^2 \\
&\quad - 6r_\pi r_\ell(2 - v)^2\{3(1 + 3r_\pi + r_\pi^2) - r_\ell(1 + 4r_\pi + r_\pi^2) - r_\ell^2(1 + r_\pi + r_\ell)\}\lambda^2, \\
c_{-1}^\ell &= 3\{r_\ell[(1 + r_\pi + r_\ell)(2 - u)^2 + 2(4(r_\pi + r_\ell) - r_\ell u)u] - 4[r_\pi + r_\ell(3r_\pi + 2r_\ell)]\} \\
&\quad + 2\{4[2r_\ell(2 - r_\ell - r_\ell^2) - 4r_\pi(1 + r_\pi) - 3r_\pi r_\ell(3 + r_\pi + r_\ell)] \\
&\quad + 4r_\ell(u + v)[r_\ell(1 + r_\pi + r_\ell) - 2 - 2r_\pi + r_\pi^2] + 2uvr_\ell[2(1 + 4r_\pi + r_\pi^2) \\
&\quad - r_\ell(1 + r_\pi + r_\ell)]\}\lambda - 8\{3r_\pi(1 + 3r_\pi + r_\pi^2) + 4r_\ell^2(1 + r_\ell + r_\ell^2) \\
&\quad + r_\pi r_\ell(26 + 32r_\pi + 15r_\ell + 3(r_\pi^2 + r_\pi r_\ell + r_\ell^2))\}\lambda^2 + r_\ell\{8[r_\ell(1 + 4r_\pi + r_\pi^2 \\
&\quad + r_\ell(1 + r_\pi + r_\ell)(4 - v) + 4r_\pi(3 + 6r_\pi + r_\pi^2)]v + 6(2 - v)^2[1 + 9r_\pi + 9r_\pi^2 + r_\pi^3 \\
&\quad + r_\ell(1 + 4r_\pi + r_\pi^2) + r_\ell^2(1 + r_\pi + r_\ell)]\}\lambda^2, \\
c_0^\ell &= 3[4(1 + r_\pi + 3r_\ell) - r_\ell(8u + (2 - u)^2)] + 2\{8(1 + 4r_\pi + r_\pi^2 + 3r_\ell(1 + r_\pi + r_\ell)) \\
&\quad + 4r_\ell[(1 - 2r_\pi - 2r_\ell)(u + v) - (4 + 4r_\pi + r_\ell)uv]\}\lambda \\
&\quad + 8\{1 + 9r_\pi + 9r_\pi^2 + r_\pi^3 + r_\ell(9 + 17r_\ell + 13r_\ell) + r_\pi r_\ell(40 + 13r_\pi + 21r_\ell)\}\lambda^2 \\
&\quad + r_\ell\{16v[r_\ell(1 + r_\pi + r_\ell)v - (2 + 12r_\pi + 6r_\pi^2 + r_\ell(5 + 11r_\pi + 6r_\ell)) \\
&\quad - 6(2 - v)^2[3(1 + 3r_\pi + r_\pi^2) + r_\ell(4 + 5r_\pi + 3r_\ell)]]\}\lambda^2, \\
c_1^\ell &= -12 + 8[r_\ell(u + uv + v) - 4 - 4r_\pi - 6r_\ell]\lambda - 4[6(1 + 3r_\pi + r_\pi^2) \\
&\quad + 2r_\ell(16 + 17r_\pi + 15r_\ell)]\lambda^2 + 2r_\ell[9(1 + r_\pi + r_\ell)(2 - v)^2 + 4v(8 + 12(r_\pi + r_\ell) - r_\ell v)]\lambda^2, \\
c_2^\ell &= 16\lambda + 2[4(3 + 3r_\pi + 4r_\ell) - r_\ell(3v + 4)v]\lambda, \\
c_3^\ell &= -8\lambda^2;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{-3}^\pi &= -4r_\ell^2(1-r_\pi)^2, \\
c_{-2}^\pi &= 3r_\ell^2(1-r_\pi)u^2 + 2r_\ell[(1-r_\pi)^2 - 2r_\ell(1-2r_\pi)] - 16r_\ell^2(1-r_\pi)^2\lambda \\
c_{-1}^\pi &= 3r_\ell[2 - 2r_\pi - r_\ell(2-u)]u + 2\{1 - 2r_\pi + r_\pi^2 + 2r_\ell(2-r_\pi-r_\ell)\} \\
&\quad + 4r_\ell\{2(1-r_\pi)^2 - 4r_\ell(1-2r_\pi)\} + 3r_\ell(1-r_\pi)(u+v)\}\lambda \\
&\quad - 16r_\ell^2(1-r_\pi)^2\lambda^2, \\
c_0^\pi &= 3r_\ell(u-2)u - 2(2+2r_\pi-r_\ell) + 8[1-2r_\pi+r_\pi^2+2r_\ell(2-r_\pi-r_\ell)]\lambda \\
&\quad - 12r_\ell\{(1-r_\pi-r_\ell)(u+v) + r_\ell uv\}\lambda \\
&\quad + 4r_\ell\{2r_\ell(1+r_\pi) + 2(1-r_\pi)(1-r_\pi-3r_\ell) + 3r_\ell(1-r_\pi)v\}\lambda^2, \\
c_1^\pi &= 2 + 4[3r_\ell(uv - (u+v)) - 4 - 4r_\pi + 2r_\ell]\lambda \\
&\quad + 4\{2[1-2r_\pi+r_\pi^2+2r_\ell(2-r_\pi-r_\ell)] - 3r_\ell[3+r_\pi+r_\ell(1-v)]v\}\lambda^2, \\
c_2^\pi &= 8\lambda - 4[4+4r_\pi-2r_\ell+3r_\ell(1-v)v]\lambda^2, \\
c_3^\pi &= 8\lambda^2.
\end{aligned}$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$r_\pi = \frac{m_\pi^2}{m_K^2}, \quad r_\ell = \frac{m_\ell^2}{m_K^2}, \quad u = 1 - \xi, \quad v = 1 - \xi \frac{\lambda_-}{\lambda_+}, \quad \lambda = \frac{\lambda_+}{2r_\pi}.$$

Вычислим энергетические спектры вторичных частиц $i = \pi, \nu, \ell$.

$$\frac{d\Gamma_i}{dE_i} = \int_0^{2\pi} d\varphi_i \int_{-1}^1 d\cos\vartheta_i |\mathbf{p}_i| E_i \frac{d^3\Gamma_i}{d^3p_i}. \quad (2.12)$$

Используя определения кинематических инвариантов

$$q_i^2 = m_K^2 + m_i^2 - 2E_K E_i + 2|\mathbf{p}_K||\mathbf{p}_i| \cos\vartheta_i,$$

переходим к новым переменным $\cos\vartheta_i \rightarrow q_i^2$. После интегрирования по угловым переменным и перехода к безразмерным величинам $y = q_i/m_K^2$ для энергетических спектров вторичных частиц имеем

$$\begin{aligned}
\frac{d\Gamma_\nu}{dE_\nu} &= \frac{G_F^2 \sin^2 \theta_C m_K^6}{768\pi^3 E_K P_K} f_+^2(0) \sum_{n=-4}^3 c_n^\nu \int_{y_1^\nu}^{y_2^\nu} dy y^n \sqrt{(y-y_+^\nu)(y-y_-^\nu)}, \\
\frac{d\Gamma_\ell}{dE_\ell} &= \frac{G_F^2 \sin^2 \theta_C m_K^6}{768\pi^3 E_K P_K} f_+^2(0) \sum_{n=-4}^3 c_n^\ell \int_{y_1^\ell}^{y_2^\ell} dy y^n (y-r_\pi), \\
\frac{d\Gamma_\pi}{dE_\pi} &= \frac{G_F^2 \sin^2 \theta_C m_K^6}{768\pi^3 E_K P_K} f_+^2(0) \sum_{n=-3}^3 c_n^\pi \int_{y_1^\pi}^{y_2^\pi} dy y^n (y-r_\ell).
\end{aligned}$$

Пределы интегрирования определяются массами и энергиями (импульсами) первичной и вторичной частиц (ниже мы используем обозначения $P_i = |\mathbf{p}_i|$, а звездочкой помечаем величины относящиеся к системе покоя каона):

$$\begin{aligned} y_1^\nu &= \begin{cases} 1 - 2E_\nu (E_K + P_K) / m_K^2, & E_\nu < E_-^\nu, \\ y_+^\nu, & E_-^\nu \leq E_\nu \leq E_+^\nu, \end{cases} \\ y_2^\nu &= 1 - 2E_\nu / (E_K + P_K); \end{aligned}$$

$$y_\pm^\nu = \frac{(m_\pi \pm m_\ell)^2}{m_K^2}, \quad E_\pm^\nu = \frac{(1 - y_+^\nu) (E_K \pm P_K)}{2};$$

$$\begin{aligned} y_1^\ell &= \begin{cases} 1 + r_\ell - 2(E_\ell E_K + P_\ell P_K) / m_K^2, & E_\ell < E_-^\ell, \\ r_\pi, & E_-^\ell \leq E_\ell \leq E_+^\ell, \end{cases} \\ y_2^\ell &= 1 + r_\ell - 2(E_\ell E_K - P_\ell P_K) / m_K^2; \end{aligned}$$

$$y_\pm^\ell = \frac{(m_K \pm m_\ell)^2}{m_K^2}, \quad E_\pm^\ell = \frac{(E_K E_\ell^* \pm P_K P_\ell^*)}{2m_K}, \quad E_\ell^* = \frac{m_K^2 + m_\ell^2 - m_\pi^2}{m_K},$$

$$\begin{aligned} y_1^\pi &= \begin{cases} 1 + r_\pi - 2(E_\pi E_K + P_\pi P_K) / m_K^2, & E_\pi < E_-^\pi, \\ r_\ell, & E_-^\pi \leq E_\pi \leq E_+^\pi, \end{cases} \\ y_2^\pi &= 1 + r_\pi - 2(E_\pi E_K - P_\pi P_K) / m_K^2; \end{aligned}$$

$$y_\pm^\pi = \frac{(m_K \pm m_\pi)^2}{m_K^2}, \quad E_\pm^\pi = \frac{(E_K E_\pi^* \pm P_K P_\pi^*)}{2m_K}, \quad E_\pi^* = \frac{m_K^2 + m_\pi^2 - m_\ell^2}{m_K},$$

Полную ширину распада удобно вычислить в системе покоя каона, где

$$(q_i^*)^2 = m_K^2 + m_i^2 - 2m_K E_i^* (i = \nu, \ell, \pi).$$

Тогда

$$\Gamma_{(i)}^* = \int_0^{2\pi} d\varphi_i \int_{-1}^1 d \cos \vartheta_i \int_{E_{i \min}^2}^{E_{i \max}^2} dE_i^* |\mathbf{p}_i^*| E_i^* \frac{d^3 \Gamma_i^*}{d^3 p_i}.$$

После интегрирования по φ_i и ϑ_i и замены переменных

$$E_i^* = \frac{m_K^2 + m_i^2 - (q_i^*)^2}{2} = \frac{m_K}{2} (1 + r_i - y),$$

получаем три эквивалентные формулы для полной ширины распада:

$$\begin{aligned}\Gamma_{(\nu)}^* &= \frac{G_F^2 \sin^2 \theta_C m_K^5}{768 \pi^3} f_+^2(0) \sum_{n=-4}^3 c_n^\nu \int_1^{y_+^\nu} dy (1-y) y^n \sqrt{(y-y_+^\nu)(y-y_-^\nu)}, \\ \Gamma_{(\ell)}^* &= \frac{G_F^2 \sin^2 \theta_C m_K^5}{768 \pi^3} f_+^2(0) \sum_{n=-4}^3 c_n^\ell \int_{r_\pi}^{y_-^\ell} dy (r_\pi - y) y^n \sqrt{(y-y_+^\ell)(y-y_-^\ell)}, \\ \Gamma_{(\pi)}^* &= \frac{G_F^2 \sin^2 \theta_C m_K^5}{768 \pi^3} f_+^2(0) \sum_{n=-3}^3 c_n^\pi \int_{r_\ell}^{y_-^\pi} dy (r_\ell - y) y^n \sqrt{(y-y_+^\pi)(y-y_-^\pi)}.\end{aligned}$$

Для проверки громоздких формул, приведенных выше, расчет Γ^* был сделан с использованием всех трех формул. Для произвольной системы имеем, разумеется, $\Gamma = (m_K/E_K) \Gamma^*$.

2.2.1 Спектральные функции

Спектральные функции вторичных частиц от распадов каонов ($F_i^{K_{\ell 3}} \equiv F_i$) могут быть представлены в следующей форме:

$$\begin{aligned}F_\nu(E_\nu, E_K) &= \frac{1}{Z_\nu} \sum_{n=-4}^3 c_n^\nu J_n(y_1^\nu, y_2^\nu), \\ F_\ell(E_\ell, E_K) &= \frac{1}{Z_\ell} \sum_{n=-4}^3 c_n^\ell I_n^\ell(y_1^\ell, y_2^\ell), \\ F_\pi(E_\pi, E_K) &= \frac{1}{Z_\pi} \sum_{n=-3}^3 c_n^\pi I_n^\pi(y_1^\pi, y_2^\pi),\end{aligned}\tag{2.13}$$

$$\begin{aligned}Z_\nu &= \sum_{n=-4}^3 c_n^\nu [J_{n+1}(y_+^\nu, 1) - J_n(y_+^\nu, 1)], \\ Z_\ell &= \sum_{n=-4}^3 c_n^\ell [r_\pi J_n(r_\pi, y_-^\ell) - J_{n+1}(r_\pi, y_-^\ell)], \\ Z_\pi &= \sum_{n=-3}^3 c_n^\pi [r_\ell J_n(r_\ell, y_-^\pi) - J_{n+1}(r_\ell, y_-^\pi)].\end{aligned}$$

Здесь введены обозначения:

$$J_n(y_1, y_2) = \int_{y_1}^{y_2} dy y^n \sqrt{(y-y_+)(y-y_-)},\tag{2.14}$$

$$I_n^\ell(y_1, y_2) = \int_{y_1}^{y_2} dy y^n (y - r_\pi), \quad I_n^\pi(y_1, y_2) = \int_{y_1}^{y_2} dy y^n (y - r_\ell).\tag{2.15}$$

Спектральные функции для заряженных лептонов и пионов можно переписать в более явном виде

$$\begin{aligned}
Z_\ell F_\ell(E_\ell, E_K) &= \left(\frac{1}{y_1^\ell} - \frac{1}{y_2^\ell} \right) \left[c_{-3}^\ell - r_\pi c_{-2}^\ell - \frac{r_\pi c_{-3}^\ell - c_{-4}^\ell}{2} \left(\frac{1}{y_1^\ell} + \frac{1}{y_2^\ell} \right) \right] \\
&\quad - r_\pi c_{-4}^\ell \left[\frac{1}{(y_1^\ell)^3} - \frac{1}{(y_2^\ell)^3} \right] + c_{-1}^\ell (y_2^\ell - y_1^\ell) + (c_{-2}^\ell - r_\pi c_{-1}^\ell) \ln \frac{y_2^\ell}{y_1^\ell} \\
&\quad + \sum_{n=0}^3 c_n^\ell \left[\frac{(y_2^\ell)^{n+2} - (y_1^\ell)^{n+2}}{n+2} - r_\pi \frac{(y_2^\ell)^{n+1} - (y_1^\ell)^{n+1}}{n+1} \right], \\
Z_\pi F_\pi(E_\pi, E_K) &= \left(\frac{1}{y_1^\pi} - \frac{1}{y_2^\pi} \right) \left[c_{-3}^\pi - r_\ell c_{-2}^\pi - \frac{r_\ell c_{-3}^\pi}{2} \left(\frac{1}{y_1^\pi} + \frac{1}{y_2^\pi} \right) \right] \\
&\quad + c_{-1}^\pi (y_2^\pi - y_1^\pi) + (c_{-2}^\pi - r_\ell c_{-1}^\pi) \ln \frac{y_2^\pi}{y_1^\pi} \\
&\quad + \sum_{n=0}^3 c_n^\pi \left[\frac{(y_2^\pi)^{n+2} - (y_1^\pi)^{n+2}}{n+2} - r_\ell \frac{(y_2^\pi)^{n+1} - (y_1^\pi)^{n+1}}{n+1} \right].
\end{aligned}$$

Аналогичные формулы для нейтрино в общем случае оказываются значительно более сложными. Однако, для K_{e3} распада их можно существенно упростить, если пренебречь массой электрона. Таким образом, для электронного нейтрино получаем

$$\begin{aligned}
Z_{\nu_e} F_{\nu_e}(E_{\nu_e}, E_K) &= \left(\frac{1}{y_1^\nu} - \frac{1}{y_2^\nu} \right) \left[c_{-3}^\nu - r_\pi c_{-2}^\nu - \frac{r_\pi c_{-3}^\nu}{2} \left(\frac{1}{y_1^\nu} + \frac{1}{y_2^\nu} \right) \right] \\
&\quad + c_{-1}^\nu (y_2^\nu - y_1^\nu) + (c_{-2}^\nu - r_\pi c_{-1}^\nu) \ln \frac{y_2^\nu}{y_1^\nu} \\
&\quad + \sum_{n=0}^3 c_n^\nu \left[\frac{(y_2^\nu)^{n+2} - (y_1^\nu)^{n+2}}{n+2} - r_\pi \frac{(y_2^\nu)^{n+1} - (y_1^\nu)^{n+1}}{n+1} \right].
\end{aligned}$$

При расчете функции $Z_{\nu_\mu} F_{\nu_\mu}(E_{\nu_\mu}, E_K)$ необходимо использовать точные выражения (2.13) и (2.14).

Для дальнейшего анализа удобно ввести следующие обозначения:

$$f_i = y_i - \frac{y_+ + y_-}{2}, \quad s_i = \sqrt{(y_i - y_+)(y_i - y_-)},$$

$$g_i = \frac{y_+ + s_i \sqrt{y_+ y_-} + y_-}{y_i} - \frac{y_+ + y_-}{2} \quad (i = 1, 2).$$

Тогда интегралы $J_n(y_1, y_2)$ с $n \neq 0$ и -1 могут быть вычислены по следующим рекур-

рентным формулам:

$$\begin{aligned}
(n+2)J_n &= y_2^{n-1}s_2^3 - y_1^{n-1}s_1^3 + \left(n + \frac{1}{2}\right)(y_+ + y_-)J_{n-1} \\
&\quad - (n-1)y_+y_-J_{n-2} \quad \text{для } n > 0, \\
(n+1)y_+y_-J_n &= y_2^{n+1}s_2^3 - y_1^{n+1}s_1^3 + \left(n + \frac{5}{2}\right)(y_+ + y_-)J_{n+1} \\
&\quad - (n+4)J_{n+2} \quad \text{для } n < -1,
\end{aligned}$$

а для J_0 и J_{-1} получаем

$$\begin{aligned}
J_0 &= \frac{f_2s_2 - f_1s_1}{2} - \frac{(y_+ - y_-)^2}{8} \ln \left| \frac{f_2 + s_2}{f_1 + s_1} \right|, \\
J_{-1} &= s_2 - s_1 - \frac{y_+ + y_-}{2} \ln \left| \frac{f_2 + s_2}{f_1 + s_1} \right| - \sqrt{y_+y_-} \ln \left| \frac{g_2}{g_1} \right|.
\end{aligned}$$

Полные ширины $K_{\ell 3}$ распадов в системе покоя каона можно записать в виде

$$\Gamma^*(K_{\ell 3}) = \frac{G_F^2 \sin^2 \theta_C m_K^5}{768\pi^3} f_+^2(0) Z(K_{\ell 3}).$$

Здесь $Z(K_{\ell 3})$ обозначает соответствующий нормировочный фактор, который может быть вычислен по любой из вышеприведенных формул для Z_ν , Z_ℓ или Z_π .

Полную ширину для K_{e3} распада согласно [70] можно записать следующим образом:

$$\Gamma^*(K_{e3}) = \frac{G_F^2 \sin^2 \theta_C m_K^5}{768\pi^3} f_+^2(0) (a_0 + a_1\lambda_+ + a_2\lambda_+^2),$$

где a_n - константы, зависящие от параметров формфакторов. Для λ_+ и ξ из [48] (см. ниже табл. 2.1) численные значения a_n таковы:

$$\begin{aligned}
a_0 &\simeq 0.576, \quad a_1 \simeq 2.140, \quad a_2 \simeq 1.580 \quad \text{для } K_{e3}^\pm, \\
a_0 &\simeq 0.560, \quad a_1 \simeq 1.947, \quad a_2 \simeq 1.345 \quad \text{для } K_{e3}^0.
\end{aligned}$$

Выражения для нормированных дифференциальных ширин распадов в системе покоя каона имеют вид

$$\frac{1}{\Gamma^*} \frac{d\Gamma^*(E_i^*)}{dE_i^*} = 4 \frac{P_i}{m_K^2} F_i^*(x_i),$$

где $x_i = 2E_i^*/m_K$ ($i = \nu, \ell, \pi$) и

$$\begin{aligned}
F_\nu^*(x_\nu) &= \frac{1}{Z_\nu} \sqrt{(1 - x_\nu - y_+^\nu)(1 - x_\nu - y_-^\nu)} \sum_{n=-4}^3 c_n^\nu (1 - x_\nu)^n, \\
F_\ell^*(x_\ell) &= \frac{1}{Z_\ell} (1 - r_\pi + r_\ell - x_\ell) \sum_{n=-4}^3 c_n^\ell (1 + r_\ell - x_\ell)^n, \\
F_\pi^*(x_\pi) &= \frac{1}{Z_\pi} (1 + r_\pi - r_\ell - x_\pi) \sum_{n=-3}^3 c_n^\pi (1 + r_\pi - x_\pi)^n.
\end{aligned}$$

Из кинематики процессов следует, что безразмерные величины x_i изменяются в следующих пределах:

$$0 \leq x_\nu \leq 1 - r_\pi - r_\ell - \sqrt{rr_\ell}, \quad 2\sqrt{r_\ell} \leq x_\ell \leq 1 - r_\pi + r_\ell, \quad 2\sqrt{r_\pi} \leq x_\pi \leq 1 + r_\pi - r_\ell.$$

2.2.2 Анализ данных и результаты расчета

Для расчетов использовались параметры формфакторов λ_+ и ξ из [48] (табл. 2.1). Современные экспериментальные данные по λ_- очень скудны. Однако, они не противоречат приближению $\lambda_- = 0$, которое мы и будем использовать ниже.

Таблица 2.1: Параметры формфакторов для $K_{\ell 3}$ распадов.

	K_{e3}^0	$K_{\mu 3}^0$	$K_{e3}^\pm$	$K_{\mu 3}^\pm$
λ_+	0.0300 ± 0.0016	0.034 ± 0.005	0.0286 ± 0.0022	0.032 ± 0.008
ξ	-0.11 ± 0.09		-0.33 ± 0.15	

В табл. 2.2 приведены ширины Γ_i^* , рассчитанные с учетом q^2 -зависимости формфакторов и без нее ($f_\pm = f_\pm(0)$), вместе с наилучшим фитом экспериментальных данных из [48]. Из таблицы видно, что q^2 зависимость формфакторов приводит к заметному росту ширин: примерно на 11% для K_{e3} - и на 20% для $K_{\mu 3}$ -распадов. Ширины, вычисленные с учетом q^2 -зависимости формфакторов очень хорошо согласуются с экспериментальными фитами для $K_{\ell 3}^0$ -распадов и хуже для $K_{\ell 3}^\pm$. Последнее обстоятельство, скорее всего, связано с большим разбросом в данных разных экспериментов по измерению ширины и формфакторов $K_{\ell 3}^\pm$ распадов, который значительно превышает приведенную в [48] ошибку наилучшего фита. Например, величины $\Gamma_i^*(K_{\mu 3}^\pm)$ и $\Gamma_i^*(K_{e3}^\pm)$, полученные из

Таблица 2.2: Ширины $K_{\ell 3}$ распадов.

Мода	Расчет с $f_\pm = f_\pm(0)$ [10^6 c^{-1}]	Расчет с учетом $f_\pm = f_\pm(q^2)$ [10^6 c^{-1}]	Фит экспериментальных данных [48] [10^6 c^{-1}]
K_{e3}^0	6.76	7.49	7.50 ± 0.08
$K_{\mu 3}^0$	4.38	5.25	5.25 ± 0.07
$K_{e3}^\pm$	3.34	3.70	3.89 ± 0.05
$K_{\mu 3}^\pm$	2.07	2.49	2.57 ± 0.06

отношений $\Gamma_i^*(K_{\ell 3}^\pm)$ к полной ширине, меняются от $4.52 \times 10^6 \text{ с}^{-1}$ до $3.07 \times 10^6 \text{ с}^{-1}$ и от $3.55 \times 10^6 \text{ с}^{-1}$ до $4.44 \times 10^6 \text{ с}^{-1}$, соответственно, для разных экспериментов, приведенных в [48]. Для ширины $\Gamma_i^*(K_{\mu 3}^0)$ эксперимент дает значение $(4.54_{-1.08}^{+1.24}) \times 10^6 \text{ с}^{-1}$, а $\Gamma_i^*(K_{e 3}^0)$ меняется от $(7.52_{-0.72}^{+0.85}) \times 10^6 \text{ с}^{-1}$ до $(7.81 \pm 0.56) \times 10^6 \text{ с}^{-1}$.

На рис. 2.1 показан разброс в измерениях параметров формфакторов λ_+ и ξ (штриховые линии) и область тех значений параметров, которые дают наилучшее согласие с фитом [48] (табл. 2.2), также приведены области значений параметров из табл. 2.1. Для прояснения ситуации желательны новые, более точные измерения $K_{\ell 3}$ -формфакторов. В то же время, имеющейся информации вполне достаточно для наших целей (расчета спектров АМ и АН), поскольку, как будет показано ниже, учет $K_{\ell 3}$ -формфакторов приводит к небольшим поправкам в потоках АМ и АН.

Численные значения коэффициентов c_n , рассчитанные с учетом и без учета формфакторов представлены в табл. 2.3-2.8.

Результаты расчета спектров нейтрино, электронов, мюонов, заряженных и нейтральных пионов представлены на рисунках 2.2, 2.3. На рис. 2.2 показаны дифференциальные спектры для $K_{\ell 3}^0$ распадов (в зависимости от безразмерного параметра $x_i = 2P_i/(E_K + P_K)$) для нескольких значений импульса каона при $f_\pm = f_\pm(0)$ и с учетом q^2 -зависимости формфакторов. Спектры вторичных частиц для $K_{\ell 3}^\pm$ распадов мы не приводим, поскольку они лишь очень незначительно отличаются от спектров для $K_{\ell 3}^0$ (причина отличия заключается в небольших различиях масс и параметров формфакторов). При $P_K \gtrsim 10 \text{ ГэВ}$ и не слишком малых значениях переменной x_i спектральные функции практически перестают зависеть от P_K .

Как видно из рис. 2.3 учет q^2 -зависимости формфакторов приводит к увеличению абсолютных дифференциальных ширин для всех частиц, но по разному сказываются на нормированных ширинах.

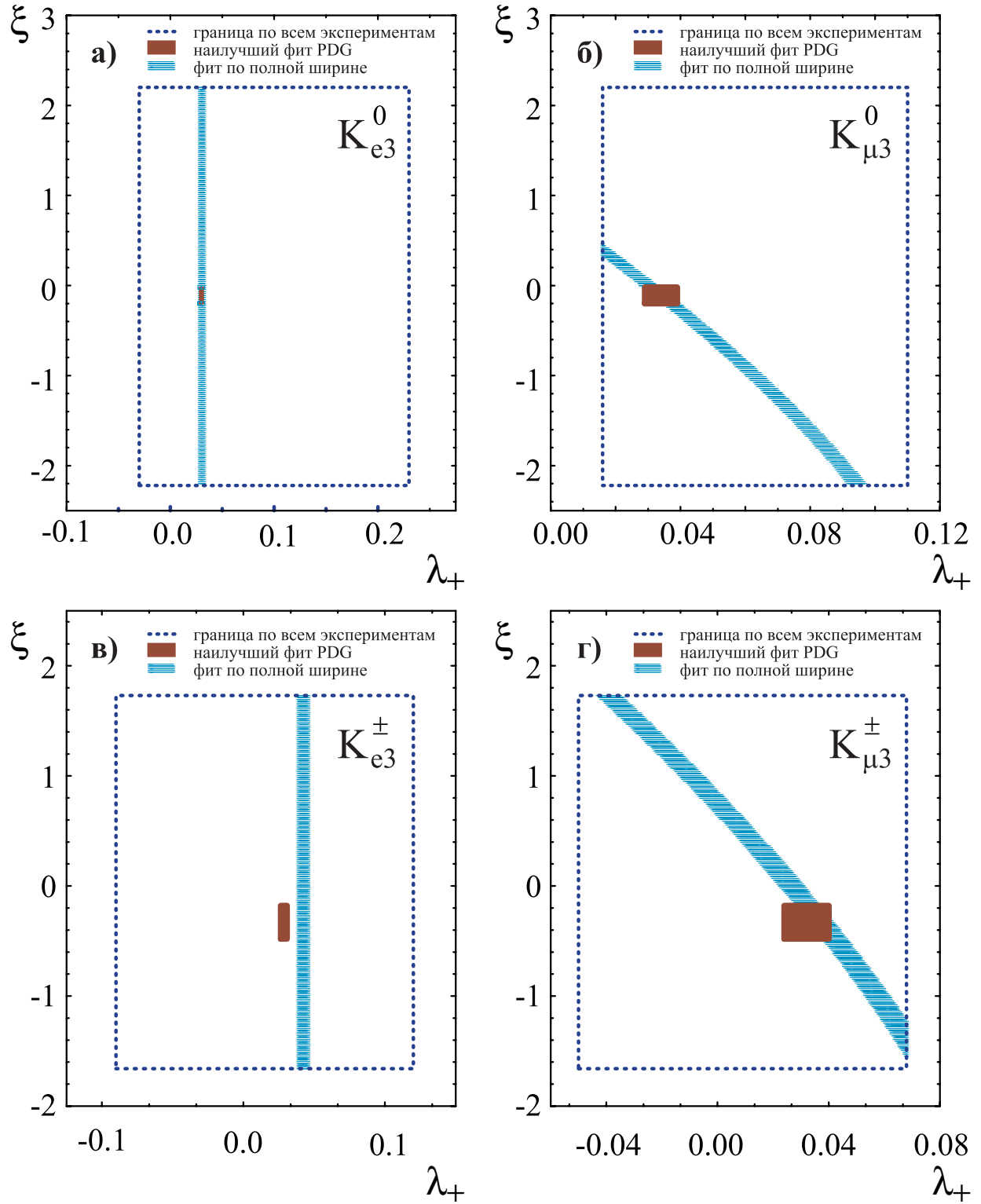


Рис. 2.1: Разброс в измерениях параметров формфакторов λ_+ и ξ .

Таблица 2.3: Коэффициенты c_n^ν для $K_{\ell 3}^0$ распадов ($\lambda_- = 0$, $\xi = -0.11$).

c_n^ν	$K_L^0 \rightarrow \pi^\pm e^\mp \bar{\nu}_e (\nu_e)$		$K_L^0 \rightarrow \pi^\pm \mu^\mp \bar{\nu}_\mu (\nu_\mu)$	
	$\lambda_+ = 0$	$\lambda_+ = 0.030$	$\lambda_+ = 0$	$\lambda_+ = 0.034$
c_{-4}^ν	0	-2.900×10^{-17}	0	-4.785×10^{-7}
c_{-3}^ν	0	-1.416×10^{-4}	0	9.066×10^{-5}
c_{-2}^ν	-7.798×10^{-14}	2.470×10^{-2}	-5.494×10^{-3}	1.040×10^{-2}
c_{-1}^ν	-9.438×10^{-1}	-1.547×10^0	-1.424×10^0	-1.906×10^0
c_0^ν	1.294×10^1	1.749×10^1	1.343×10^1	1.872×10^1
c_1^ν	-1.200×10^1	-1.967×10^1	-1.200×10^1	-2.116×10^1
c_2^ν	0	3.993×10^0	0	4.706×10^0
c_3^ν	0	-2.910×10^{-1}	0	-3.738×10^{-1}

Таблица 2.4: Коэффициенты c_n^ν для $K_{\ell 3}^\pm$ распадов ($\lambda_- = 0$, $\xi = -0.33$).

c_n^ν	$K^\pm \rightarrow \pi^0 e^\pm \nu_e (\bar{\nu}_e)$		$K^\pm \rightarrow \pi^0 \mu^\pm \nu_\mu (\bar{\nu}_\mu)$	
	$\lambda_+ = 0$	$\lambda_+ = 0.0286$	$\lambda_+ = 0$	$\lambda_+ = 0.0320$
c_{-4}^ν	0	-2.546×10^{-17}	0	-3.056×10^{-7}
c_{-3}^ν	0	-1.223×10^{-4}	0	8.952×10^{-5}
c_{-2}^ν	-1.101×10^{-13}	2.238×10^{-2}	-7.038×10^{-3}	5.330×10^{-3}
c_{-1}^ν	-8.970×10^{-1}	-1.470×10^0	-1.559×10^0	-2.033×10^0
c_0^ν	1.290×10^1	1.739×10^1	1.357×10^1	1.881×10^1
c_1^ν	-1.200×10^1	-1.966×10^1	-1.200×10^1	-2.105×10^1
c_2^ν	0	4.005×10^0	0	4.643×10^0
c_3^ν	0	-2.928×10^{-1}	0	-3.664×10^{-1}

Таблица 2.5: Коэффициенты c_n^ℓ для $K_{\ell 3}^0$ распадов ($\lambda_- = 0$, $\xi = -0.11$).

c_n^ℓ	$K_L^0 \rightarrow \pi^\pm e^\mp \bar{\nu}_e (\nu_e)$		$K_L^0 \rightarrow \pi^\pm \mu^\mp \bar{\nu}_\mu (\nu_\mu)$	
	$\lambda_+ = 0$	$\lambda_+ = 0.030$	$\lambda_+ = 0$	$\lambda_+ = 0.034$
c_{-4}^ℓ	0	-1.115×10^{-10}	0	-5.353×10^{-6}
c_{-3}^ℓ	0	-1.416×10^{-4}	0	4.375×10^{-4}
c_{-2}^ℓ	-2.007×10^{-7}	2.470×10^{-2}	-8.226×10^{-3}	7.284×10^{-3}
c_{-1}^ℓ	-9.438×10^{-1}	-1.547×10^0	-8.646×10^{-1}	-1.519×10^0
c_0^ℓ	1.294×10^1	1.749×10^1	1.327×10^1	1.902×10^1
c_1^ℓ	-1.200×10^1	-1.967×10^1	-1.200×10^1	-2.117×10^1
c_2^ℓ	0	3.993×10^0	0	4.706×10^0
c_3^ℓ	0	-2.910×10^{-1}	0	-3.738×10^{-1}

Таблица 2.6: Коэффициенты c_n^ℓ для $K_{\ell 3}^\pm$ распадов ($\lambda_- = 0$, $\xi = -0.33$).

c_n^ℓ	$K^\pm \rightarrow \pi^0 e^\pm \bar{\nu}_e (\bar{\nu}_e)$		$K^\pm \rightarrow \pi^0 \mu^\pm \bar{\nu}_\mu (\bar{\nu}_\mu)$	
	$\lambda_+ = 0$	$\lambda_+ = 0.0286$	$\lambda_+ = 0$	$\lambda_+ = 0.0320$
c_{-4}^ℓ	0	-9.788×10^{-11}	0	-4.569×10^{-6}
c_{-3}^ℓ	0	-1.223×10^{-4}	0	3.149×10^{-4}
c_{-2}^ℓ	-1.074×10^{-7}	2.238×10^{-2}	-4.400×10^{-3}	1.105×10^{-2}
c_{-1}^ℓ	-8.970×10^{-1}	-1.470×10^0	-8.475×10^{-1}	-1.470×10^0
c_0^ℓ	1.290×10^1	1.739×10^1	1.300×10^1	1.862×10^1
c_1^ℓ	-1.200×10^1	-1.966×10^1	-1.200×10^1	-2.100×10^1
c_2^ℓ	0	4.005×10^0	0	4.644×10^0
c_3^ℓ	0	-2.928×10^{-1}	0	-3.665×10^{-1}

Таблица 2.7: Коэффициенты c_n^π для $K_{\ell 3}^0$ распадов ($\lambda_- = 0$, $\xi = -0.11$).

c_n^π	$K_L^0 \rightarrow \pi^\pm e^\mp \bar{\nu}_e (\nu_e)$		$K_L^0 \rightarrow \pi^\pm \mu^\mp \bar{\nu}_\mu (\nu_\mu)$	
	$\lambda_+ = 0$	$\lambda_+ = 0.030$	$\lambda_+ = 0$	$\lambda_+ = 0.034$
c_{-3}^π	-3.745×10^{-12}	-3.745×10^{-12}	-6.896×10^{-3}	-6.896×10^{-3}
c_{-2}^π	1.783×10^{-6}	1.783×10^{-6}	8.202×10^{-2}	7.605×10^{-2}
c_{-1}^π	1.698×10^0	1.698×10^0	1.768×10^0	1.837×10^0
c_0^π	-4.315×10^0	-3.019×10^0	-4.358×10^0	-2.805×10^0
c_1^π	2.000×10^0	-1.044×10^0	2.000×10^0	-1.463×10^0
c_2^π	0	8.980×10^{-1}	0	9.397×10^{-1}
c_3^π	0	2.910×10^{-1}	0	3.738×10^{-1}

Таблица 2.8: Коэффициенты c_n^π для $K_{\ell 3}^\pm$ распадов ($\lambda_- = 0$, $\xi = -0.33$).

c_n^π	$K^\pm \rightarrow \pi^0 e^\pm \nu_e (\bar{\nu}_e)$		$K^\pm \rightarrow \pi^0 \mu^\pm \nu_\mu (\bar{\nu}_\mu)$	
	$\lambda_+ = 0$	$\lambda_+ = 0.0286$	$\lambda_+ = 0$	$\lambda_+ = 0.0320$
c_{-3}^π	-3.900×10^{-12}	-3.900×10^{-12}	-7.183×10^{-3}	-7.183×10^{-3}
c_{-2}^π	1.827×10^{-6}	1.827×10^{-6}	8.677×10^{-2}	8.062×10^{-2}
c_{-1}^π	1.712×10^0	1.712×10^0	1.724×10^0	1.795×10^0
c_0^π	-4.299×10^0	-2.989×10^0	-4.330×10^0	-2.803×10^0
c_1^π	2.000×10^0	-1.039×10^0	2.000×10^0	-1.417×10^0
c_2^π	0	9.011×10^{-1}	0	9.413×10^{-1}
c_3^π	0	2.928×10^{-1}	0	3.665×10^{-1}

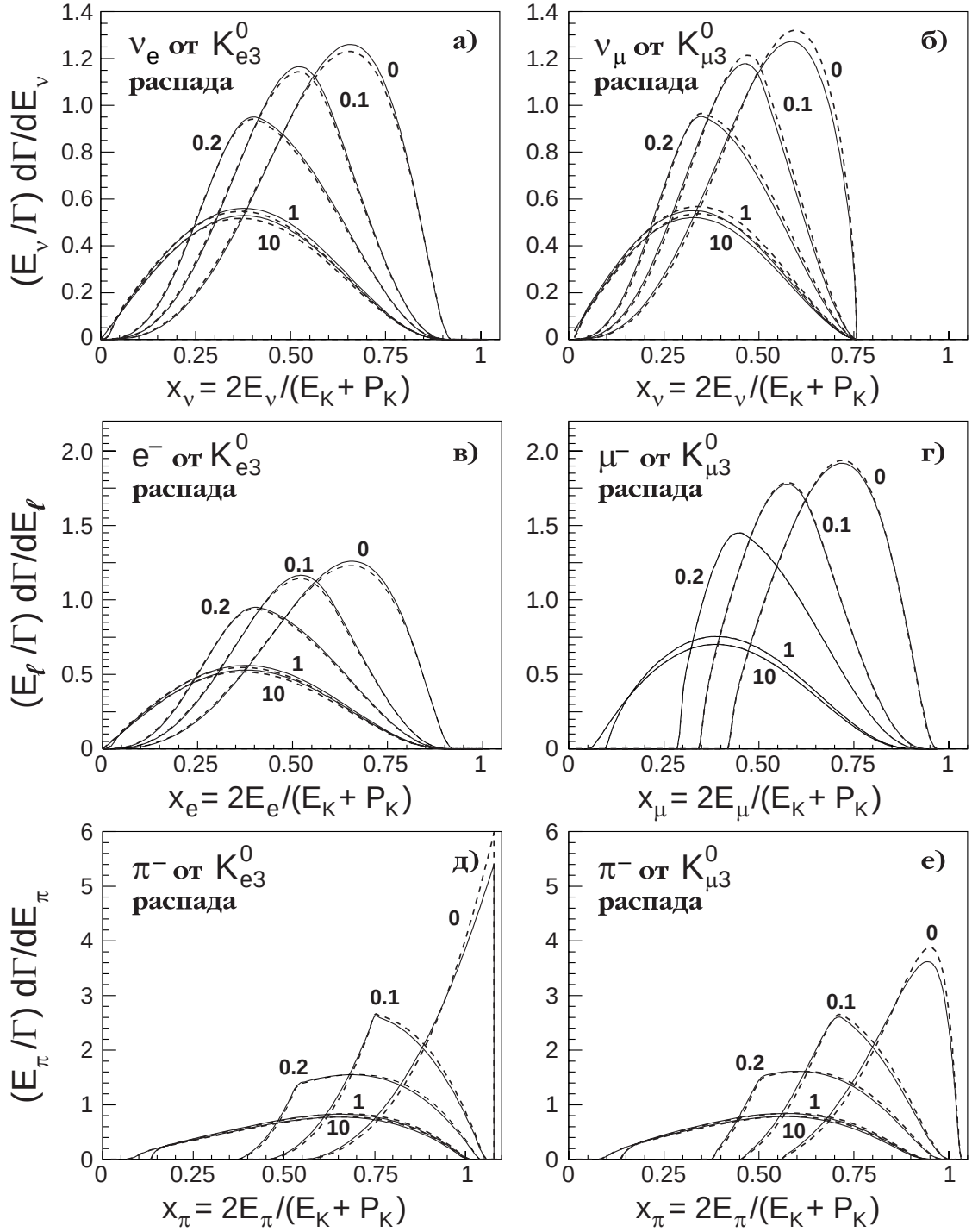


Рис. 2.2: Нормированные спектры вторичных частиц от $K_{\ell 3}^0$ распадов с учетом (сплошные кривые) и без учета (штриховые кривые) формфакторов. Чила у кривых обозначают импульс каона в ГэВ/с.

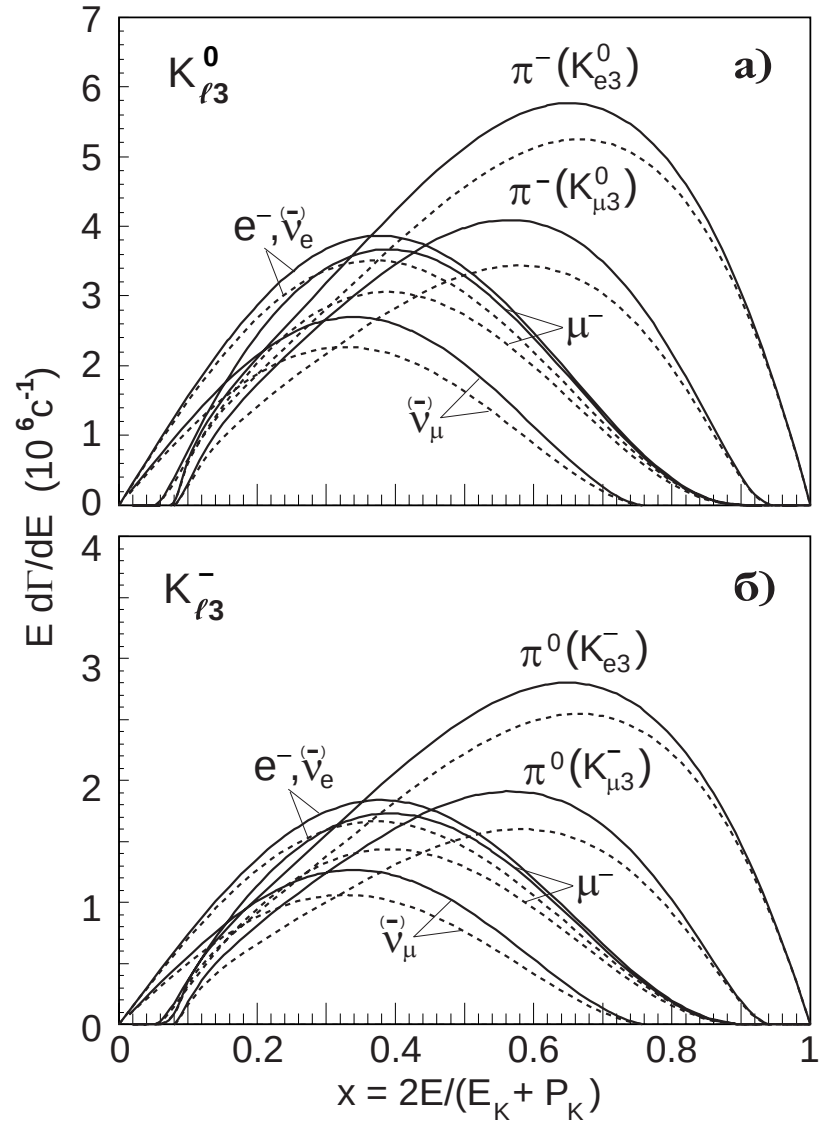


Рис. 2.3: Абсолютные спектры вторичных частиц от $K_{\ell 3}$ распадов при $P_K > 10$ ГэВ/с с учетом (сплошные кривые) и без учета (штриховые кривые) формфакторов.

2.3 Спектральные функции для распадов очарованных частиц

Спектральные функции для распадов очарованных частиц были получены в работе [49]. Для вычисления спектров лептонов (мюонов и нейтрино) от распадов чарма использовался феноменологический подход. При выводе формул авторы пренебрегали массой $\mu(e)$ и использовали ультрарелятивистское приближение.

Матричный элемент эксклюзивного распада $D \rightarrow \ell \nu_\ell X$ может быть записан в следующем виде

$$M = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \cos \theta_C |f_+(q^2)| (p_D + p_X) \bar{\ell} \gamma_\mu (1 + \gamma_5) \nu_\ell. \quad (2.16)$$

Здесь G_F - константа Ферми, θ_C - угол Кабиббо, p_D и p_X - 4-импульсы D -мезона и X , соответственно, $q^2 = (p_D - p_X)^2$ - квадрат 4-импульса, передаваемого лептонной паре. В (2.16) предполагается, что X - псевдоскалярный мезон и не учитывается формфактор $f_-(q^2)$, входящий в амплитуду с множителем m_ℓ . Будем использовать приближение $f_+ = \text{const}$, заменяя $f_+(q^2)$ на $\bar{f}_+ = f(\bar{q}^2)$ и выбирая $\bar{q}^2 = 2(m_D^2/3 - s_X^{\text{eff}})$ (это отвечает предположению, что "мезону" X передается в среднем треть энергии D в лабораторной системе).

Совершенно аналогично тому, как это было сделано для случая $K_{\ell 3}$ - распадов (раздел 2.2), из (2.16) можно получить следующее выражение для энергетического спектра лептона (ℓ или ν_ℓ) в лабораторной системе:

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma_{\ell,\nu}^D}{dE_{\ell,\nu}} = & \frac{G_F^2 \cos^2 \theta_C m_D^6}{(4\pi)^3 E_D^2} |\bar{f}_+|^2 \left[\frac{1}{6} (1 - r_D^2) (1 - 5r_D^2 - 2r_D^4) \right. \\ & \left. + r_D^4 x - \frac{1}{2} (1 - 2r_D^2) x^2 + \frac{1}{3} x^3 + r_D^4 \ln \left(\frac{1-x}{r_D^2} \right) \right], \end{aligned} \quad (2.17)$$

где $x = E_{\ell,\nu}/E_D$, $r_D = s_X^{\text{eff}}/m_D^2$, а s_X^{eff} - эффективный квадрат инвариантной массы X .

Интегрируя (2.17) по энергии $E_{\ell,\nu}$ в пределах от

$$E_{\min} = \frac{(m_D^2 - s_X^{\text{eff}})(E_D - P_D)}{2} \simeq \frac{(m_D^2 - s_X^{\text{eff}})}{2E_D}$$

до

$$E_{\max} = \frac{(m_D^2 - m_X^2)(E_D + P_D)}{2} \simeq (1 - r_D^2)E_D, \quad (P_D = |\mathbf{p}_D|),$$

находим полную ширину распада $D \rightarrow \ell \nu_\ell X$ в системе центра масс

$$\Gamma_{(\ell,\nu)}^{(D)*} = \frac{G_F^2 \cos^2 \theta_C m_D^5}{48\pi^3} |\bar{f}_+|^2 \left[\frac{(1 - 8r_D^2 + 8r_D^6 - r_D^8)}{12} - r_D^4 \ln r_D^2 \right].$$

Для того чтобы перейти к инклюзивному распаду $D \rightarrow \ell \nu_\ell + all$, будем считать $\sqrt{s_X^{\text{eff}}}$ свободным параметром, который подберем таким образом, чтобы согласовать величину $\Gamma_{(\ell, \nu)}^*$ с экспериментальными данными о полной ширине инклюзивного полуплептоного распада. Поскольку $\bar{f}_+$ слабо зависит от $\sqrt{s_X^{\text{eff}}}$, явный вид формфактора как функции q^2 не очень существенен. Примем (согласно работе [71]), что

$$f_+(q^2) = \left(1 - \frac{q^2}{m_{F^*}^2}\right)^{-1},$$

где $m_{F^*} = 2.2$ ГэВ. При этом оказывается, что наилучшее согласие с экспериментом достигается, если использовать

$$\sqrt{s_X^{\text{eff}}} = \begin{cases} 0.63 \text{ ГэВ} & \text{for } D^+ \text{ and } D^-, \\ 0.67 \text{ ГэВ} & \text{for } D^0 \text{ and } \bar{D}^0. \end{cases}$$

Тогда

$$r_{D^\pm} \approx 0.337 \quad \text{и} \quad r_{D^0, \bar{D}^0} \approx 0.359.$$

Таким образом, спектральные функции для вторичных лептонов от полуплептонных распадов D -мезонов могут быть представлены в виде:

$$F_{\ell, \nu}^D(E_{\ell, \nu}, E_D) = \frac{1}{Z_{\ell, \nu}^D} \left[\frac{1}{6} (1 - r_D^2) (1 - 5r_D^2 - 2r_D^4) + r_D^4 x - \frac{1}{2} (1 - 2r_D^2) x^2 + \frac{1}{3} x^3 + r_D^4 \ln \left(\frac{1 - x}{r_D^2} \right) \right],$$

$$Z_{\ell, \nu}^D = \frac{1}{12} (1 - r_D^4) (1 - 8r_D^2 + r_D^4) - r_D^4 \ln r_D^2.$$

Перейдем к расчету распада Λ_c -гиперона. Рассмотрим эксклюзивный процесс $\Lambda_c \rightarrow \ell \nu_\ell X$, где X - нейтральный барион, принадлежащий $SU(3)$ - октету. В предположении сохранения векторного тока и точной $SU(4)$ - симметрии, матричный элемент такого процесса выражается через три электромагнитных формфактора $f_j(q^2)$:

$$M = \frac{\sqrt{3}}{2} G_F A(\theta_C) \bar{u}(p_X) \left[f_1(q^2) \gamma_\mu + i f_2(q^2) \sigma_{\mu\nu} q^\nu / m + f_3(q^2) \gamma_\mu \gamma_5 \right] \bar{u}(p_\Lambda) \bar{\ell} \gamma_\mu (1 + \gamma_5) \nu_\ell.$$

Здесь $A(\theta_C) = \frac{\sqrt{2}}{3} \cos \theta_C$, $A(\theta_C) = -\sin \theta_C$; p_Λ и p_X - 4-импульсы Λ_c и X ; $m = m_\Lambda + m_X$. Остальные обозначения те же, что и выше.

Снова отраничимся приближением $f_j(q^2) = \bar{f}_j = f_j(\bar{q}^2)$, $\bar{q}^2 = 2 (m_\Lambda^2/3 - s_X^{\text{eff}})$.

Опуская громоздкие выкладки, приведем окончательное выражение для энергетического спектра лептонов (ℓ и ν в лабораторной системе:

$$\frac{d\Gamma_{\ell,\nu}^{\Lambda}}{dE_{\ell,\nu}} = \frac{G_F^2 A^2(c) m_{\Lambda}^6}{4(4\pi)^3 E_{\Lambda}^2} \sum_{1 \leq i \leq j \leq 3} f_i f_j \mathfrak{a}_{ij}(x),$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_{11}(x) &= \frac{11}{6} - 3r_{\Lambda} - \frac{21}{2}r_{\Lambda}^2 - 12r_{\Lambda}^3 + \frac{9}{2}r_{\Lambda}^4 + 9r_{\Lambda}^5 + \frac{7}{6}r_{\Lambda}^6 + 6r_{\Lambda}^3(2 + r_{\Lambda})x \\ &\quad - \frac{3}{2}(3 - 2r_{\Lambda} - 5r_{\Lambda}^2)x^2 + \frac{8}{3}x^3 + \frac{r_{\Lambda}^4(3 + 6r_{\Lambda} + r_{\Lambda}^2)}{1 - x} - \frac{r_{\Lambda}^6}{(1 - x)^2} \\ &\quad + r_{\Lambda}^3(12 + 9r_{\Lambda} + 6r_{\Lambda}^2 - r_{\Lambda}^3) \ln\left(\frac{1 - x}{r_{\Lambda}^2}\right), \\ \mathfrak{a}_{12}(x) &= \frac{5}{3} - 6r_{\Lambda} - 9r_{\Lambda}^2 - 24r_{\Lambda}^3 + 3r_{\Lambda}^4 + 18r_{\Lambda}^5 - \frac{5}{3}r_{\Lambda}^6 + 24r_{\Lambda}^3x - 3(1 - 2r_{\Lambda} - r_{\Lambda}^2)x^2 \\ &\quad + \frac{4}{3}x^3 + \frac{2r_{\Lambda}^4(3 + 6r_{\Lambda} + r_{\Lambda}^2)}{1 - x} - \frac{2r_{\Lambda}^6}{(1 - x)^2} \\ &\quad + 2r_{\Lambda}^3(12 + 3r_{\Lambda} + 6r_{\Lambda}^2 - r_{\Lambda}^3) \ln\left(\frac{1 - x}{r_{\Lambda}^2}\right), \\ \mathfrak{a}_{13}(x) &= \xi \left[-\frac{1}{3} + 3r_{\Lambda}^2 - 3r_{\Lambda}^4 - \frac{17}{3}r_{\Lambda}^6 - 12r_{\Lambda}^4x + 3(1 - 3r_{\Lambda}^2)x^2 - \frac{8}{3}x^3 \right. \\ &\quad \left. + \frac{2r_{\Lambda}^4(3 + r_{\Lambda}^2)}{1 - x} - \frac{2r_{\Lambda}^6}{(1 - x)^2} - 2r_{\Lambda}^4(3 + r_{\Lambda}^2) \ln\left(\frac{1 - x}{r_{\Lambda}^2}\right) \right], \\ \mathfrak{a}_{22}(x) &= \frac{1}{(1 + r_{\Lambda})^2} \left[\frac{2}{3} - \frac{4}{3}r_{\Lambda} - \frac{23}{3}r_{\Lambda}^2 - 24r_{\Lambda}^3 - 21r_{\Lambda}^4 + \frac{40}{3}r_{\Lambda}^6 + \frac{22}{3}r_{\Lambda}^7 - \frac{4}{3}r_{\Lambda}^8 \right. \\ &\quad + 2r_{\Lambda}^3(6 + 9r_{\Lambda} + 6r_{\Lambda}^2 - r_{\Lambda}^3)x - \frac{3}{2}(1 - 4r_{\Lambda}^2 - 4r_{\Lambda}^3 + r_{\Lambda}^4)x^2 \\ &\quad + \frac{4}{3}(1 + r_{\Lambda} - r_{\Lambda}^2)x^3 - \frac{1}{2}x^4 - \frac{r_{\Lambda}^6(1 + r_{\Lambda})^2}{(1 - x)^2} \\ &\quad + \frac{r_{\Lambda}^4(3 + 12r_{\Lambda} + 14r_{\Lambda}^2 + 8r_{\Lambda}^3 + r_{\Lambda}^4)}{1 - x} \\ &\quad \left. + r_{\Lambda}^3(12 + 21r_{\Lambda} + 24r_{\Lambda}^2 + 10r_{\Lambda}^3 + 4r_{\Lambda}^4 - r_{\Lambda}^5) \ln\left(\frac{1 - x}{r_{\Lambda}^2}\right) \right], \\ \mathfrak{a}_{23}(x) &= \mathfrak{a}_{13}(x), \\ \mathfrak{a}_{33}(x) &= \frac{11}{6} + 3r_{\Lambda} - \frac{21}{2}r_{\Lambda}^2 + 12r_{\Lambda}^3 + \frac{9}{2}r_{\Lambda}^4 - 9r_{\Lambda}^5 + \frac{7}{6}r_{\Lambda}^6 - 6r_{\Lambda}^3(2 - r_{\Lambda})x \\ &\quad - \frac{3}{2}(3 + 2r_{\Lambda} - 5r_{\Lambda}^2)x^2 + \frac{8}{3}x^3 + \frac{r_{\Lambda}^4(3 - 6r_{\Lambda} + r_{\Lambda}^2)}{1 - x} - \frac{r_{\Lambda}^6}{(1 - x)^2} \\ &\quad - r_{\Lambda}^3(12 - 9r_{\Lambda} + 6r_{\Lambda}^2 + r_{\Lambda}^3) \ln\left(\frac{1 - x}{r_{\Lambda}^2}\right), \end{aligned}$$

где $x = E_{\ell,\nu}/E_{\Lambda}$, $r_{\Lambda} = s_X^{\text{eff}}/m_{\Lambda}^2$, а s_X^{eff} - эффективный квадрат инвариантной массы X , $\xi = 1$ для спектра мюона (электрона) и $\xi = -1$ для нейтринного спектра.

Выражение для полной ширины распада $\Lambda_c \rightarrow \ell \nu_\ell X$ в системе центра масс имеет вид

$$\Gamma_{(\ell,\nu)}^{(\Lambda)*} = \frac{G_F^2 A^2(c) \theta_C m_\Lambda^5}{4(4\pi)^3} \sum_{1 \leq i \leq j \leq 3} f_i f_j \bar{\mathfrak{a}}_{ij}, \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathfrak{a}}_{11} &= (1 - r_\Lambda^2) (1 - 2r_\Lambda - 7r_\Lambda^2 - 20r_\Lambda^3 - 7r_\Lambda^4 - 2r_\Lambda^5 + r_\Lambda^6) \\ &\quad - 24r_\Lambda^3 (1 + r_\Lambda^2 + r_\Lambda^3) \ln r_\Lambda, \\ \bar{\mathfrak{a}}_{12} &= (1 - r_\Lambda^2) (1 - 4r_\Lambda - 7r_\Lambda^2 - 40r_\Lambda^3 - 7r_\Lambda^4 - 4r_\Lambda^5 + r_\Lambda^6) \\ &\quad - 24r_\Lambda^3 (2 + r_\Lambda + 2r_\Lambda^2) \ln r_\Lambda, \\ \bar{\mathfrak{a}}_{13} &= \bar{\mathfrak{a}}_{23} = 0, \\ \bar{\mathfrak{a}}_{22} &= \frac{1}{(1 + r_\Lambda)^2} \left[\frac{2}{5} - r_\Lambda - 6r_\Lambda^2 - 28r_\Lambda^3 - 32r_\Lambda^6 + 28r_\Lambda^7 + 6r_\Lambda^8 + r_\Lambda^9 \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{5} r_\Lambda^{10} - 24r_\Lambda^3 (1 + 2r_\Lambda + 3r_\Lambda^2 + 2r_\Lambda^3 + r_\Lambda^4) \ln r_\Lambda \right], \\ \bar{\mathfrak{a}}_{33} &= (1 - r_\Lambda^2) (1 + 2r_\Lambda - 7r_\Lambda^2 + 20r_\Lambda^3 - 7r_\Lambda^4 + 2r_\Lambda^5 + r_\Lambda^6) \\ &\quad + 24r_\Lambda^3 (1 - r_\Lambda - r_\Lambda^2) \ln r_\Lambda. \end{aligned}$$

Переход к инклюзивному распаду $\Lambda_c \rightarrow \ell \nu_\ell + all$ осуществляется подбором значения $\sqrt{s_X^{\text{eff}}}$, чтобы согласовать (2.18) с экспериментальными данными по полной ширине распада. Наилучшее согласие достигается при $\sqrt{s_X^{\text{eff}}} = 1.27 \text{ GeV}$. Тогда $r_\Lambda \approx 0.551$. Значения усредненных по q^2 формфакторов при этом равны

$$f_1 \approx 0.991, \quad f_2 \approx 2.170, \quad f_3 \approx 0.805.$$

Спектральные функции для вторичных лептонов от полулептонного распада Λ_c -гиперона можно записать в следующей форме:

$$F_{\ell,\nu}^\Lambda(E_{\ell,\nu}, E_\Lambda) = \frac{1}{Z_{\Lambda_c}} \sum_{1 \leq i \leq j \leq 3} f_i f_j \mathfrak{a}_{ij}(x), \quad Z_{\Lambda_c} = \sum_{1 \leq i \leq j \leq 3} f_i f_j \bar{\mathfrak{a}}_{ij}.$$

Нужно отметить, что спектральные функции мюонных и электронных нейтрино (антинейтрино) в этом подходе не различаются.

Глава 3

Потоки вторичных космических лучей: расчет и данные измерений

В данной главе приводятся необходимые исходные данные (первичный спектр, сечения и т.д.), необходимые для численных расчетов и обсуждается сравнение расчета потоков протонов, нейтронов, мюонов и нейтрино в атмосфере и на уровне моря с имеющимися экспериментальными данными.

3.1 Модель спектра и состава первичных космических лучей

Для энергий $E < 10^3$ ГэВ использовались аппроксимационные формулы для спектров первичных космических лучей, полученные в работе [14]:

$$\mathcal{D}_A(E) = F_A \exp \left[-(\gamma_A + 1) \ln E - \xi_A \ln^2 E \right],$$

где $A = 1, 4, 10, 14, 31$ - средние массовые числа для 5 стандартных групп ядер. Значения параметров F_A , γ_A и ξ_A , полученные фитированием экспериментальных данных для минимума солнечной активности, приведены в табл. 3.1.

Для области энергий от 10^3 ГэВ до 10^{10} ГэВ мы применяем параметризацию интегрального спектра первичных космических лучей, предложенную Никольским, Стаменовым и Ушевым [72] (ниже будем называть ее "НСУ-моделью"):

$$F(\geq E_0) = F_0 E_0^{-\gamma} \sum_A B_A \left(1 + \delta_A \frac{E_0}{A} \right)^{-\alpha}. \quad (3.1)$$

Здесь E_0 - энергия на частицу в ГэВ,

$$F_0 = 1.16 \text{ см}^{-2} \text{с}^{-1} \text{ср}^{-1}, \quad \gamma = 1.62 (\pm 0.03) \quad \text{и} \quad \alpha = 0.4.$$

Таблица 3.1: Параметры первичного спектра космических лучей для $E < 10^3$ ГэВ.

A	1	4	10	14	31
$F_A, (\text{м}^2 \text{с ср ГэВ/нуклон})^{-1}$	4586	289	12.9	40.3	16.1
γ_A	1.24	0.98	1.68	1.68	1.68
ξ_A	0.03	0.11	0.0	0.0	0.0

Таблица 3.2: Параметры первичного спектра космических лучей для $E > 10^3$ ГэВ.

A	1	4	15	26	51
B_A	0.40 ± 0.03	0.21 ± 0.03	0.14 ± 0.03	0.13 ± 0.03	0.12 ± 0.04
C_A	1	0.222	0.0653	0.0431	0.0262

В этой модели ядерная компонента космических лучей разделена на 5 стандартных групп ядер с $\langle A \rangle = 1, 4, 15, 26, 51$, спектры которых подобны при энергиях $E_A \ll E_A^{\text{knee}}$ и $E_A \gg E_A^{\text{knee}}$, где E_A^{knee} характеризует область излома спектра для соответствующей группы. Значения параметров B_A приведены в табл. 3.2.

Параметры δ_A , характеризующие область излома первичного спектра, равны

$$\delta_p = 3 \times 10^{-7} \quad \text{и} \quad \delta_{A \geq 4} = 6 \times 10^{-6}.$$

Эти значения соответствуют гипотезе, основанной на предположении, что причиной изменения первичного спектра являются потери энергии протонами и ядрами в $p\gamma$ - и $A\gamma$ - столкновениях в источнике.

Соответствующий дифференциальный спектр дается выражением:

$$\frac{dF}{dE_0} = \gamma F_0 E_0^{-(\gamma+1)} \sum_A B_A \left(1 + \delta_A \frac{E_0}{A} \right)^{-\alpha} \left[1 + \frac{\alpha \delta_A E_0 / A}{\gamma(1 + \delta_A E_0 / A)} \right]. \quad (3.2)$$

Модель НСУ была получена из анализа флуктуаций в относительном числе электронов и мюонов в широких атмосферных ливнях и основана на данных по абсолютной интенсивности первичных протонов и различных ядер при энергиях $E_0 \geq 1, 10^3, 10^6$ ТэВ на частицу, а также на данных о форме интегрального спектра около "колена" [72]. В [73] дается сопоставление модели НСУ с экспериментальными данными по первичным космическим лучам, полученными до 1993 г. В целом эта модель согласуется с современными данными по первичному спектру и химическому составу от энергий ~ 100 ГэВ на частицу до 10^9 ГэВ на частицу. В частности, при $E_0 \lesssim 10^3$ ТэВ на частицу

модель соответствует результатам, полученным на спутнике "Космос" в эксперименте на установке "Сокол" [74], в баллонных экспериментах JACEE [75] и BASJE [76]. С другой стороны, имеется сильное расхождение между НСУ-моделью и измерениями, выполненными с эмульсионными камерами в японском баллонном эксперименте [77], которые указывают на более пологую форму спектра вблизи "колена" по сравнению с данными предыдущих экспериментов. В то же время, данные [77] по ядерному составу согласуются с НСУ-моделью при $E_0 \gtrsim 10$ ТэВ на частицу. Экспериментальные данные по спектру и химическому составу в области "колена" $[(10^2-10^4)\text{ТэВ на частицу}]$ еще более противоречивы. Современное состояние проблемы спектра протонов подробно обсуждается в работах [78, 79].

Переходя в (3.2) к эквивалентному спектру нуклонов, получим следующее выражение для дифференциальных энергетических спектров протонов и нейтронов:

$$\begin{aligned}\frac{dF_p}{dE_N} &\equiv \mathcal{D}_p^0(E_N) = \mathcal{D}_1(E_N) + \frac{1}{2} \sum_{A \geq 4} \mathcal{D}_A(E_N), \\ \frac{dF_n}{dE_N} &\equiv \mathcal{D}_n^0(E_N) = \frac{1}{2} \sum_{A \geq 4} \mathcal{D}_A(E_N).\end{aligned}$$

Здесь E_N - энергия нуклона в ГэВ,

$$\mathcal{D}_A(E_N) = \frac{C_A \mathcal{D}_0 E_N^{-(\gamma+1)}}{(1 + \delta_A E_N)^{\mathfrak{A}}} \left[1 + \frac{\mathfrak{A} \delta_A E_N}{\gamma(1 + \delta_A E_N)} \right],$$

$$\mathcal{D}_0 = \gamma B_1 F_0 = 0.75 \text{ см}^{-2} \text{ с}^{-1} \text{ ср}^{-1} (\text{ГэВ/нуклон})^{-1}, \quad C_A = A^{1-\gamma} B_A / B_1 \quad (\text{табл. 3.2}).$$

Вдали от области "колена" справедливы асимптотические формулы:

$$\mathcal{D}_A(E_N) = \begin{cases} C_A \mathcal{D}_0 E_N^{-(\gamma+1)} & \text{для } E_N \ll E_N^{(1)}, \\ 1.25 \delta_A^{-\mathfrak{A}} C_A \mathcal{D}_0 E_N^{-(\gamma+\mathfrak{A}+1)} & \text{для } E_N \gg E_N^{(2)}, \end{cases} \quad (3.3)$$

где $E_N^{(1)} = 6.5/\delta_A$ ГэВ/нуклон и $E_N^{(2)} = 0.6/\delta_A$ ГэВ/нуклон.

Рассматриваемая модель не претендует на количественное описание первичного спектра при энергиях выше $(10^8 - 10^9)$ ГэВ на частицу. Однако вклад этой области энергий в статистику событий, представляющих интерес для экспериментов по измерению одиночной компоненты вторичных КЛ (включая эксперименты по глубоководной регистрации мюонов и нейтрино) несуществен. Поэтому, для упрощения расчетов, мы ввели искусственное "мягкое обрезание" первичного спектра, заменив функции $D_{p,n}^0(E)$ в граничном условии на $D_{p,n}^0(E) \phi(E/E_c)$, где $\phi(t)$ - некоторая безразмерная функция, удовлетворяющая условиям: $\phi(t) = 1$ при $t \ll 1$ и $\phi(t) = 0$ при $t \geq 1$. Явный вид этой функции не важен до тех пор, пока мы интересуемся энергиями $E \ll E_c$ и не

слишком большими глубинами h . Ниже полагаем $E_c = 3 \times 10^{10}$ ГэВ. Фактически, это обрезание грубо моделирует эффект Грейзена-Зацепина-Кузьмина, обусловленный взаимодействием внегалактических КЛ с реликтовым микроволновым излучением [80, 81].

3.2 Модели инклюзивных и полных неупругих сечений

Для инвариантных инклюзивных сечений $E d^3 \sigma_{ij}(x_F, s, p_T)/d^3 p$ мы приняли за основу полуэмпирические формулы Кимеля-Мохова [82, 83]. Свободные параметры в этих формулах были получены авторами фитированием всех доступных ускорительных данных по взаимодействиям нуклонов с различными ядерными мишенями при $p_0 = 3 - 1500$ ГэВ/ c и 0.45 ГэВ/ $c \lesssim p \leq p_0$ (где p_0 – импульс налетающего нуклона в лабораторной системе). Для скейлинг-инвариантного сечения реакции $i + A \rightarrow i + X$ ($i = p, n, \pi^\pm, K^\pm, K^0, \bar{K}^0$) параметризация имеет вид:

$$E \frac{d^3 \sigma_{ii}}{d^3 p} = A_1 x_F' \left[(1 - x_F)^{-0.62 p_T^2 - 1} + A_2 (1 - x_F)^{2 p_T^2} \right] \exp(-2.1 p_T^2).$$

Здесь

$$x_F' = \frac{2E^*}{\sqrt{s}}, \quad x_F = \frac{2p_L^*}{\sqrt{s}},$$

где s , E^* и p_L^* – квадрат полной энергии, энергия и продольный импульс в системе центра масс; p_T – поперечный импульс. Параметры A_1 и A_2 слабо зависят от типа ядра-мишени "A" и сорта частицы i . Для взаимодействия протона с бериллием согласно [82, 83] имеем $A_1 = 1.324 \times 10^{-2}$ и $A_2 = 45$.

Для вторичных нуклонов в процессах $i + A \rightarrow j + X$ ($i, j = p, n, i \neq j$) используется

$$E \frac{d^3 \sigma_{ij}}{d^3 p} = \sigma_{NA}^{\text{in}} \left[\frac{C_1}{p_0} \left(1 + \frac{C_2}{1+p} + \frac{C_3}{1+p^2} \right) + C_4 \frac{|p_L^*|}{p_0} \right] E^* \exp(-C_5 p_T^2), \quad (3.4)$$

где p_0 – первичный импульс, а коэффициенты C_n , полученные методом наименьших квадратов по экспериментальным данным, приведены в табл. 3.3 для бериллиевой мишени.

На рис. 3.1 показаны нормированные дифференциальные сечения $(x/\sigma_0) d\sigma_{pp}(x, E)/dx$ и $(x/\sigma_0) d\sigma_{pn}(x, E)/dx$, рассчитанные в модели Кимеля-Мохова для нескольких значений кинетической энергии вторичных нуклонов E_{kin} ($\sigma_0 = (290 \pm 5)$ мбн). Расчеты сделаны для бериллиевой мишени. Однако, дифференциальные сечения слабо зависят от атомного номера мишени, поэтому результаты справедливы и для других легких ядер, в частности, – для ядер атомов воздуха. Как видно из рисунка, при $E_{\text{kin}} \gtrsim 100$ ГэВ

Таблица 3.3: Параметры формул (3.4-3.5) для pBe -взаимодействия.

реакции	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$	$n = 7$	$n = 8$
$p \rightarrow n, n \rightarrow p$	1.19	0.2	0.3	-0.45	4.28	0.0	0.0	0.0
$p \rightarrow \pi^+, n \rightarrow \pi^-$	2.32	1.89	2.6	0.01	0.165	0.30	12.5	2.65
$p \rightarrow \pi^-, n \rightarrow \pi^+$	1.62	2.52	0.7	0.008	0.160	0.32	11.0	2.70
$p \rightarrow K^+, n \rightarrow K^-$	0.11	1.28	2.6	0.01	0.165	0.51	4.3	2.65
$p \rightarrow K^-, n \rightarrow K^+$	0.09	3.80	0.7	0.008	0.160	0.52	5.5	2.70

дифференциальные сечения практически перестают зависеть от энергии всюду, за исключением узкой дифракционной области для реакции $pA \rightarrow pX$. Другими словами, при высоких энергиях модель Кимеля-Мохова приводит к фейнмановскому скейлингу. Из-за падающего характера первичного спектра вклад, который дифракционная область вносит в Z -факторы, отнюдь не пренебрежим. Чтобы избежать нефизически быстрого возрастания $d\sigma_{pp}/dx$ в области $x \sim 1$ при сверхвысоких энергиях мы предположили, что при $E_0 > 10^6$ ГэВ сечение $d\sigma_{pp}/dx$ становится масштабно-инвариантным во всей кинематической области. Из-за отсутствия экспериментальных данных при $E_0 \gtrsim 10^6$ ГэВ обосновать это предположение сегодня невозможно.

При кинетической энергии нуклона $E_{\text{kin}} > 4$ ГэВ применяется следующая формула для инвариантного сечения реакции $N + A \rightarrow M + X$ ($N = p, n, M = \pi^\pm, K^\pm$) [84] (см. также [82, 83]):

$$E \frac{d^3\sigma_{NM}}{d^3p} = F_1 F_2 F_3, \quad (3.5)$$

$$F_1 = C_1 \sigma_{NA}^{\text{in}} (1-x)^{C_2} \exp\left(-\frac{p^*}{C_5 \sqrt{s}}\right),$$

$$F_2 = 1 - \exp\left(-\frac{sp^{*2}}{C_3} - \frac{p_T^2}{C_4}\right),$$

$$F_3 = (1 - C_6) \exp(-C_7 p_T^2) + C_6 \exp(-C_8 p_T^2),$$

где $x = p^*/p_{\text{max}}^*$, p^* - импульс мезона в системе центра масс;

$$p_{\text{max}}^* = \sqrt{\frac{(s + m_M^2 - s_X^{\text{min}})}{4s} - m_M^2}$$

- кинематический предел. Параметры C_n приведены в табл. 3.3.

На рис. 3.2 показаны вычисленные по формуле (3.5) импульсные спектры пионов, вылетающих под углом 3.5° при взаимодействии $p - Be$ и представлены экспериментальные данные из работ [85, 86, 87]. В этих экспериментах измерялись распределения

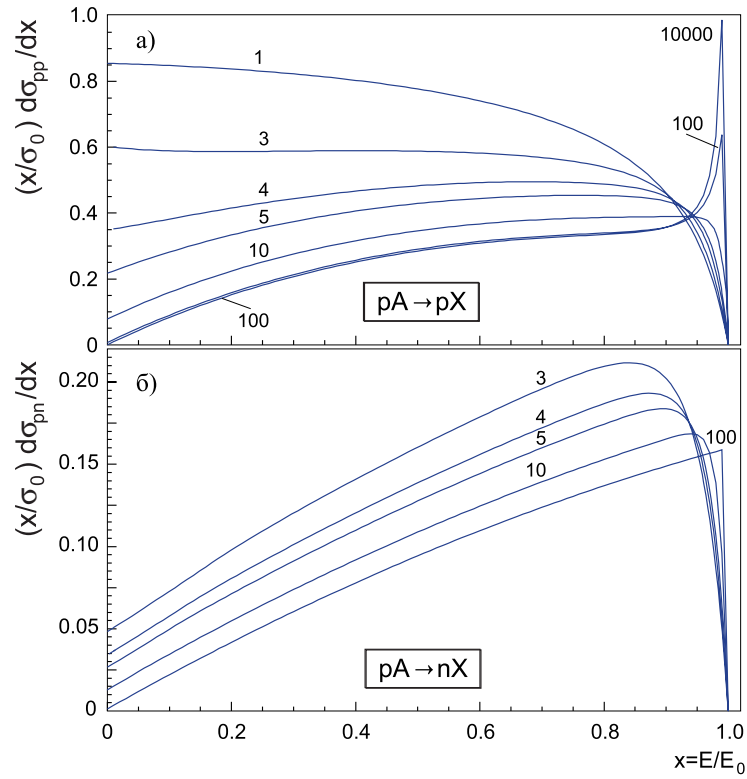


Рис. 3.1: Нормированные дифференциальные сечения, рассчитанные согласно модели Кимеля-Мохова [82, 83]. Числа у кривых обозначают кинетическую энергию вторичного нуклона E_{kin} в ГэВ.

$d^2 N_{p\pi}/dpd\Omega$, а значения величин $d^2 \sigma_{p\pi}/dpd\Omega$ получались нормировкой на данные при других энергиях в предположении справедливости фейнмановского скейлинга. Связанная с этой процедурой ошибка не превышает $\sim 25\%$. В этих пределах параметризация (3.5) хорошо согласуется с опытом.

На рисунках 3.3 а,б и 3.4 а,б представлено сравнение рассчитанных в модели Кимеля-Мохова угловых распределений пионов и каонов, рожденных в реакциях $p + Be \rightarrow \pi^\pm + X$ и $p + Be \rightarrow K^\pm + X$ с экспериментальными данными [88], полученными при импульсе налетающего протона 19.2 ГэВ/с. Имеется хорошее согласие параметризации (3.5) с экспериментом для импульсов пионов от 6 до 16 ГэВ/с.

Сравнение двойных лоренц-инвариантных инклюзивных распределений пионов с экспериментальными данными [89], полученными в протон-ядерных столкновениях при импульсе первичного протона 24 ГэВ/с, и расчетами, выполненными в работе [90], даны на рис. 3.5. Начиная с 5° для импульсов пионов от 4 до 18 ГэВ/с и с 8 ГэВ/с для углов $1^\circ - 7.4^\circ$ наш расчет неплохо согласуется как с экспериментом, так и с недавним рас-

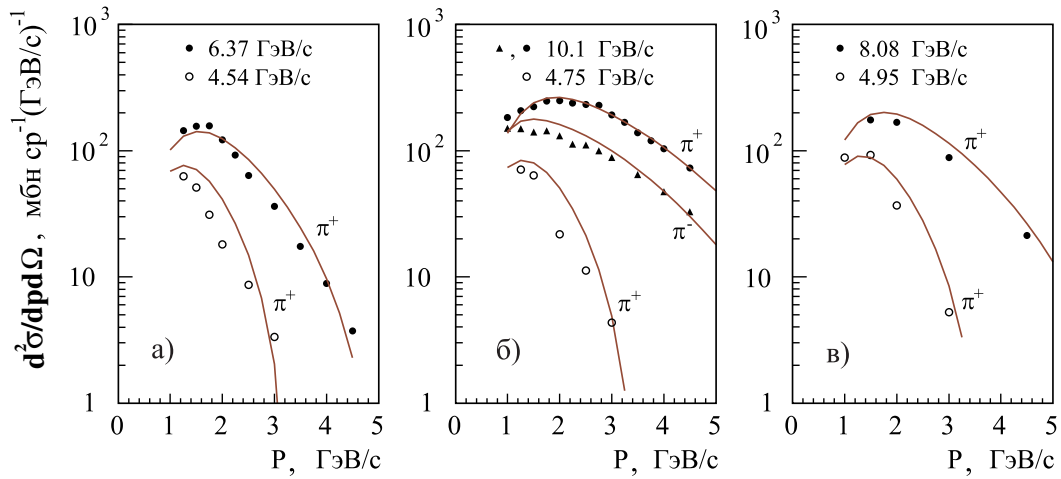


Рис. 3.2: Импульсные распределения пионов под углом 3.5° в pBe - взаимодействиях при различных импульсах протонов. Экспериментальные точки из работ [85, 86, 87]. Кривые - расчет по формуле (3.5).

четом [90], выполненным в модели FLUKA.

На рисунках 3.6 а-г представлены рассчитанные инклюзивные инвариантные дифференциальные сечения пионов $Ed^3\sigma/d^3p$ для реакций взаимодействий протонов с различными ядрами мишени H , Al и Cu при первичном импульсе 100 ГэВ/с в зависимости от импульса пиона для $p_T = 0.3$ и 0.5 ГэВ/с и приведены экспериментальные данные из работы [91]. Коэффициенты C_n в используемой при расчете параметризации (3.5) для протон-ядерных взаимодействий брались из работ [82, 83] Как видно из рис. 3.6, несмотря на то, что расчет в целом неплохо согласуется с экспериментом, имеется некоторое систематическое превышение.

Имеющиеся данные по полному неупругому сечению $\sigma_{pA}^{in}(E)$ (как ускорительные, так и извлеченные из экспериментов с космическими лучами) хорошо описываются зависимостью

$$\sigma_{NA}^{in}(E) = \sigma_0 - \theta(E - E_*) \left[\sigma_1 \ln \left(\frac{E}{E_1} \right) - \sigma_2 \ln^2 \left(\frac{E}{E_1} \right) \right], \quad (3.6)$$

где $\theta(E - E_*) = 0$ при $E < E_*$ и $\theta(E - E_*) = 1$ при $E \geq E_*$, $E_* = 45.4$ ГэВ и $E_1 = 1$ ГэВ. Ниже мы используем формулу (3.6), со значениями параметров, найденными в [92]: $\sigma_0 = (290 \pm 5)$ мбн, $\sigma_1 = (8.7 \pm 0.5)$ мбн, $\sigma_2 = (1.14 \pm 0.05)$ мбн.

Для энергий много выше 1 ТэВ, как уже говорилось в разделе 1.6, мы предполагаем справедливость фейнмановского скейлинга для инвариантных инклюзивных сечений $Ed^3\sigma_{ij}/d^3p$ ($i, j = p, n, \pi^\pm, K^\pm, K^0, \bar{K}^0$). Тогда энергетические спектры адронов опреде-

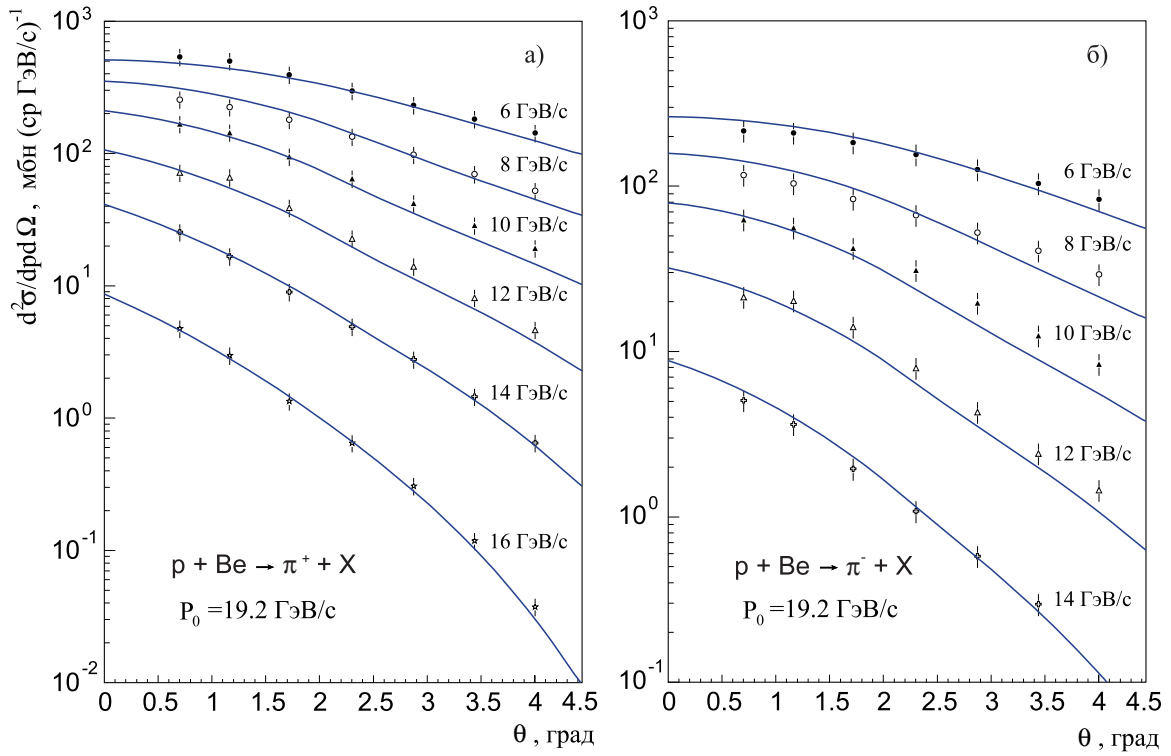


Рис. 3.3: Дифференциальные сечения рождения $\pi^\pm$ в pBe -взаимодействиях при первичном импульсе протона 19.2 ГэВ/с в зависимости от угла для различных импульсов пионов. Экспериментальные точки из работы [88]. Кривые - расчет по формуле (3.5). Цифры у кривых - импульсы пионов.

ляются величиной $z_{ij}^{(n)}(\gamma)$ (1.36). Для вычисления логарифмических моментов от инклюзивных спектров всех реакций, кроме $\pi + A \rightarrow N + X$ и $\pi + A \rightarrow K + X$, использовалась параметризация данных ISR, полученная в [93, 94]. Величины $z_{\pi N}^{(n)}(\gamma)$ и $z_{\pi K}^{(n)}(\gamma)$ вычислялись из двух центральных моментов инклюзивных распределений, рассчитанных в работе [95] на основе квазядерной кварковой модели. При этом мы воспользовались параметризацией $Ed^3\sigma_{ij}/d^3p \sim (1-x)^m$ (значения m приведены в [84]). Численные значения логарифмических моментов приведены в табл. 3.4. Моменты для $i = n, \pi^-$ могут быть получены с помощью изотопических соотношений.

Для того чтобы использовать формулы раздела 1.6, приходится применять более грубую (по сравнению с (3.6)) аппроксимацию для полного неупругого сечения. Ниже мы будем использовать модель упругой амплитуды (см. [44]), основанную на концепции кратного померона с надкритическим интересептом в рамках u -матричного подхода, которая предсказывает чисто логарифмический рост $\sigma_{NA}^{\text{in}}(E)$ в асимптотике.

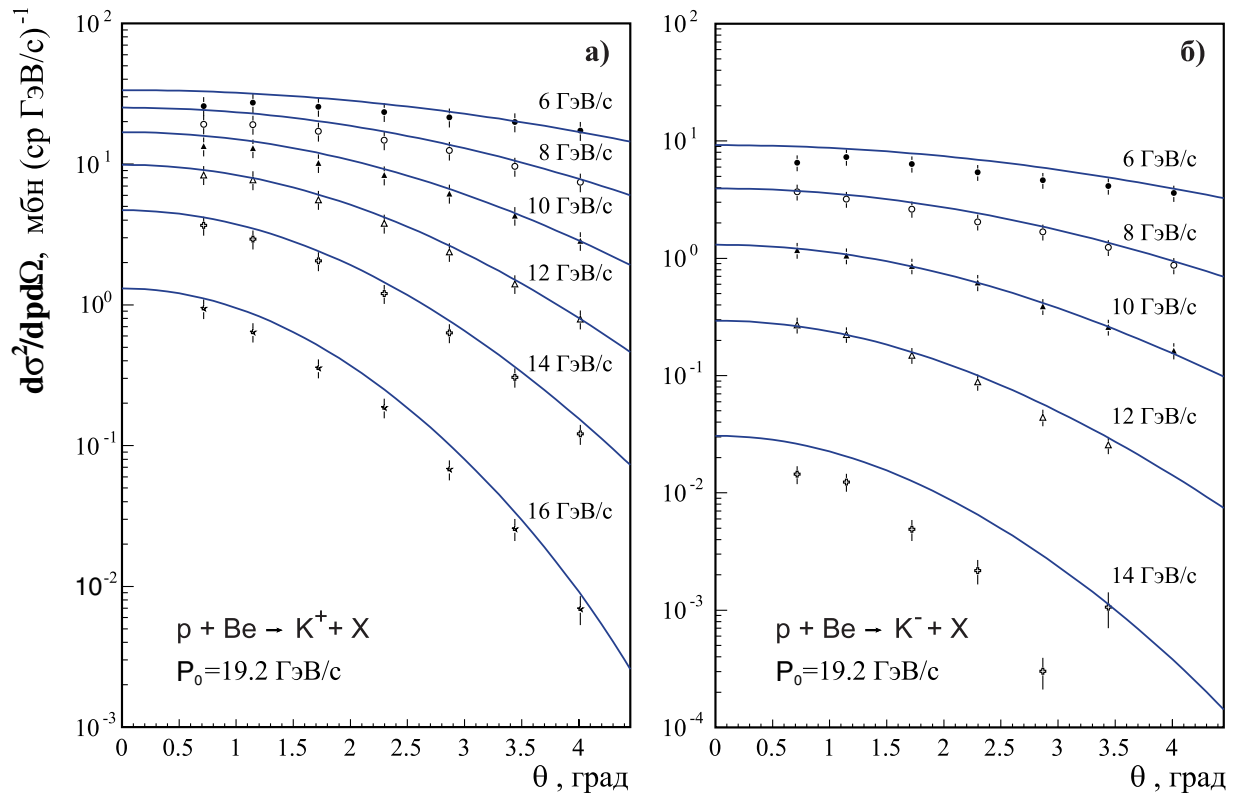


Рис. 3.4: Дифференциальные сечения рождения $K^\pm$ в pBe -взаимодействиях при первичном импульсе протона 19.2 ГэВ/с в зависимости от угла для различных импульсов пионов. Экспериментальные точки из работы [88]. Кривые - расчет по формуле (3.5). Цифры у кривых - импульсы каонов.

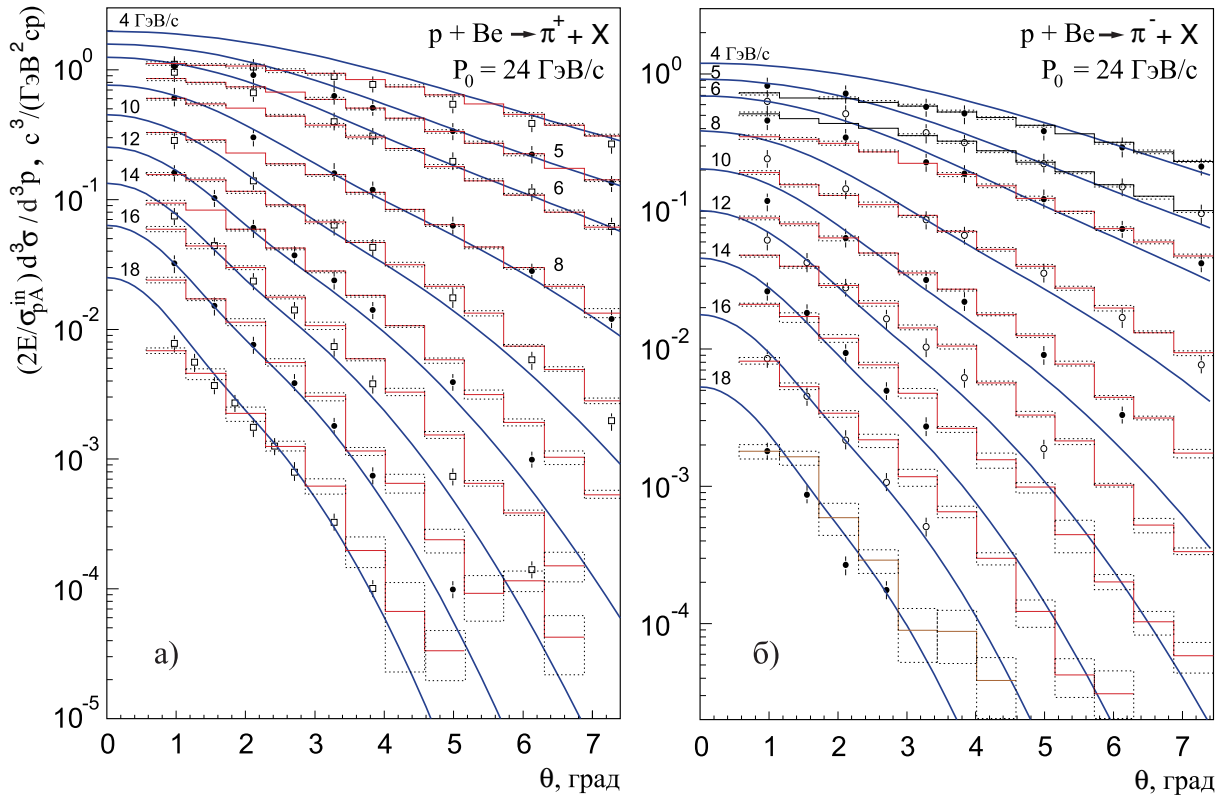


Рис. 3.5: Дифференциальные сечения рождения $\pi^\pm$ в $p\text{Be}$ -взаимодействиях при первичном импульсе протона 24 ГэВ/с в зависимости от угла для различных импульсов пионов. Экспериментальные точки из работы [89]. Кривые - расчет по формуле (3.5). Цифры у кривых - импульсы пионов, гистограммы - расчет [90] в модели FLUKA.

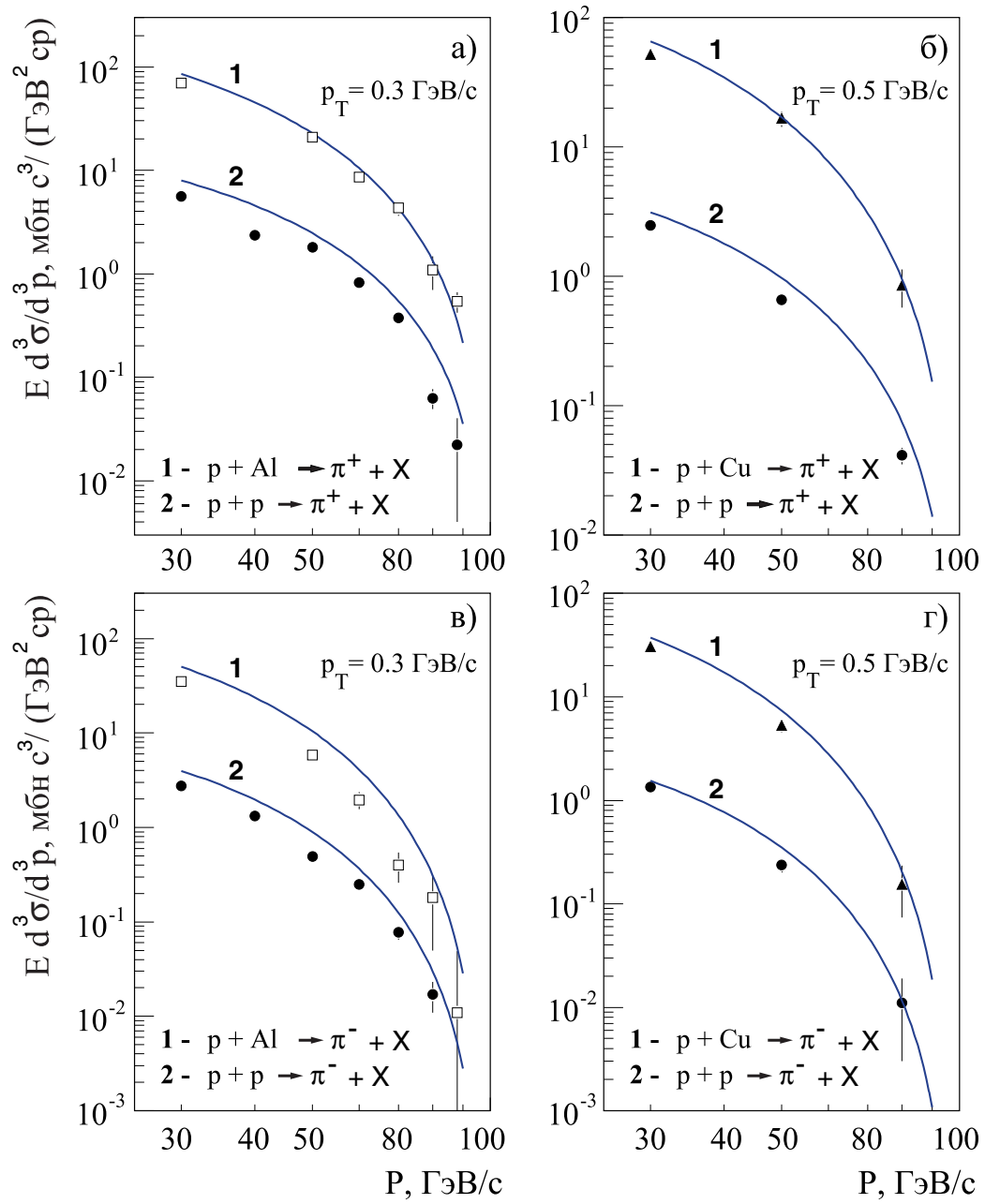


Рис. 3.6: Инвариантные инклюзивные дифференциальные сечения рождения $\pi^\pm$ в протон-ядерных взаимодействиях при первичном импульсе протона 100 ГэВ/с для поперечных импульсов $p_T = 0.3$ и $0.5 \text{ ГэВ}/c$ в зависимости от импульса пиона. Экспериментальные точки из работы [91]. Кривые - расчет по формуле (3.5).

Таблица 3.4: Логарифмические моменты $z_{ij}^{(n)}(\gamma)$ инклюзивных распределений нуклонов, пионов и каонов для двух показателей наклона первичного спектра γ .

i	j						
	p	n	π^+	π^-	K^+	K^-	K_L^0
$\gamma = 1.62$							
p	0.1990	0.0763	0.0474	0.0318	0.0067	0.0023	0.0045
π^+	0.0070	0.0060	0.1500	0.0552	0.0120	0.0120	0.0100
$\gamma = 2.022$							
p	0.1980	0.0585	0.0257	0.0162	0.0039	0.0012	0.0026
π^+	0.0060	0.0040	0.1480	0.0346	0.0100	0.0100	0.0080

Другим важным следствием модели является асимптотическое равенство неупругих сечений взаимодействия любых адронов [44]. При $E > E_0$

$$\sigma_{hA}^{\text{in}}(E) = \sigma_{hA}^0 [1 + \beta_h \ln(E/E_0)].$$

Зависимость такого вида не противоречит имеющимся экспериментальным данным вплоть до $E \simeq 3 \cdot 10^{10}$ ГэВ ($\sqrt{s} \sim 240$ ТэВ) [96], хотя заметно хуже согласуется с данными, чем формула (3.6). Согласно работе [44] $E_0 = 1$ ТэВ, $\sigma_{NA}^0 = 275$ мбн, параметр наклона $\sigma_{hA}^0 \beta_h = 19$ мбн. Сечения $\sigma_{\pi A}^{\text{in}}(E)$ и $\sigma_{KA}^{\text{in}}(E)$ определялись из отношений $\sigma_{NA}^0/\sigma_{\pi A}^0 = 1.3$, $\sigma_{NA}^0/\sigma_{KA}^0 = 1.5$ [47].

3.3 Нуклоны

Расчеты проводились для диапазонов $5 \text{ ГэВ} \leq E \leq 3 \times 10^{10} \text{ ГэВ}$ и $0 \leq h \leq 5 \times 10^3 \text{ г/см}^2$. Для многомерного численного интегрирования применялся адаптивный кубатурный алгоритм Гинца-Мэйлика [97], а для аппроксимации и интерполяции промежуточных функций одной и двух переменных использовались стандартные локальные В-сплайны второй степени на равномерной сетке. При всех значениях E и h итерационный процесс быстро сходится. Так, 5–6 итераций оказывается достаточно для достижения точности расчета Z -факторов не хуже $10^{-3} - 10^{-4}$. На небольших глубинах, $h \lesssim 300 \text{ г/см}^2$, уже первое приближение обеспечивает точность на уровне нескольких процентов, вполне достаточную для многих приложений теории, например, для расчета потоков атмосферных мюонов и нейтрино.

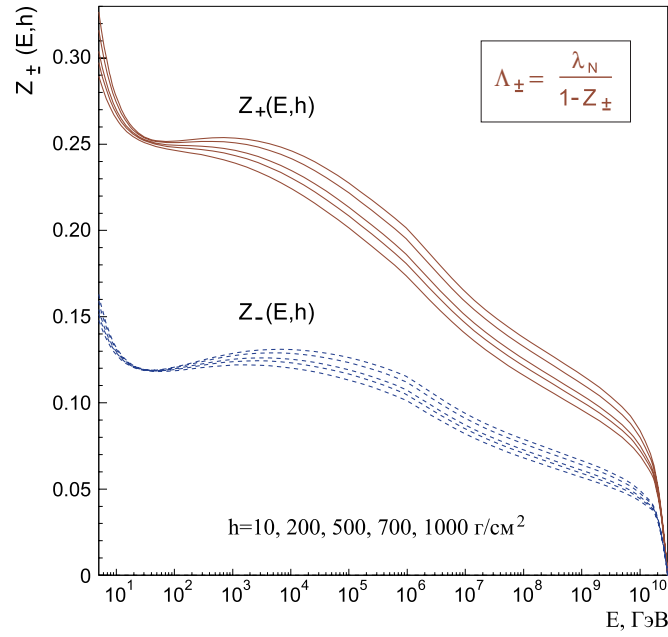


Рис. 3.7: Зависимости $Z_{\pm}$ от энергии для глубин $h = 10, 200, 500, 700$ и 1000 г/см². Z -факторы уменьшаются с ростом h .

На рис. 3.7 представлены зависимости Z -факторов от энергии для $h = 10, 200, 500, 700$ и 1000 г/см². Наблюдаемая сильная зависимость $Z_{\pm}$ от E и h вызвана тремя эффектами:

- а) нестепенным поведением первичного спектра,
- б) зависимостью полного неупругого сечения от энергией и
- в) нарушением скейлинга.

Локальные минимумы, проявляющиеся при $E < E_* \simeq 45$ ГэВ, обусловлены началом роста $\sigma_{NA}^{\text{in}}(E)$ (см. (3.6)). Заметное изменение характера энергетической зависимости при $E \gtrsim 10^6$ ГэВ связано с искусственным ”замораживанием” роста квазиупругого пика в реакции $pA \rightarrow pX$. Наконец, обращение Z -факторов в нуль при $E = E_c = 3 \times 10^{10}$ ГэВ является следствием обрыва первичного спектра при $E > E_c$.

На рис. 3.8 - 3.11 дано сравнение расчетных дифференциальных энергетических спектров нуклонов ($p + n$), протонов и нейтронов на разных глубинах атмосферы с имеющимися экспериментальными данными [98, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106]. Данные по спектрам нуклонов с $E > 10^3$ ГэВ, относящиеся к глубинам $h \leq 530$ г/см² (рис. 3.8), получены из анализа спектра γ -квантов в широких атмосферных ливнях при различных предположениях о связи энергий нуклонов и γ -квантов ($E_N = 3.5E_\gamma$ или $E_N = 3.0E_\gamma$) [98], т. е. являются модельно-зависимыми. Тем не менее, наш расчет в целом не противоречит этой совокупности данных. Наибольшие разногласия наблюда-

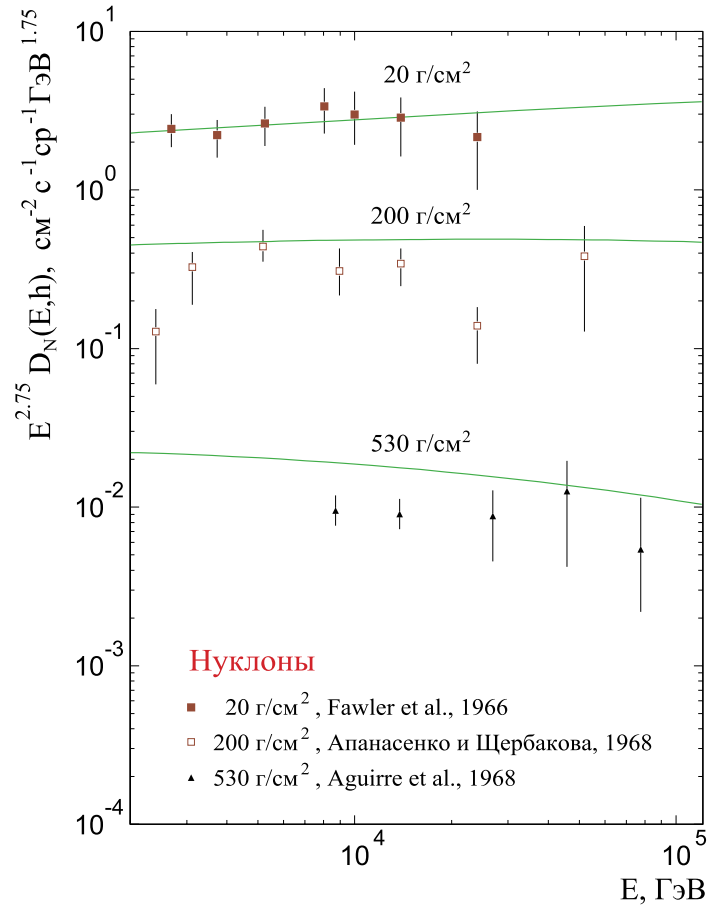


Рис. 3.8: Дифференциальные энергетические спектры нуклонов на глубинах $h = 20, 200$ и 530 г/см^2 . Экспериментальные точки: $\blacksquare$, $\square$, $\blacktriangle$ – из работы [98]. Кривые – расчет Z-факторным методом.

ются с результатом для $h = 200 \text{ г/см}^2$. По нашему мнению, оценка энергии нуклонов (по формуле $E_N \approx 3E_\gamma$), использованная в анализе этих данных, приводит к систематическому занижению интенсивности нуклонов.

Прямые измерения спектров протонов на уровне гор и у.м. очень фрагментарны и здесь можно говорить лишь о качественном согласии с расчетом. Сравнение с экспериментом на высоте 3.2 км [99] представлено на рис. 3.9. При энергиях $E > 5 \text{ ГэВ}$ наблюдается небольшое (в пределах одного стандартного отклонения) систематическое превышение расчетного спектра над экспериментальным фитом $I_p = 32(E + 1.061)^{-2.8} (\text{м}^2 \text{ с ср ГэВ})^{-1}$.

На рис. 3.10 дано сравнение расчета спектров протонов на уровне моря с данными

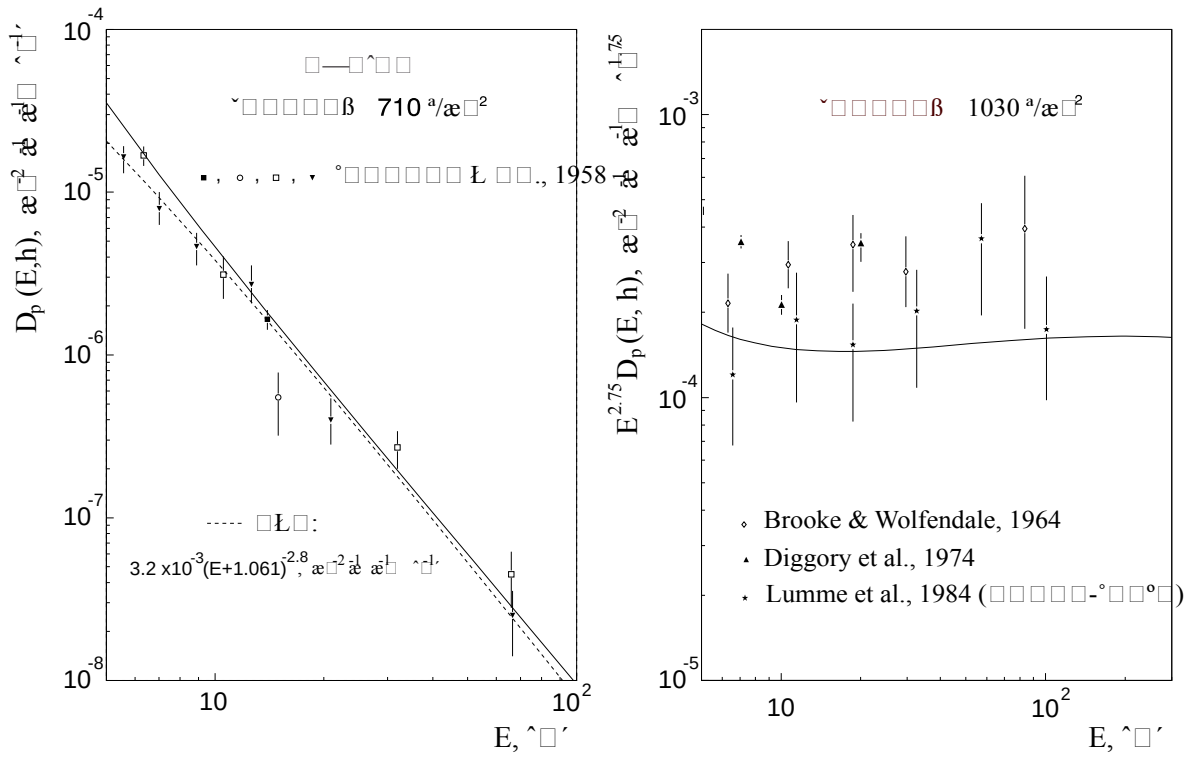


Рис. 3.9: Дифференциальный энергетический спектр протонов на высоте 3.2 км над у.м. ($h = 710 \text{ г/см}^2$). Экспериментальные точки: $\blacktriangledown$ – результаты четырех опытов [99]. Сплошная кривая – расчет Z-факторным методом, штриховая – фит данных [99] при $E_{\text{кин}} \geq 3 \text{ ГэВ}$.

Рис. 3.10: Дифференциальный энергетический спектр протонов на у.м. ($h = 1030 \text{ г/см}^2$). Точки: $\diamond$ – [100], $\blacktriangle$ – [101], $\star$ – [102]. Кривая – расчет Z-факторным методом.

ряда экспериментов [100, 101, 102] и результатом моделирования ядерного каскада методом Монте-Карло [102]. Экспериментальные данные по нейтронной компоненте на уровне моря [102, 103, 104, 105, 106], хотя и более представительны, но очень противоречивы. Наш расчет (рис. 3.11) находится в неплохом согласии с недавними измерениями, выполненными на прототипе установки KASCADE в Карлсруэ [106].

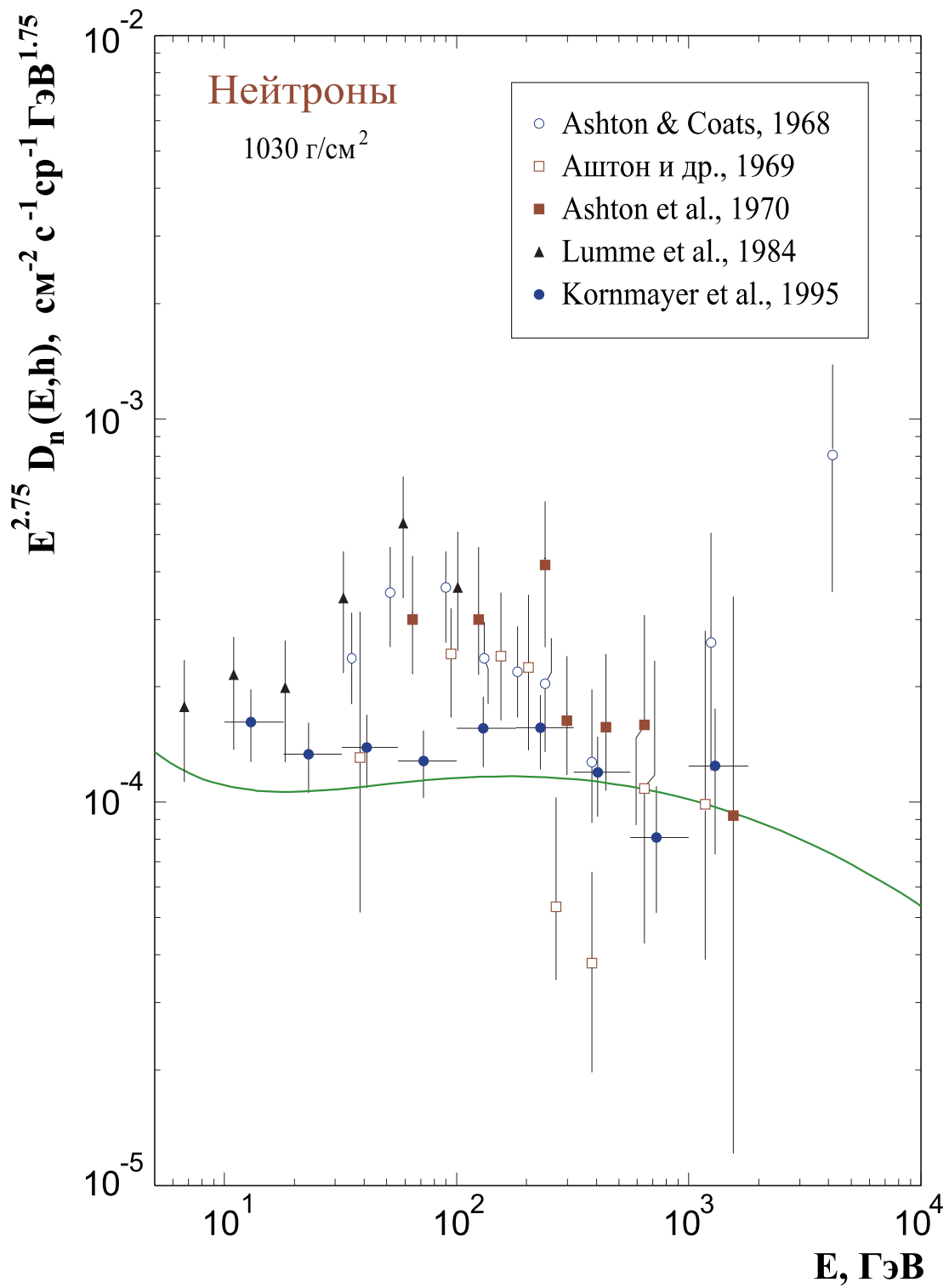


Рис. 3.11: Дифференциальный энергетический спектр нейтронов на уровне моря ($h = 1030 \text{ г/см}^2$). Экспериментальные данные: $\blacktriangle$ – [102], $\circ$ – [103], $\square$ – [104], $\blacksquare$ – [105], $\bullet$ – [106]. Кривая – расчет Z-факторным методом.

3.4 Мюоны

3.4.1 Мюоны на уровне моря

Как уже отмечалось в разделе 1.7, основными каналами генерации мюонов для энергий выше 1 ТэВ являются двухчастичные распады пионов и каонов, а также, вероятно, распады очарованных адронов. В качестве источников мюонов в данном расчете дополнительно рассматривались трехчастичные полулептонные распады заряженных и нейтральных каонов:

$$K^\pm \rightarrow \pi^0 \mu^\pm \nu_\mu, \quad K_L^0 \rightarrow \pi^\mp \mu^\pm \nu_\mu, \quad K_S^0 \rightarrow \pi^\mp \mu^\pm \nu_\mu$$

и пионы, рожденные в распадах каонов:

$$K_S^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-, \quad K^\pm \rightarrow \pi^\pm \pi^0, \quad K_L^0 \rightarrow \pi^\pm \ell^\mp \nu_\ell, \quad K_S^0 \rightarrow \pi^\pm \ell^\mp \nu_\ell.$$

Расчет потоков атмосферных мюонов на уровне моря под разными зенитными углами был выполнен в стандартном приближении непрерывных энергетических потерь.

На рисунках 3.12 а и 3.12 б показаны вклады перечисленных выше каналов генерации атмосферных мюонов на уровне моря для зенитных углов 0° и 90° . Эти мюоны в дальнейшем мы будем называть (π, K) -мюонами. Учет полулептонных распадов $K_{\mu 3}^\pm$ и $K_{L(\mu 3)}^0$ приводит к небольшому увеличению полных потоков (π, K) -мюонов ($\sim 3\%$).

На рисунках 3.13 а и 3.13 б представлены спектры мюонов от распадов пионов, рожденных, в свою очередь, в распадах каонов. Вклад этих цепочек распадов увеличивает полные потоки мюонов лишь на $\sim 2\%$. Определяющим здесь является распад $K_S^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$, второй по величине вклад дает распад $K^\pm \rightarrow \pi^\pm \pi^0$, трехчастичные полулептонные моды составляют не более 5% в потоке мюонов от цепочек распадов каонов.

В расчетах был учтен также такой тонкий эффект, как q^2 -зависимость формфакторов трехчастичных полулептонных мод распада каона [107]. Эффект практически не сказывается на величине суммарного (полного) потока мюонов: он мал для мюонов от $K_{\mu 3}$ распада, а цепочка распадов $K_{L,S}^0 \rightarrow \pi^\pm \rightarrow \mu^\pm$ (для которой q^2 -зависимость приводит к уменьшению спектров мюонов на $\sim 8\%$) дает поправку менее процента. Однако (см. следующий раздел), эффект формфакторов не пренебрежим для атмосферных нейтрино высоких энергий [69] и, следовательно, его следует учесть и в расчете потока мюонов (который предполагается использовать для нормировки нейтринного потока).

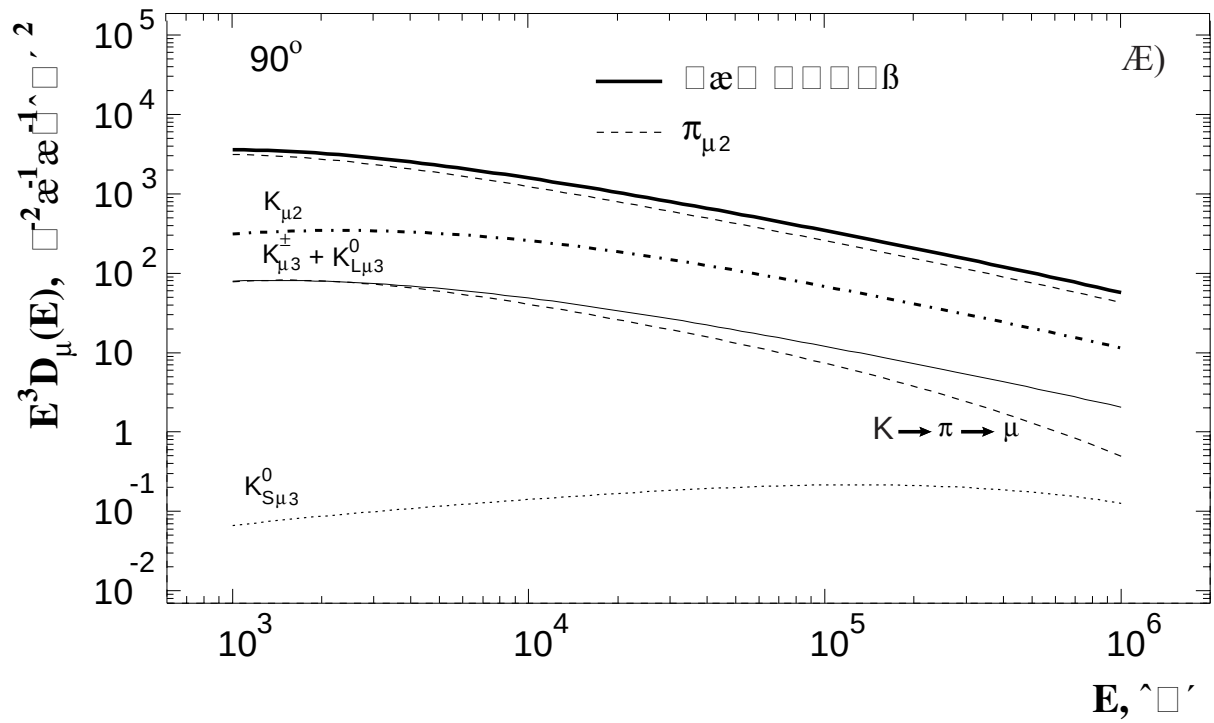
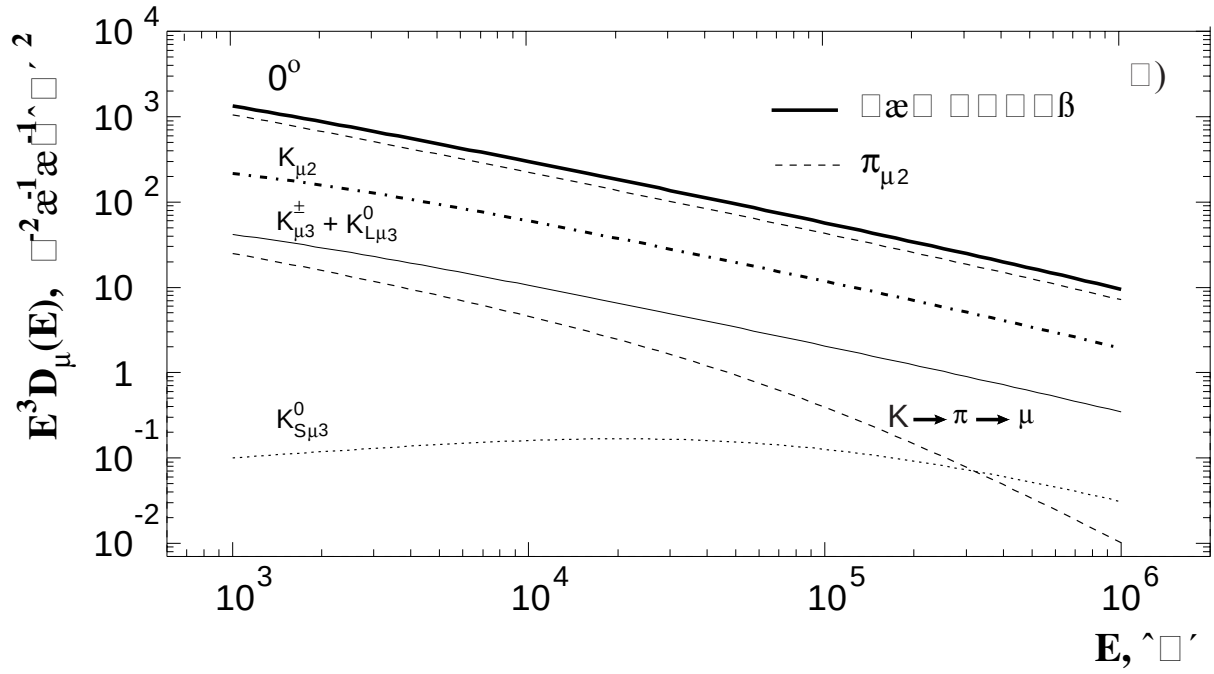


Рис. 3.12: Вклады различных распадов пионов и каонов в вертикальные и горизонтальные дифференциальные спектры мюонов на уровне моря.

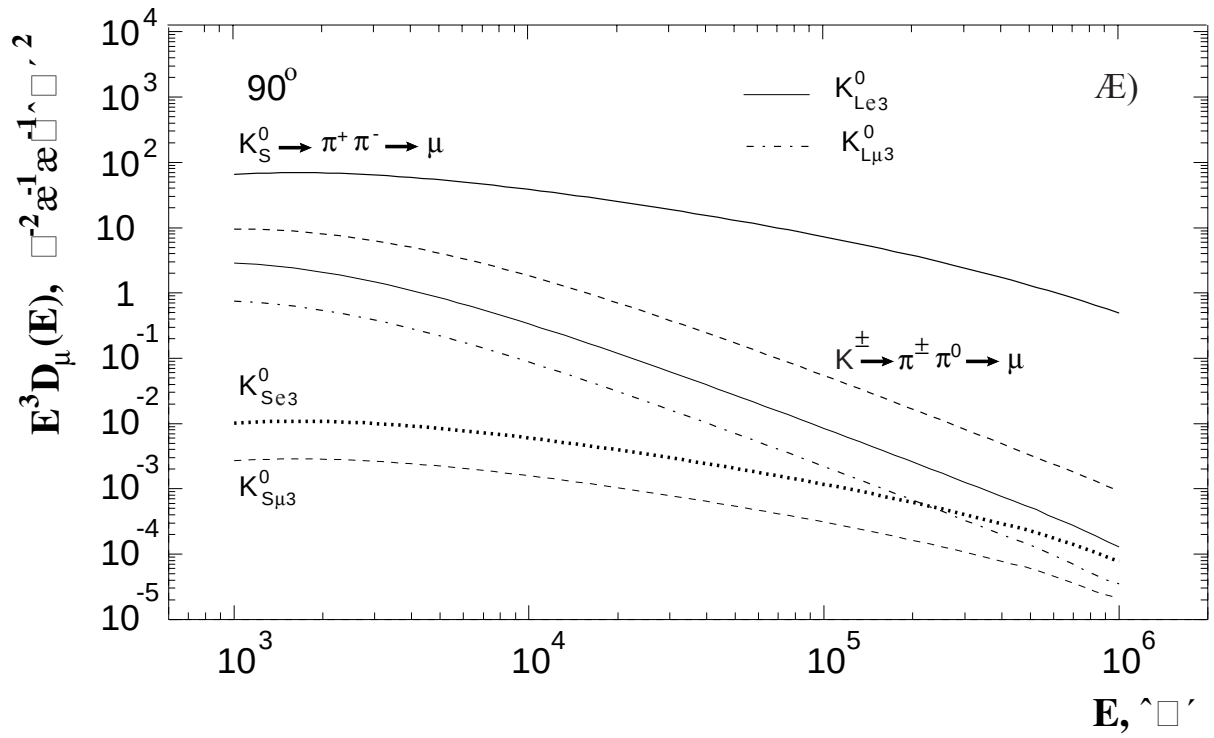
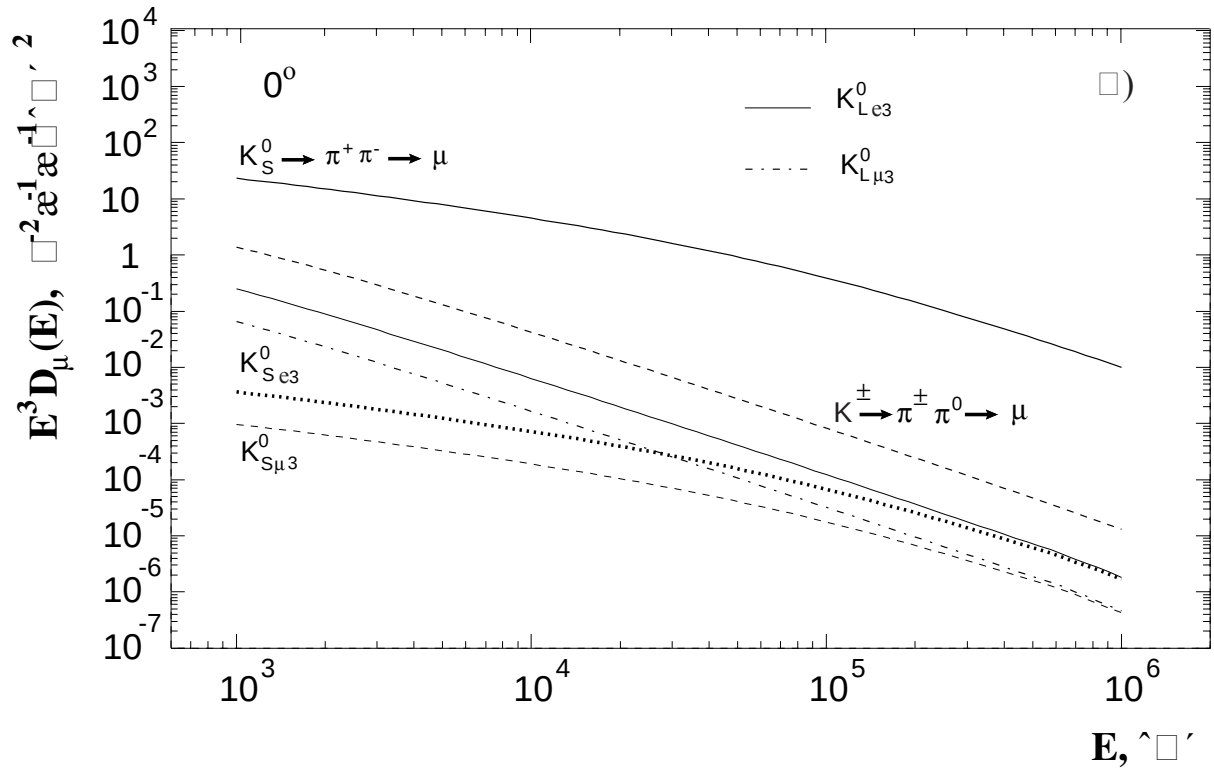


Рис. 3.13: Дифференциальные энергетические спектры мюонов на уровне моря от цепочек распадов $K \rightarrow \pi^{\pm} \rightarrow \mu^{\pm}$ для вертикали и горизонтали.

Сравнение рассчитанных дифференциальных и интегральных энергетических спектров мюонов для различных зенитных углов с экспериментальными данными со спектрометров и подземных установок приведено на рисунках 3.14 - 3.17.

Имеющиеся экспериментальные данные можно (несколько условно) разделить на прямые и косвенные. К прямым относятся данные измерений на установке MARS [108, 109], магнитных спектрометрах Ноттингема [110, 111], Дарема [112] (данные были нормированы на предыдущие результаты MARS [109] при 261 ГэВ/с), на спектрометре вблизи College Station в Техасе [113], спектрографе в Киле [114], установках MASS [115], EAS-TOP в Гран Сассо [116], спектрографе Дургапура [117] (данные нормированы на Ноттингемский спектр [111] при $p = 20$ ГэВ/с), детекторе L3 в CERN [118] MUTRON [119], DEIS [120], Брукхевена [121] и электромагнитных калориметров [122]. Косвенные данные, т.е. данные, пересчитанные разными методами к уровню моря из результатов подземных измерений (в частности, из кривой поглощения мюонов в грунте), включают в себя измерения на Артемовском сцинтилляционном детекторе ИЯИ(АСД) [123], рентгено-эмульсионных камерах МГУ (РЭК МГУ) ([124, 125]), подземном сцинтилляционном телескопе Баксанской нейтринной обсерватории [126, 127, 128], детекторах Frèjus [129], MACRO [130], LVD [131] и KGF [132, 133, 134].

На рис. 3.14, 3.15 представлены рассчитанные вертикальные дифференциальный и интегральный спектры (π, K) - мюонов, соответственно. Кроме того, на рис. 3.14 б и 3.15 б приведены вклады прямых мюонов (ПМ) для трех моделей рождения чарма: комбинационной кварк-партонной модели (РКПМ) [41], модели кварк-глюонных струн (МКГС) [51] и эмпирической модели Волковой и др. [135]. Подробное обсуждение этих моделей приводится в работе [41]. Как видно из рисунков, вклад РКПМ в поток мюонов на уровне моря мал: вплоть до $E = 100$ ТэВ он не превышает 16% для дифференциального спектра и 22% для интегрального.

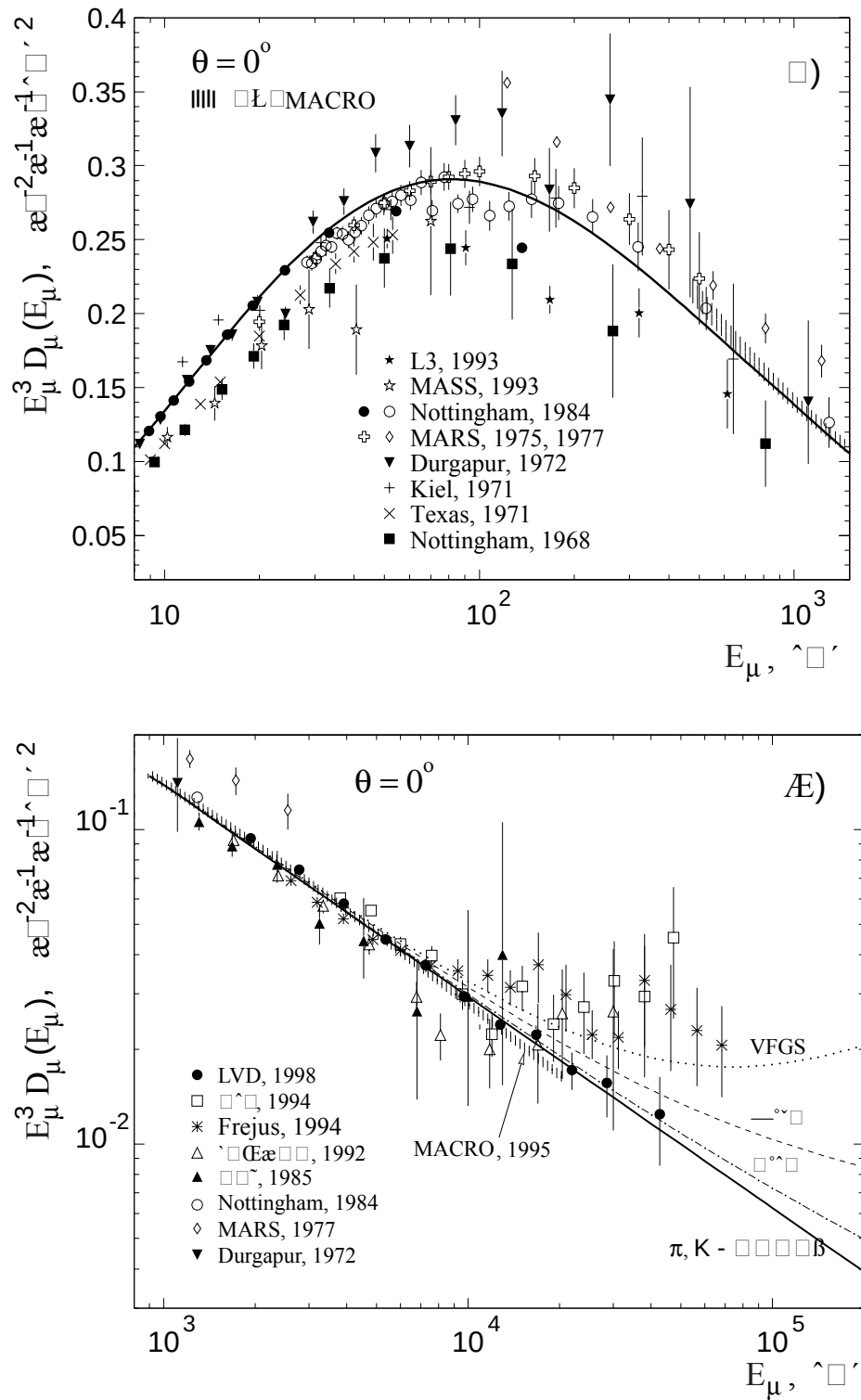


Рис. 3.14: Дифференциальные спектры мюонов на уровне моря для вертикали. Эксперимент: а) $\blacksquare$ – [110], $\bullet$, $\circ$ – [111], $\diamond$ – [112], $\times$ – [113], $+$ – [114], светлые звездочки – [115], $\blacktriangledown$ – [117], $\star$ – [118]; б) $\circ$ – [111], $\diamond$ – [112], $\blacktriangledown$ – [117], $\blacktriangle$ – [123], $\square$ – [124], $\triangle$ – [128], $*$ – [129], $\bullet$ – [131], фит MACRO – [130]. Расчет: сплошные линии – (π, K) -мюоны, штриховые – с учетом ПМ РКМ, штрих-пунктир – МКГС, пунктир – предсказание модели Волковой.

Как видно из рисунков 3.14 а и 3.15 а, данные наземных и подземных измерений потоков мюонов противоречивы, хотя большинство экспериментов имеют хорошую статистическую обеспеченность. Это свидетельствует о наличии неучтенных систематических эффектов в некоторых экспериментах.

Для энергий $E \lesssim 2$ ТэВ наш энергетический спектр хорошо согласуется с прямыми измерениями на спектрометре Ноттингама [111] (темные и светлые кружочки на рис. 3.14, 3.15). Для энергий выше нескольких десятков ТэВ мы имеем в основном косвенные данные подземных детекторов и ошибки (как статистические, так и систематические) здесь значительно выше, чем для прямых измерений, поскольку точность подземных измерений существенно ограничена неопределенностями плотности и химического состава окружающего установку грунта, соотношения пробег-поглощение мюона и др. Кроме того, при восстановлении полного мюонного спектра на уровне моря еще один источник неопределенностей связан с необходимостью закладывать в процедуру пересчета значение параметра X – отношения спектра ПМ к спектру (π, K) -мюонов как функции энергии. Поэтому процедура пересчета к спектру на уровне моря становится довольно неопределенной. Поясним это на примере результатов, полученных на детекторах KGF. Спектр мюонов в этих экспериментах для энергий (200–7500) ГэВ был получен [133] на основе данных подземных измерений в предположении $X = 0$, которое вполне приемлемо для этой области энергий. Но данные для более высоких энергий [132, 134] требуют отличного от нуля X . При оценке отношения X авторы предположили спектр рождения пионов в форме $F(E_\pi) \propto E_\pi^{-\gamma}$ и K/π -отношение равным 0.15. Затем методом χ^2 было получено, что при показателе спектра $\gamma = 2.7$ для энергий мюона 8–250 ТэВ $X = (9 \pm 2) \times 10^{-4}$. На рис. 3.15 б показан этот результат (соответствующие точки изображены ромбиками) вместе со спектром, полученным в предположении $X = 0$ (экспериментальные точки – крестики). Нетрудно понять, что извлеченный из данных подземных измерений спектр мюонов будет зависеть от выбора K/π -отношения и γ , к тому же реальный спектр мюонов и мезонов далеко не степенной.

Кратко перечислим остальные косвенные данные, представленные на рис. 3.14 б и 3.15 б. В Баксанском эксперименте [127] отношение $X = (1.5 \pm 0.5) \times 10^{-3}$ было получено из наилучшего фита рассчитанной полной интенсивности (π, K) -мюонов и ПМ с экспериментальными данными в предположении степенного характера первичного спектра со спектральным индексом $\gamma_N = 1.65$.

В работе [129] спектр на уровне моря был пересчитан в приближении непрерывных энергетических потерь мюонов с некоторыми эффективными и зависящими от энергии потерь коэффициентами. Однако хорошо известно, что при расчете кривой поглощения

в грунте, приближение непрерывных потерь приводит к меньшему наклону и соответствующие ошибки быстро растут с глубиной [136, 137, 138, 139]. Скорее всего мюонный спектр, полученный в [129], в значительной степени завышен, а систематические ошибки для $E \gtrsim 10$ ТэВ занижены вследствие упрощенного анализа.

Фит MACRO [130], полученный из данных подземных экспериментов изображен на рис. 3.14 а, 3.14 б заштрихованной областью. Он имеет следующий вид:

$$\mathcal{D}_{\mu}^{\text{MACRO}}(E, h = 10^3 \text{ г/см}^2, \theta) = C_0 \left(\frac{E}{1 \text{ ГэВ}} \right)^{-\gamma_{\mu}} \left(\frac{1}{1 + \frac{1.1E \cos \theta}{115 \text{ ГэВ}}} + \frac{0.054}{1 + \frac{1.1E \cos \theta}{850 \text{ ГэВ}}} \right), \quad (3.7)$$

где $C_0 = (0.26 \pm 0.01) \text{ см}^{-2} \text{ с}^{-1} \text{ ср}^{-1} \text{ ГэВ}^{-1}$ и $\gamma_{\mu} = 2.78 \pm 0.01$. В измерениях [130], систематические ошибки, обусловленные неопределенностями плотности грунта и большими потерями в сечениях, достигают 5 % в C_0 и, что гораздо более важно, 3 % в γ_{μ} . Действительно, изменение γ_{μ} на 3 % отвечает неопределенностям в потоке мюонов на поверхности в 47 %, 78 % и более 100 % для энергий 10^2 , 10^3 и 10^4 ГэВ соответственно. Таким образом, данные MACRO формально не противоречат всем остальным косвенным данным, показанным на рис.3.14.

Данные других подземных экспериментов получены разными методами. В эксперименте на АСД [123] (соляная шахта на глубине 570 м в.э.) измеряется энергия ливней, рожденных мюонами космических лучей в соли и в сцинтилляторе ($C_{10}H_{22}$). В Баксанском “калориметрическом” эксперименте [128] интегральный спектр мюонов восстанавливался из спектра электромагнитных каскадов, генерируемых мюонами в телескопе. При нахождении интенсивности мюонов на поверхности авторы использовали метод пересчета, подобный изложенному в работах [126, 127]. 10 %-ая ошибка в калибровке энергосъемления в детекторе может привести к систематической ошибке в 25 % при определении абсолютной интенсивности мюонов в этом эксперименте. Данные МГУ [124] получены из многомерного анализа измеренных энергетических и угловых распределений электрон-фотонных каскадов, рожденных мюонами в рентгено-эмульсионных камерах. Однако результат, полученный этим методом, также чувствителен к выбранным моделям первичного спектра и рождения чарма. В работе [124] использовался показатель первичного спектра равный $\gamma_N = 1.64 \pm 0.03$ для энергий нуклонов (20–400) ТэВ, наилучший фит X -отношения меняется от $(2.6 \pm 0.8) \times 10^{-3}$ при $E = 5$ ТэВ до $(3.3 \pm 1.0) \times 10^{-3}$ при $E = 40$ ТэВ.

Вплоть до 5 ТэВ наш расчет для дифференциального и интегрального спектров не противоречит измерениям АСД и РЭК МГУ. Ниже нескольких ТэВ он хорошо согласуется с данными Баксана, Gréjus и MACRO, извлеченными из кривой поглощения мюо-

нов в грунте, а также с данными Баксана, полученными из спектров электромагнитных каскадов [128].

Отметим здесь, что расчеты потоков в рамках РКПМ близки к максимальным предсказаниям недавней модели [140], основанной на пертурбативной КХД, а расчеты, выполненные в рамках МКГС, практически совпадают с минимальным предсказанием этой модели (см. [141]).

Максимальные потоки, которые дает РКПМ в области энергий выше 20 ТэВ, только с некоторой натяжкой можно считать не противоречащими данным РЭК МГУ [124] и Frèjus [129], которые указывают на сильное выполаживание мюонного спектра. Предсказания же МКГС скорее не подтверждаются этой группой экспериментальных данных, в отличие от данных LVD [131].

Вероятно, можно говорить о некотором противоречии данных МГУ (для вертикали) и установки Frèjus (и, в какой-то степени, Артёмовска [123] и Баксана [128]), с одной стороны, и эксперимента на подземной установке LVD – с другой. Для данных LVD (тёмные кружочки на рис. 3.14) характерна высокая степень согласованности (с точки зрения нашего расчета) спектра, пересчитанного к уровню моря, и кривой поглощения мюонов, измеренной непосредственно на подземной установке. Данные LVD и на глубине $h \sim 10^6$ г/см² требуют минимального вклада ПМ (см. рис. 14 в [41]), совместимого с предсказаниями МКГС (хотя, строго говоря, они не противоречат РКПМ). Измерения в Гран Сассо, по-видимому, закрывают предсказания модели Волковой и др. [135]. Результаты KGF [132], полученные при $X = (9 \pm 2) \times 10^{-4}$ качественно согласуются с предсказаниями РКПМ.

Как следует из наиболее реалистичных моделей рождения чарма [41, 140], для направлений близких к горизонтальному, вклад прямых мюонов не может быть замечен при энергиях, доступных в сегодняшних экспериментах (MUTRON, DEIS, РЭК МГУ и др.). Поэтому при сопоставлении экспериментальных данных с рассчитанным энергетическим спектром мюонов мы не будем рассматривать мюоны от распада чарма. На рис. 3.16 представлено сравнение рассчитанных энергетических спектров (π, K)-мюонов для зенитных углов $\theta = 45^\circ, 72^\circ$ и 89° с данными измерений спектрометров MUTRON [119], DEIS [120] для 89° , РЭК МГУ для $\theta = 45^\circ, 72^\circ$ [125] и 89° [124], установки в Брукхевене [121] для 30° и 75° и измерениями для $85^\circ - 90^\circ$, выполненными на электромагнитных калориметрах [122]. На рис. 3.17 дано сравнение рассчитанных спектров мюонов с результатами измерений спектрометра DEIS для восьми зенитных углов (от 79° до 90°). Как видно из рисунков наш расчет хорошо согласуется с всеми экспериментальными данными, за исключением данных калориметрического экспери-

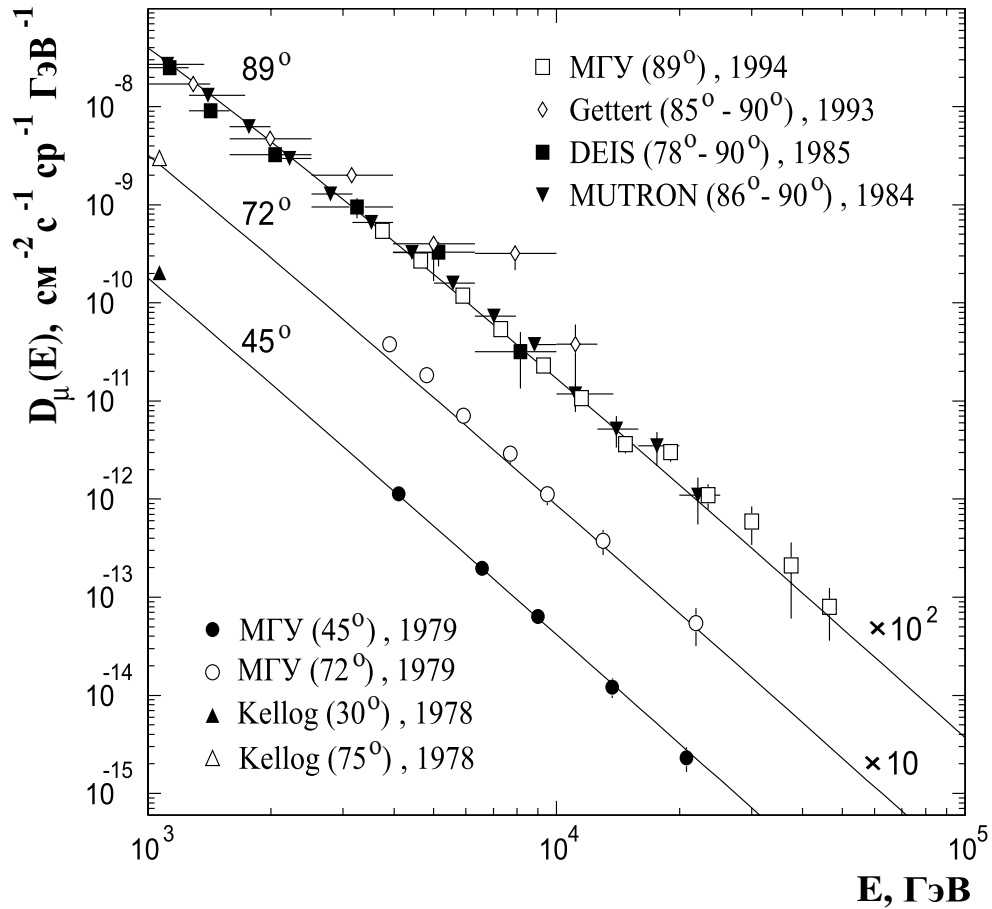


Рис. 3.16: Дифференциальные энергетические спектры мюонов на уровне моря для зенитных углов 45° , 72° и 89° . Эксперимент: $\blacktriangledown$ – [119], $\blacksquare$ – [120], $\triangle$, $\blacktriangle$ – [121], $\diamond$ – [122], $\square$ – [124], $\bullet$, $\circ$ – [125].

мента [122].

Поведение зарядового отношения потоков мюонов μ^+/μ^- определяется химическим составом первичного излучения и дифференциальными сечениями рождения пионов и каонов. Поэтому из сравнения рассчитанного μ^+/μ^- -отношения с экспериментальными данными в принципе можно получить информацию о деталях адронного каскада в атмосфере. Результаты расчета положительного избытка мюонов с $E > 1$ ТэВ на уровне моря в зависимости от энергии приведены на рис. 3.18. Сплошной (жирной), штриховой, штрих-пунктирной и пунктирной линиями на рисунке изображены $\mu^+\mu^-$ -отношения для (π, K) -мюонов при различных зенитных углах ($\theta = 0^\circ, 60^\circ, 80^\circ$ и 90° , соответственно). Тонкой сплошной линией показан расчет с учетом вклада прямых мюонов на вертикали, рассчитанный в рамках РКПМ. Согласно МКГС вклад ПМ практически не влияет на зарядовое отношение. На рис. 3.18 также представлены результаты измерений

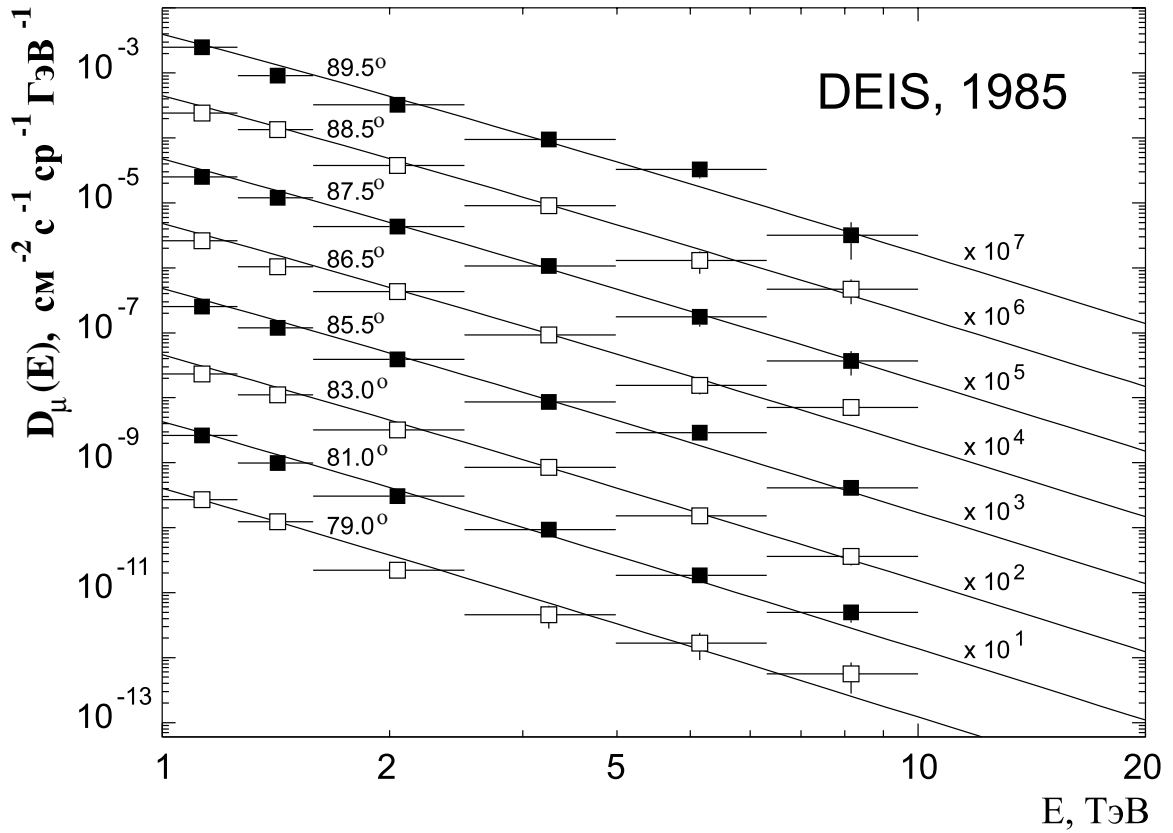


Рис. 3.17: Сравнение потоков мюонов на уровне моря с данными измерений DEIS спектрометра [120] в интервале зенитных углов $79^\circ - 90^\circ$.

спектрометров MUTRON ($86^\circ - 90^\circ$) [119], DEIS (85°) [142], детектора Kamiokande II ($0^\circ - 90^\circ$) [143], данные группы Utah ($40^\circ - 90^\circ$), взятые из работы [144], данные для $\theta > 70^\circ$ из обзора, приведенного в работе [119], и результат более ранних экспериментов, взятый из работы [145]. Последний получен из обработки данных пяти экспериментов. Все эти эксперименты (см. ссылки в [145]) дают $\mu^+/\mu^- \lesssim 1$, а именно, $0.774^{+0.326}_{-0.294}$ для $E = 1090$ ГэВ (MacKeown, 1965), $0.781^{+0.954}_{-0.425}$ (Palmer и Nash, 1968), 0.9 ± 0.25 для $E = 1080$ ГэВ (Fujii, 1969), $1.066^{+0.111}_{-0.123}$ для $E = 1095$ ГэВ (Kamiya, 1969), 0.75 ± 0.4 для энергий от 1000 ГэВ до 1300 ГэВ (Alkofer, 1970), что резко противоречит новым данным при $E \sim 1$ ТэВ. Статистические и систематические ошибки более поздних измерений зарядового отношения при $E \gtrsim 3$ ТэВ настолько велики, что извлечь из них количественную информацию кажется проблематичным. Можно лишь утверждать, что в целом рассчитанное μ^+/μ^- -отношение не противоречит имеющимся данным в области энергий 1 – 20 ТэВ.

Результат расчета вертикального импульсного спектра (π, K) - мюонов на уровне

моря можно аппроксимировать следующей формулой:

$$\mathcal{D}_\mu(p) = \begin{cases} C_1 p^{-(0.3061+1.2743x-0.263x^2+0.0252x^3)}, & p^{(1)} \leq p \leq p^{(2)}, \\ C_2 p^{-(1.791+0.304x)}, & p^{(2)} < p \leq p^{(3)}, \\ C_3 p^{-3.672}, & p^{(3)} < p \leq p^{(4)}, \\ C_4 p^{-4}, & p > p^{(4)}. \end{cases} \quad (3.8)$$

Здесь $x = \lg(p/p^{(1)})$, $C_1 = 2.95 \times 10^{-3} \text{ см}^{-2} \text{ с}^{-1} \text{ ср}^{-1} (\Gamma \text{эВ}/c)^{-1}$, $p^{(1)} = 1 \Gamma \text{эВ}/c$,

$C_2 = 1.781 \times 10^{-2} \text{ см}^{-2} \text{ с}^{-1} \text{ ср}^{-1} (\Gamma \text{эВ}/c)^{-1}$, $p^{(2)} = 9.2765 \times 10^2 \Gamma \text{эВ}/c$,

$C_3 = 1.435 \times 10^1 \text{ см}^{-2} \text{ с}^{-1} \text{ ср}^{-1} (\Gamma \text{эВ}/c)^{-1}$, $p^{(3)} = 1.5878 \times 10^3 \Gamma \text{эВ}/c$,

$C_4 = 10^3 \text{ см}^{-2} \text{ с}^{-1} \text{ ср}^{-1} (\Gamma \text{эВ}/c)^{-1}$, $p^{(4)} = 4.1625 \times 10^5 \Gamma \text{эВ}/c$.

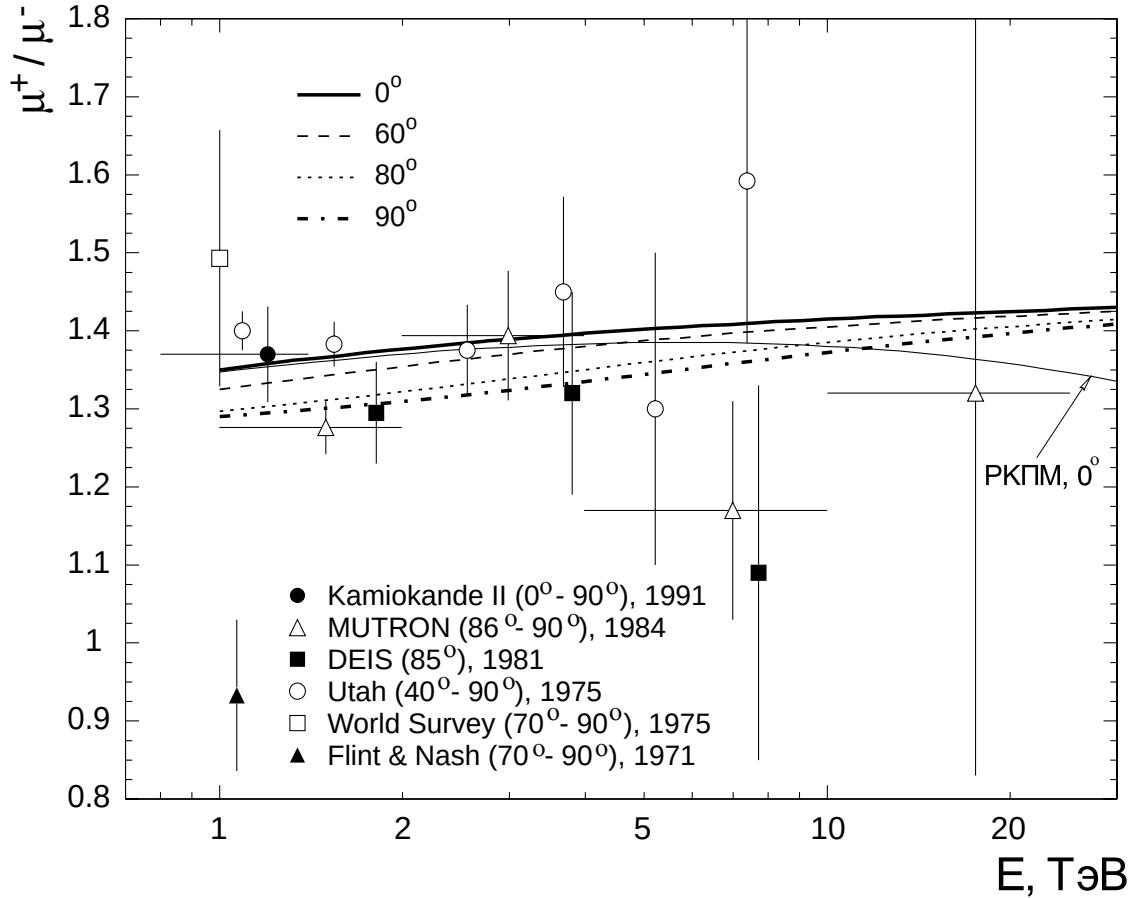


Рис. 3.18: μ^+/μ^- -отношение на уровне моря для (π, K) -мюонов при различных зенитных углах. Эксперимент: $\triangle$, $\square$ – [119], $\blacksquare$ – [142], $\bullet$ – [143], $\circ$ – [144], $\blacktriangle$ – [145].

Сравнение нашего расчета дифференциального спектра мюонов на уровне моря для вертикали с результатами расчетов других авторов – Волковой и др. [6], Дара [8], Буткевича и др. [11], Липари [12], Агравала и др. [13] приведено на рисунке 3.19. При сравнении использовались аппроксимационные формулы [6, 8] или таблицы [11, 12, 13].

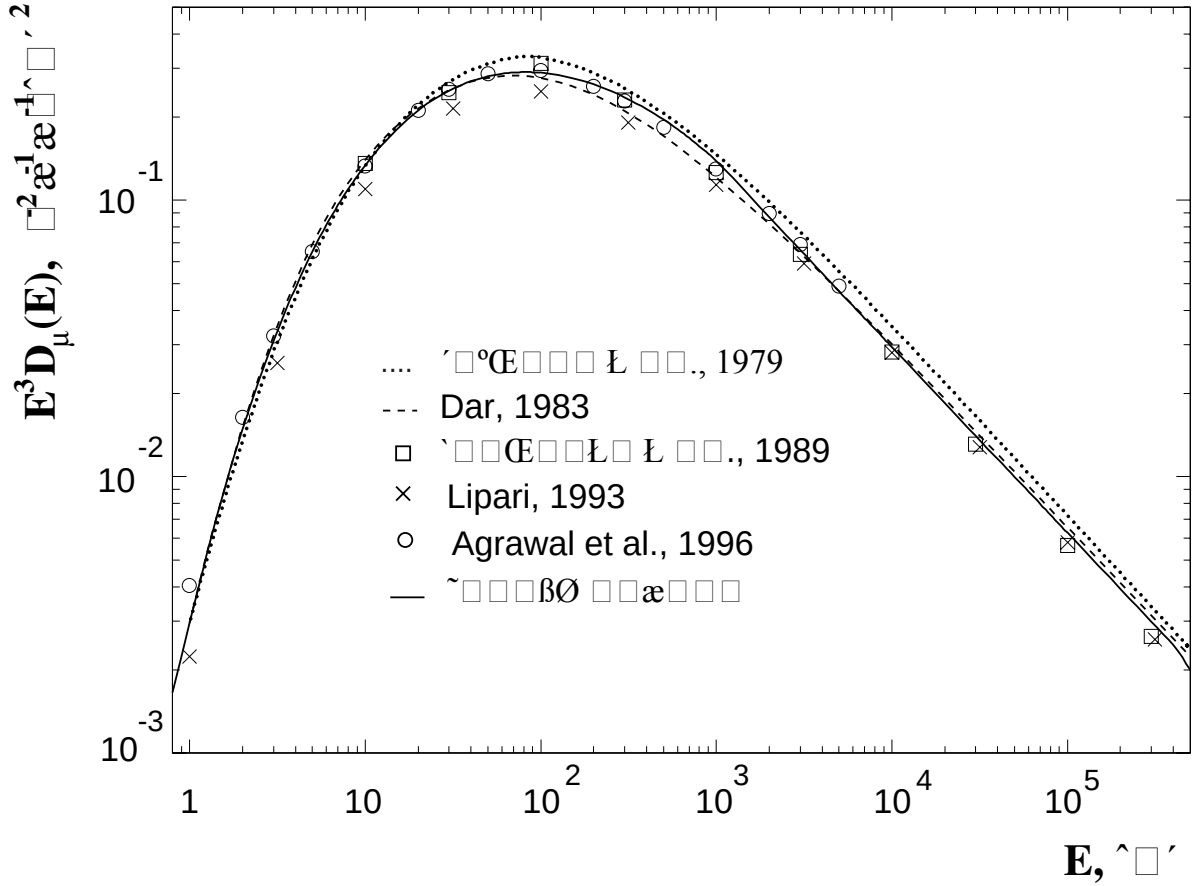


Рис. 3.19: Сравнение расчета дифференциального импульсного спектра (π, K) -мюонов для вертикали на уровне моря, с расчетами других авторов [6, 8, 11, 12, 13].

В табл. 3.5 представлено отношение каждого расчетного спектра из работ [6, 8, 11, 12, 13] к нашему для $E = 1, 10, \dots, 10^6$ ГэВ. Как видно из рисунка 3.19 и табл. 3.5, в области импульсов от ~ 5 до 5×10^3 ГэВ/с наш расчет находится в хорошем согласии с недавним расчетом [13], выполненным методом Монте-Карло (расхождение – меньше 6 %). При низких энергиях 1–10 ГэВ наш расчет близок к аппроксимациям [6] и [8].

На рис. 3.20 показано отношение $D_\mu(E, \theta)/D_\mu(E, \theta = 0^\circ)$, характеризующее угловое усиление потоков мюонов, обусловленное относительным увеличением вероятности π, K распадов с ростом зенитного угла. Помимо нашего расчета, на рисунке приведены результаты расчетов [11] и [13]. Имеется хорошее согласие с расчетом [13] при $E = 1$ ТэВ

Таблица 3.5: Отношения вертикальных дифференциальных спектров (π, K) -мюонов, рассчитанных разными авторами, к спектру данной работы.

Расчеты	E (ТэВ)						
	1	10	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6
Волкова и др. [6]	1.010	0.996	1.135	1.056	1.189	1.156	1.483
Дар [8]	1.001	1.046	0.958	0.873	1.023	1.047	1.405
Буткевич и др. [11]	—	1.015	1.079	0.909	0.958	0.902	1.140
Липари [12]	0.753	0.820	0.858	0.823	0.955	0.923	1.160
Агравал и др. [13]	1.355	0.992	1.017	0.938	—	—	—

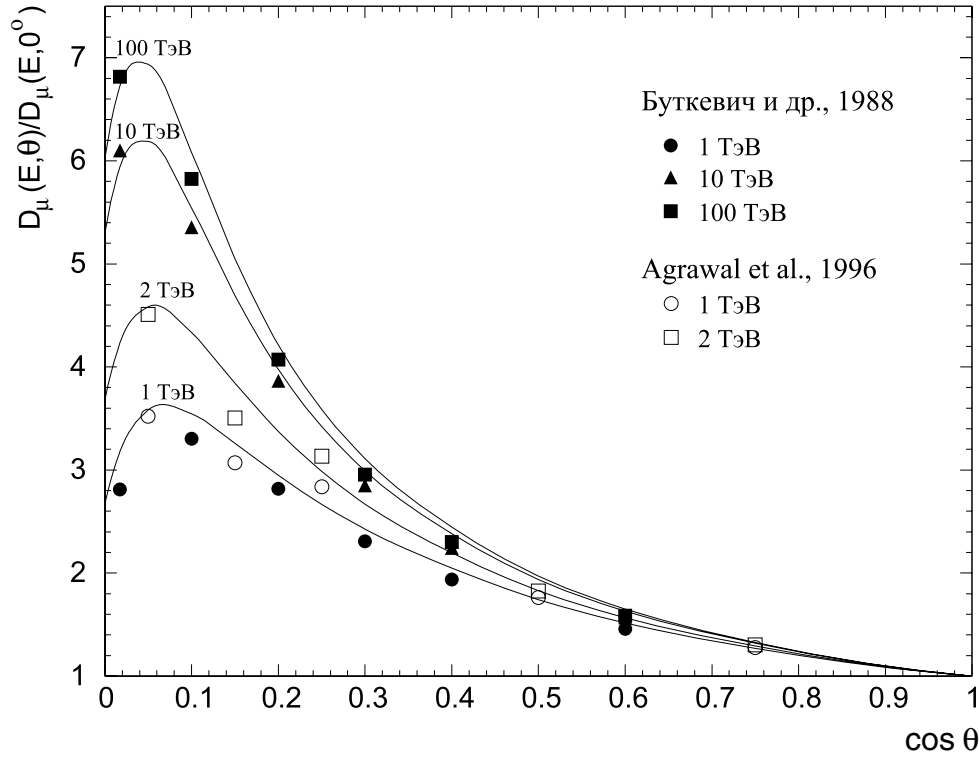


Рис. 3.20: Зенитно-угловые распределения (π, K) -мюонов на уровне моря для $E = 1, 2, 10$ и 100 ТэВ. Кривые – данный расчет; точки: $\bullet$, $\blacksquare$, $\blacktriangle$ – расчет [11]; $\circ$, $\square$ – расчет [13].

и 2 ТэВ и большое расхождение с расчетом [11] в области углов $\theta \simeq 60^\circ - 80^\circ$. Видимое различие при $E \lesssim 1$ ТэВ можно частично отнести за счет выбора модели первичного спектра: в работе [11] использовался спектр Раяна [146].

3.4.2 Мюоны под землей и под водой

Полученные энергетические спектры и угловые распределения мюонов использовались в качестве граничных спектров в задаче о прохождении мюонов через воду. Задача была решена на основе аналитического метода, предложенного в работе [139]. Метод позволяет для произвольного, убывающего с энергией, граничного спектра приближенно решить кинетическое уравнение с интегралом столкновений, в котором учтена зависимость от энергии сечений взаимодействия мюона с веществом. Обсудим сравнение расчетов кривой поглощения мюонов в плотном веществе с данными подземных и подводных измерений.

На рис. 3.21 приведено сравнение с данными, полученными на различных детекторах, расположенных в шахте Kolar Gold Fields (KGF) (Индия). Фон от мюонов, рождающихся во взаимодействиях нейтрино с веществом земли, в работе [132] был вычтен из данных. Четыре кривые на рис. 3.21 представляют наши предсказания для мюонных потоков без учета и с учетом вклада ПМ в рамках упомянутых выше моделей рождения чарма – РКПМ, МКГС и VFGS. Расчеты сделаны для грунта KGF с $\langle Z \rangle = 12.9$, $\langle A \rangle = 26.9$, $\langle Z/A \rangle = 0.495$, $\langle Z^2/A \rangle = 6.31$ и $\langle \rho \rangle = 3.05$ г/см³ (Z , A и ρ – атомный номер, атомный вес и плотность вещества).

Вплоть до 6–7 км водного эквивалента (в.э.) рассчитанная кривая поглощения мюонов хорошо согласуется с данными KGF независимо от моделей рождения чарма. При $h \gtrsim 7$ км в.э. кривая поглощения KGF превышает рассчитанную без учета рождения чарма. В то же время, анализ влияния неопределенностей свойств грунта KGF, выполненный в работах [147, 148], показывает, что расчет кривой поглощения мюонов с граничным спектром (3.8), и с учетом вклада прямых мюонов для модели РКПМ, не противоречит экспериментальным данным.

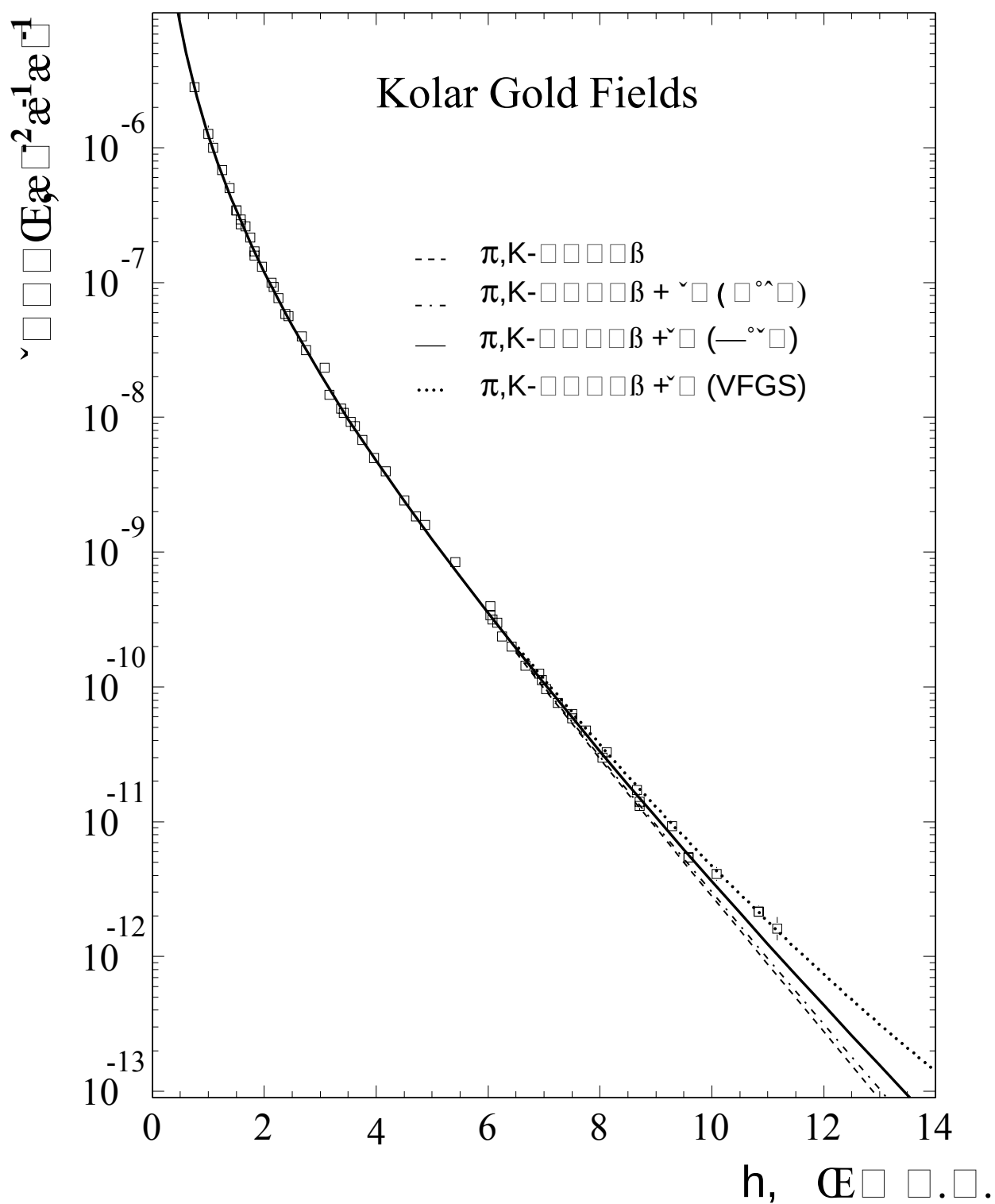


Рис. 3.21: Кривая поглощения мюонов в грунте KGF и данные измерений. Эксперимент — [132].

Модели РКПМ и VFSG согласуются с этими данными вплоть до 10 км в.э., причем VFSG лучше описывает данные измерений на больших глубинах. Это не противоречит ситуации представленной на рис. 3.15б для интегрального спектра на уровне моря, если принять во внимание неопределенность методики пересчета.

На рис. 3.22 представлены данные Баксана в сравнении с расчетом. Результаты измерений для зенитных углов $50^\circ - 70^\circ$ ([126]) и $70^\circ - 85^\circ$ ([127]) пересчитаны авторами к вертикальному направлению и к стандартному грунту. Мюонный фон, индуцируемый нейтрино, был вычтен из данных для больших глубин. Систематическое расхождение между двумя группами данных имеет место в интервале глубин от 6 до 9 км в.э.: в первой группе ($50^\circ - 70^\circ$) ясно виден выгиб интенсивности, в то время как он отсутствует для второй группы данных. Авторы [126] считают, что наблюдаемый "горб" может быть связан с наличием прямых мюонов. По нашему мнению, источник "горба" – скорее всего связан с ошибкой определения наклонных глубин. Вне интервала 6–9 км в.э. экспериментальные точки обеих групп ложатся на плавную кривую. В тоже время данные при $h \gtrsim 10$ км в.э. не исключают наличия некоторой доли ПМ в измеренном потоке подземных мюонов. Из-за довольно больших экспериментальных ошибок любая рассмотренная выше модель рождения чарма (в том числе и случай с нулевым вкладом ПМ) не может быть исключена измерениями на Баксане, но, по-видимому, для них предпочтительней оказывается модель РКПМ. Сравнение рис. 3.22 и рис. 3.15б указывает на то, что интегральный спектр на уровне моря, восстановленный в [127] из кривой поглощения мюонов, был завышен.

Сравнение рассчитанной кривой поглощения мюонов с данными измерений детектора Fréjus [149] (под Альпами) представлено на рис. 3.23. Толщина альпийского грунта пересчитана на количество вещества (в г/см²) стандартного грунта ($Z = 11$, $A = 22$, $\rho = 2.65$ г/см³): 100 г/см² = 1 м в.э. Согласно [150] мюонный фон, генерируемый нейтрино, становится доминирующим при $h \gtrsim 13$ км в.э., и измеренный средний фоновый поток равен $\mathcal{I}_\mu^\nu = (3.67 \pm 0.66) \times 10^{-13}$ см⁻²с⁻¹ср⁻¹. Как видно из рис. 3.23, рассчитанная без учета ПМ кривая (сплошная жирная линия), почти везде согласуется с данными Fréjus с учетом мюонного фона, хотя вблизи и ниже $h = 10$ км в.э. имеется некоторое превышение расчета над экспериментом.

Вклады ПМ, рассчитанные в моделях РКПМ и VFSG, не описывают эту группу данных. Однако с точки зрения экспериментальных неопределенностей, нельзя утверждать, что предсказания РКПМ находятся в серьезном противоречии с результатами детектора Fréjus. Понятно, что то же справедливо и для модели МКГС.

Недавние измерения двух больших подземных детекторов MACRO [130] и LVD [131]

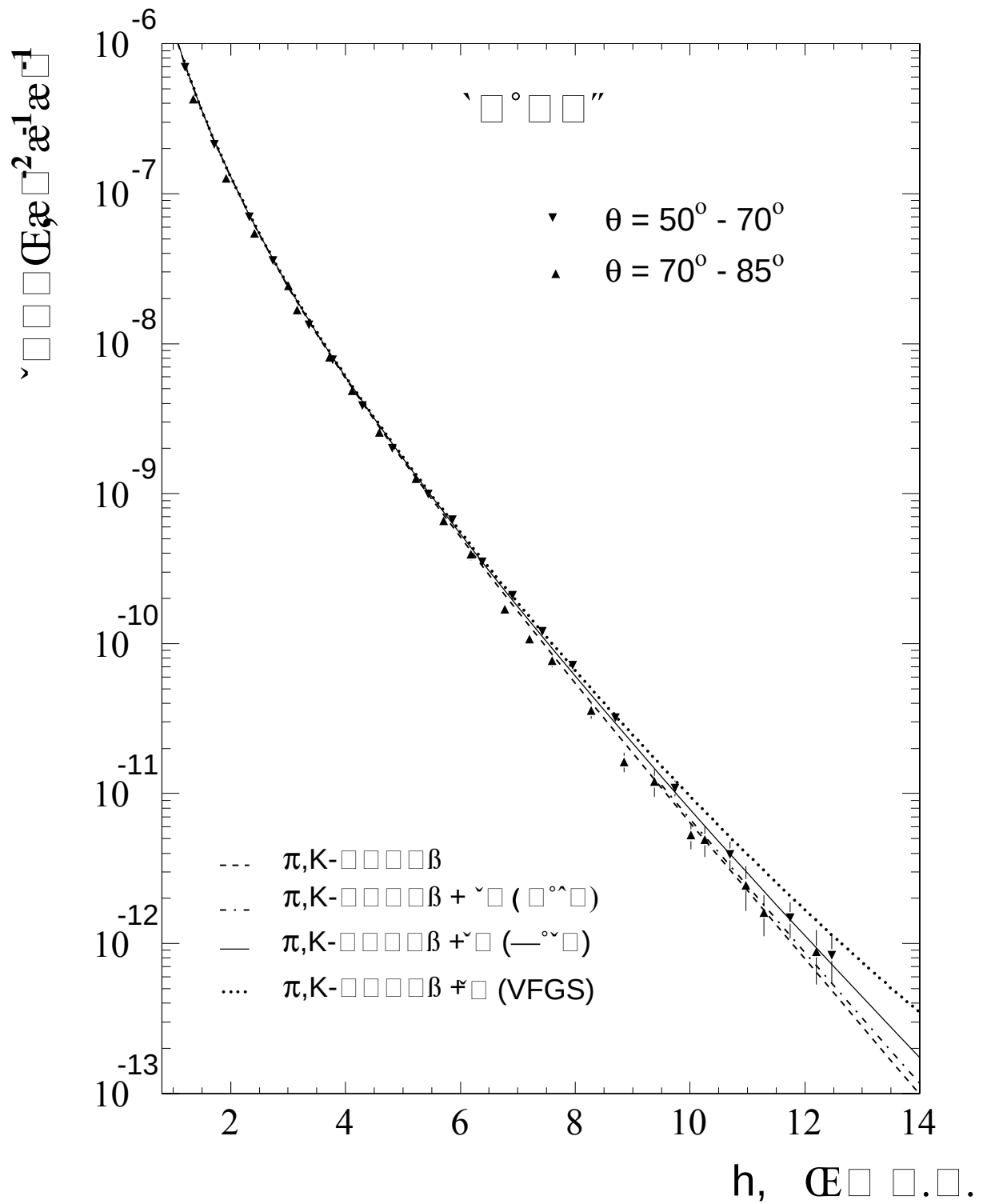


Рис. 3.22: Данные Баксана и рассчитанная кривая поглощения мюонов в стандартном грунте. Эксперимент — [126, 127].

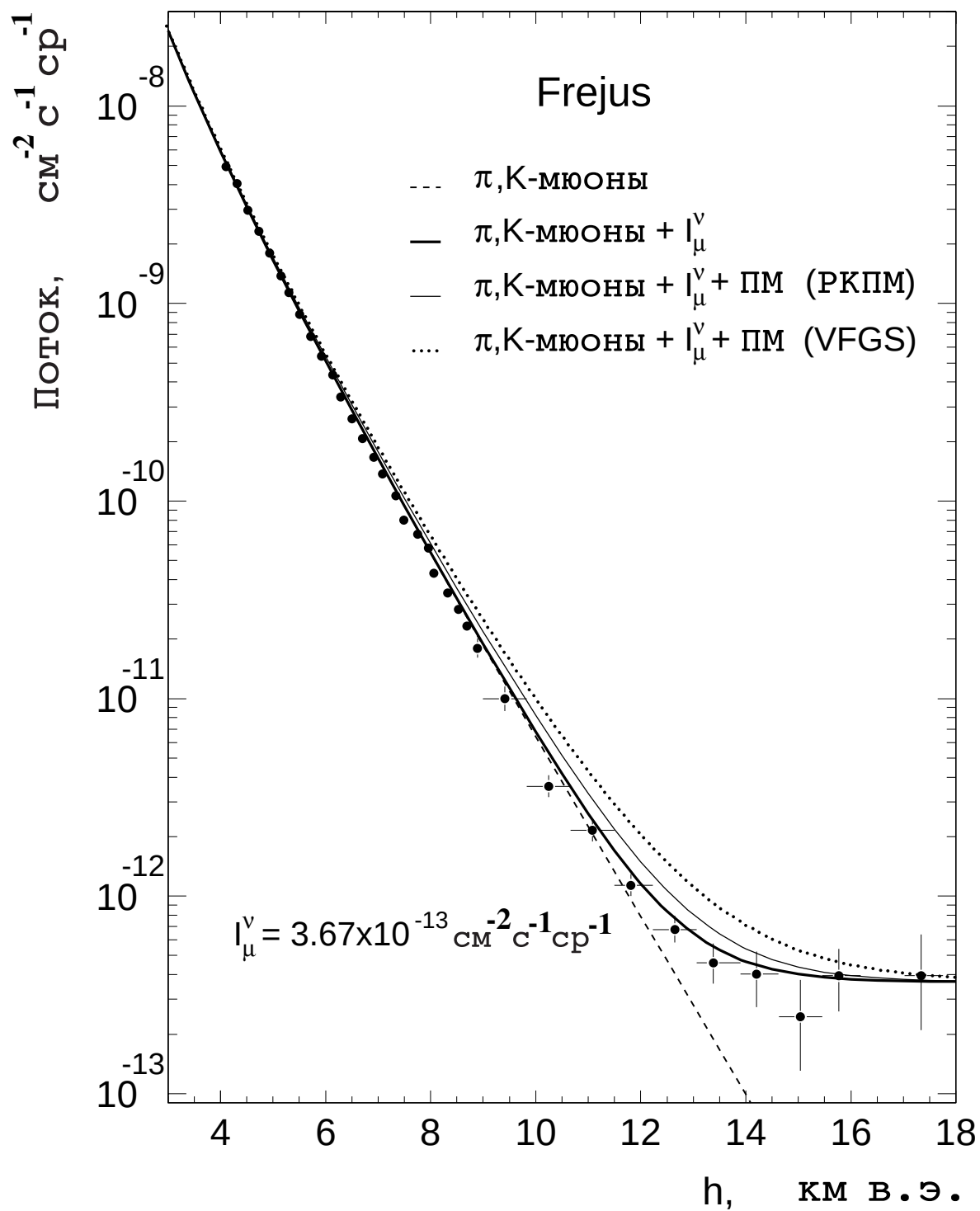


Рис. 3.23: Кривая поглощения мюонов в стандартном грунте и данные установки Fréjus [149].

(расположенных в Национальной лаборатории Гран Сассо, Италия) приведены на рис. 3.24 и 3.25. Данные MACRO пересчитаны авторами к стандартному грунту. Результаты LVD даны как для грунта Гран Сассо, так и в пересчете на стандартный грунт. Ошибки включают в себя как статистические, так и систематические неопределенности. Отметим, что при $h \lesssim 5$ км в.э. статистические ошибки меньше, чем размер кружочков на рисунке. Глубины, доступные для наблюдения детектором MACRO, недостаточны для наблюдения прямых мюонов. Поэтому на рис. 3.24 представлена кривая поглощения только (π, K) -мюонов. На глубинах, доступных для детектора LVD (рис. 3.25) вклад ПМ может быть существен. При расчете кривой использовалось следующее значение мюонного фона от нейтрино: $\mathcal{I}_\mu^\nu = (2.98 \pm 1.15) \times 10^{-13} \text{ см}^{-2} \text{ с}^{-1} \text{ ср}^{-1}$ [151].

Из рис. 3.24 видно, что в интервале от 3.2 до ~ 6 км в.э. результат MACRO систематически выше рассчитанного потока мюонов на 8-10 %, что выходит за пределы ошибок, оцененных в [130]. Это противоречит спектру мюонов на уровне моря, восстановленному из подземных измерений MACRO (см. рис. 3.14). Действительно, наш спектр (π, K) -мюонов на уровне моря хорошо согласуется с фитома спектра MACRO (3.7) в интервале энергий от 600-700 ГэВ до 6-7 ТэВ, а при более высоких энергиях наш расчет проходит выше фита MACRO. Однако, как отмечалось раньше, полная систематическая ошибка восстановления (3.7) настолько велика, что может объяснить это противоречие, по крайней мере, формально.

Для всех глубин данные LVD отлично согласуются с нашим расчетом для кривой поглощения (π, K) -мюонов и хорошо описываются моделями рождения чарма, которые предсказывают небольшие вклады ПМ (МКГС). Согласованность этих данных с нашими расчетами для стандартного грунта и для грунта Гран Сассо свидетельствует о правильности новой методики пересчета к стандартному грунту, используемой в [131].

Из сказанного следует, что данные наземных измерений потоков мюонов и подземных детекторов настолько противоречат друг другу, что пока извлечение информации о чарме представляет собой трудноразрешимую задачу. Некоторые проблемы подземных мюонных экспериментов могут быть разрешены измерениями на подводных (подледных) черенковских установках, обладающих такими преимуществами как высокая степень однородности вещества-поглотителя (вода, лед) и большой детекторный объем. На рис. 3.26 приведено сравнение рассчитанной кривой поглощения мюонов в воде с экспериментальными данными многолетних измерений [152, 153, 154, 155, 156] (см. [41]), включая последние - полученные на Байкальском нейтринном телескопе [38, 157] и на установке AMANDA (Южный полюс) [158].

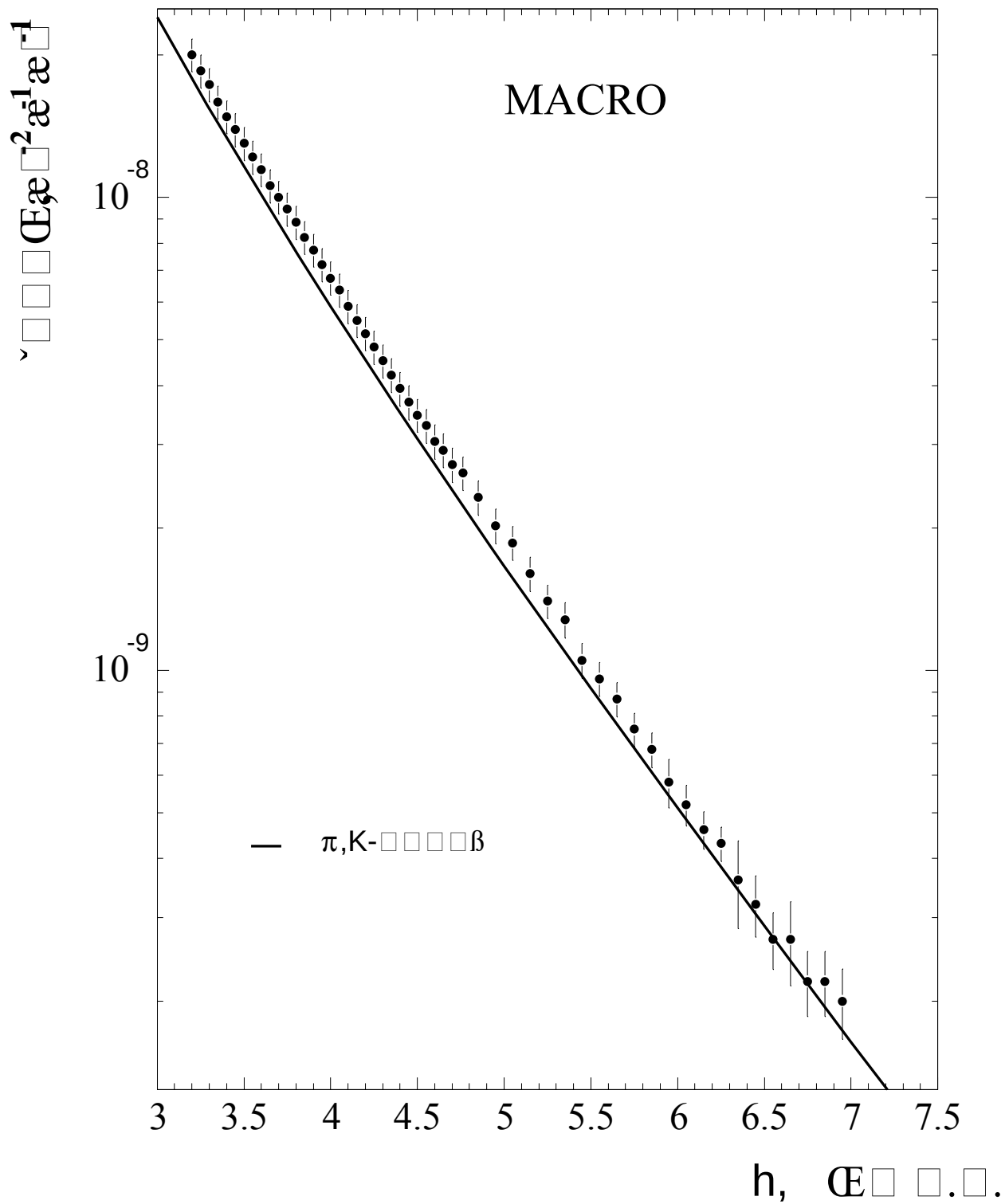


Рис. 3.24: Данные MACRO [130] и рассчитанная кривая поглощения (π, K) -мюонов в стандартном грунте.

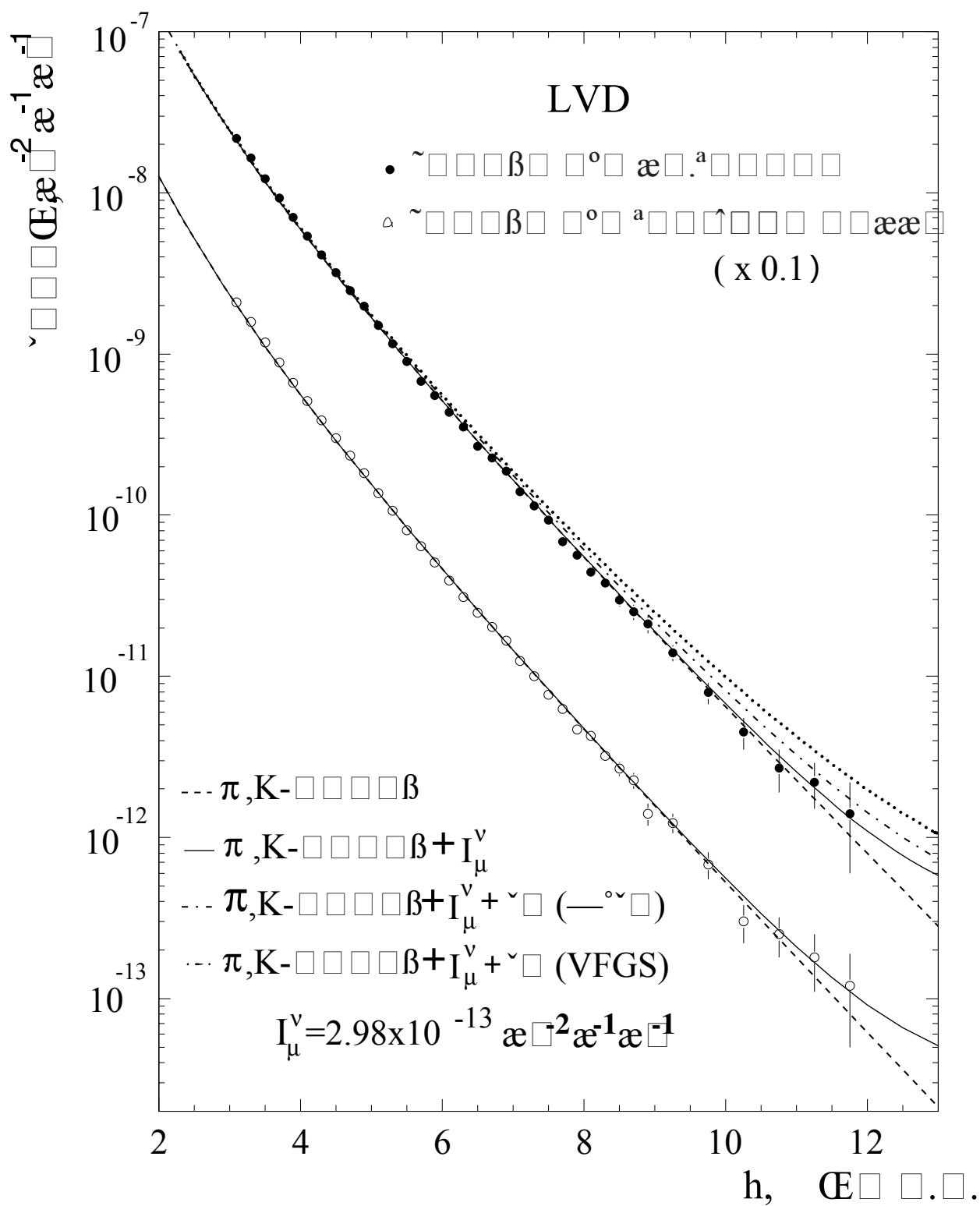


Рис. 3.25: Данные LVD [131] и рассчитанные кривые поглощения мюонов в стандартном грунте (верхняя группа линий) и грунте Гран Сассо.

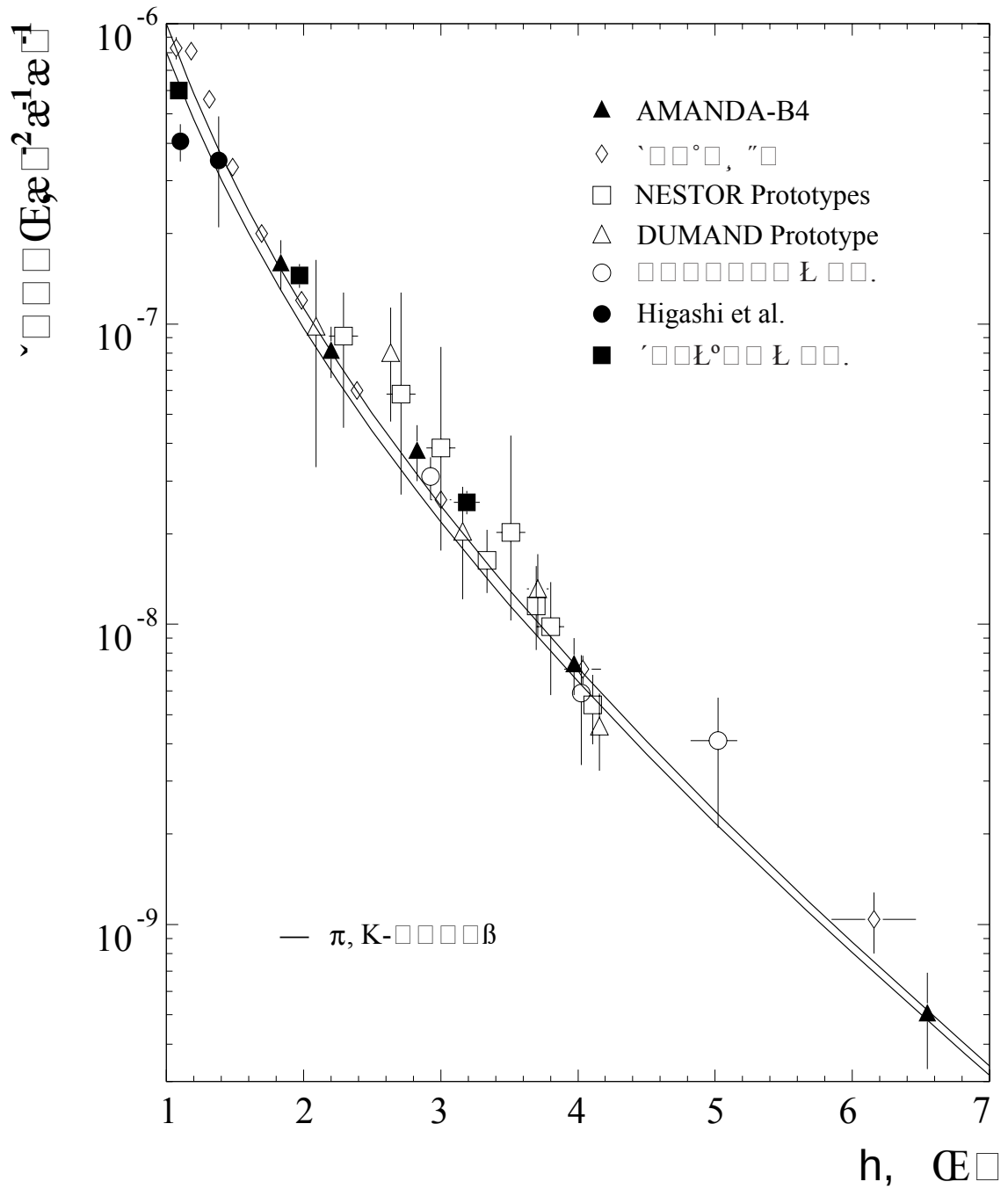


Рис. 3.26: Кривая поглощения мюонов в воде и данные глубоководных измерений. Эксперимент: ● – [152], ■ – [153], ○ – [154], △ – [155], □ – [156], ◇ – [157], ▲ – [158].

Расчет сделан для морской воды с $\langle Z \rangle = 7.468$, $\langle A \rangle = 14.87$, $\langle Z/A \rangle = 0.5525$, $\langle Z^2/A \rangle = 3.770$ и $\langle \rho \rangle = 1.027$ г/см³. Кривые на рисунке представляют расчеты для двух значений порога регистрации мюонов $E_\mu = 1$ ГэВ и $E_\mu = 20$ ГэВ (верхняя и нижняя соответственно). Для глубин 1–4 км рассчитанные кривые поглощения неплохо согла-

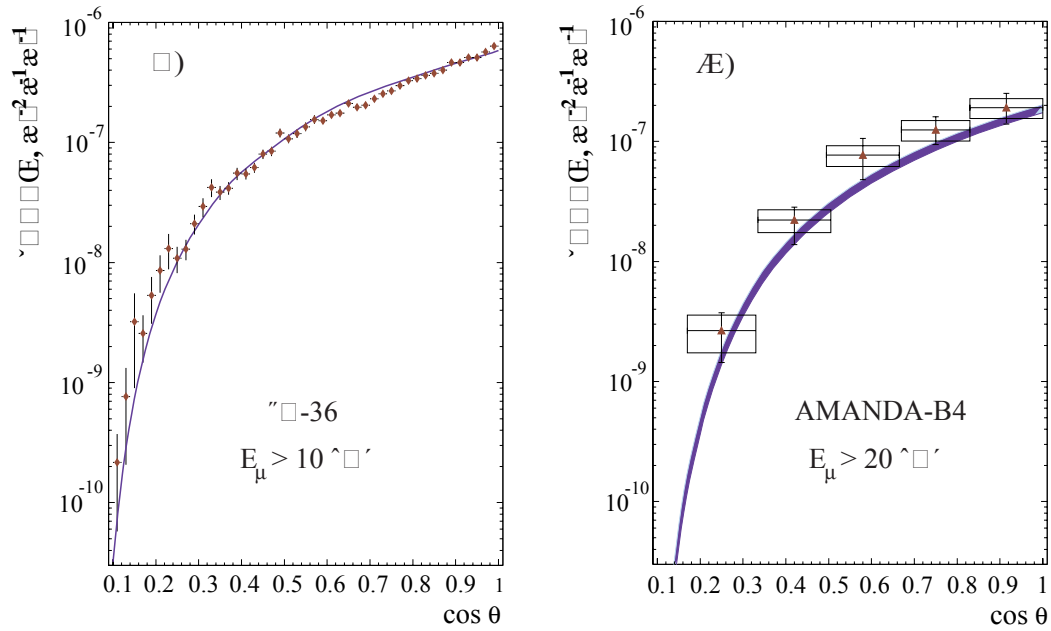


Рис. 3.27: Данные нейтринных телескопов Байкал [38] (а), AMANDA [158] (б) и зенитно-угловое распределение мюонов, рассчитанное для глубин $h = 1.15$ и $1.60\text{--}1.68$ км в.э. соответственно.

суются с данными измерений, выполненных на прототипах детекторов DUMAND [155] и NESTOR [156], а также с результатами [154]. Данные Байкальской установки [38] и нейтринного телескопа AMANDA [158], как по кривой поглощения, так и по угловому распределению (рис. 3.27), находятся в хорошем согласии с расчетом. Подробный анализ энергетических спектров и угловых распределений глубоководных мюонов с учетом вклада от распада чарма, рассчитанного для разных моделей рождения очарованных адронов, дан в работе [141].

3.5 Нейтрино

Обсудим результаты расчетов дифференциальных энергетических спектров нейтрино высоких энергий (выше 1 ТэВ) на уровне моря.

При расчетах потоков атмосферных нейтрино и антинейтрино учитывались следующие каналы генерации (см. табл. 1.4 и [69, 159]): $\pi_{\mu 2}^-$, $K_{\mu 2}^\pm$, $K_{\ell 3}^-$ (в том числе и $K_{S(\ell 3)}^0$), $\mu_{e 3}^\pm$ - распады, а также распады очарованных адронов. В качестве источников атмосферных мюонных нейтрино дополнительно рассматривались пионы, рожденные в двух- и трехчастичных распадах каонов (табл. 1.4): $K_S^0 \rightarrow \pi^+\pi^-$, $K^\pm \rightarrow \pi^\pm\pi^0$, $K_L^0 \rightarrow \pi^\pm\ell^\mp\nu_\ell$, $K_S^0 \rightarrow \pi^\pm\ell^\mp\nu_\ell$.

На рисунках 3.28 и 3.29 показаны отдельные вклады перечисленных выше распадов в потоки электронных и мюонных нейтрино (антинейтрино) для вертикального и горизонтального направлений. На рисунках также приведены вклады прямых нейтрино (ПН) для двух моделей рождения чарма: рекомбинационной кварк-партонной модели (РКПМ) и модели кварк-глюонных струн (МКГС) [41]. По нашему мнению, для потоков прямых мюонов и нейтрино РКПМ и МКГС дают верхний и нижний пределы соответственно.

Как можно увидеть из рис. 3.28, K_{e3} -распады при энергиях выше 1 ТэВ независимо от зенитного угла дают основной вклад в поток $(\nu_e + \bar{\nu}_e)$ (так называемые "обычные" или (π, K) -нейтрино). Вклады $K_{e3}^\pm$ и K_{e3}^0 (имеется в виду K_L^0) распадов практически равны при $\vartheta = 0^\circ$ и близки по величине при $\vartheta = 90^\circ$, несмотря на 8-кратную разницу между отношениями вероятностей $K_{e3}^\pm$ и K_{e3}^0 распадов. Это происходит, во-первых, из-за того, что время жизни K_L^0 примерно в 4.2 раза больше, чем время жизни $K^\pm$. Во-вторых, – из-за разной величины инклюзивных сечений рождения $K^+ + K^-$ и $K^0 + \bar{K}^0$ (см. [44] и табл. 3.4). Вклад от распадов мюонов мал для вертикали, но сравним с потоками от распадов каонов вплоть до 2 ТэВ для горизонтали. Начиная с энергий $\sim 10^6$ ГэВ потоки электронных нейтрино от полулептонных распадов K_S^0 начинают сравниваться по величине с потоками от K_L^0 распадов. Данное обстоятельство связано с тем, что, хотя относительная вероятность K_S^0 распадов очень мала (порядка 10^{-4}), время жизни K_L^0 примерно в 600 раз больше, чем время жизни K_S^0 .

Для мюонных (π, K) -нейтрино (рис. 3.29) основным источником являются $K_{\mu 2}^\pm$ распады ($\sim 68\%$). При $\vartheta = 90^\circ$ они доминируют над вкладами прямых нейтрино, предсказанной моделью РКПМ, вплоть до ~ 200 ТэВ. Второй по величине источник – $\pi_{\mu 2}$ -распады ($\sim 20\%$).

Хотя сечения рождения пионов почти на порядок величины превосходят сечения рождения каонов, при энергиях выше 1 ТэВ распады пионов становятся редкими вследствие большего времени жизни и лоренц-фактора и вклады от них становятся сравнимыми с каонными. По этой же причине вклад пионов, рожденных в распадах каонов, в полные потоки мюонных (π, K) -нейтрино незначителен и убывает с ростом энергии.

Распады $K_{\mu 3}$ вносят сравнительно малый вклад ($\sim 6\%$ каждый), которым однако пренебрегать нельзя.

Потоки $\nu_\mu + \bar{\nu}_\mu$ от распадов мюонов незначительны для $\vartheta = 0^\circ$ и очень малы для $\vartheta = 90^\circ$. Вклад от трехчастичного полулептонного распада K_S^0 растет от $\sim 1\%$ при энергии 1 ТэВ до $\sim 4 - 6\%$ при $E_\nu = 10^6$ ТэВ, сравниваясь с вкладами от других $K_{\mu 3}$ распадов. На рис. 3.30 приведено сравнение дифференциальных энергетических

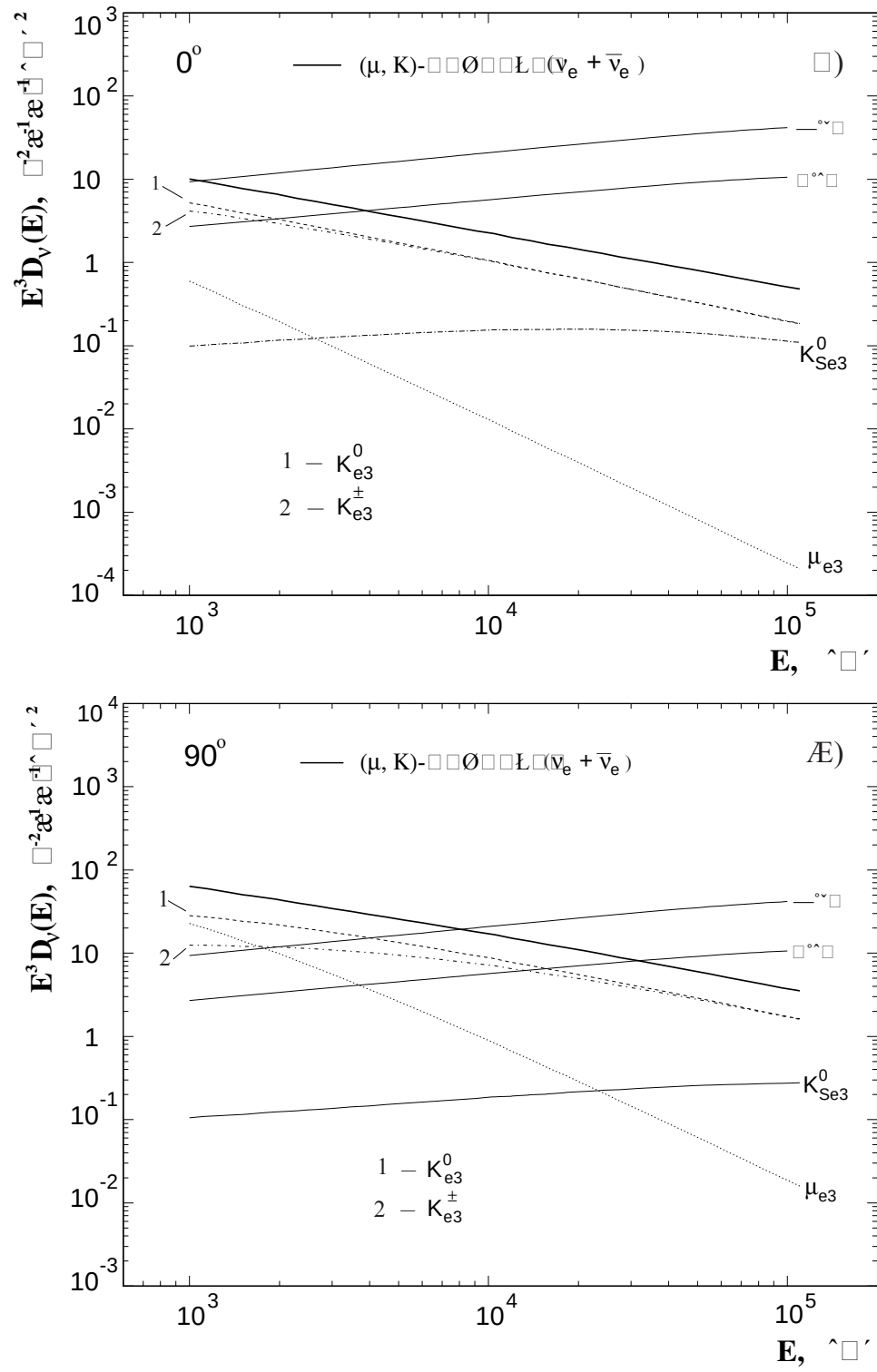


Рис. 3.28: Вклады различных распадов в вертикальные (а) и горизонтальные (б) энергетические спектры электронных нейтрино и антинейтрино.

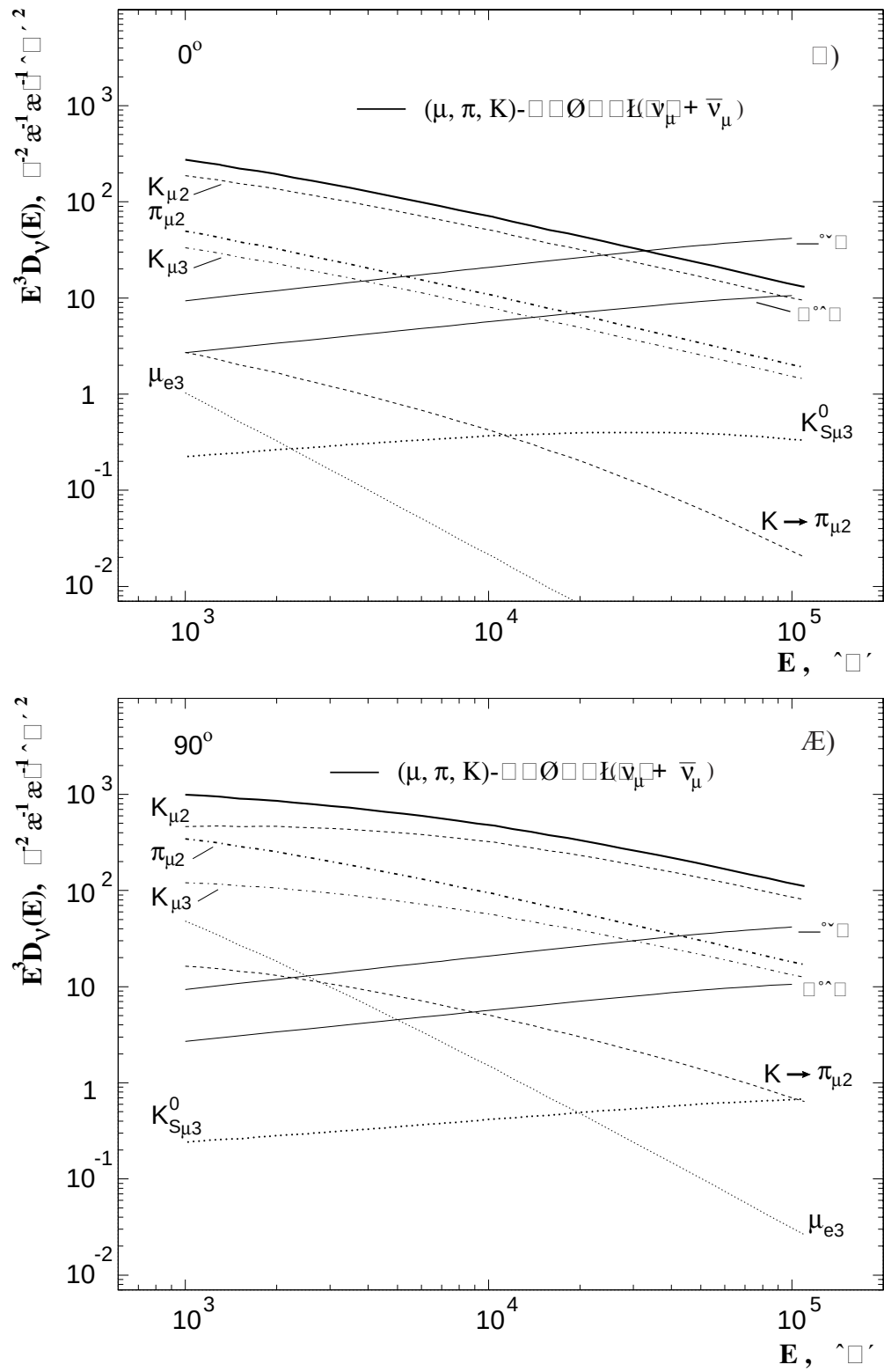


Рис. 3.29: Вклады различных распадов в вертикальные (а) и горизонтальные (б) энергетические спектры мюонных нейтрино и антинейтрино.

спектров (π, K) -нейтрино при $\vartheta = 0^\circ$ и 90° с теоретическими результатами других авторов: Волковой [7], Митцуи и др. [9], Буткевича и др. [11], Липари [12] и Агравала и др. [13]. Все кривые на рисунке нормированы на наш расчет.

Наш результат находится между самыми низким и высоким предсказаниями нейтринных спектров. При $E_\nu < 2 - 3 \text{ ТэВ}$ и $E_\nu < 10 \text{ ТэВ}$ для $\vartheta = 0^\circ$ и $\vartheta = 90^\circ$, соответственно, наш расчет дает некоторый избыток потоков $\nu_\mu + \bar{\nu}_\mu$. Это обусловлено приближением “стабильного” пиона, которое использовалось для упрощения на стадии расчета ядерного каскада (соответствующая поправка учтена приближенно).

На рис. 3.31 показаны отношения (π, K) -нейтрино к антинейтрино в зависимости от энергии для $\vartheta = 0^\circ$ и 90° вместе с результатами расчетов Буткевича и др. [11] и Липари [12]. Отношения $\nu_e/\bar{\nu}_e$ и $\nu_\mu/\bar{\nu}_\mu$ очень чувствительны к исходным параметрам, таким как n/p отношение, которое зависит от химического состава первичного излучения, и π^+/π^- , K^+/K^- , $K^\pm/K^0$ отношения, которые определяются сечениями рождения регенерации и перезарядки мезонов. Хотя параметры, используемые в [11], [12] и в настоящем расчете, находятся в пределах данных, полученных на ускорителях и в космических лучах, сам разброс значений этих параметров очень велик. Поэтому предсказания различных моделей так сильно меняются в широком интервале энергий. Кроме того, на рисунках штрих-пунктирными линиями представлены отношения (π, K) -нейтрино к антинейтрино, рассчитанные без учета распадов $K_{S(\ell 3)}^0$ (электронные и мюонные нейтрино и антинейтрино) и пионов от распадов каонов (мюонные нейтрино и антинейтрино). Учет этих каналов генерации понижает $\nu_e/\bar{\nu}_e$ отношение на 10% и 3%, а $\nu_\mu/\bar{\nu}_\mu$ – на $\sim 2\%$ и $\lesssim 1\%$ при 10^3 ТэВ для вертикали и горизонтали, соответственно.

С другой стороны, величины $\nu_e/\bar{\nu}_e$ и $\nu_\mu/\bar{\nu}_\mu$ важны при расчете потока мюонов, генерируемых в нейтринных взаимодействиях, пересекающих детектор снизу вверх, а также при расчете событий происходящих внутри нейтринного детектора.

Расчет флейворного отношения $R_\nu = (\nu_\mu + \bar{\nu}_\mu)/(\nu_e + \bar{\nu}_e)$ для $\vartheta = 0^\circ$ и 90° дан на рис. 3.32 а и 3.32 б соответственно. Штриховыми линиями показаны флейворные отношения для потоков (π, K) -нейтрино. Без учета дополнительных источников (распады $K_{S(\ell 3)}^0$, $K \rightarrow \pi \rightarrow \nu$) R_ν монотонно возрастают с энергией от 27.6 до 34.3 для вертикали и от 13.3 до 33.6 для горизонтали в интервале энергий 1 – 100 ТэВ. При 100 ТэВ учет дополнительных каналов приводит к понижению до 27.5 для вертикали и до 31.6 для горизонтали. Сплошными линиями представлены отношения R_ν , рассчитанные с учетом вклада прямых нейтрино согласно моделям РКПМ (1) и МКГС (2). Как можно видеть, величина R_ν оказывается очень чувствительной к выбору модели рождения чарма даже при энергиях, где вклад прямых нейтрино в полный поток АН

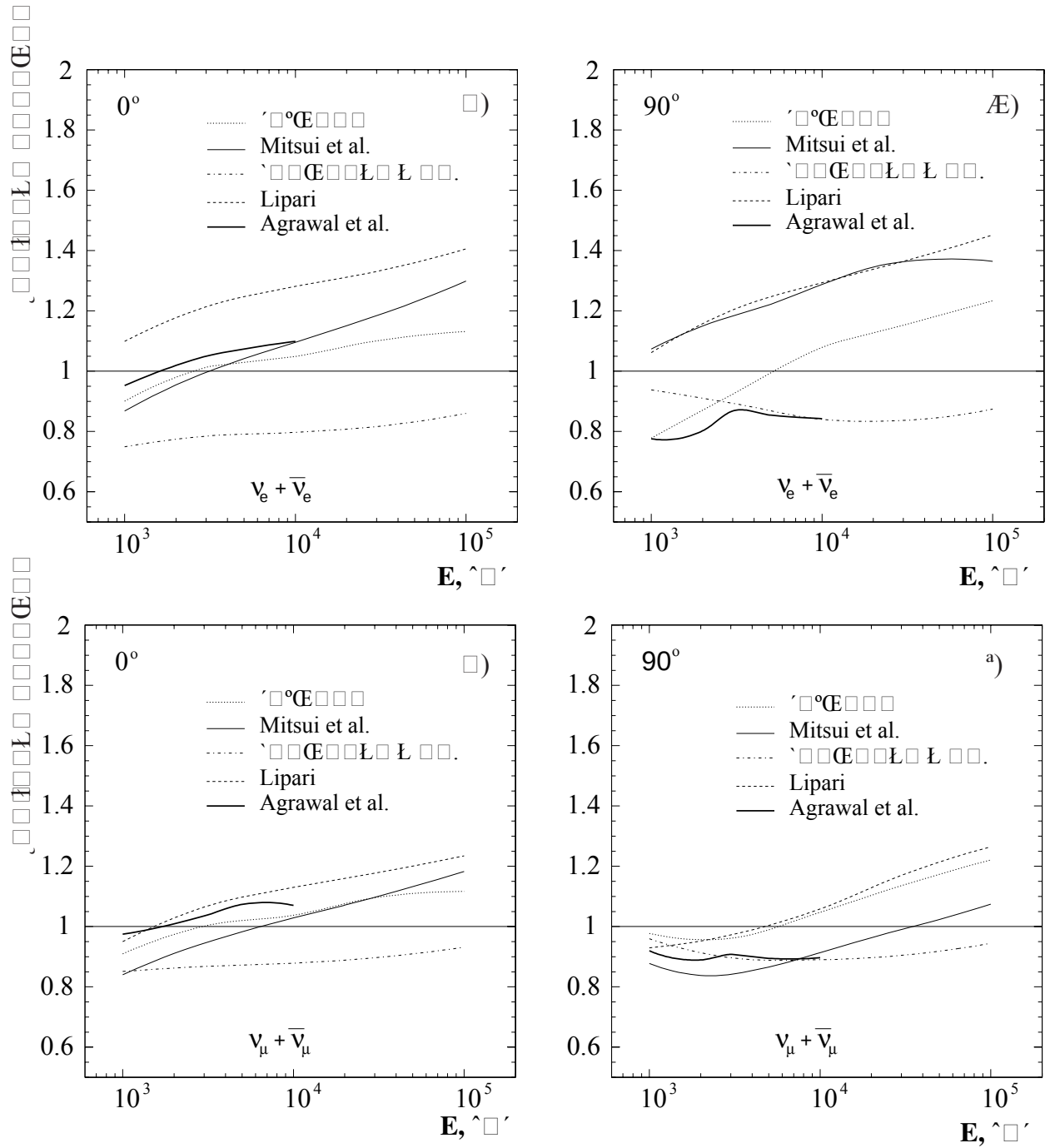


Рис. 3.30: Отношения вертикальных (а), (в) и горизонтальных (б), (г) спектров $\nu_e + \bar{\nu}_e$ и $\nu_\mu + \bar{\nu}_\mu$, рассчитанных в работах [7, 9, 11, 12, 13], к данному расчету (без учета вклада $\pi\pi$).

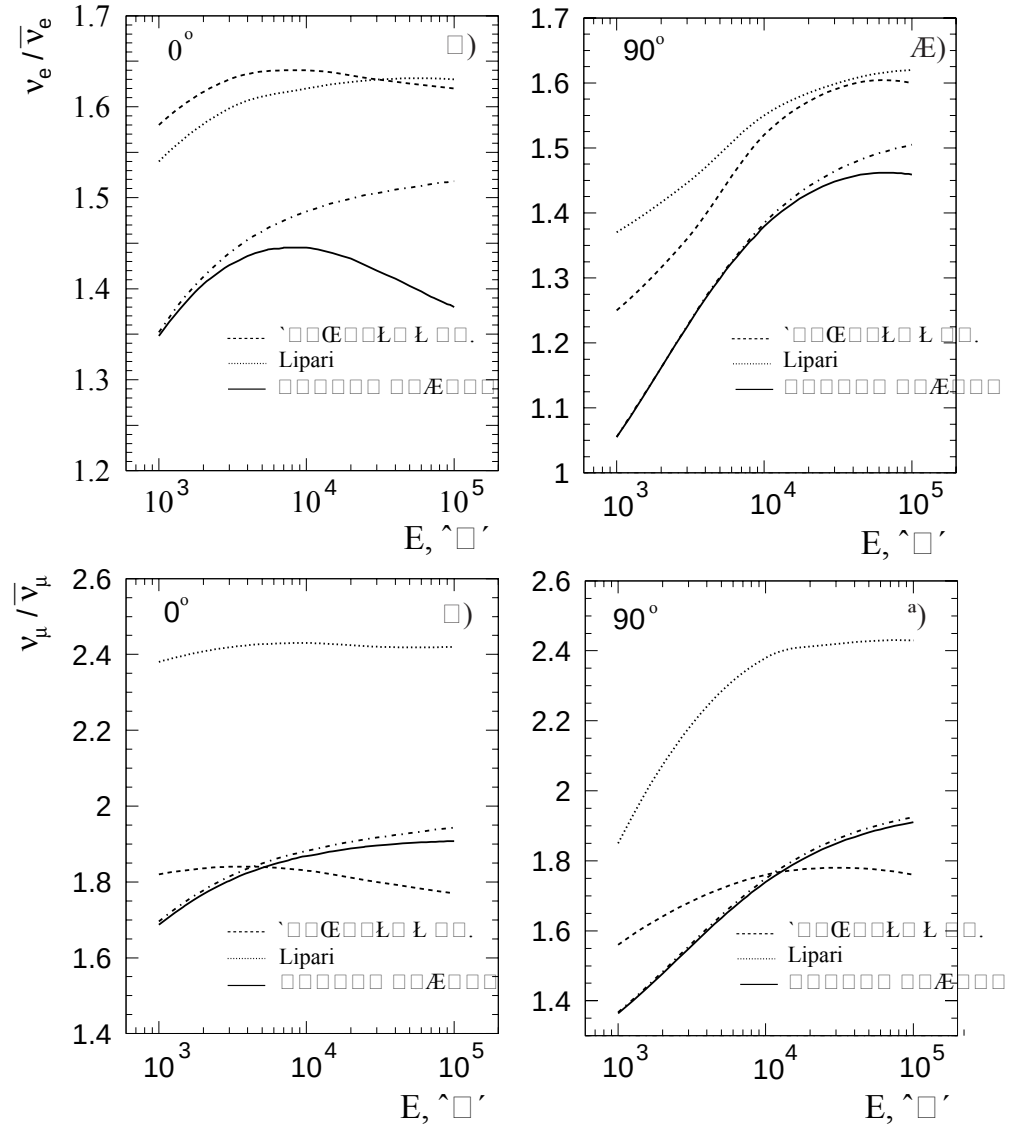


Рис. 3.31: $\nu_e/\bar{\nu}_e$ -отношение при $\vartheta = 0^\circ$ (а), 90° (б) и $\nu_\mu/\bar{\nu}_\mu$ -отношение при $\vartheta = 0^\circ$ (в), 90° (г). Сплошные линии – расчет (π, K) -нейтрино с учетом вклада K_S^0 -распада, штрихпунктирные – без вклада K_S^0 -мезона, пунктирные – расчет [11], штриховые – расчет [12].

еще мал по сравнению с вкладом (π, K) -нейтрино. Этот эффект дает потенциальную возможность экспериментального определения ПН из измерения отношения “мюноподобных” событий (рожденных ν_μ и $\bar{\nu}_\mu$) и “электроноподобных” (рожденных ν_e и $\bar{\nu}_e$) в нейтринном телескопе для различных энергетических порогов и направлений. Подобный эксперимент провести гораздо легче, чем измерять абсолютные нейтринные потоки.

Как и для мюонов, в расчетах потоков атмосферных нейтрино учитывался эффект q^2 -зависимости формфакторов трехчастичных мод распада каона. Эффект почти не

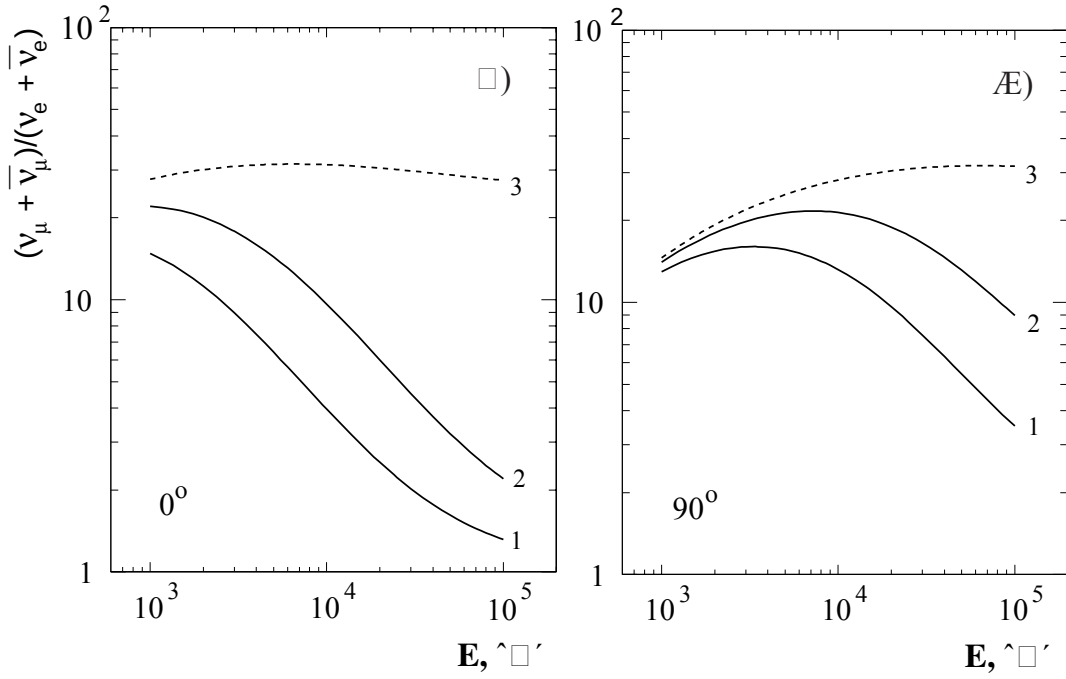


Рис. 3.32: Флейворное отношение R_ν при $\vartheta = 0^\circ$ (а) и при 90° (б) для потоков атмосферных нейтрино, рассчитанных с учетом вклада ПН для двух моделей рождения чарма (РКМ – 1, МКГС – 2) и без учета ПН – 3.

зависит от зенитного угла, но различен для мюонных и электронных нейтрино. При $E_\nu > 1$ ТэВ q^2 -зависимость примерно одинаково увеличивает вклады от K_{e3}^0 и $K_{e3}^\pm$ распадов на $\sim 3 - 3.5\%$, а следовательно, и полные $\nu_e + \bar{\nu}_e$ потоки (так как K_{e3} распады являются основным источником ν_e и $\bar{\nu}_e$). Учет эффекта приводит к уменьшению потоков от $K_{\mu 3}^0$ и $K_{\mu 3}^\pm$ распадов на 6 % и 4 %, соответственно. Однако $K_{\mu 3}$ вклады сами по себе малы, поэтому изменение полного потока мюонных (π, K) -нейтрино за счет учета q^2 -зависимости формфакторов незначительно. Как следствие, эффект уменьшает флейворное отношение $(\nu_\mu + \bar{\nu}_\mu)/(\nu_e + \bar{\nu}_e)$ для (π, K) -нейтрино на 3–4 % в зависимости от зенитного угла и энергии [160].

Заключение

Основные результаты, полученные в диссертации, сводятся к следующему.

1. Разработан эффективный (Z -факторный) метод решения кинетических уравнений переноса нуклонов и мезонов космических лучей в атмосфере при высоких энергиях. Он является обобщением метода, разработанного для решения задачи переноса мюонных нейтрино в плотной среде с $h \gg \lambda_\nu(E)$ (λ_ν – пробег нейтрино до взаимодействия). Основная идея метода заключается в сведении интегро-дифференциального УП к (нелинейному) интегральному уравнению для т.н. " Z -фактора", – величины непосредственно связанной с эффективным пробегом поглощения. При этом соответствующий пробег поглощения становится зависящим от энергии частицы и глубины. Уравнение для Z -фактора решается затем с помощью простого итерационного алгоритма. При всех значениях E и h итерационный процесс быстро сходится. Так, 5–6 итераций оказывается достаточно для достижения точности расчета Z -факторов не хуже $10^{-3} - 10^{-4}$. На небольших глубинах, $h \lesssim 300$ г/см², уже первое приближение обеспечивает точность на уровне нескольких процентов, вполне достаточную для многих приложений теории, в частности, – для расчета потоков атмосферных мюонов и нейтрино.

Главное преимущество развитого метода заключается в том, что он не требует разложения по какому-либо малому параметру. Как следствие, метод не имеет ограничений по глубине, свойственных большинству аналитических и численных алгоритмов решения каскадных уравнений (включая метод Монте-Карло). Z -факторный метод применим для произвольных граничных условий (в частности, для моноэнергетического граничного спектра), при произвольных зависимостях дифференциальных инклюзивных и полных неупругих сечений взаимодействия частиц с веществом.

2. На основе (Z -факторного) метода решена задача о переносе нуклонов космических лучей в атмосфере Земли. В задаче учтены следующие факторы: а) нестепенное поведение спектра протонов и ядер первичных КЛ, б) рост полных неупругих сечений взаимодействия нуклонов и ядер с энергией, в) эффекты нарушения фейнмановского скейлинга в областях фрагментации и пионизации нуклон-ядерных взаимодействий.

В качестве модели взаимодействия нуклонов с ядрами применялись полуэмпирические формулы Кимеля-Мохова, исправленные с учетом новых ускорительных данных. Исследована зависимость Z -факторов от энергии и глубины. Показано, что сильная зависимость $Z_{\pm}$ от E и h вызвана тремя причинами: нестепенным характером первичного спектра, зависимостью полного неупругого сечения от энергии и нарушением скейлинга. Обнаружен эффект укрупнения спектров вторичных нуклонов с глубиной. Проведенное детальное сравнение расчетных спектров нуклонов с экспериментальными данными для различных глубин в атмосфере при энергиях от 5 ГэВ до 2 ТэВ позволяет говорить об удовлетворительном согласии с имеющимися на сегодняшний день экспериментальными данными по вторичным космическим лучам. Однако экспериментальные ошибки пока еще слишком велики для надежной проверки каскадной модели. Можно ожидать, что эксперименты на установках типа KASCADE уже в ближайшем будущем позволят выполнить количественную проверку эффекта укрупнения спектров нуклонов на уровне моря.

3. Получены точные аналитические формулы для спектров вторичных частиц (электронов, мюонов, пионов, нейтрино и антинейтрино) от $K_{\ell 3}$ -распадов в лабораторной системе, учитывающие линейную q^2 -зависимость формфакторов распадов. Вычисленные полные ширины $K_{\ell 3}$ -распадов находятся в хорошем согласии с экспериментальными данными. Полученные формулы применялись в расчетах вторичных космических лучей (пионов, мюонов, нейтрино). Кроме того, они могут быть полезными тем, кто занимается исследованиями нейтринных осцилляций в потоке атмосферных или астрофизических нейтрино, а также в экспериментах с пучками нейтрино и мюонами от ускорителей. Формулы для спектров электронов и нейтральных пионов могут быть использованы в расчетах электромагнитной составляющей адронных каскадов, для анализа результатов баллонных измерений потоков вторичных космических лучей и в ряде других приложений.

4. Выполнены детальные расчеты энергетических спектров и зенитно-угловых распределений атмосферных мюонов высоких энергий ($E > 1$ ТэВ) от π - и K -распадов, а также от распадов очарованных адронов. В расчетах учтены все важнейшие особенности ядерно-каскадного процесса в атмосфере, а также впервые проведен количественный анализ влияния таких эффектов, как q^2 -зависимость формфакторов $K_{\ell 3}$ -распадов, полулептонный распад K_S^0 -мезона, вклады цепочки двух- и трехчастичных распадов $K \rightarrow \pi \rightarrow \mu$). Учет дополнительных каналов генерации приводит к увеличению полных потоков атмосферных мюонов на $\sim 3\%$ от полулептонных распадов и на $\sim 2\%$ от пионов, рожденных в распадах каонов. Эффект q^2 -зависимости формфакторов каонов

практически не сказывается на величине суммарного (полного) потока мюонов: он мал для мюонов от $K_{\mu 3}$ распада, а цепочка распадов $K_{L,S}^0 \rightarrow \pi^\pm \rightarrow \mu^\pm$ (для которой q^2 -зависимость приводит к уменьшению спектров мюонов на $\sim 8\%$) дает поправку менее процента. Однако эффект формфакторов не пренебрежим для атмосферных нейтрино высоких энергий и, следовательно, его следует учесть и в расчете потока мюонов, который предполагается использовать для нормировки нейтринного потока.

В качестве механизмов рождения очарованных адронов во взаимодействиях нуклонов и пионов с ядрами атомов воздуха рассматривались два непертурбативных феноменологических подхода: рекомбинационная кварк-партоновая модель (РКПМ) и модель кварк-глюонных струн (МКГС). Следует отметить, что расчеты потоков в рамках РКПМ близки к максимальным предсказаниям недавней модели, основанной на пертурбативной КХД [140], а расчеты, выполненные в рамках МКГС, практически совпадают с минимальным предсказанием этой модели.

Проведено подробное сопоставление результатов расчетов с большим массивом экспериментальных данных наземных мюонных спектрометров и подземных установок. Данные наземных и подземных измерений потоков мюонов противоречивы, хотя большинство экспериментов имеют хорошую статистическую обеспеченность. Это свидетельствует о наличии неучтенных систематических эффектов в некоторых экспериментах. Ниже 5-6 ТэВ для вертикали данный расчет потоков (π , K -мюонов находится в неплохом согласии как с прямыми, так и с косвенными измерениями. В области энергий выше 20 ТэВ существует некоторое противоречие между данными Баксана, Frèjus [129], РЭК МГУ [124] и измерений LVD [131]. Для данных LVD характерна высокая степень согласованности с нашим расчетом как измеренной кривой поглощения, так пересчитанного к уровню моря спектра мюонов. Для зенитных углов $\theta = 45^\circ$, 72° , и 89° вычисленные дифференциальные спектры очень хорошо согласуются с данным установок MUTRON [119], DEIS [120] и РЭК МГУ [124, 125].

Таким образом, рассчитанные потоки и зарядовое отношение атмосферных мюонов для различных направлений на уровне моря описывают основную совокупность экспериментальных данных. Это позволяет сделать вывод, что используемые в расчете модели адронного каскада и первичного спектра не противоречат эксперименту.

5. Полученные энергетические спектры мюонов и угловые распределения использовались в качестве граничных спектров в задаче о прохождении мюонов через вещество. Проведено детальное сопоставление численных результатов с данными всех подземных и глубоководных экспериментов по измерению кривой поглощения и угловых распределений мюонов. В качестве моделей рождения чарма использовались РКПМ и МКГС, а

также недавние результаты, полученные в рамках пертурбативной КХД.

Вплоть до глубин ~ 6 км в.э. результаты расчетов хорошо согласуются практически со всеми имеющимися данными. Этот факт позволяет использовать поток подземных мюонов космических лучей для нормировки спектров атмосферных нейтрино высоких энергий, что необходимо как для будущих астрофизических экспериментов на подводных нейтринных телескопах, так и для современных экспериментов по поиску нейтринных осцилляций, основанных на измерении угловых распределений мюонов из нижней полусферы (генерируемых в Земле при взаимодействиях атмосферных нейтрино с нуклонами).

Данные различных экспериментов на больших глубинах имеют слишком большие систематические ошибки и плохо согласуются друг с другом. Это не позволяет пока выбрать определенную модель рождения чарма. Тем не менее, некоторые качественные выводы уже сейчас можно сделать. Именно, механизмы, предсказывавшие большие вклады прямых мюонов (возникающих в атмосфере при распаде очарованных адронов), по-видимому, не получают подтверждения в последних подземных данных.

6. Рассчитаны энергетические спектры атмосферных нейтрино и антинейтрино (электронных и мюонных) для энергий $E > 1$ ТэВ от $\pi_{\mu 2^-}$, $K_{\mu 2^-}$, $K_{\ell 3^-}$ и $\mu_{e 3^-}$ -распадов. Рассмотрены такие дополнительные источники атмосферных нейтрино, как распады K_S^0 -мезона и пионов, рожденных в двух- и трехчастичных распадах заряженных и нейтральных каонов.

В рамках двух моделей рождения очарованных адронов, РКПМ и МКГС, сделаны оценки вкладов прямых нейтрино. Показано, что в области энергий 1-100 ТэВ флейворное отношение нейтрино $R_\nu = (\nu_\mu + \bar{\nu}_\mu)/(\nu_e + \bar{\nu}_e)$ сильно зависит от выбора модели рождения чарма. Этот эффект потенциально важен в качестве основы метода измерения вклада чарма в будущих экспериментах на глубоководных нейтринных телескопах.

Исследовано влияние эффекта q^2 -зависимости формфакторов $K_{\ell 3^-}$ -распадов на потоки нейтрино высоких энергий. Показано, что знак эффект различен для электронных и мюонных нейтрино (антинейтрино). Так, q^2 -зависимость приводит к увеличению потока $(\nu_e + \bar{\nu}_e)$ на $\sim 3\%$ и к уменьшению потоков мюонных нейтрино от $K_{\mu 3}^0$ - и $K_{\mu 3}^\pm$ -распадов на 6 % и 4 %, соответственно. Однако, эти вклады сами по себе малы, поэтому изменение полного потока $(\nu_\mu + \bar{\nu}_\mu)$ за счет учета q^2 -зависимости формфакторов незначительно. В отсутствие вклада прямых нейтрино этот эффект уменьшает флейворное отношение R_ν на 3 – 4 %.

Результаты диссертации докладывались на 25 и 26 Международных конференциях по космическим лучам (25 ICRC, Durban, South Africa, 1997; 26 ICRC, Salt Lake City,

Utah, 1999), на российско-японских совещаниях "High and Extremely High Energy Neutrino Astrophysics", (6-11 октября 1994 г., Иркутск), "The 2-nd Russian-Japanese Workshop for the Future Project in the Lake Baikal on High and Extremely High Energy Neutrino Astrophysics" (21-24 декабря 1995 г., Иркутск), на Байкальских научных молодежных школах по фундаментальной физике "Астрофизика и физика микромира" (Иркутск, 1998 г.) и "Взаимодействие излучений и полей с веществом" (Иркутск, 1999 г.), а также на семинарах кафедры теоретической физики и Института прикладной физики ИГУ. Основные результаты опубликованы в работах [41, 42, 68, 69, 107, 141, 159, 160].

В заключение я благодарю Вадима Александровича Наумова за постановку задач, руководство работой и многолетнюю научную опеку, без которой эта работа не могла быть выполненной. Я искренне благодарна коллективу кафедры теоретической физики ИГУ, профессору А.Н. Валлу, профессору Ю.В. Парфёнову за полезные обсуждения, советы, помощь и поддержку.

Исследования по теме диссертации выполнены частично при финансовой поддержке Министерства образования (Госкомвуза) Российской Федерации:

- 1) **грант 95-0-6.3-19**, Конкурсный Центр фундаментального естествознания при Санкт-Петербургском государственном университете), 1996-1997 гг.
- 2) **грант 2-728** в рамках программы "Университеты России – фундаментальные исследования", 1998-2000 гг.

Литература

- [1] Greisen K. Cosmic ray showers // Annual Review of Nuclear Science / ed. by F. Segre, G. Friedlander and V.E. Meyerhaf. USA, 1960. V. 10. P. 63-108.
- [2] Markov M.A., Zheleznykh I.M. On high energy neutrino physics in cosmic rays // Nucl. Phys. 1961. V. 27, № 3. P. 385-394.
- [3] Зацепин Г.Т., Кузьмин В.А. Угловые распределения μ -мезонов высокой энергии и механизм их генерации // ЖЭТФ. 1960. Т. 39, вып. 6(12). С. 1677-1685.
- [4] Зацепин Г.Т., Кузьмин В.А. Генерация нейтрино в атмосфере // ЖЭТФ. 1961. Т. 41, вып. 6(12). С. 1818-1827.
- [5] Аминева Т.П., Астафьев В.А., Варковицкая А.Я. и др. Исследование мюонов сверхвысоких энергий. Метод рентгено-эмульсионных камер // М.: Наука, 1975. 216 с.
- [6] Волкова Л.В., Зацепин Г.Т., Кузьмичев Л.А. Спектр мюонов космических лучей на уровне моря – спектр нуклонов первичного космического излучения // ЯФ. 1979. Т. 29, вып.5. С. 1252-1264.
- [7] Волкова Л.В. Энергетические спектры и угловые распределения атмосферных нейтрино // ЯФ. 1980. Т. 31. С. 1510-1521.
- [8] Dar A. Atmospheric neutrinos, astrophysical neutrinos and proton decay experiments // Phys. Rev. Lett. 1983. V. 53, № 3. P. 227-230; Dar A. Astrophysical neutrinos in proton decay experiments // Proc. of the 4th International Workshop on Grand Unification. Birkhäuser, Boston, 1983. P. 101-115.
- [9] Mitsui K., Minorikawa Y., Komori H. Energy spectrum of cosmic-ray neutrinos in the atmosphere // Nuovo Cim. 1986. V. 9C, № 5. P. 995-1020.
- [10] Бугаев Э.В., Наумов В.А. Нейтрино низких и средних энергий в атмосфере // Изв. АН СССР. 1986. сер. физ. Т. 50, № 11. С. 2239-2241; Bugaev E.V., Naumov V.A. On the interpretation of the Kamiokande neutrino experiment // Phys. Lett. 1989. V. B232, № 3. P. 391-397.
- [11] Буткевич А.В., Деденко Л.Г., Железных И.М. Спектры адронов, мюонов и нейтрино в атмосфере как решение прямой задачи // ЯФ. 1989. Т. 50. С. 142-156.
- [12] Lipari P. Lepton spectra in the earth's atmosphere // Astropart. Phys. 1993. V. 1. P. 195-227.

- [13] Agrawal V., Gaisser T.K., Lipari P., Stanev T. Atmospheric neutrino flux above 1 GeV // Phys. Rev. 1996. V. D53. P. 1314-1323.
- [14] Наумов В.А. Космические лучи и нейтрино низких энергий в атмосфере Земли // Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. М.: ИЯИ АН СССР, 1988. 190 с.
- [15] Gaisser T.K., Honda M., Kasahara K. et al. Comparison of atmospheric neutrino flux calculations at low energies // Phys. Rev. 1996. V. D54. P. 5578-5584.
- [16] Becker-Szendy R. et al. Electron- and muon-neutrino content of the atmospheric flux. // Phys. Rev. 1992. V. D46. P. 3720-3724.
- [17] Hirata K.S., Kjita T., Koshiha M. et al. Experimental study of the atmospheric neutrino flux // Phys. Lett. 1988. V. B205. P. 416-420.
- [18] Fukuda Y., Hayakawa T., Inoue K. et al. Atmospheric ν_μ/ν_e ratios in the multi-GeV energy range // Phys. Lett. 1994. V. B335. P. 237-245.
- [19] Kafka T. Atmospheric neutrino interactions in SOUDAN-2 // hep-ph/9712281; Allison W.W.M., Alner G.J., Aures D.S. et al. The atmospheric neutrino flavor ratio from a 3.9 fiducial kiloton-year exposure of SOUDAN 2 // hep-ex/9801024.
- [20] Fukuda Y., Hatokeyama S., Hara T. et al. Measurement of the flux and zenith-angle distribution of upward through-going muons in Kamiokande II - III // Phys. Rev. Lett. 1998. V. 81. P. 2016-2019.
- [21] Habig A. Neutrino-induced upward going muons in Super-Kamiokande // hep-ex/9903047; Scholberg K. Atmospheric neutrinos at Super-Kamiokande // hep-ex/9905016.
- [22] Fukuda Y., Ishihara K., Itow Y. et al. Neutrino induced upward stopping muons in Super-Kamiokande // hep-ex/9908049.
- [23] Bernardini P. Measurement of the atmospheric muon neutrinos with the MACRO detector // hep-ex/9906019.
- [24] Bilenky S.M., Giunti C., Crivie W. Phenomenology of neutrino oscillation // Prog. Part. Nucl. Phys. 1999. V. 43. P. 1-86.
- [25] Zuber K. On the physics of massive neutrinos // Phys. Rept. 1998. V. 305. P. 295 - 364.
- [26] Pakvasa S. Exotic explanations for neutrino anomalies // hep-ph/9905426.
- [27] Lipari P., Maurizio L. On exotic solutions of the atmospheric neutrino problem // hep-ph/9901350.
- [28] Halzen F. Lectures on neutrino astronomy: theory and experiment // astro-ph/9810368.
- [29] Balantekin A.B., Haxton W.C. Solar, supernova and atmospheric neutrinos // nucl-th/9903038.

- [30] Bottino A., de Alfaro V., Fornengo N. et al. On the neutralino as dark matter candidate. I Relic abundance // *Astropart. Phys.* 1994. V.2. P. 67-75; Bottino A., de Alfaro V., Fornengo N. et al. On the neutralino as dark matter candidate. II Direct detection // *ibid.* P. 77-90.
- [31] Заславская Е.С., Наумов В.А. Ограничения на потоки релятивистских космических фотино. // *ЯФ.* 1991. Т. 53. С. 477 - 490.
- [32] Berger Ch., Fröhlich, M., Mönch H. et al. (Frejus Collaboration). A study of atmospheric neutrino oscillations in the Fréjus experiment // *Phys. Lett.* 1990. V. B245. P. 305-310.
- [33] Daum K., Rhode W., Bareyre P. et al. Determination of the atmospheric neutrino spectra with the Fréjus detector // *Z. Phys.* 1995. V. C66. P. 417-428.
- [34] Aglietta M., Battistoni G., Bellottiet E. et al. (NUSEX Collaboration). Experimental study of atmospheric neutrino flux in the NUSEX experiment // *Europhys. Lett.* 1989. V. 8. P. 611-614.
- [35] Mann W.A., Kafka T., Leeson W. The atmospheric flux ν_μ/ν_e anomaly as manifestation of proton decay $p \rightarrow e^+\nu\nu$ // *Phys. Lett.* 1992. V. B291. P. 200-205 .
- [36] Cennini P., Cittolin. S., Maurin G. et al. ICARUS II a second-generation proton decay experiment and neutrino observatory at the Gran Sasso laboratory // *Proposal by the ICARUS Collaboration.* 1993. V. 1. 132 p.
- [37] Andres E. Askebjør P., Barwick S.W. et al. (AMANDA Collaboration). The AMANDA neutrino telescope: principle of operation and first results // *astro-ph/9906203*; Spiering Ch. (for the AMANDA Collaboration). AMANDA: status, results and future // *astro-ph/9906205*.
- [38] Belolaptikov I.A., Bezrukov L.B., Borisovets B.A. et al. (Baikal Collaboration). The Baikal underwater neutrino telescope: Design, performance and first results // *Astropart. Phys.* 1997. V. 7. P. 263-282.
- [39] Capone A. (NESTOR Collaboration). Status of the NESTOR project // *Proc. of the 25th Intern. Cosmic Ray Conf. (ICRC), Durban, South Africa, 1997.* V. 7. P. 49-52.
- [40] Loucatos S. (for ANTARES Collaboration). ANTARES, a large underwater neutrino detector // *ЯФ.* 1998. Т. 61. С. 989-1002.
- [41] Bugaev E.V., Misaki A., Naumov V.A. Sinegovskaya T.S. et al. Atmospheric muon flux at sea level, underground and underwater // *Phys. Rev.* 1998. V. D58, 054001. P. 1-27; *hep-ph/9803488*.
- [42] Bugaev E.V., Misaki A., Naumov V. A., Sinegovskaya T.S. et al. Cosmic-ray muons at sea level, underground and underwater // *Preprint DFF 314/06/1998.* Firenze, 1998.

- [43] Bähr J.B et al. ("L3 + Cosmics" Group) A new project using the detector of L3+Cosmics phase II // Proc. of the 25th ICRC, Durban, South Africa, 1997. V. 7. P. 301-305; Bähr J.B et al. ("L3 + Cosmics" Group) L3, a new tool for cosmic ray muon research // ibid., P. 305-309.
- [44] Валл А.Н., Наумов В.А., Синеговский С.И. Адронная компонента космических лучей высоких энергий и рост неупругих сечений // ЯФ. 1986. Т. 44, вып. 6(11). С. 1240-1250.
- [45] Naumov V.A., Perrone L. Neutrino propagation through dense matter // Astropart. Phys. 1999. V.10 (2-3) С. 239-252; hep-ph/9804301.
- [46] Григоров Н.Л. Влияние роста сечения неупругого взаимодействия на вид энергетического спектра адронов космических лучей ЯФ. 1977. Т. 25, вып. 4. С. 788 - 801.
- [47] Иваненко И.П., Роганова Т.М. Каскадные ливни, вызываемые частицами сверх-высоких энергий // М.: Наука, 1983. 144 с.
- [48] Caso C., Conforto G., Gurty A. et al. Particle Data Group // Europ. Phys. J. 1998. V. C3. 794 p.
- [49] Bugaev E.V., Naumov V.A., Sinegovsky S.I., Zaslavskaya E.S. Prompt leptons in cosmic rays // Nuovo Cim. 1989. V. 125C, № 1. P. 41-73.
- [50] Бугаев Э.В., Заславская Е.С. Рождение очарованных частиц в адрон-адронных и адрон-ядерных взаимодействиях // ИЯИ АН СССР. Препринт П-0400. М., 1985.
- [51] Кайдалов А.Б., Пискунова О.И. Рождение очарованных частиц в модели кварк-глюонных струн // ЯФ. 1986. Т.43. С. 1545-1552.
- [52] Бугаев Э.В., Наумов В.А. Нуклонная компонента космического излучения в атмосфере при средних энергиях // Исслед. по геомагнетизму, аэронауке и физике Солнца. М.: Наука, 1985, вып. 73 (Солнечно-Земная физика). С. 198-211.
- [53] Бугаев Э.В., Наумов В.А. Мюоны и нейтрино космических лучей при низких и средних энергиях // ЯФ. 1987. Т. 45, вып.5. С. 1380-1391.
- [54] Зацепин Г.Т. Широкие атмосферные ливни космических лучей и ядерно-каскадный процесс // Проблемы физики космических лучей. М.: ИЯИ АН СССР, 1978. С. 189-244.
- [55] Battistoni G., Ferrari A., Lipari P. et al. A 3-dimensional calculation of atmospheric neutrino flux // hep-ph/9907408.
- [56] Tserkovnyak Y., Komar R., Nally C., Waltham C. A three-dimensional calculation of atmospheric neutrino fluxes // hep-ph/9907450.
- [57] Зацепин Г.Т. Проблемы физики космических лучей // М.: ИЯИ АН СССР, 1978. 331 с.

- [58] Дорман Л.И. Метеорологические эффекты космических лучей. М.: Наука, 1972. 212 с.
- [59] Pasquali L., Reno M.H. Tau neutrino fluxes from atmospheric charm // hep-ph/9911268.
- [60] Pasquali L., Reno M.H., Sarcevic I. Neutrinos and muons from atmospheric charm // hep-ph/9905389.
- [61] Хаякава С. Физика космических лучей. Часть I. Ядерно-физический аспект // М.: Мир, 1973. 703 с.
- [62] Volkova L.V., Zatsepin G.T. The energy spectra of muons and neutrinos generated by cosmic rays in different substances // Proc. of the 9th ICRC, London, 1965. V.2. P. 1093-1097.
- [63] Barr G., Gaisser T.K., Stanev T. Flux of atmospheric neutrinos // Phys.Rev. 1989. V. D39. P. 3532-3534.
- [64] Naumov V.A. Cosmic ray neutrinos at low and intermediate energies // Proc. of the International Workshop on ν_μ/ν_e -problem in atmospheric neutrinos. Laboratori Nazionali del Gran Sasso, L'Aquila, 1993. P. 25-70.
- [65] Brene N., Egardt L., Qvist B. On the $K_{\mu 3}$ and $K_{e 3}$ decay modes // Nucl. Phys. 1961. V. 22. P. 553-578.
- [66] Osborn J.L. Cosmic-ray muon polarization studies of the K/π ratio // Nuovo Cim. 1964. V. XXXII, № 4. P. 816-826.
- [67] Shun'ichi M. Systematic measurement of the spin-polarization of the cosmic-ray muons // Preprint INS-J-185. Tokyo, 1996.
- [68] Naumov V.A., Sinegovskaya T.S., Sinegovsky S.I. The $K_{\ell 3}$ form factors and atmospheric neutrino flavor ratio at high energies // Preprint DFF 253/06/1996. Firenze, 1996.
- [69] Naumov V.A., Sinegovskaya T.S., Sinegovsky S.I. The $K_{\ell 3}$ form factors and atmospheric neutrino flavor ratio at high energies // Nuovo Cim. 1998. V. 111A, № 2. P. 129-147.
- [70] Окунь Л.Б. Лептоны и кварки. М.: Наука, 1990. 346 с.
- [71] Yamada K. Semileptonic decay of charmed particles and weak form factors // Phys. Rev. 1980. V. D22, № 7. P. 1676-1693.
- [72] Никольский С.И. Энергетический спектр и ядерный состав первичных космических лучей // Проблемы физики космических лучей. М.: Наука, 1987. С. 169-185.

- [73] Bugaev E.V., Naumov V.A., Sinegovsky S.I. et al. Muon depth-intensity relation and data of underground and underwater experiments // Proc. of the RIKEN International Workshop on Electromagnetic and Nuclear Cascade Phenomena in High and Extremely High Energies. Eds. M. Ishihara and A. Misaki. Tokyo, RIKEN, 1994. P. 264-300.
- [74] Иваненко И.П., Рапопорт И.Д., Шестоперов В.Я. и др. Энергетический спектр частиц первичных космических лучей при энергиях 1-100 ТэВ по данным прибора “Сокол” // Письма в ЖЭТФ. 1989. Т. 49, вып. 4. С. 192-194.
- [75] Burnet T.H., Dake S., Fuki M. et al. (JACEE Collaboration). JACEE emulsion chambers for studying the energy spectra of high energy cosmic ray protons and helium // Nucl. Instrum. Meth. 1986. V. A251. P. 583-595.
- [76] Teshima M. Review of the primary cosmic-ray spectrum // Proc. of the 23rd ICRC, Calgary, 1993. Invited, Rapporteur and Highlight Papers. P. 257-277.
- [77] Ichimura M., Kogawa M., Kuramata S. et al. Observation of heavy cosmic-ray primaries over the wide energy range from 100 GeV/particle to 100 TeV/particle: Is the celebrated “knee” actually so prominent? // Phys. Rev. 1993. V. D48, № 5. P. 1949 - 1975.
- [78] Григоров Н.Л. Различие спектров протонов и более тяжелых ядер – миф или реальность? // Космические исследования. 1995. Т. 33, № 3. С. 339-349.
- [79] Erlykin A.D. Around and above knee // Nucl. Phys. B. 1995. Proc. Supl. 39A. P. 215-227.
- [80] Greisen K. End to the cosmic-ray spectrum? // Phys. Rev. Lett. 1966. V. 16, No. 17. P. 748 - 750.
- [81] Зацепин Г.Т., Кузьмин В.А. О верхней границе спектра космических лучей // Письма ЖЭТФ. 1966. Т. 4. С. 114-116.
- [82] Кимель Л.Р., Мохов Н.В. Распределения частиц в диапазоне энергий 10^{-2} - 10^{12} эв, инициированные в плотных средах высокоэнергетическими адронами // Изв. ВУЗов. Физика. 1974. Вып.10. С. 17-23.
- [83] Кимель Л.Р., Мохов Н.В. Дифференциальные сечения адрон- ядерных взаимодействий и некоторые результаты расчета межядерных каскадов // Вопросы дозиметрии и защиты от излучений. М.: Атомиздат, 1975. Вып.14. С. 41-44.
- [84] Калиновский А.Н., Мохов Н.В., Никитин Ю.П. Прохождение частиц высоких энергий через вещество // М.: Энергоатомиздат, 1985. 248 с.
- [85] Воронцов И.А., Ергаков В.А., Сафронов Г.А. и др. Измерение инклюзивных сечений π^- , π^+ , p , 2H , 3H , 3He под углом 3.5° при взаимодействии 10.1 ГэВ/с протонов с Be , Al , Cu , Ta и сравнение с моделями слияния // ИТЭФ. Препринт № 85. М., 1983.

- [86] Воронцов И.А., Сафронов Г.А., Сибирцев А.А. и др. Сечение выходов под углом 3.5° при взаимодействии протонов с импульсами 2.03; 4.54; 4.75; 4.95 ГэВ/с с ядрами *Al, Be, Cu, Ta* // ИТЭФ. Препринт № 144. М., 1984.
- [87] Ареефьев А.С., Воронцов И.А., Ергаков В.А. и др. Инклюзивные сечения выходов π^+ , p , 2H , 3H , 3He под углом 3.5° при взаимодействии протонов с импульсами 6.37 и 8.08 ГэВ/с с ядрами *Be, Al, Cu, Ta* // ИТЭФ. Препринт № 25. М., 1983.
- [88] Allaby J.V., Binon F., Diddens A.N. et al. High-energy particle spectra from proton interaction at 19.2 GeV/c // Nuclear Physics Division. Preprint CERN 70-12. Geneva, 1970.
- [89] Echten T., Haidt D., Pattison J.B.M. et al. Particle production in proton interactions in nuclei at 24 GeV/c // Nucl. Phys. 1972. V. B44. P. 333-343.
- [90] Battistoni G., Cavalli D., Ferrari A. et al. A new calculation of atmospheric neutrino flux: the FLUKA approach // Nucl. Phys. Proc. Suppl. 1999. V. 70. P. 358-360.
- [91] Barton D.S., Brandenburg G.W., Busza W. et al. Experimental study of the A dependence of inclusive hadron fragmentation // Phys. Rev. 1983. V. D27, № 11. P. 2580-2599.
- [92] Mielke H.H., Föller M., Engler J., Knapp J. Cosmic ray hadron flux at sea level up to 15 TeV // J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. 1994. V. 20. P. 637-649.
- [93] Minorikawa Y. Scaling parameters in inclusive reaction $p + p \rightarrow e + X$ at ISR energies and the charge ratio of cosmic-ray muons // Lett. Nuovo Cim. 1978. V. 22, № 6. P. 247 - 251.
- [94] Minorikawa Y., Mitsui K. New interpretation of the charge ratio of cosmic-ray muons // Lett. Nuovo Cim. 1984. V. 41, № 10. P. 333-338.
- [95] Анисович В.В., Браун В.М., Шабельский Ю.М. Поправки на эффекты затенения в кварковой модели и нарушение фейнмановского скейлинга в выходах фрагментов пучка // ЯФ. 1984. Т. 39. С. 932-946.
- [96] Dyakonov M.N., Egorova V.P., Ivanov A.A. et al. On some parameters of the nuclear interaction of primary cosmic rays with $E_0 > 10^{17}$ eV // Proc. of the 20th ICRC, Moscow, 1987. V. 6. P. 147-150.
- [97] Genz A.C., Malik A.A. Remarks on algorithm 006: An adaptive algorithm for numerical integration over N-dimensional rectangular region // J. Comput. Appl. Math. 1980. V. 6. P. 295-302.
- [98] Григоров Н.Л., Рапопорт И.Д., Шестоперов В.Я. Частицы высоких энергий в космических лучах. М.: Наука, 1973. 303 с.
- [99] Кочарян Н.М., Саакян Г.С., Киракосян З.А. Энергетические спектры и ядерные взаимодействия частиц космического излучения // ЖЭТФ. 1958. Т.35, вып. 6(12). С. 1335-1349.

- [100] Brooke G., Wolfendale A.W. The momentum spectrum of cosmic-ray protons near sea level in the momentum range 0.61-150 GeV/c // Proc. Phys. Soc. 1964. V. 84. P. 843-851.
- [101] Diggory I.S., Hook J.R., Jenkins I.A., Turver K.E. The momentum spectra of nuclear active particle in the cosmic radiation at sea level I. Experimental data // J. Phys. A: Math., Nucl., Gen. 1974. V. 7, № 6. P. 741-764.
- [102] Lumme M., Nieminen M., Peltonen J. et al. Cosmic-ray spectra as calculated from atmospheric hadron cascades // J.Phys.G: Nucl. Phys. 1984. V.10. P. 683-694.
- [103] Ashton F., Coats R.R. The energy spectrum of cosmic-ray neutrons at sea level in the range 20-4000 GeV // J. Phys. A: Gen. Phys. 1968. V. 1. P. 169-171.
- [104] Аштон Ф., Кинг Дж., Мамиджян Э.А., Смитт Н.И. Энергетический спектр нейтронов космических лучей на уровне моря // Изв. АН СССР, сер. физ. 1969. Т.33, № 9. С. 1557-1559.
- [105] Liland A. The energy spectrum of nucleons in the atmosphere // Proc. of the 20th ICRC, Moscow, 1987. V. 5. P. 295-297.
- [106] Kornmayer H., Mielke H.H., Engler J., Knapp J. High energy cosmic-ray neutrons at sea level // J.Phys. G: Nucl. Part. Phys. 1995. V. 21. P. 439-449.
- [107] Наумов В.А., Синеговская Т.С., Синеговский С.И. Спектры вторичных частиц в $K_{\ell 3}$ распадах // Астрофизика и физика микромира. Материалы Байкальской школы по фундаментальной физике. Иркутск: изд-во ИГУ, 1998. С. 211-226.
- [108] Aurela A.M., Wolfendale A.W. Measurement of cosmic-ray muon momentum spectrum with Durham magnetic spectrometer // Proc. Phys. Soc. London. 1963. V. 81. P. 593-600.
- [109] Ayre C.A., Baxendale J.M., Hume C.J. et al. Precise measurement of the vertical muon spectrum in the range 20-500 GeV/c // J.Phys. G: Nucl. Phys. 1975. V. 1, № 5. P. 584-600.
- [110] Baber S.R., Nash W.F., Rastin B.C. The momentum spectrum of muons at sea-level in the range 3-1000 GeV/c // Nucl. Phys. 1968. V. B4. P. 539-558.
- [111] Rastin B.C. An accurate measurement of the sea-level muon spectrum within the range 4 to 3000 GeV/c // J. Phys. G: Nucl. Phys. 1984. V. 10, № 12. P. 1609-1628.
- [112] Thompson M.G., Thornley R., Whalley M.R, Wolfendale A.W. The momentum spectrum and charge ratio of muons to 3 TeV/c // Proc. of the 15th ICRC, Plovdiv, 1977. V. 6. P. 21-25.
- [113] Bateman B.J., Cantrell W.G., Durda D.R. et al. Absolute measurement of the vertical cosmic ray muon intensity at 3-50 GeV/c near sea level // Phys. Lett. 1971. V. 36B, № 2. P. 144-148.

- [114] Allkofer O.C., Carstensen K., Dau W.D. The absolute cosmic ray muon spectrum at sea level // *Phys. Lett.* 1971. V. 36B, № 4. P. 425-428.
- [115] De Pascale M.P., Circella M., Cafagna F., et al. Cosmic ray muon spectrum in the atmosphere // *J. Geophys. Res.* 1993. V. 98(A3). P. 3501-3526.
- [116] Aglietta M., Alessandro B., Antonioli P. et al. (EAS-TOP Collaboration). The HE muon and neutrino fluxes from measurements of horizontal air showers at EAS-TOP // *Proc. of the 24th ICRC, Rome, 1995.* V. 1. P. 638-641.
- [117] Nandi B.C., Sinha M.S. The momentum spectrum of muons at sea level in the range 5-1200 GeV/c // *J. Phys. A: Gen. Phys.* 1972. V. 5, № 9. P. 1384-1394.
- [118] Bruscoli M., Pieri M. Measurement of cosmic muons with the L3 detector // INFN, Sezione di Firenze, Report No. DFF 182/2/93, 1993; Coultre P. Le // *Proc. of the 3rd NESTOR International Workshop, Fortress of Niokastro, Pylos, Greece, October 19-21, 1993.* P. 253-265.
- [119] Matsuno S., Kajino F., Kawashima Y. et al. Cosmic ray muon spectrum up to 20 TeV at 89° zenith angle // *Phys. Rev.* 1984. V. D29. P. 1-16.
- [120] Allkofer O.C., Bella G., Dau W.D. et al. Cosmic ray muon spectra at sea-level up to 10 TeV // *Nucl. Phys.* 1985. V. B259. P. 1-18.
- [121] Kellogg R.G., Kasha H., Larsen R.C. Momentum spectra, charge ratio, and zenith-angle dependence of cosmic-ray muons // *Phys. Rev.* 1978. V. D17. P. 98-113.
- [122] Gettert M., Unger J., Trezeciak R. et al. The momentum spectrum of horizontal muons up to 15 TeV/c // *Proc. of the 23rd ICRC, Calgary, 1993.* V. 4. P. 394-397.
- [123] Еникеев Р.И., Зацепин Г.Т., Королькова Е.В. и др. Изучение мюонного спектра на глубине 570 м.в.э. под землей с помощью 100-тонного сцинтилляционного детектора // *ЯФ.* 1988. Т. 47. С. 1044-1053.
- [124] Zatsepin G.T., Ilina N.P., Kalmykov N.N. et al. Energy spectrum of PCR nucleons in the range 20-TeV to 400-TeV and charm generation from the muon experiment of Lomonosov State University // *Bull. Russ. Acad. Sci. Phys.* 1994. V.58, No. 12. P. 2050 - 2052.
- [125] Ivanova M.A., Kuzmichev L.A., Mandritskaya K.V. et al. Zenith angular distribution and energy spectra of > 3-TeV muons obtained in the X-ray chambers // *Proc. of the 16th ICRC, Kyoto, 1979.* V.10. P. 35-39.
- [126] Andreyev Yu.M., Gurentsov V.I., Kogai I.M. Muon intensity from the Baksan underground scintillation telescope // *Proc. of the 20th ICRC, Moscow, 1987.* V. 6. P. 200-203.
- [127] Andreyev Yu.M., Chudakov A.E., Gurentsov V.I., Kogai I.M. Muon intensity at great depth in zenith angle intervals 50 – 70° and 70 – 85° obtained by Baksan underground scintillation telescope // *Proc. of the 21st ICRC, Adelaide, 1990.* V. 9. P. 301-304.

- [128] Бакатанов В.Н., Новосельцев Ю.Ф., Новосельцева Р.В. и др. Интенсивность мюонов космических лучей и первичные нуклоны по данным Баксанского подземного сцинтилляционного телескопа // ЯФ. 1992. Т. 55. С. 2107-2116.
- [129] Rhode W. Measurements of the muon-flux with Frèjus-detector // Nucl. Phys. (Proc. Suppl.). 1994. V. B35. P. 250-253.
- [130] Ambrosio M., Antolini R., Auriemma G. et al. Vertical muon intensity measured with MACRO at the Gran Sasso laboratory // Phys. Rev. 1995. V. D52, № 7. P. 3793-3802.
- [131] Aglietta M., Alpat B., Aleya E.D. et al. Muon "depth-intensity" relation measured by LVD underground experiment and cosmic-ray muon spectrum at sea level // Phys. Rev. 1998. V. D58: 092005. P. 1-11; hep-ph/9803488.
- [132] Ito N.(for the KGF Collaboration). Observation of cosmic rays and GUT signals at great underground depth // Proceedings of the International Symposium on Underground Physics Experiment, Tokyo, Japan, 1990, ed. K. Nakamura (ICRR, Tokyo, 1990), P. 101-125.
- [133] Miyake S., Narasimham V.S. and Ramana Murthy P.V. Cosmic-ray intensity measurements deep underground at depth of (800÷8400) m w.e. // Nuovo Cim. 1964. V. 32. P. 1505-1523.
- [134] Adarkar H., Hayashi Y., Ito N. et al.(KGF Collaboration). Muon intensity at great depth // Proc. of the 21st ICRC, Adelaide, 1990. V. 9. P. 310-315.
- [135] Volkova L.V., Fulgione W., Galeotti P. and Saavedra O. Prompt-muon production in cosmic rays // Nuovo Cim. 1987. V. 10. P. 465-476.
- [136] Гуренцов В.И., Зацепин Г.Т., Михальчи Е.Д. Прохождение потока мюонов через толстые слои вещества // ЯФ. 1976. Т. 23. С. 1001-1010.
- [137] Takahashi N., Kujirai H., Adachi A., Ogita N., Misaki A. Uchuusen-Kenkyuu ["Study of Cosmic Rays"] // Tokyo: ICRR, 1984. V. 28. P. 120-129.
- [138] Бугаев Э.В, Наумов В.А., Синеговский С.И. Взаимодействия мюонов космических лучей сверхвысоких энергий и их потоки на больших глубинах // ЯФ. 1985. Т. 41. С. 383-392; Бугаев Э.В, Наумов В.А., Синеговский С.И. Энергетические спектры и интенсивности мюонов космических лучей на больших глубинах // Известия АН СССР, сер. физ. 1985. Т. 49. С. 1389-1392.
- [139] Naumov V.A, Sinegovsky S.I, Bugaev E.V. A new method for calculating energy spectrum of cosmic ray muons under thick layers of matter // ЯФ. 1994. Т. 57. С. 439 - 451.
- [140] Pasquali L., Reno V.H. and Sarcevic I. Lepton fluxes from atmospheric charm // Phys. Rev. 1999. V. D59. P. 034020; hep-ph/9806428.
- [141] Misaki A., Naumov V.A., Sinegovskaya T.S. et al. Expected muon energy spectra and zenithal distribution deep underwater // Proc. of the 26th ICRC, Salt Lake City, Utah, 1999. V. 2. P. 139-142; hep-ph/9905399.

- [142] Allkofer O.C., Bella G., Binder O.H. et.al. The muon charge ratio up to 7-TeV measured with the DEIS spectrometer // Proc. of the 16th ICRC, Kyoto, 1979. V. 10. P. 56-58.
- [143] Yamada M., Miyano K., Miyata H. et al. Measurements of the charge ratio and polarization of 1.2-TeV/c cosmic ray muons with the Kamiokande-II detector // Phys. Rev. 1991. V. D44. P. 617-621.
- [144] Thompson M.G., Thornley R., Whalley M.R Dependence of the cosmic ray muon charge ratio at sea level on kaons produced as a consequence of neutron interaction // J.Phys.G: Nucl. Phys. 1977. V. 3, № 3. P. 39-42.
- [145] Flint R.W., Nash W.F. Survey of large zenith angle muon data at high energies // Nucl. Phys. 1971. V. B33. P. 632-642.
- [146] Ryan M.J., Ormes J.F., Balasubrahmanyam V.K. Cosmic-ray proton and helium spectra above 50 GeV // Phys. Rev. Lett. 1972. V. 28, № 15. P. 985-988.
- [147] Лагутин А.А., Литвинов В.А., Учайкин В.В. Теория чувствительности в физике космических лучей // Барнаул: изд-во Алтайского гос. университета, 1995. 217 с.
- [148] Лагутин А.А., Учайкин В.В., Юшков А.В. Мюоны в случайно-неоднородной среде // Астрофизика космических лучей сверхвысоких энергий. Известия Алтайского гос. университета. 1998. С. 99-107.
- [149] Berger Ch., Frohlich M., Monch H. et al. (Fréjus Collaboration). Experimental study of muon bundles observed in the Fréjus detector // Phys. Rev. 1989. V. D40, № 7. P. 2163-2171; Berger Ch., Fröhlich M., Mönch H. et al. (Fréjus Collaboration). A search for high energy neutrinos from SN 1987 A, the Crab Hercules X-1, and Cygnus X-3 with Fréjus detector // Z. Phys. C-Particles and Fields. 1990. V. 48. P. 221 - 226.
- [150] Rhode W., Daum K., Bareyre P. et al. Limits on the flux of very high energy neutrinos with the Fréjus detector // Astropart. Phys. 1996. V. 4. P. 217-225.
- [151] Aglietta M., Alpat B., Alyea E.D. et al. (LVD Collaboration). Neutrino-induced and atmospheric single-muon fluxes measured over five decades of intensity by LVD at Gran Sasso Laboratory // Astropart. Phys. 1995. V. 3. P. 311-320.
- [152] Higashi S., Kitamura T., Miyamoto S. et al. Cosmic-ray intensities under sea-water at depths down to 1400 m // Nuovo Cim. 1966. V. 43A, № 2. P. 334-343.
- [153] Вавилов Ю.Н., Трубкин Ю.А., Федоров В.М. Интенсивности космических мюонов на больших глубинах в грунте и воде и их энергетический спектр на уровне моря // ЯФ. 1973. Т. 18. С. 844-853.
- [154] Fyodorov V.M. Muon registration under water in the ocean with a Cherenkov detector // Nucl. Instrum. and Methods. 1986. V. 248A. P. 221-223.
- [155] Babson J., Barish B., Becker-Szendy R. et al. (DUMAND Collaboration). Cosmic-ray muons in the deep ocean // Phys. Rev. 1990. V. D42. P. 3613-3620.

- [156] Anassontzis E., Athanasopoulos C., Barone M. et al.(NESTOR Collaboration). The NESTOR project // Астрофизика и физика микромира. Материалы Байкальской школы по фундаментальной физике. Иркутск: изд-во ИГУ, 1998. С. 105-114.
- [157] Belolaptikov I.A., Bezrukov L.B., Borisovets B.A. et al. (Baikal Collaboration). Analysis of muon event recorded with the NT-36 Detector in Lake Baikal // Proc. of the 24th ICRC, Rome. 1995. V. 1. P. 536-539.
- [158] Hundertmark St. (for the AMANDA Collaboration). Up- and down-going muons in the AMANDA-B4 prototype detector // Proc. of the 26th ICRC, Salt Lake City, Utah. 1999. V. 2. P. 12-15.
- [159] Синеговская Т.С. Вклады атмосферных адронов в потоки нейтрино высоких энергий // Студент и научно-технический прогресс. Сборник тезисов и докладов студентов и аспирантов ИГУ. Иркутск: изд-во ИГУ, 1998. С. 83-84.
- [160] Misaki A., Naumov V.A., Sinegovskaya T.S., Sinegovsky S.I. Form factors of three-particle kaon decay and atmospheric neutrino flavour ratio at high energies // Proc. of the 25th ICRC, Durban, South Africa. 1997. V. 7. P. 129-132.