

ИРКУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. А.А. ЖДАНОВА

на правах рукописи

УДК 537.591.5

539.123

539.123.6

Наумов

Вадим Александрович

КОСМИЧЕСКИЕ ЛУЧИ И НЕЙТРИНО НИЗКИХ ЭНЕРГИЙ

В АТМОСФЕРЕ ЗЕМЛИ

01.04.16 – физика атомного ядра и элементарных частиц

Диссертация

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

доктор физ.-математ. наук

Г.В. Домогацкий

Иркутск 1988

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
ВВЕДЕНИЕ	
ГЛАВА 1. МЕТОД РЕШЕНИЯ КИНЕТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ НУК- ЛОНОВ КЛ БЕЗ УЧЕТА ГЕОМАГНИТНОГО ПОЛЯ	4
§ 1.1. Особенности ядерно-каскадного процесса при сред- них энергиях и основные приближения	13
§ 1.2. Решение однородной системы КУ (без учета ядер- ной компоненты)	17
§ 1.3. Условия сходимости и устойчивость метода	27
§ 1.4. Учет вклада ядерной компоненты КЛ (решение неод- нородной системы КУ)	31
§ 1.5. Результаты расчетов	37
ГЛАВА 2. МЕТОД РАСЧЕТА ГЕОМАГНИТНЫХ ПОПРАВOK	49
§ 2.1. Геомагнитные эффекты	49
§ 2.2. Поправки, обусловленные геомагнитным обрезанием спектра первичных протонов	51
§ 2.3. Поправки, обусловленные геомагнитным обрезанием спектра ядер первичного излучения	59
§ 2.4. Интенсивность нуклонов КЛ в атмосфере с учетом геомагнитного эффекта (численные результаты)... ..	65
ГЛАВА 3. МЮНЫ И НЕЙТРИНО В АТМОСФЕРЕ И ПОД ЗЕМЛЕЙ	87
§ 3.1. Генерация π - и K-мезонов и модель атмосферы... ..	87
§ 3.2. Мюоны в атмосфере и на уровне моря	94
§ 3.3. Нейтрино и антинейтрино на уровне моря	111
§ 3.4. Геомагнитные эффекты для усредненных характерис- тик НКЛ, как фон в экспериментах по исследова- нию нейтринных осцилляций	126
§ 3.5. Спектры электронов и мюонов, образующихся при	

квазиупругих взаимодействиях НКЛ с ядрами в подземных черенковских детекторах.....	138
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	150
Приложение 1. Аппроксимация парциальных моментов по методу наименьших квадратов.....	154
Приложение 2. Модель нуклонного каскада при высоких энергиях.....	157
Приложение 3. Влияние энергетических потерь на спектры π и K- мезонов в атмосфере.....	161
Приложение 4. Общие формулы для нейтринных спектров с учетом распределения нейтрино по углу вылета в двухчастичных распадах мезонов.....	163
Приложение 5. Аппроксимации усредненных по направлениям спектров НКЛ для детекторов IMB и Kamiokande	169
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.....	171

ВВЕДЕНИЕ

В диссертации рассматриваются некоторые проблемы кинетики космических лучей, связанные с генерацией нейтрино (антинейтрино) низких и средних энергий (от ~ 100 МэВ до $10-20$ ГэВ) в атмосфере Земли. Интерес к нейтрино космических лучей (НКЛ) таких энергий инициирован появлением в последние годы больших подземных детекторов распада протона (IMB, Kamioka, Fréjus, Soudan II и др.), которые могут служить одновременно нейтринными телескопами с относительно низкими энергетическими порогами.

Детальная информация об интенсивностях, спектрах и угловых распределениях НКЛ необходима для ряда экспериментов, проводимых на подземных установках. В частности, НКЛ с энергиями до нескольких ГэВ являются источником неустраняемого фона в опытах по проверке сохранения барионного числа /1-11/, поскольку взаимодействия $\nu(\bar{\nu})$ с веществом детектора способны имитировать двух- и трехчастичные моды распада нуклона, как и возможный сигнал от $n \rightarrow \bar{n}$ -перехода (с $\Delta B=2$) в ядре. Из результатов многих работ (см. например /12-16/, а также обзоры /17,18/) следует, что фоновые процессы от НКЛ становятся существенны, если парциальное время жизни нуклона превышает (грубо) $\sim 10^{32}$ лет для безнейтринных мод распада, типа $N \rightarrow l^+ + X$ и $\sim 10^{31}$ лет для распадов типа $N \rightarrow \bar{\nu} + X$.

Выделение событий, вызванных внеземными нейтрино /19,20/ (в том числе $\bar{\nu}_e$ от гравитационных коллапсов массивных звезд /21,22/) или нейтрино, которые могли бы генерироваться в Солнце и Земле при аннигиляции частиц "холодной темной материи" (фотино, sneйтрино и др.) /23-25/ на фоне, создаваемом атмос-

ферными нейтрино, возможно только с помощью сравнения наблюдаемых энергетических и пространственных распределений событий в детекторе с ожидаемыми от НКЛ. Это относится и к эксперименту по поиску гипотетических "зеркальных космических лучей" /26/: знание соотношения нейтринных событий, обусловленных заряженными и нейтральными токами, а также зенитно-угловой и азимутальной асимметрии потоков НКЛ может позволить, в принципе, выделить изотропный вклад от зеркальных частиц, если они присутствуют в космическом излучении и способны взаимодействовать с обычным веществом.

В опытах по исследованию нейтринных осцилляций геофизическим методом /27, 28/ расчет характеристик НКЛ является основой для получения экспериментальных ограничений на параметры смешивания (см. например /29-31/). Эти опыты стали особенно актуальными после открытия эффекта резонансного усиления осцилляций в материи /32, 33/ и очень естественного объяснения на его основе дефицита солнечных нейтрино в эксперименте Дэвиса (подробное обсуждение различных аспектов проблемы осцилляций нейтрино в среде и обзор литературы см. в работе /34/). Наиболее многообещающим является то обстоятельство, что вероятная область значений параметров смешивания в системе (ν_e, ν_μ, ν_τ), следующая из т.н. "решений" проблемы солнечных нейтрино /34, 35/, пересекается с областью значений параметров, для которых возможно усиление осцилляций в Земле, при энергиях от ~ 100 МэВ до нескольких ГэВ. Именно этот энергетический интервал ответствен за главный вклад в статистику событий на подземных установках типа IMB. С другой стороны, спектр и угловые распределения НКЛ при $E_\nu < (2-3)$ ГэВ подвержены сильному влиянию

геомагнитных эффектов, которые могут существенно исказить ожидаемый результат резонансных переходов и, следовательно, должны быть рассчитаны с максимально возможной точностью (см. подробнее § 3.4).

В числе экспериментов, для которых необходимо знать характеристики потоков НКЛ, следует упомянуть задачу регистрации нейтринного излучения от мощных хромосферных вспышек на Солнце /36-38/ (оценки спектров вспыхивающих нейтрино см. в работах /39, 40/) и опыты по измерению времени жизни нейтрино /41/, интересные с методической точки зрения, хотя и несколько поблекшие после взрыва SN1987A.

Первые оценки потоков атмосферных нейтрино были получены в работах /42, 43/. После классического исследования /44/ расчеты спектров и зенитно-угловых распределений НКЛ неоднократно уточнялись и детализировались многими авторами /45-74/. В работах /42-54/ изучалась область высоких энергий, $E_\nu \geq 1$ ГэВ или $E_\nu \gg 1$ ГэВ. При этом не принимались во внимание геомагнитные эффекты и другие, существенные при $E_\nu < (2-3)$ ГэВ факторы (см. ниже).

Расчеты спектров $\nu_\mu + \bar{\nu}_\mu$ и $\nu_e + \bar{\nu}_e$ для вертикали и горизонталей, учитывающие широтный эффект, впервые были сделаны в работах /55, 56/ (см. также /57/) с помощью полуэмпирических формул Олберта для спектров генерации мюонов и π -мезонов. Позднее, в цикле работ /58-61/ были выполнены подробные расчеты усредненных по направлениям спектров $\nu_\mu + \bar{\nu}_\mu$ и $\nu_e + \bar{\nu}_e$ низких энергий, основанные на численном моделировании одномерного нуклон-мезонного каскада в атмосфере методом Монте-Карло. В работах /62, 63/ получены простые аналитические выражения для спектров $\nu_\mu + \bar{\nu}_\mu$ и $\nu_e + \bar{\nu}_e$ как низких так и высоких энер-

гий. Однако, их можно рассматривать лишь в качестве более или менее удачных аппроксимаций, поскольку модель /62, 63/ по существу, игнорирует кинетику распространения КЛ в атмосфере, не говоря уже об особенностях каскада при небольших энергиях. В работах /64 - 66/ предпринята попытка трехмерного Монте-Карловского расчета интенсивностей НКЛ с энергиями $0 < E_\gamma < 500$ МэВ. Авторы этих работ пришли к выводу, что при $E_\gamma \geq 200$ МэВ учет неоднородности каскада не приводит к существенным поправкам для интенсивностей НКЛ, по сравнению с результатами моделей, основанных на приближении "прямо-вперед" (см. подробнее § 3.3), но качественно важен при $E_\gamma \lesssim 50$ МэВ.

В работах /55 - 66/ изучались суммарные спектры $\nu_\mu + \bar{\nu}_\mu$ и $\nu_e + \bar{\nu}_e$. Однако, как известно, сечения взаимодействия нейтрино и антинейтрино с нуклонами и ядрами в значительной степени неодинаковы, а отношения $\nu_\mu/\bar{\nu}_\mu$ и $\nu_e/\bar{\nu}_e$ должны, вообще говоря, зависеть от энергии, направления прихода пучка и геомагнитных координат детектора. Поэтому, для анализа подземных экспериментов необходимо рассчитать характеристики ν_μ , $\bar{\nu}_\mu$, ν_e и $\bar{\nu}_e$ по отдельности. Результаты таких расчетов, выполненных в рамках приближения одномерного каскада, представлены в работах /67 - 74/.

В настоящей работе для расчета спектров и угловых распределений НКЛ используется подход, основанный на решении уравнений переноса излучения (кинетических уравнений). Преимущества кинетического подхода заключаются в том, что он позволяет в деталях проанализировать следствия исходных приближений и роль различных факторов, влияющих на формирование спектров вторичных космических лучей. Основное внимание уделяется корректному учету качественных особенностей переноса нуклонов и ядер средних энергий (от (700-800) МэВ/нуклон до сотен ГэВ/

нуклон) и геомагнитным эффектам.

Нуклонная компонента средних энергий в атмосфере Земли представляет и самостоятельный интерес, как источник информации о галактических КЛ. Известно, что потоки первичных заряженных частиц с энергиями до ~ 10 ГэВ/нуклон заметно модулируются в солнечной системе. Эта модуляция проявляется в возрастании интенсивности КЛ во время хромосферных вспышек на Солнце, а также в непрерывных вариациях интенсивности и спектра, вызванных взаимодействием протонов и ядер с межпланетными магнитными полями, движущимися от Солнца вместе с солнечным ветром /75, 76/. В узкой области энергий $\sim (5 \div 20)$ ГэВ наблюдаются эффекты т.н. зональной модуляции, природа которых еще во многом неясна /77, 78/. Измерения спектров вторичных КЛ в стратосфере и тропосфере позволяют изучать модуляционные эффекты первичных КЛ релятивистских энергий. Поэтому такие эксперименты важны для решения многих задач физики Солнца и окосолнечного пространства, касающиеся механизма ускорения частиц во вспышках, свойств солнечного ветра, структуры гелиомагнитосферы и т.д.. Для правильной интерпретации экспериментальных данных необходимо уметь рассчитывать трансформацию состава и спектра нуклон-ядерной компоненты КЛ в атмосфере.

Диссертация состоит из трех глав и пяти приложений.

В первой главе излагаются метод и результаты расчета спектров протонов и нейтронов КЛ в атмосфере без учета геомагнитных эффектов. В § 1.1 дается физическая формулировка задачи. Обсуждаются особенности ядерного каскада при средних энергиях и основные предположения, используемые в дальнейшем. В § 1.2 формулируется метод решения однородной системы одномерных кинетических уравнений (КУ), описывающих перенос протонов

и нейтронов КЛ в атмосфере без учета вклада ядерной компоненты. Решение КУ строится в виде тройных рядов по степеням безразмерных параметров h/λ_N , $\beta\lambda_N/E$ и const/E (где h — глубина атмосферы, E и λ_N — полная энергия и пробег нуклона до взаимодействия, $\beta = \beta_p$ — ионизационные потери энергии протона) с постоянными коэффициентами, удовлетворяющими алгебраическим рекуррентным соотношениям, удобным для численной реализации на ЭВМ. Решение является точным в случае степенного граничного спектра при условии, что инвариантные инклюзивные сечения процессов $NA \rightarrow N'X$ удовлетворяют гипотезе предельной фрагментации /79/, т.е. обладают скейлинговой асимптотикой при $s \rightarrow \infty$. Для реального квазистепенного спектра и дифференциальных сечений, известных из экспериментов на ускорителях, решение остается справедливым в конечной (достаточно широкой) области изменения аргументов E и h с ошибкой много меньшей неопределенностей в исходных данных. Условия сходимости и устойчивость решения исследуется в § 1.3. Некоторые математические детали, связанные с аппроксимацией парциальных моментов сечений, вынесены в Приложение 1. В Приложении 2 излагается точно решаемая модель нуклонного каскада при высоких энергиях с логарифмически растущим неупругим сечением и степенным нарушением фейнмановского скейлинга. В § 1.4 рассматривается простая модель взаимодействия ядро-ядро (нуклоны-спектаторы + некогерентно взаимодействующие с мишенью нуклоны), позволяющая распространить метод § 1.2 на случай неоднородной системы КУ, описывающей вклад в потоки нуклонов, обусловленный ядерной компонентой КЛ. В § 1.5 приводятся необходимые сведения о спектре и химическом составе первичных КЛ, а также используемые параметризации инклюзивных и полных неупругих сечений. Проводится де-

тальное сравнение расчетных спектров протонов и нейтронов с данными измерений на высотах $H \leq 9$ км над уровнем моря, где геомагнитные эффекты относительно невелики. Анализируется зависимость интенсивностей нуклонов от глубины.

Вторая глава посвящена расчету интенсивностей нуклонов с энергиями меньшими геомагнитного порога. В § 2.1 дается краткое резюме теории взаимодействия КЛ с магнитным полем Земли, вводится определение эффективной жесткости геомагнитного обрезания R_c и постулируются граничные условия для КУ. В § 2.2 излагается приближенный метод решения КУ с разрывными граничными условиями без учета ядерной компоненты КЛ. Метод заключается в эквивалентной замене интегро-дифференциального уравнения для "геомагнитной поправки" системой дифференциального и интегрального уравнений, в которых фигурирует т.н. D -функция, связанная с коэффициентом поглощения нуклонов в фиктивной (нерассеивающей) среде. После формального решения дифференциального уравнения легко получить приближенное выражение для D -функции, используя факт ее слабой зависимости от h (который означает, что поглощающие свойства фиктивной среды медленно изменяются с глубиной). В § 2.3 аналогичным способом выводятся формулы для поправок к интенсивностям протонов и нейтронов, обусловленных геомагнитным обрезанием спектра ядерной компоненты КЛ и не связанных с тривиальным вкладом нуклонов-спектаторов. Анализируются важные предельные случаи. В § 2.4 приводятся некоторые численные результаты. Исследуются качественные особенности спектров нуклонов, в зависимости от R_c , а также влияние геомагнитного обрезания на форму кривых поглощения и на поведение n/p -отношения. Проводится сравнение расчетов с имеющимися экспериментальными данными на боль-

ших высотах и с результатами расчетов других авторов.

В третьей главе полученные результаты применяются для расчета спектров π^- и K^- -мезонов, мюонов, нейтрино и анти-нейтрино (мюонных и электронных). Основные формулы и кинематические ограничения, необходимые для расчета интенсивностей мезонной компоненты, приводятся в § 3.1. Там же рассматривается используемая модель неизотермической атмосферы и выводятся простые выражения для поправок к спектрам пионов и каонов низких энергий, обусловленных градиентом температуры в тропосфере. В Приложении 3 исследуется влияние энергетических потерь мезонов на их спектры. В § 3.2 приводится точное решение одномерного КУ для мюонов, образующихся при распадах π^- и K^- -мезонов, а также его следствие, полученное (для неизотермической сферической атмосферы) в приближении "эффективной высоты генерации" /80/ и постоянных энергетических потерь. Анализируется применимость этих приближений и их влияние на точность расчета потоков ν ($\bar{\nu}$) от $\mu_{\text{ез}}$ -распадов. Поскольку мюонная компонента НКЛ сравнительно хорошо изучена экспериментально — она наиболее пригодна для проверки следствий теории. С этой целью проводится подробное сопоставление результатов расчетов с большим массивом экспериментальных данных, полученных на разных высотах атмосферы и геомагнитных широтах (от полярных до экваториальных) при импульсах мюонов в интервале (0,1–100) ГэВ/с. На основе найденных спектров мезонов и мюонов НКЛ, в § 3.3 рассчитываются спектры и зенитно-угловые распределения ν_μ , $\bar{\nu}_\mu$, ν_e и $\bar{\nu}_e$ низких энергий от $\pi_{\mu 2}$ -, $K_{\mu 2}$ - и $\mu_{\text{ез}}$ -распадов в приближении "прямо-вперед". Изучается широтная зависимость вертикальных интенсивностей НКЛ. Проводится сравнение с расчетами других авторов. В Приложении 4 выводятся точные формулы для

спектров НКЛ, учитывающие распределение ν ($\bar{\nu}$) по углу вылета в акте распада. В § 3.4 вычисляются различные усредненные характеристики потоков НКЛ для ряда подземных детекторов, расположенных на разных геомагнитных широтах. Обсуждаются следствия геомагнитных эффектов НКЛ, важные для интерпретации экспериментов по исследованию нейтринных осцилляций. Удобные аппроксимационные формулы для усредненных спектров НКЛ приводятся в Приложении 5. В § 3.5 вычисляются импульсные распределения электронов и мюонов, образующихся в результате квазиупругих столкновений НКЛ с ядрами кислорода и водорода. Для расчета дифференциальных сечений взаимодействия ν_l и $\bar{\nu}_l$ с ядрами используется ферми-газовая модель Смита-Моница /81/ с учетом современных ускорительных данных о слабых факторах нуклона. Проводится сравнение предсказываемых спектров $e^+ + e^-$ и $\mu^+ + \mu^-$ с наблюдаемыми распределениями однокольцевых событий S- и M-типов для черенковского детектора Kamiokande. Кратко обсуждается роль различных фоновых процессов.

В Заключение формулируются основные результаты, полученные в диссертации.

ГЛАВА 1. МЕТОД РЕШЕНИЯ КИНЕТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ НУКЛОНОВ БЕЗ УЧЕТА ГЕОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

§ 1.1. Особенности ядерно-каскадного процесса при средних энергиях и основные приближения.

В этой и следующей главах изучается прохождение нуклонной компоненты космического излучения через атмосферу Земли. Нас будут интересовать дифференциальные спектры протонов, нейтронов и ядер КЛ с кинетической энергией на нуклон от ~ 1 ГэВ до нескольких сотен ГэВ, поскольку именно эта область спектра нуклонов ответственна за генерацию нейтрино с энергиями $E_\nu \lesssim 10$ ГэВ.

За многолетний период исследований КЛ накоплен довольно подробный экспериментальный материал по нуклонной компоненте, рассматриваемых энергий на уровне моря (см., например /82-88/) и на высотах гор (до $H = 5,2$ км над у.м.) /89-92/. В работе /93/ был измерен спектр частиц жесткой компоненты на высоте $H = 9$ км над у.м. в интервале импульсов $(0,3 - 6)$ ГэВ/с. Поскольку, однако, основная часть потока мюонов и нейтрино КЛ генерируется в относительно узком слое атмосферы — стратосфере и тропопаузе — необходима информация о спектрах и угловых распределениях нуклонов на соответствующих высотах. Результаты измерений спектров протонов с кинетическими энергиями $T \leq 10$ ГэВ на высотах $(8 \div 18)$ и 32 км, выполненных в полярных и средних широтах, представлены в работе /94/. Там же собраны результаты нескольких экспериментов на высотах $(35 \div 40)$ км. К сожалению, неизбежная в подобных экспериментах ограниченность полученной информации (выборочные высоты, зенитные углы и т.д.) и большие статистические ошибки в измерении энергии и интенсивности не позволяют использовать результаты /94/ в качестве основы для расчета спектров лептонов.

Представленное в /94/ сравнение имеющихся расчетов, выполненных различными авторами, с экспериментом указывает на отсутствие (на 1979 год) адекватной теоретической модели ядерного каскада в атмосфере, удовлетворительно описывающей всю совокупность имеющихся данных по протонной компоненте средних энергий. Расчеты, сделанные позднее (см. работы /92, 95-99/ и цитируемую в них литературу), не изменяют ситуацию, т.к. их результаты не охватывают всей необходимой области глубин энергий и т.д. В работах /100, 102/ (см. также /102/) сделана попытка дать полный анализ спектральных и угловых характеристик протонов и нейтронов с энергиями $(5 \cdot 10^{-2} \div 10^3) \text{ ГэВ}$ для ряда глубин атмосферы с остаточным давлением $P_0 \leq 300 \text{ г/см}^2$ и вертикальных жесткостей геомагнитного обрезания $R_c^\circ \leq 14,9 \text{ ГВ}$. Предложенная в /101/ Монте-Карловская модель согласуется с экспериментом /94/, а приведенные в /100, 101/ результаты расчетов (113 таблиц!) позволяют быстро получать оценки спектров нуклонов на высотах $H \leq 10 \text{ км}$ для районов с $R_c^\circ = 0,44; 1,25; 1,7; 4,0; 7,5$ и $14,9 \text{ ГВ}$. Тем не менее, эта модель по ряду причин малопригодна для прецизионного расчета спектров мюонов и нейтрино. Во-первых, результаты /100-102/ нельзя экстраполировать на глубины атмосферы, превышающие 300 г/см^2 . Во-вторых, интерполяция спектров для районов земного шара с вертикальными жесткостями геомагнитного обрезания отличными от использованных в /100-102/ может приводить к недопустимо большим ошибкам, в силу порогового характера геомагнитных эффектов (см. Гл.2). В-третьих, применяемая авторами параметризация инклюзивных сечений **NA**-взаимодействий /103/ слишком груба при энергиях налетающего нуклона, превышающих $(10-15) \text{ ГэВ}$ (например, параметризация /103/ не описывает рост сечения $pA \rightarrow pX$ с энергией в дифракционной области), а использованное приближение суперпозиции (ядро считается совокупностью свободных нукло-

нов) неприемлемо при импульсах нуклонов-фрагментов $p \leq (e/c) R_c^\circ$.

Из сказанного понятно, что желательна разработка простого и эффективного метода расчета спектров нуклонов КЛ средних энергий в атмосфере, пригодного для широких интервалов жесткостей геомагнитного обрезания энергий и глубин.

При изучении прохождения нуклонов и ядер КЛ с $T \geq 1$ ГэВ наряду с геомагнитными эффектами необходимо учитывать нестепенной характер первичного спектра протонов и ядер и его зависимость от уровня солнечной активности, энергетическую зависимость инклюзивных сечений взаимодействия ядер и нуклонов с ядрами атомов воздуха (отсутствие скейлинга при средних энергиях), непрерывные потери энергии заряженными частицами (в основном протонами) на ионизацию и возбуждение атомов. Вместе с тем имеются и упрощающие (по сравнению с областью высоких энергий) факторы. Так, например, генерация нуклонов вторичными мезонами не существенна, а полные неупругие сечения постоянны.¹⁾

В этой главе излагается аналитический метод решения системы кинетических уравнений (КУ), описывающих перенос нуклонов в среде в отсутствие геомагнитных эффектов. Метод основан /105, 106/ на представлении парциальных моментов $\Phi_j^+(E)$ (интегралов от инклюзивных сечений с зависящим от первичного спектра весом, см. (1.15)), полиномами по обратным степеням полной энергии и позволяет эффективно учесть отмеченные особенности нуклонного каскада при средних энергиях. Обсудим основные физи-

1) Аналитическая модель адронного каскада при высоких энергиях, учитывающая рост неупругих сечений, генерацию нуклонов в πA -взаимодействиях, а также процессы регенерации и перезарядки пионов, изложена в работе /104/. В /104/ показано, в частности, что вклад процессов $\pi A \rightarrow NX$ мал для нуклонной компоненты на глубинах эффективной генерации лептонов даже при энергиях $E \geq 1$ ТэВ и становится важным лишь на глубинах $h \approx 10^3$ г/см² (т.е. для наклонных направлений)

ческие приближения, которые будут использоваться в дальнейшем.

1. Мы ограничимся изучением коллимированного каскада (приближение "прямо-вперед"). Это приближение основано на сильной анизотропии в угловом распределении вторичных частиц, образующихся при неупругих взаимодействиях нуклонов и ядер и оправдано при импульсах $p \gg \bar{p}_T \sim 0,4 \text{ ГэВ/с}$. Благодаря падающему характеру энергетического спектра первичных КЛ и, как следствие, преимущественной роли в развитии каскада процессов с $p_T \ll \ll p_1$, область применимости приближения прямо-вперед несколько расширяется (по крайней мере для направлений близких к вертикальному). Из-за интегрирования малых отклонений в неупругих взаимодействиях, многократного кулоновского и упругого рассеяния точность приближения прямо-вперед, вообще говоря, ухудшается с увеличением глубины /107/. Поэтому область применимости предлагаемого метода принципиально ограничена релятивистскими энергиями и (или) не слишком большими глубинами. Влияние этого ограничения на точность расчета интенсивностей нейтрино будет обсуждаться позже.

2. Сечения неупругого взаимодействия нуклонов N и ядер Y с ядрами атомов воздуха ($^{14}N, ^{16}O, \dots$) практически не меняются в диапазоне энергий от сотен МэВ до сотен ГэВ и, с точностью несколько процентов, одинаковы для протонов и нейтронов /108/. Далее считаем

$$\sigma_{pA}^{in} = \sigma_{nA}^{in} \equiv \sigma_{NA}^{in}, \quad \sigma_{YA}^{in} = \text{const.}$$

Химический состав воздуха предполагается неизменным во всей нижней атмосфере, так что пробеги частиц до неупругого взаимодействия $\lambda_j = 1/(N_0 \sigma_{jA}^{in})$ (где N_0 - число ядер A в 1 г воздуха) тоже постоянны.

3. В рассматриваемом энергетическом интервале можно не учитывать слабую зависимость тормозной способности протонов от энергии

/109/. При энергиях меньших ~ 10 ГэВ, где потери наиболее существенны,

$$\beta_p = - (dE/dh)_{ion} \approx 1,82 \text{ МэВ} \cdot \text{г}^{-1} \cdot \text{см}^2.$$

4. Регенерацией ядер КЛ и их ионизационными потерями пренебрегаем. Для наших целей это допустимо, так как ядра фрагментируются, в основном, на большой высоте в атмосфере, соответствующей остаточному давлению $h_0 < 100 \text{ г/см}^2$. Поскольку в процессах фрагментации энергия на нуклон практически сохраняется, роль регенерации на малых глубинах сводится к небольшому (в среднем $\sim 20\%$) увеличению пробега ядра /109/. Мы вернемся к этому пункту в § 1.4.

Перейдем к математической формулировке задачи.

§ 1.2. Решение однородной системы КУ (без учета ядерной компоненты)

Как отмечалось, при средних энергиях можно рассматривать перенос нуклонов в атмосфере независимо от порождаемых ими π - и К-мезонов и не учитывать генерацию ядер нуклонами. Последнее означает, что фрагментация ядер с $Z > 2$ дает аддитивный вклад в потоки p и n . Поэтому в данном параграфе мы ограничимся изучением чисто нуклонного каскада. В приближении прямо-вперед и в отсутствие геомагнитных эффектов зенитно-угловая зависимость потоков полностью определяется количеством вещества h (глубиной атмосферы), пройденного нуклонами вдоль заданного направления. Тем самым задача вычисления дифференциальных энергетических спектров протонов $p(E, h)$ и нейтронов $n(E, h)$ на глубине h сводится к решению однородной системы одномерных кинетических уравнений (КУ) :

$$\left. \begin{aligned} & (\partial/\partial h + 1/\lambda_p - \beta_p \partial/\partial E) p(E, h) = \\ & = N_0 \int_E^\infty dE_0 \left[\frac{d\sigma_{pp}}{dE} p(E_0, h) + \frac{d\sigma_{pn}}{dE} n(E_0, h) \right], \\ & (\partial/\partial h + 1/\lambda_n) n(E, h) = \\ & = N_0 \int_E^\infty dE_0 \left[\frac{d\sigma_{np}}{dE} p(E_0, h) + \frac{d\sigma_{nn}}{dE} n(E_0, h) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

Здесь

$$\frac{d\sigma_{ba}}{dE} = \frac{x}{E} \frac{d\sigma_{ba}}{dx} = 2\pi \int_0^{p_T^{\max}} dp_T (p_T/p_L) f_{ba}(\vec{p}, s), \quad (1.2)$$

а $f_{ba} = (1/p) d^3\sigma_{ba}/dE d\Omega = E d^3\sigma_{ba}/d^3p$ — лоренц-инвариантное дифференциальное сечение образования частицы **b** в инклюзивной реакции $a + A \rightarrow b + X$ (A — ядро атома воздуха, X — система всех недетектируемых вторичных частиц, включая продукты развала ядра A); E, p_T, p_L — полная энергия и составляющие импульса $\vec{p}$ частицы **b**; $x = E/E_0$, а E_0 — энергия частицы **a**. Согласно п⁰² и п⁰³ предыдущего параграфа, $\lambda_p = \lambda_n = \lambda_N = \text{const}$, $\beta_p = \text{const}$. Величина $p_T^{\max}$ в (1.2) определяется условием $E^* \leq (s + m - s_X^{\min})/2\sqrt{s}$, где E^* — энергия инклюзивной частицы в с.ц.м., m — масса нуклона, $s_X^{\min}$ — минимальное значение квадрата инвариантной массы системы X . В пренебрежении кумулятивной кинетической областью

$$p_T^{\max} = \sqrt{2mE(E-m)(1-x)/(E-mx)}$$

Граничное условие для системы (1.1) запишем в виде

$$p(E, h=0) = p_0(E), \quad n(E, h=0) = 0. \quad (1.3)$$

Включение в первичный спектр нейтронов может быть произведено без существенного усложнения излагаемого ниже формализма, но, имея в виду (модулированный) спектр галактических КИ, мы не используем здесь такую возможность. Относительно свойств функций $p_0(E)$ предполагаем, что величина

$$-E p'_0(E)/p_0(E) = \gamma(E) + 1 > 0 \quad (1.4)$$

достаточно слабо меняется на рассматриваемом промежутке энергий.

Принимая во внимание приближенную изотопическую симметрию NA -взаимодействий, введем обозначения :

$$\begin{aligned} \omega_0(x, E) &= 1/2 [\omega^+(x, E) + \omega^-(x, E)] = \\ &= (E/\sigma_{pA}^{in}) d\sigma_{pp}/dE = (E/\sigma_{nA}^{in}) d\sigma_{nn}/dE, \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} \omega_1(x, E) &= 1/2 [\omega^+(x, E) - \omega^-(x, E)] = \\ &= (E/\sigma_{pA}^{in}) d\sigma_{np}/dE = (E/\sigma_{nA}^{in}) d\sigma_{pn}/dE \end{aligned}$$

и будем искать решение системы (1.1) в виде

$$\begin{aligned} p(E, h) &= 1/2 p_0(E) e^{-t} [F^+(E, t) + F^-(E, t)], \\ n(E, h) &= 1/2 p_0(E) e^{-t} [F^+(E, t) - F^-(E, t)], \end{aligned} \quad (1.6)$$

где $t = h/\lambda_N = (N_0 \sigma_{NA}^{in}) h$. Подставляя (1.6) в уравнение (1.1), учитывая граничное условие (1.3) и определения (1.5), приходим к следующей системе уравнений для функции $F^\pm$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F^\pm(E, t)}{\partial t} &= \frac{u}{2} \left[E \frac{\partial}{\partial E} - \gamma(E) - 1 \right] [F^+(E, t) + F^-(E, t)] + \\ &+ \int_0^1 dx x^{\Gamma(x, E) - 1} \omega^\pm(x, E) F^\pm(Ex^{-1}, h), \end{aligned} \quad (1.7)$$

с условием $F^\pm(E, 0) = 1$. В (1.7) обозначено

$$u = \beta_p \lambda_N / E, \quad x^{\Gamma(x, E) + 1} = p_0(Ex^{-1}) / p_0(E). \quad (1.8)$$

В (1.7) функция $\gamma(E)$ фигурирует в слагаемом, пропорциональном малому параметру $u = 0,162 \text{ ГэВ} / E$. Поэтому, используя предположение о слабой зависимости γ от энергии, можно заменить приближенно $\gamma(E)$ эффективной константой $\bar{\gamma}$ (последнюю предпочтительно взять равной $\gamma(E_b)$, где E_b - нижняя граница исследуемого интервала энергий).

Представив искомые функции $F^\pm$ в виде разложений по степеням $t = \hbar / \lambda_N$ (рядов последовательных поколений)

$$F^\pm(E, t) = \sum_{k=0}^{\infty} (t^k / k!) F_k^\pm(E), \quad (1.9)$$

получаем цепочку уравнений

$$F_k^\mu(E) = \delta_{k0} + (u/2) \theta(k) (E d/dE - \bar{\gamma} - 1) \sum_{\nu} F_{k-1}^\nu(E) + \theta(k) \int_0^1 dx W^\mu(x, E) F_{k-1}^\mu(E x^{-1}). \quad (1.10)$$

Здесь и ниже используются обозначения :

$$W^\mu(x, E) = x^{\Gamma(x, E) - 1} \omega^\mu(x, E), \quad (1.11)$$

$\theta(k) = 0$, если $k \leq 0$ и $\theta(k) = 1$, если $k > 0$; греческие индексы $\mu, \nu, \dots$ означают "+" или "-". Из (1.10) легко увидеть, что функции $F_k^\mu(E)$ являются полиномами степени k по безразмерному параметру u . Действительно, полагая

$$F_k^\mu(E) = \sum_{l=0}^k (-u)^l F_{kl}^\mu(E), \quad (1.12)$$

получаем вместо (1.10) рекуррентные уравнения на $F_{kl}^\mu(E)$, не содержащие параметра u :

$$F_{kl}^\mu(E) = \delta_{k0} \delta_{l0} + (1/2) \theta(kl) (\bar{\gamma} + l - E d/dE) \sum_{\nu} F_{k-1, l-1}^\nu(E) + \theta(k-l) \int_0^1 dx x^l W^\mu(x, E) F_{k-1, l}^\mu(E x^{-1}). \quad (1.13)$$

Заметим теперь, что интегродифференциальные уравнения (1.13) могут быть сведены к алгебраическим, если функции $W^H(x, E)$ представимы конечными суммами по степеням $(1/E)$ следующего вида :

$$W^H(x, E) = \sum_{q \geq 0} W_q^H(x) (E_N/E)^q, \quad (1.14)$$

причем числа q не обязательно целые, а E_N — произвольная постоянная размерности энергии (простейшая реализация такого представления рассматривается в Приложении 2 применительно к случаю высоких энергий).

Физическим основанием представления (1.14) может служить гипотеза предельной фрагментации /79/. Утверждение о предельной фрагментации заключается в том, что инвариантное сечение $f_{ba}(\vec{p}, s)$ при $s \rightarrow \infty$ и фиксированном p_T стремится к конечному пределу $f_{ba}^{sc}(x, p_T)$, не зависящему от E (в системе покоя мишени A : $x \rightarrow x_F = 2mp_L/s$ при $s \rightarrow \infty$ и $x \neq 0$)²⁾.

Как видно из (1.2) и (1.5), в случае степенного спектра ($\gamma = \Gamma = \text{const}$) это утверждение означало бы, что существуют независимые от E пределы

$$\begin{aligned} \lim_{E \rightarrow \infty} W^H(x, E) &= W_0^H(x) = \\ &= \pi x^\gamma (\sigma_{NA}^{in})^{-1} \int_0^\infty dp_T^2 [f_{ba}^{sc}(x, p_T) + \mu f_{ba}^{sc}(x, p_T)]. \end{aligned}$$

При этом, фигурирующие в (1.14) функции $W_q^H(x)$ с $q \neq 0$ описывают отклонения от скейлинга и, одновременно, от степенного поведения первичного спектра при конечных энергиях.

²⁾ Отметим, что чаще в работах по космическим лучам обсуждается альтернативный вариант предельной фрагментации, в котором предполагается независимость от s инклюзивных распределений $[1/\sigma_{aA}^{tot}(s)] f_{ba}$ или $[1/\sigma_{aA}^{in}(s)] f_{ba}$ при больших s /110, 111/.

В действительности, представление (1.14) является слишком ограничительным. Известно, например, что в реакции $pp \rightarrow pX$ наблюдается рост структурной функции с энергией в дифракционной области ($x \sim 1$). Такое поведение сохраняется и у функции f_{pp} , описывающей взаимодействие протона с ядром /112/. Имеются экспериментальные и теоретические указания на возможность нарушения скейлинга при высоких энергиях как в пионизационной области, так и в области фрагментации (см. дискуссию по этому вопросу в работе /113/). Обсуждение проблемы скейлинга выходит за рамки настоящего исследования. Для нас важно лишь то, что представление типа (1.14) применимо, вообще говоря, в ограниченной кинематической области. Поэтому, вместо (1.14) будем использовать более слабое требование.

Рассмотрим набор парциальных моментов от функций $W^{\mu}(x, E)$:

$$\Phi_j^{\mu}(E) = \int_0^1 dx x^j W^{\mu}(x, E) = \int_0^1 dx x^{\Gamma(x, E) + j - 1} w^{\mu}(x, E) \quad (1.15)$$

($j = 0, 1, \dots$) и предположим, что для конечного (но достаточно большого) их числа J справедливы аппроксимационные формулы

$$\Phi_j^{\mu}(E) = \sum_{m=0}^M z_{jm}^{\mu} v^m, \quad v \equiv E_N/E, \quad (1.16)$$

причем число M не зависит от j и μ . Тогда можно показать по индукции, что для конечных значений k и $l \leq k$ функции $F_{kl}^{\mu}(E)$ представляют собой полиномы степени $M(k-l)$ по обратным степеням энергии, т.е.

$$F_{kl}^{\mu}(E) = \sum_{m=0}^{M(k-l)} R_{klm}^{\mu} v^m, \quad (1.17)$$

а для коэффициентов R_{klm}^{μ} имеют место алгебраические рекуррентные соотношения

$$R_{klm}^{\mu} = \delta_{k_0} \delta_{l_0} \delta_{m_0} + (1/2) \theta(kl) (\bar{\gamma} + l + m) \sum_{\nu} R_{k-l, l-l, m}^{\nu} + \\ + \theta(k-l) \sum_{q+p=m} z_{l+q, p}^{\mu} R_{k-l, l, q}^{\mu} \quad (1.18)$$

В Приложении I описан простой способ расчета коэффициентов z_{jm}^{μ} в формуле (1.16), которым удобно пользоваться, если имеются аналитические выражения для инклюзивных сечений. Ясно, moreover, что коэффициенты разложения парциальных моментов $\Phi_j^{\mu}(E)$ могут быть найдены непосредственно из экспериментальных данных о сечениях процессов $NA \rightarrow N'X$ и спектре первичных протонов.

Индекс суммирования q в правой части (1.18) удовлетворяет неравенствам

$$\max(0, m-M) \leq q \leq \min[m, M(k-l-1)],$$

из которых можно заключить, в частности, что формулы (1.17) и (1.18) имеют смысл при $k \leq K$, причем число K определяется из условия

$$M(K-1) \leq J. \quad (1.19)$$

Комбинируя формулы (1.9), (1.12) и (1.17), получаем окончательно

$$F^{\mu}(E, t) = \sum_{k=0}^K \sum_{l=0}^k \sum_{m=0}^{M(k-l)} (R_{klm}^{\mu} / k!) t^k (-u)^l v^m + \dots, \quad (1.20)$$

где точками обозначен остаточный член ряда последовательных поколений, для которого формулы (1.17) и (1.18) не работают. В следующем параграфе будет показано, что суммой по $k \leq K$ в (1.20) можно пользоваться как частичной суммой сходящегося ряда, если выполняется условие

$$E > \beta_p h \simeq 162 \text{ МэВ } (h/\lambda_N). \quad (1.21)$$

Неравенство (1.21) означает, что энергия $\Delta E = \beta_p h$, теряемая протоном на ионизацию при прохождении слоя воздуха h не должна превышать его конечной полной энергии. Причина такого ограничения чисто математическая — биномиальный характер разложения по параметру u . Поскольку условие (1.21) выполняется в области, представляющей практический интерес ($h \leq 10 \lambda_N$) мы не будем останавливаться на этом вопросе подробнее.

Рекуррентная цепочка уравнений (1.18) может быть решена при некоторых комбинациях индексов. Нетрудно проверить, например, что

$$R_{klo}^{\mu} = 2^{-l} (\bar{\gamma} + 1)_l \sum_{\gamma_0, \dots, \gamma_l} \delta_{\gamma_l}^{\mu} \sum_{n_0 + \dots + n_l = k-l} \prod_{i=0}^l (z_{i0}^{\gamma_i})^{n_i}, \quad (1.22)$$

$$R_{kom}^{\mu} = \sum_{m_0, \dots, m_k} \delta_{m_k}^{\mu} \prod_{i=0}^{k-1} z_{mi}^{\mu}, \quad m_{i+1} - m_i, \quad k \neq 0.$$

Индексы суммирования m_i в последней формуле удовлетворяют неравенствам $\max(0, m_{i+1} - M) \leq m_i \leq \min(m_{i+1}, M_i)$.

В общем случае явный вид коэффициентов R_{klm}^{μ} получить трудно. Но этого и не требуется, поскольку при машинных расчетах, очевидно, удобнее пользоваться непосредственно рекуррентными соотношениями (1.18), а не формулами типа (1.22).

Обсудим простейшие частные случаи. Полагая в (1.22) $l=0$ и $l=k$, получаем:

$$R_{k00}^{\mu} = (z^{\mu})^k, \quad z^{\mu} \equiv z_{\infty}^{\mu}, \quad (1.23)$$

$$R_{kk0}^{\mu} = (\bar{\gamma} + 1)_k = \Gamma(\bar{\gamma} + k + 1) / \Gamma(\bar{\gamma} + 1).$$

отсюда, в пределе "точного скейлинга" ³⁾, степенного гранично-го спектра и в пренебрежении ионизационными потерями энергии следует :

$$\Gamma^k(E, t) = \sum_{k=0}^{\infty} R_{k00}^k t^k / k! = \exp(z^k t). \quad (1.24)$$

С помощью (1.6) и (1.24) приходим к известным выражениям для дифференциальных энергетических спектров протонов и нейтронов (см., например /114-116/) :

$$\begin{aligned} p^{sc}(E, h) &= \frac{1}{2} p_0(E) [\exp(-h/\Lambda^+) + \exp(-h/\Lambda^-)], \\ n^{sc}(E, h) &= \frac{1}{2} p_0(E) [\exp(-h/\Lambda^+) - \exp(-h/\Lambda^-)], \\ \Lambda^{\pm} &= \lambda_N (1 - z^{\pm})^{-1} \end{aligned} \quad (1.25)$$

(Λ^+ - пробег поглощения для суммарного потока нуклонов, а Λ^- - "длина выравнивания" p и n -компонент потока /116/).

Обобщение формул (1.25) на случай логарифмически растущего неупругого сечения $\sigma_{NA}^{in}(E)$ приведено в Приложении 2. В работе /116/ получена модификация (1.25) при отсутствии изотопической симметрии ($d\sigma_{pp}/dE \neq d\sigma_{nn}/dE$, $d\sigma_{np}/dE \neq d\sigma_{pn}/dE$),

³⁾ При степенном спектре "точный скейлинг" означает, что $M=0$ для всех $j \geq 0$. Следовательно

$$\Phi_j^k = z_{j0}^k = \int dx x^j W_0^k(x) = \int dx x^{\gamma+j-1} \omega^k(x).$$

Если же иметь в виду скейлинг только для области фрагментации (исключая лидирующие частицы), то $j \leq J < \infty$, хотя, согласно (1.19), индекс k может принимать любые значения.

а в /104/ учтены поправки, обусловленные процессами $\pi A \rightarrow NX$. Можно показать, что эти уточнения практически не существенны для нуклонов с энергиями до сотен ГэВ на глубинах эффективной генерации лептонов, тогда как учет энергетических потерь и нарушения скейлинга при средних энергиях оказывается очень важным (см. §1.5).

Суммируя члены ряда (1.20), не содержащие параметров z_{jm}^H ($k=L, m=0$) и используя вторую из формул (1.23) (на нее, очевидно, не распространяется ограничение $k \leq K$), получим вклад протонов первичного излучения на глубине h , равный

$$p_0(E) e^{-t} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\bar{\gamma}+k}{k} (-ut)^k = p_0(E) e^{-t} (1+ut)^{-\bar{\gamma}-1} \approx \\ \approx p_0(E + \beta_p h) \exp(-h/\lambda_N). \quad (1.26)$$

Выражение в правой части (1.26) в действительности является точным. Неточность формул, вытекающих из (1.23) связана с приближенной заменой в уравнениях (1.7) $\gamma(E)$ на $\bar{\gamma}$. С помощью (1.26) полезно представить спектр протонов в виде

$$p(E, h) = p_0(E + \beta_p h) e^{-t} + \\ + p_0(E) e^{-t} \sum_{k=1}^K \sum_{l=0}^{k-1} \sum_{m=0}^{M(k-l)} (1/2^k k!) (R_{klm}^+ + R_{klm}^-) t^k (-u)^l v^m + \dots$$

В заключение параграфа приведем приближенные формулы для интегральных спектров p и n . Если при интегрировании по E пренебречь энергетической зависимостью функции $\gamma(E)$, то с помощью (1.6) и (1.20) получим

$$p(\geq E, h) = \int_E^{\infty} p(E, h) dE \approx \\ \approx p(\geq E, 0) e^{-t} \sum_{klm} \frac{(R_{klm}^+ + R_{klm}^-) t^k (-u)^l v^m}{2^k k! [1 + (l+m)/\gamma(E)]}, \quad (1.27)$$

$$n(\geq E, h) = \int_E^{\infty} n(E, h) dE \approx \\ \approx n(\geq E, 0) e^{-t} \sum_{klm} \frac{(R_{klm}^+ - R_{klm}^-) t^k (-u)^l v^m}{2k! [1 + (l+m)/\gamma(E)]}$$

Суммирование по k, l, m в (1.27) ведется в тех же пределах, что и в (1.20). Эти выражения можно использовать, в частности, для контроля точности вычислений, сравнивая результат суммирования рядов (1.27) с интегралами от дифференциальных спектров p и n , рассчитанными по формулам (1.6) и (1.20) численно.

§ 1.3. Условия сходимости и устойчивости метода

Исследуем сначала сходимость вспомогательных кратных рядов

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{Mk} \sum_{l=0}^{\infty} \binom{\bar{\gamma} + l + m}{l} \frac{\rho_{klm}^{\mu} t^{k+l} (-u)^l v^m}{k!} \quad (1.28)$$

коэффициенты которых ρ_{klm}^{μ} определяются рекуррентными соотношениями

$$\rho_{klm}^{\mu} = \delta_{k0} \delta_{l0} \delta_{m0} + (l/2) (k+l)^{-1} \sum_{\nu} \rho_{k, l-1, m}^{\nu} + \\ + k (k+l)^{-1} \sum_{q+p=m} \frac{(\bar{\gamma} + q + 1)_l}{(\bar{\gamma} + m + 1)_l} z_{l+q, p}^{\mu} \rho_{k-1, l, q}^{\mu} \quad (1.29)$$

Пусть числа z_{jm}^{μ} ограничены в том смысле, что для всех значений j и m существует $z > 0$ такое, что

$$|z_{jm}^{\mu}| \leq z. \quad (1.30)$$

Индекс суммирования q в (1.29) удовлетворяет неравенствам

$$\min [m, (k-1)M] \geq q \geq \max (0, m-M)$$

Следовательно, количество слагаемых в $\sum_{q+p=m}$ равно

$$N = (M+1) - \{ \max (m, M) - \min [m, (k-1)M] \}.$$

Поскольку выражение в фигурных скобках принимает значения

$$\begin{cases} M + m\delta_{k1}, & \text{при } m \leq M, \\ 0, & \text{при } M \leq m \leq (k-1)M, \\ m - (k-1)M, & \text{при } m > M \text{ и } m \geq (k-1)M, \end{cases}$$

т.е. неотрицательно при всех m , то $N \leq M+1$. Вместе с (1.30) это неравенство позволяет сделать оценку:

$$|p_{klm}^\mu| \leq (M+1)^k z^k,$$

из которой вытекает, что ряды (1.28) мажорируются кратным рядом

$$\sum_{k=0}^{\infty} [(M+1)zt]^k (k!)^{-1} \sum_{m=0}^{Mk} v^{-m} \sum_{l=0}^{\infty} \binom{\bar{\gamma}+l+m}{l} (-ut)^l \quad (1.31)$$

Внутренний биномиальный ряд в (1.31) сходится при условии

$$|ut| = \beta_p h / E < 1. \quad (1.32)$$

Таким образом, условие (1.32) является достаточным для обеспечения сходимости рядов (1.28). В области сходимости допустимо изменение порядка суммирования и выражение (1.28) можно переписать в виде

$$\sum_{k=0}^{\infty} (t^k/k!) \sum_{l=0}^k (-u)^l \sum_{m=0}^{M(k-l)} R_{klm}^\mu v^m, \quad (1.33)$$

где

$$R_{klm}^\mu = (\bar{\gamma} + m + 1)_l \binom{k}{l} p_{k-l, l, m}^\mu. \quad (1.34)$$

С помощью (1.29) и (1.34) убеждаемся, что коэффициенты R_{klm}^μ удовлетворяют рекуррентным соотношениям (1.18).

Для отыскания необходимого условия сходимости рядов (1.28) или (1.33) нужно задать более детальные свойства параметров

z_{jm}^{μ} . Нетрудно видеть, например, что неравенство (1.32) является необходимым, если все z_{jm}^{μ} неотрицательны.

Полученный результат нельзя непосредственно применить к рассматриваемым в § 1.2 рядам (1.20), если аппроксимация (1.16) имеет место для конечного набора парциальных моментов $\Phi_j^{\mu}(E)$ ($j \leq J$). Тем не менее, для всех энергий можно подобрать числа $\tilde{z}_{jm}^{\mu}$ таким образом, чтобы при $j > J$ выполнялись неравенства

$$\Phi_j^{\mu}(E) \leq \sum_{m=0}^M \tilde{z}_{jm}^{\mu} v^m,$$

причем, в силу ограниченности моментов $\Phi_j^{\mu}(E)$ при всех E , это можно сделать так, что числа $\tilde{z}_{jm}^{\mu}$ будут ограничены для любых значений j и m . Тогда ряд (1.31), построенный с помощью $\tilde{z}_{jm}^{\mu}$, будет мажорантным для ряда (1.20). Это означает, что при выполнении условия (1.21) можно пользоваться формулой (1.20) как частичной суммой ряда с конечным радиусом сходимости.

Заметим, что точность вычисления функций $F^{\mu}(E, t)$ ограничивается условием (1.19). В принципе ее можно повышать, увеличивая степень M аппроксимирующих полиномов (1.16). Но для практических вычислений желательно, чтобы число M было по возможности невелико, так как количество коэффициентов R_{klm}^{μ} , необходимое для вычисления частичной суммы ряда (1.20), быстро растет с M ⁴⁾. Действительно, из (1.20) следует, что для суммирования первых членов ряда ($1 \leq n \leq K+1$) требуется знать $(n/6)(n+1)[M(n-1)+3]$ коэффициентов R_{klm}^{μ} ($0 \leq m \leq M(k-l)$, $0 \leq l \leq k \leq n$). Фактически оказывается, что $M=2$ или 3 достаточно, чтобы ошибка аппроксимации (1.16) не превышала несколь-

⁴⁾ Для эффективного использования метода при машинных расчетах необходимо весь массив коэффициентов R_{klm}^{μ} держать в оперативной памяти ЭВМ, что становится нерентабельным при больших значениях M .

их процентов вплоть до $j = (30 \div 40)$ на интервале импульсов $(2 \div 500) \text{ ГэВ/с}$ (см. подробнее § 1.5). Этого вполне достаточно для расчета спектров p и n в атмосфере для глубин $h \lesssim 10^3 \text{ г.см}^{-2}$ и кинетических энергий $T \gtrsim 1 \text{ ГэВ}$.

В целях проверки устойчивости изложенного метода, энергетические спектры нуклонов вычислялись при $M = 2, 3$ и 4 для различных видов граничного спектра протонов. Вплоть до $h \sim 10^3 \text{ г.см}^{-2}$ разница между спектрами, рассчитанными с $M=2$ и $M=3$, не превышает $(5 \div 10)\%$, а при $h \lesssim 500 \text{ г.см}^{-2}$ (т.е. для глубин эффективной генерации лептонов) она меньше $(1 \div 2)\%$. Разница между вариантами с $M=3$ и $M=4$ практически отсутствует в интересующей нас области энергий и глубин.

Из физических соображений понятно, что высшие парциальные моменты не должны оказывать существенного влияния на характер решения системы (1.1) (вследствие фактически конечного числа актов столкновения, формирующих спектр нуклонов в ядерно-каскадном процессе). Этот вывод подтверждается численным анализом. Поэтому, для упрощения расчетов при достаточно больших значениях j можно пользоваться приближенными формулами для $\Phi_j^p(E)$. Если $j \gg 1$, то в подынтегральном выражении правой части (1.15) важна лишь область $x \sim 1$. Т.к., согласно (1.4) и (1.8), $\Gamma(1, E) = \gamma(E)$, то, используя теорему о среднем, имеем

$$\Phi_{j+1}^p(E) \approx [\gamma(E) + j][\gamma(E) + j + 1]^{-1} \Phi_j^p(E) \quad (1.35)$$

Соотношение (1.35) можно применить для оценки вклада далеких членов ряда (1.20) ("младших поколений") при $j \gtrsim 30$ и $E \lesssim 30 \text{ ГэВ}$. При больших энергиях соотношение (1.35) использовать нельзя из-за упоминавшегося выше роста с энергией функции $\omega_0(x, E)$ в дифракционной области.

Сделанные здесь замечания об устойчивости метода без существенных изменений переносятся на решение неоднородной системы, рассматриваемое в следующем параграфе.

§ 1.4. Учет вклада ядерной компоненты КЛ

(Решение неоднородной системы КУ)

При энергиях $> 2,5$ ГэВ/нуклон доля нуклонов первичного излучения, связанных в ядрах, составляет около 30% от полного числа нуклонов, причем $\sim 2/3$ связанных нуклонов переносится ядрами гелия (в основном, ^4_2He) /117, 118/. Вклад в потоки вторичных протонов, обусловленный фрагментацией ядер КЛ, наиболее существен на низких широтах, поскольку геомагнитный порог для нуклона, упакованного в ядре, примерно вдвое ниже соответствующего порога для свободного протона (см. следующую главу). Интенсивность вторичных нейтронов на малых глубинах ($h < \lambda_N$) существенно определяется фрагментацией ядер, поскольку их пробеги до взаимодействия меньше пробега нуклона (см. § 1.5).

В работе /116/ дано формальное решение полной системы КУ, учитывающее фрагментацию и регенерацию ядер КЛ. Здесь мы применим упрощенный подход /105, 106/, пренебрегая регенерацией ядер (§1.1, п^о4). Это, на наш взгляд, отвечает точности остальных приближений, тем более, что достаточно полные данные, необходимые для детального анализа (дифференциальные сечения фрагментации, спектры и т. д.), пока отсутствуют.

С учетом сделанных в §1.1 приближений система одномерных КУ для нуклонов, образующихся в результате фрагментации ядер сорта Y (энергетические спектры таких нуклонов будем помечать индексом " Y ") имеет вид

$$\begin{aligned}
 (\partial/\partial h + 1/\lambda_N - \beta_p \partial/\partial E) p_Y(E, h) = G_{pY}(E, h) + \\
 + N_0 \int_E^\infty dE_0 \left[\frac{d\sigma_{pp}}{dE} p_Y(E_0, h) + \frac{d\sigma_{pn}}{dE} n_Y(E_0, h) \right], \\
 (\partial/\partial h + 1/\lambda_N) n_Y(E, h) = G_{nY}(E, h) +
 \end{aligned}
 \tag{1.36}$$

$$+ N_0 \int_E^\infty dE_0 \left[\frac{d\sigma_{np}}{dE} p_Y(E_0, h) + \frac{d\sigma_{nn}}{dE} n_Y(E_0, h) \right],$$

граничным условием

$$p_Y(E, 0) = n_Y(E, 0) = 0.
 \tag{1.37}$$

функция генерации нуклонов N определяется следующим образом:

$$G_{NY}(E, h) = N_0 \int_{E_0^{\min}}^\infty dE_0 (d\sigma_{NY}/dE) Y(E_0, h),
 \tag{1.38}$$

где $Y(E_0, h)$ — дифференциальный энергетический спектр ядер сор-
та Y на глубине h , E_0 — энергия, приходящаяся на один нуклон
целя. Для параметризации инклюзивного сечения реакции $Y+A \rightarrow N+X$
 $d\sigma_{NY}/dE$ предположим, что при YA -столкновении некоторые нукло-
ны ядра Y (спектаторы) сохраняют свои первоначальные импульсы,
остальные нуклоны взаимодействуют с мишенью A некогерентно.
Этот механизм позволяет выразить $d\sigma_{NY}/dE$ через сечения про-
цессов $p+A \rightarrow N+X$ и $n+A \rightarrow N+X$. Обозначив среднее число вза-
имодействующих нуклонов и полное число нуклонов ядра Y через N_Y
и A_Y соответственно, положим

$$\begin{aligned}
 d\sigma_{NY}(E, E_0) = (1/2)(A_Y - N_Y) \sigma_{YA}^{\text{in}} \delta(E/E_0 - 1) dE/E + \\
 + (1/2)N_Y (\sigma_{YA}^{\text{in}} / \sigma_{NA}^{\text{in}}) [d\sigma_{Np}(E, E_0) + d\sigma_{Nn}(E, E_0)].
 \end{aligned}
 \tag{1.39}$$

Млагаемое, содержащее δ -функцию, описывает скейлинг-инвариантный вклад нуклонов-спектаторов. Считаем, что ядро Y содержит равное количество протонов и нейтронов (отсюда множитель $1/2$). В предположении независимости столкновений нуклонов ядра Y с ядром-мишенью можно получить соотношение /119/

$$N_Y \simeq A_Y (\sigma_{NA}^{in} / \sigma_{YA}^{in}) = A_Y (\lambda_Y / \lambda_N), \quad (1.40)$$

которое находится в удовлетворительном согласии с экспериментом /120-122/. Пока мы будем считать N_Y свободным параметром ⁵⁾, полагая (в соответствии с (1.40) и п⁰2, §1.1), что он не зависит от энергии. Подставляя (1.39) в (1.38) и учитывая изотопические соотношения (1.5), получим

$$G_{NY}(E, h) = \quad (1.41)$$

$$= (1/2 \lambda_Y) \left\{ (A_Y - N_Y) Y(E, h) + N_Y \int_0^1 dx x^{-2} \omega^+(x, E) Y(E x^{-1}, h) \right\}.$$

В соответствии с принятой моделью, $E_0^{min} = E$, как и для NA -столкновений.

Из-за малого пробега до взаимодействия (см. §1.5) энергетические потери ядер на ионизацию не играют роли в формировании спектра нуклонов. Оценки показывают, что на глубинах $h \gg \lambda_Y$,

5) Экспериментальный способ определения среднего числа провзаимодействовавших нуклонов ядра Y в реакции $YA \rightarrow NX$ основан на подсчете суммарного заряда фрагментов налетающего ядра $\langle Q_Y \rangle$ (s' - и q' -следов) /120/. При этом полагают $N_Y = A_Y - 2\langle Q_Y \rangle$. В работе /121/ для αC взаимодействия найдено таким способом значение $N_\alpha = 2,5 \pm 0,1$, согласующееся с предсказанием (3.5) с точностью лучшей 5%. В работе /122/ получено несколько большее значение, $N_\alpha = 2,74 \pm 0,1$.

где ионизационные потери существенно влияют на величину $Y(E, h)$, поток ядер уже мал по сравнению с потоком рожденных ими нуклонов. Кроме того, уменьшение интенсивности ядер за счет потерь частично компенсируется их регенерацией в реакциях $Y'A \rightarrow YX$, которые мы не учитываем. Поэтому можно положить в (1.41)

$$Y(E, h) = Y_0(E) \exp(-h/\lambda_Y). \quad (1.42)$$

Для первичного спектра ядер предположим, как и в случае протонов, что функция

$$-E Y'_0(E)/Y_0(E) = \gamma_Y(E) + 1 > 0 \quad (1.43)$$

слабо зависит от энергии (ниже, для простоты, будем опускать индекс Y у функции γ и использовать обозначения (1.8)).

Решение неоднородной системы (1.36) при сформулированных предположениях удобно представить в форме аналогичной (1.6) :

$$p_Y(E, h) = (N_Y \lambda_N / 2 \lambda_Y) Y_0(E) e^{-t} [F_Y^+ - F_Y^-], \quad (1.44)$$

$$n_Y(E, h) = (N_Y \lambda_N / 2 \lambda_Y) Y_0(E) e^{-t} [F_Y^+ + F_Y^-].$$

Учитывая (1.41 - 1.44) и определения (1.6, 1.15), приходим к следующим уравнениям для функций $F_Y^\pm(E, t)$ (здесь $\bar{\gamma} = \gamma_Y(E_b)$) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} F_Y^\pm(E, t) = & \pm \frac{u}{2} \left[E \frac{\partial}{\partial E} - \bar{\gamma} - 1 \right] [F_Y^+(E, t) - F_Y^-(E, t)] + \\ & + \int_0^1 dx W^\pm(x, E) F_Y^\pm(E x^{-1}, t) + \delta^\pm [a_Y + \Phi_0^+(E)] \exp(-a_Y' t), \end{aligned} \quad (1.45)$$

$$F_Y^{\pm}(\epsilon, 0) = 0.$$

В (1.45) использованы обозначения

$$\delta^+ = 1, \delta^- = 0, a_Y = A_Y / N_Y - 1, a'_Y = \lambda_N / \lambda_Y - 1. \quad (1.46)$$

Предполагая справедливость аппроксимации (1.16) и действуя по аналогии с § 1.2, находим решение уравнений (1.45) в виде разложений

$$F_Y^H(\epsilon, t) = \sum_{k=1}^K \sum_{l=0}^{k-1} \sum_{m=0}^{M(k-l)} [R_{klm}^H(Y)/k!] t^k (-u)^l v^m + \dots \quad (1.47)$$

с коэффициентами, удовлетворяющими алгебраическим рекуррентным соотношениям

$$\begin{aligned} R_{k+1, l, m}^H(Y) = & \delta^H \delta_{l0} (-a'_Y)^k [a_Y \delta_{m0} + \theta(M-m+1) z_{0m}^+] + \\ & + \mu(1/2) \theta(kl) (\bar{\gamma} + l + m) \sum_Y v R_{k, l-1, m}^V(Y) + \\ & + \theta(k-1) \sum_{q+p=m} z_{l+q, p}^H R_{klq}^H(Y). \end{aligned} \quad (1.48)$$

Заметим, что параметры z_{jm}^H , фигурирующие в (1.48), отличаются, вообще говоря, от аналогичных параметров в формулах (1.16) и (1.18), поскольку парциальные моменты зависят от вида первичного спектра $Y_0(\epsilon)$.

Ряды (1.48), как можно показать, обладают свойствами, аналогичными свойствам решения однородной системы. В частности, если аппроксимирующие формулы (1.16) справедливы только для конечного числа парциальных моментов, то рекуррентные соотношения (1.48) имеют место лишь для конечных значений k . Сходимость (1.47) обеспечивается ограниченностью z_{jm}^H (в смыс-

те, указанном в § 1.3) и условием (1.21). Доказательство этого утверждения довольно громоздко, но, по существу, подобно доказательству сходимости рядов (1.20), приведенному в предыдущем параграфе. Число коэффициентов $R_{klm}^k(Y)$, необходимое для отыскания n -ой частичной суммы ряда (1.47), равно $(n/6)(n+1) \cdot (n+2)+3$.

Для некоторых частных случаев уравнения (1.48) могут быть решены. Нетрудно проверить, например, справедливость следующих формул :

$$R_{l+1,l,m}^k(Y) = (1/2)(\mu + \delta_{l0})(\bar{\gamma} + m + 1)_l (a_Y \delta_{m0} + z_{0m}^+), \quad (1.49)$$

$$R_{k00}^k(Y) = \delta^k (a_Y + z_{00}^+)(a'_Y + z_{00}^+)^{-1} [(z_{00}^+)^k - (-a'_Y)^k]. \quad (1.50)$$

В практических расчетах на компьютере рекуррентная цепочка (1.48) удобнее явных выражений для $R_{klm}^k(Y)$.

Рассмотрим асимптотику полученного решения при высоких энергиях. Подставляя (1.50) в (1.47) и (1.44) и пренебрегая членами порядка ν и выше, получаем скейлинговый предел (см. рис. 3) :

$$\begin{aligned} p_Y^{sc}(E, h) &= n_Y^{sc}(E, h) = \\ &= (A'_Y/2) Y_0(E) [\exp(-h/\Lambda^+) - \exp(-h/\lambda_Y)], \end{aligned} \quad (1.51)$$

где A'_Y - эффективное массовое число ядра Y , равное

$$\begin{aligned} A'_Y &= N_Y (\lambda_N / \lambda_Y) (a_Y + z_{00}^+)(a'_Y + z_{00}^+)^{-1} = \\ &= (A_Y \Lambda^+ - N_Y \lambda_N) (\Lambda^+ - \lambda_Y)^{-1}, \end{aligned} \quad (1.52)$$

величина Λ^+ определяется согласно (1.25) (ср. с /114/).

Учитая справедливым соотношение (1.40), получаем :

$$a'_\gamma = a_\gamma, \quad A'_\gamma = A_\gamma.$$

Если же $N_\gamma > A_\gamma (\sigma_{NA}^{in} / \sigma_{YA}^{in})$, то, как видно из (1.52),

$$A'_\gamma < A_\gamma$$

Согласно /122/ такая ситуация реализуется для взаимодействий α -частиц с легкими ядрами.

Учет ионизационных потерь энергии протонами приводит к тому, что при низких энергиях

$$n_\gamma / p_\gamma = (F_\gamma^+ + F_\gamma^-) / (F_\gamma^+ - F_\gamma^-),$$

причем отношение n_γ / p_γ растет с глубиной. Таким образом, вклад в поток нейтронов, обусловленный фрагментацией ядерной компоненты КЛ, наиболее существен при низких энергиях.

§1.5 Результаты расчетов.

Остановимся вначале на исходных данных (первичный спектр, речения и т.п.), необходимых для расчета.

1. Аппроксимация состава и спектра первичных КЛ. При численной реализации изложенного выше метода удобно пользоваться аналитическими выражениями для спектров первичных КЛ. Будем рассматривать 5 стандартных групп ядер : p, α , L, M и H со средними массовыми числами $\bar{A} = 1, 4, 10, 14$ и 31 соответственно (ради простоты, в H включены группы LH, MH, VH и VVH, которые иногда изучаются по отдельности).

Для протонного спектра используется аппроксимация

$$p_o(E) = \begin{cases} C_p \exp [-(\gamma_p + 1) \ln E - \xi_p \ln^2 E], & \text{при } E < E_s, \\ C_p^o E^{-(\gamma_p^o + 1)}, & \text{при } E \geq E_s \end{cases} \quad (1.53)$$

где E — полная энергия в ГэВ, а E_s определяется условием сшивки. Для высокоэнергетического участка спектра ($E \geq E_s$) полагаем

$$C_p^0 = 2,09 \cdot 10^4 \text{ (м}^2 \cdot \text{с} \cdot \text{ср} \cdot \text{ГэВ)}^{-1}, \quad \gamma_p^0 = 1,74,$$

в хорошем согласии с имеющимися экспериментальными данными при энергиях от ~ 30 ГэВ до ~ 3 ТэВ (см. работы /123-126/ и цитируемую в них литературу). Параметры (1.53) при $E < E_s$ зависят от уровня магнитной активности Солнца. Фитирование данных для минимума СА, представленных в работе /124/ (см. также /126/) дает

$$C_p^{\chi} = 4586 \text{ (м}^2 \cdot \text{с} \cdot \text{ср} \cdot \text{ГэВ)}^{-1}, \quad \gamma_p = 1,24, \quad \xi_p = 0,03$$

для интервала кинетической энергии от ~ 700 МэВ до ~ 100 ГэВ. При этом, из условия сшивки находим $E_s \simeq 53,9$ ГэВ. Выпишем для удобства явный вид функций $\gamma(E)$ и $\Gamma(x, E)$, введенных в § 1.2, для спектра (1.53) :

$$\gamma(E) = \gamma_p + 2\xi_p \ln E, \text{ при } E < E_s; \quad \gamma(E) = \gamma_p^0, \text{ при } E \geq E_s;$$

$$\Gamma = \begin{cases} \gamma_p + \xi_p \ln(E^2/x), & \text{при } E < E_s, \quad x \geq E/E_s, \\ \gamma_p^0 + \frac{\ln(C_p^0/C_p) - (\gamma_p^0 - \gamma_p) \ln E + \xi_p \ln^2 E}{\ln x}, & x < E/E_s, \\ \gamma_p^0, & \text{при } E \geq E_s. \end{cases}$$

Видно, что при $E < E_s$ $\gamma(E)$ слабо зависит от E в соответствии с предположением § 1.2.

Для ядер гелия на всем исследуемом интервале энергий положим (далее E — энергия в ГэВ/нуклон)

$$\alpha_0(E) = C_\alpha \exp [-(\gamma_\alpha + 1) \ln E - \xi_\alpha \ln^2 E]. \quad (1.54)$$

В минимуме СА, используя данные /123, 124/ получаем

$$C_\alpha = 289 \text{ (м}^2 \cdot \text{с} \cdot \text{ср} \cdot \text{ГэВ/нуклон)}^{-1}, \quad \gamma_\alpha = 0,98, \quad \xi_\alpha = 0,11,$$

это хорошо согласуется также с результатом работы /127/ по интегральному спектру α -частиц вплоть до $E \sim 1$ ТэВ.

Эксперименты, проведенные в последние годы (см. например 128-130/) говорят о том, что химический и изотопный состав первичных КЛ, вообще говоря, меняется с энергией. Поскольку, однако, вклад ядер с $Z > 2$ в генерацию нуклонов и мезонов в атмосфере сравнительно невелик, будем считать их спектры подобными и чисто степенными при энергиях $(1 \div 10^3)$ ГэВ/нуклон. Используя данные из работ /117, 118, 124/, получаем (для минимума СА)

$$Y_\gamma(E) = C_\gamma E^{-2,68}, \quad \gamma = L, M, H, \quad (1.55)$$

$$C_{L,M,H} = (12,9; 40,3; 16,1) \text{ (м}^2 \cdot \text{с} \cdot \text{ср} \cdot \text{ГэВ/нуклон)}^{-1}$$

Аппроксимация (1.55) не противоречит данным работы /129/ при высоких энергиях.

2. Инклюзивные и неупругие сечения. При импульсах налетающих нуклонов $p_0 \geq 4$ ГэВ/с в наших расчетах используются полуэмпирические формулы для инвариантных сечений $f_{N'N}(\vec{p}, s)$, полученные в работах /131, 132/ из обработки ускорительных данных при энергиях от нескольких ГэВ до $\sim 1,5$ ТэВ:

$$f_{pp} = A_0 x'_F \left[(1-x_F)^{0,62 p_T^2 - 1} + 45 (1-x_F)^2 p_T^2 \right] e^{-2,1 p_T^2}, \quad (1.56)$$

$$f_{np} = \sigma_{pA}^{in} \left[\frac{A_1}{\sqrt{p_0}} \left(1 + \frac{A_2}{1+p} + \frac{A_3}{1+p^2} \right) + A_4 \frac{|p_L^*|}{p_0} \right] E^* e^{-A_5 p_T^2}$$

где $x_F = 2p_L^* / \sqrt{s}$, $x'_F = 2E^* / \sqrt{s}$, а E^* , p_L^* и s — энергия, продольный импульс и квадрат полной энергии в с.ц.м. Константы A_i для нескольких ядерных мишеней приведены в /131, 132/. В

узкой области ($p_0 < 4 \text{ ГэВ/с}$) применялась модель, предложенная в работе /103/. Рассчитанные по формулам (1.56) зависимости парциальных моментов $\Phi_j^\pm$ от E представлены (для нескольких значений j) в работе /105/. Анализ, проведенный с помощью формул, приведенных в Приложении 1, показал, что на интервале энергий $(1 \div 10^3) \text{ ГэВ}$ функции $\Phi_j^\pm(E)$ аппроксимируются полиномами (1.16) с точностью $\sim 1\%$ для $j \leq 15$ и $\sim (2 \div 3)\%$ для $15 < j \leq 30$ при выборе $M=2$. При увеличении M точность аппроксимации медленно возрастает. Оптимальным является выбор $M=3$. Точность аппроксимации слабо зависит от вида первичного спектра. Устойчивость решения системы КУ к изменению формы аппроксимирующих полиномов (1.16) обсуждалась в § 1.3 (см. также Приложение 1).

Неупругие сечения взаимодействия ядер рассчитывались по формуле /133/.

$$\sigma^{\text{in}}(A_1 A_2) = 10\pi (1,3 \Phi_M)^2 \left[A_1^{1/3} + A_2^{1/3} - 0,93 (A_1^{-1/3} + A_2^{-1/3}) \right]^2$$

(где A_1 и A_2 — массовые числа) и усреднялись по каждой группе ядер. Соответствующие пробеги до взаимодействия в воздухе равны (в г/см^2)

$$\lambda_\alpha = 47, \quad \lambda_L = 32, \quad \lambda_M = 27, \quad \lambda_H = 19. \quad (1.57)$$

Для NA -взаимодействия полагалось $\sigma_{NA}^{\text{in}} = 270 \text{ мб}$, т.е.

$$\lambda_N = 89 \text{ г} \cdot \text{см}^{-2}. \quad (1.58)$$

Среднее число взаимодействующих нуклонов N_Y в YA -соударениях для ядер Y из групп L, M, H определялось из соотношения (1.40), а для ядер He использовалось значение $N_\alpha = 2,7$.

Анализ влияния на интенсивности нуклонов нарушения скейлинга и энергетических потерь был сделан в /105, 106/. Здесь мы проведем подробное сравнение расчетов с экспериментальными

данными на уровне моря (у.м.) и небольших высотах ($H \leq 9 \text{ км}$), где геомагнитные эффекты количественно малы, а особенности ядерного каскада при средних энергиях проявляются в наибольшей степени. Сравнение расчетов с данными измерений в стратосфере отклоняется до § 2.4.

Рассмотрим область высоких энергий. На рис.1.1 изображен интегральный энергетический спектр нуклонов ($p+n$) на высоте 3,2 км над у.м. ($h \approx 700 \text{ г.см}^{-2}$) для $\theta = 0^\circ$ (вертикаль)⁶⁾. Данные нескольких экспериментов взяты из работы /91/. Расчет (сплошная кривая) хорошо согласуется с опытом вплоть до $E \approx 10^3 \text{ ТэВ}$. При больших энергиях необходимо учитывать рост неупругих сечений (см. § 1.1). Соответствующий результат, полученный по методу работы /104/, показан на рисунке штриховой кривой. На рис.1.2 представлен высокоэнергетический участок дифференциального спектра нейтронов на у.м. Видно, что наш расчет описывает экспериментальные данные во всем диапазоне энергий и не противоречит, в пределах экспериментальных ошибок, результату расчета /99/. Учет роста $\sigma_{NA}^{in}(s)$ с энергией (см. /104/) увеличивает наклон спектра нейтронов при $E \geq 10^3 \text{ ТэВ}$, что приводит к лучшему согласию с расчетом /99/ в этой области.

В работах /83,87,88/ измерен дифференциальный спектр нейтронов на у.м. при меньших энергиях. В /87/ и /88/ результаты измерений приведены в виде аппроксимаций:

$$I_n(T) = (0,98 \pm 0,05) T^{-2,51 \pm 0,05}, \quad (1.59)$$

при энергиях $(0,27 \div 4) \text{ ТэВ}$ /87/ и

$$I_n(T) = \left(\sum_{i=1}^3 A_i T^{\gamma_i} \right)^{-1};$$

⁶⁾ Далее в этом параграфе обсуждается только случай вертикальных потоков.

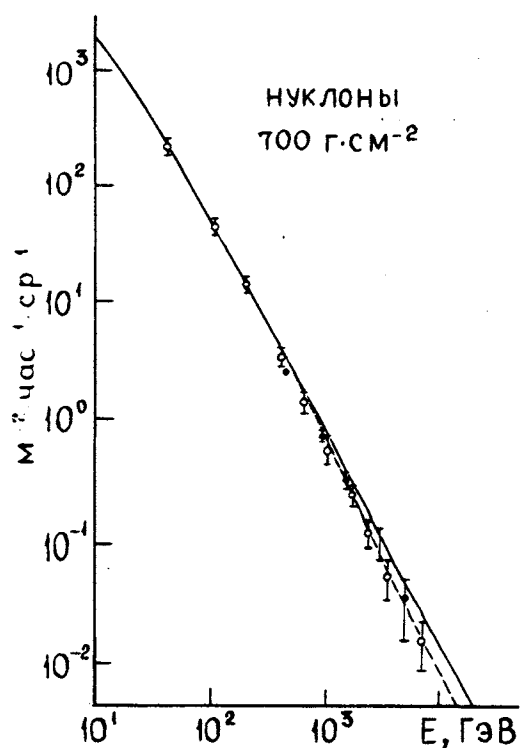


Рис. 1.1

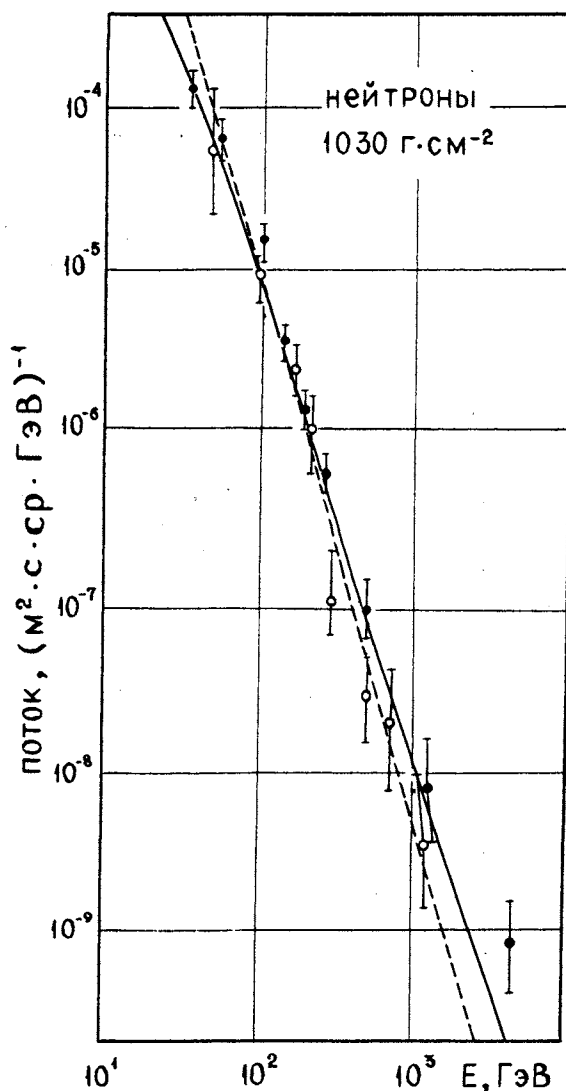


Рис. 1.2

Рис. 1.1. Интегральный энергетический спектр нуклонов ($p+n$) на высоте 3,2 км над у.м.. Экспериментальные точки получены в /91/ из спектра адронов, в который внесена поправка на поток пионов. Кривые – расчет (штриховая – с учетом логарифмического роста σ_{NA}^{in} с энергией и процессов $\pi A \rightarrow NX$ согласно работе /104/)

Рис. 1.2. Дифференциальный энергетический спектр нейтронов на у.м.. Экспериментальные данные: $\bullet$ – /84/, $\circ$ – /85/. Сплошная кривая – расчет настоящей работы, штриховая – расчет работы /99/ (с учетом роста σ_{NA}^{in})

$$A_1 = 0,17 \pm 0,03; A_2 = 0,48 \pm 0,5; A_3 = 0,17 \pm 0,03 \quad (1.60)$$

$$\gamma_1 = 1,47 \pm 0,04; \gamma_2 = 2,59 \pm 0,06; \gamma_3 = 2,79 \pm 0,06$$

при энергиях $(0,05 \div 10^3) \text{ ГэВ}$ /88/. Здесь $I_n(T)$ — дифференциальный спектр нейтронов в единицах $(\text{м}^2 \cdot \text{с} \cdot \text{ср} \cdot \text{ГэВ})^{-1}$, а T — кинетическая энергия в ГэВ. Данные /83/ мало отличаются от (1.60) при энергиях $(1 \div 10) \text{ ГэВ}$. Результаты нашего расчета практически совпадают, в пределах экспериментальных ошибок, с (1.59) при $T \geq 1,6 \text{ ГэВ}$ и с (1.60) при $T \geq 2 \text{ ГэВ}$. При меньших энергиях расчет дает заниженные значения $I_n(T)$ (например, при $T = 1,3 \text{ ГэВ}$ отличие от (1.59) составляет $\sim 40\%$). Отметим здесь, что предсказания рассматриваемой модели для низких энергий при $h \sim 10^3 \text{ г} \cdot \text{см}^{-2}$ становятся ненадежными, как по формальной причине (плохая сходимость рядов типа (1.20) при $\beta_p h / (T + m) \sim 1$), так и в силу отмеченной в § 1.1 ограниченности одномерной теории переноса на больших глубинах.

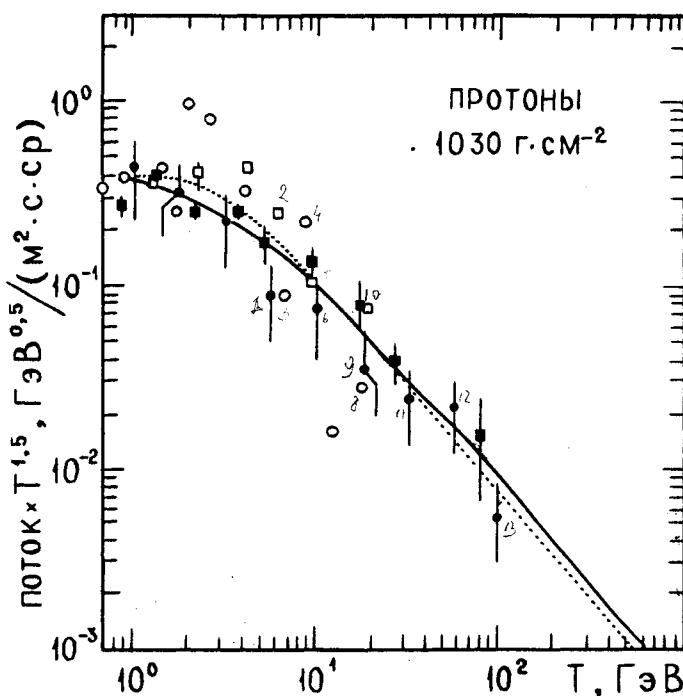


Рис.1.3. Дифференциальный энергетический спектр протонов на у. м.: $\circ$ — результат расчета /95/, сплошная кривая — расчет данной работы, пунктир — фит экспериментальных данных /88/, $\square$ — эксперимент /82/, остальные экспериментальные точки взяты из /95/

На рис.1.3 дано сравнение расчета спектра протонов на у.м. при $T \geq 1$ ГэВ с данными ряда экспериментов и с результатом моделирования ядерного каскада в атмосфере методом Монте-Карло /95/. Сравнение с более старыми экспериментальными данными было представлено в /105, 106/. Сравнение с экспериментом на высоте 3,2 км /89/ ($T < 100$ ГэВ) представлено на рис.1.4. В низкоэнергетической части спектра учтена поправка, обусловленная геомагнитным эффектом (см. Гл.2). При энергиях $T < (3-4) \sqrt{\text{ГэВ}}$ согласие расчета с экспериментом вполне удовлетворительное, но при $T \gtrsim 5$ ГэВ наблюдается небольшое (в пределах одного стандартного отклонения) систематическое превышение расчетного спектра над экспериментальным фитоном $I_p(T) = 32(T + 2 \text{ ГэВ})^{-2,8} (\text{м}^2 \cdot \text{с} \cdot \text{ср. ГэВ})^{-1}$. Сделанный в работе /89/ вывод о примерном равенстве интенсивностей протонов и нейтронов при $T > 3$ ГэВ на высотах гор противоречит нашему результату (см. табл.1.1) и результатам последующих экспериментов на уровне гор (рис.1.5). На рис.1.5 показана зависимость отношения n/ρ от глубины при некоторых значениях кинетической энергии и приведены имеющиеся на сегодня экспериментальные данные. Большинство точек на рис.1.5 относится к области высоких энергий. Как видно из рисунка, на каждой фиксированной глубине отношение n/ρ монотонно уменьшается с ростом энергии. При $T \gtrsim 50$ ГэВ зависимость n/ρ от энергии становится очень слабой (следствие гипотезы предельной фрагментации). На глубинах $h \lesssim 100 \text{ г} \cdot \text{см}^{-2}$ величина n/ρ в сильной степени определяется составом первичных КЛ и характеристиками взаимодействия ядро-ядро, поэтому ее измерение, как функции T и h , могло бы служить источником важной информации о взаимодействиях ядер. К сожалению,

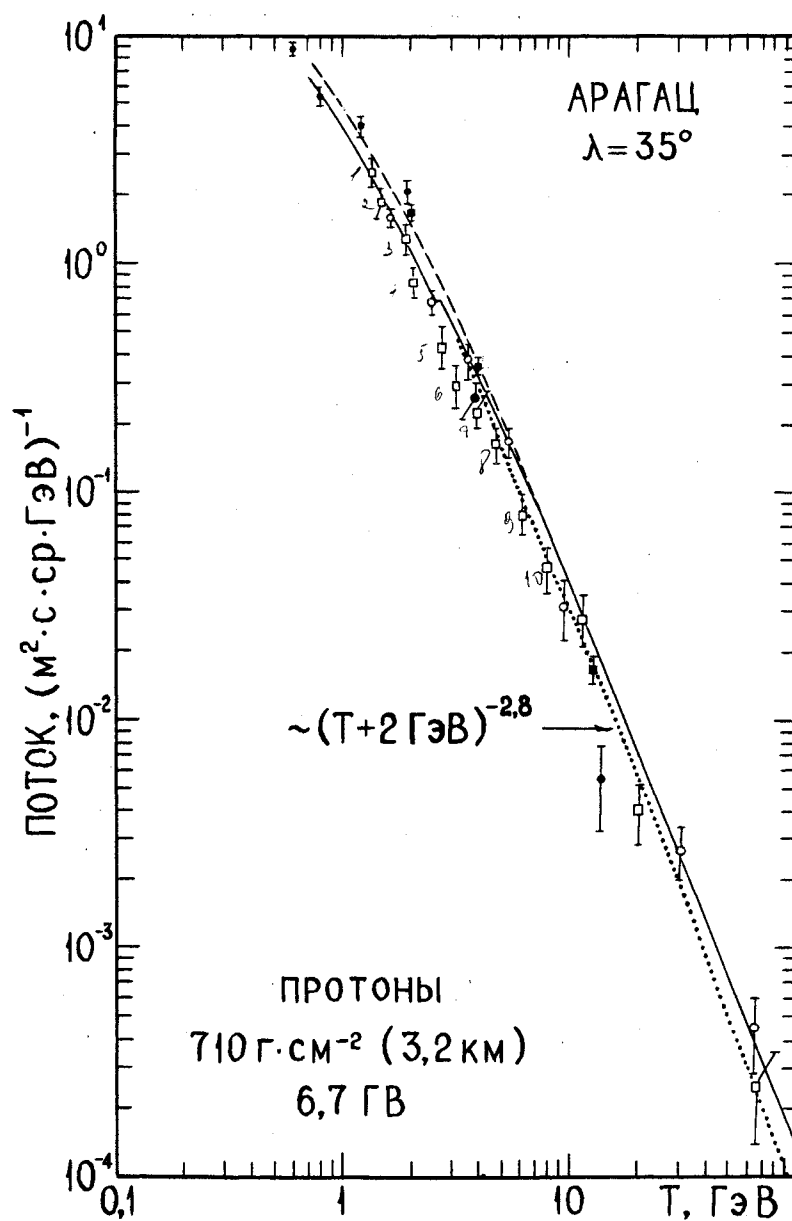


Рис. 1.4. Дифференциальный энергетический спектр протонов на высоте 3,2 км над у.м. при эффективной жесткости геомагнитного обреза $R_c = 6,7 \text{ ГВ}$. Экспериментальные точки – результаты четырех опытов /89/. Сплошная и штриховая кривые – расчет соответственно с учетом и без учета геомагнитных поправок. Пунктир – фит данных /89/ при $T \geq 3 \text{ ГэВ}$

Изсутствие экспериментальных данных о спектрах нейтронов с $T \gtrsim 1$ ГэВ в стратосфере не позволяет проверить адекватность принятой в расчете простейшей модели (1.39). На глубинах $h \gtrsim 500$ г. расчет не противоречит эксперименту, хотя для количественного сравнения имеющихся данных явно не достаточно.

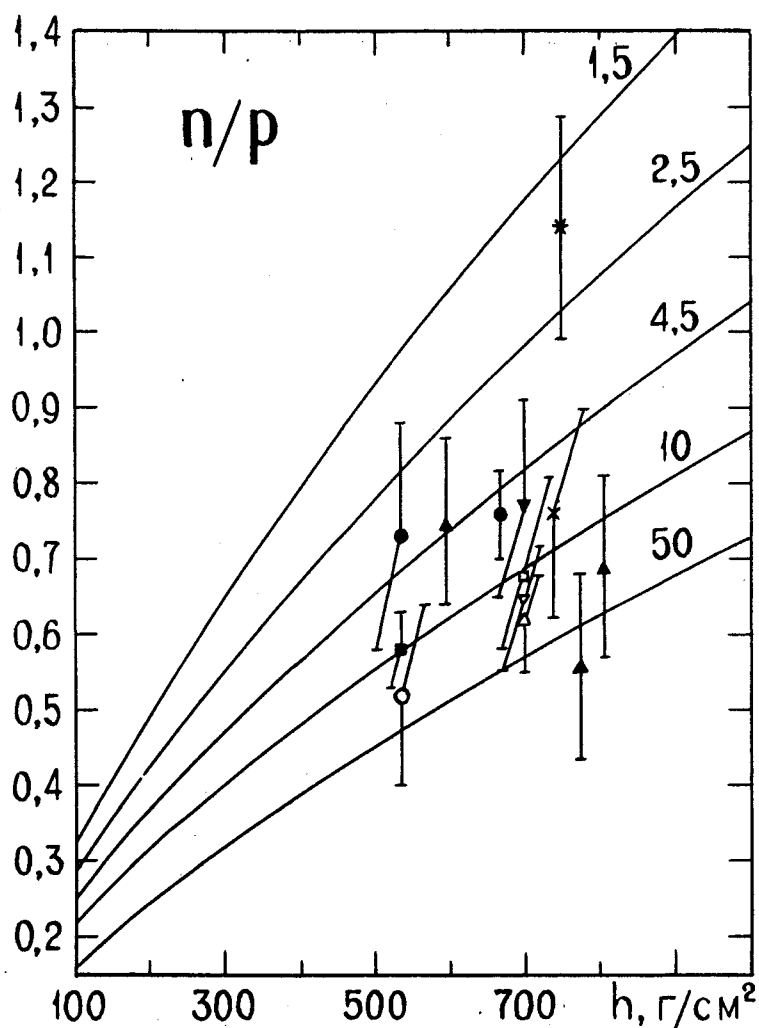


Рис.1.5. Зависимость отношения дифференциальных спектров нейтронов и протонов от глубины; * и x — экспериментальные отношения для $T \approx 2$ ГэВ и $T \geq 5$ ГэВ соответственно /109/ ; остальные данные, взятые из работы /98/ , относятся к энергиям $T \geq 10$ ГэВ. Числа у расчетных кривых — кинетическая энергия в ГэВ.

Импульсные спектры протонов низких энергий на высотах 2,75; 5,2 и 9 км над у.м. изображены на рис.1.6 и 1.7. Для слу-

чаев $H=2,75$ и $5,2$ км введены геомагнитные поправки, а в случае $H=9$ км для сопоставления с данными /93/, к интенсивности протонов прибавлена интенсивность μ^+ (поток остальных положительно заряженных частиц с соответствующими импульсами пренебрежимо мал, см. Гл.3). Видно, что расчет вполне удовлетворительно согласуется с опытом.

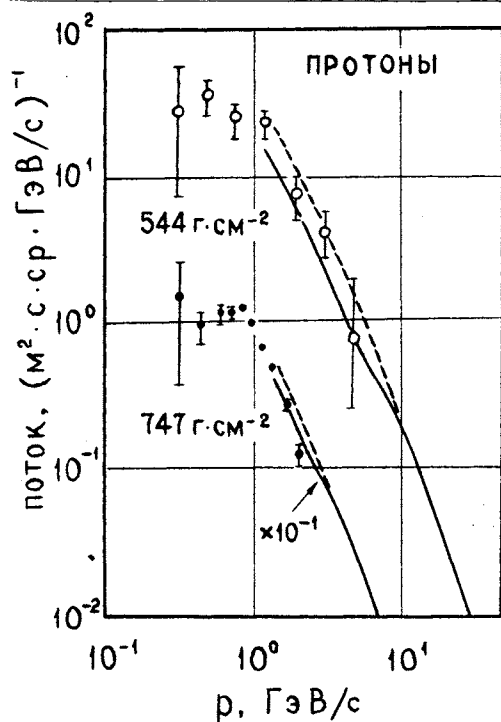


Рис.1.6

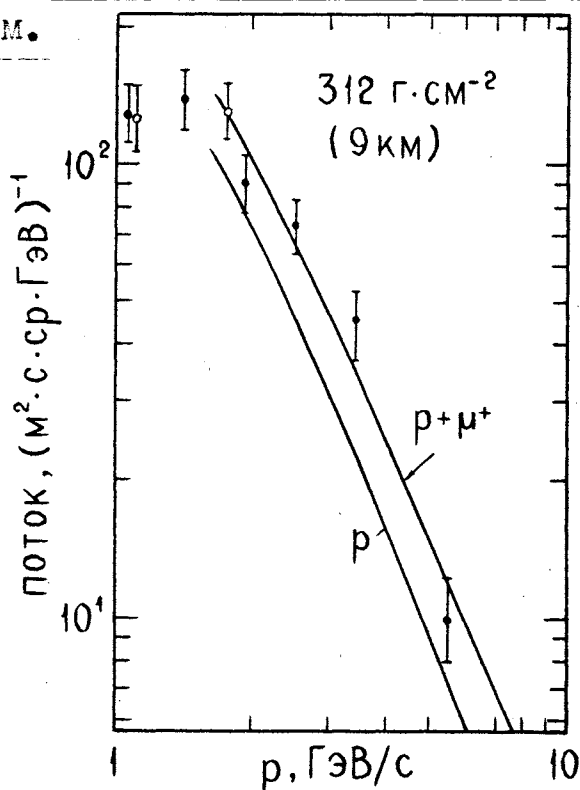


Рис.1.7

Рис.1.6. Дифференциальные импульсные спектры протонов на высотах $5,2$ км и $2,75$ км над у.м.; $\circ$ - /90/ ($R_c = 13,1$ ГВ), $\bullet$ - /92/ ($R_c = 5,59$ ГВ). Кривые - расчет (штриховые - без учета геомагнитного эффекта). Ординаты точек и кривых, относящихся к $H=2,75$ км, уменьшены в 10 раз.

Рис.1.7. Дифференциальный импульсный спектр положительно заряженных частиц на высоте 9 км над у.м.; экспериментальные точки - из работы /93/. Расчетные кривые - спектр протонов и суммарный спектр протонов и мюонов положительного заряда.

Из проведенных расчетов следует, что на больших глубинах атмосферы зависимости интенсивностей нуклонов от h различ-

ны для разных энергетических интервалов. В терминах "пробега до поглощения"

$$\Lambda_N = -I_N(\tau, h) \left[\partial I_N(\tau, h) / \partial h \right]^{-1}, \quad N=p, n$$

это означает, что Λ_p и Λ_n - функции энергии. Если аппроксимировать расчетные дифференциальные спектры $I_N(\tau, h)$ при $h \geq 300 \text{ г} \cdot \text{см}^{-2}$ выражением

$$I_N(\tau, h) = I_N^0(\tau) \exp[-h / \Lambda_N(\tau)], \quad (1.61)$$

то можно видеть, что пробеги до поглощения монотонно уменьшаются с ростом энергии вплоть до $T \sim (20-25) \text{ ГэВ}$, причем $\Lambda_n(\tau)$ при всех энергиях остается на (11-13)% больше $\Lambda_p(\tau)$. В ка-

T, ГэВ	$\ln I_N^0(\tau)$		$\Lambda_N(\tau), \text{ г} \cdot \text{см}^{-2}$		n/p (700 г см ⁻²)
	p	n	p	n	
1,5	6,66	6,19	123,1	138,7	1,13
2,5	5,78	5,14	121,6	136,2	0,98
3,5	5,14	4,40	120,8	134,7	0,88
4,5	4,64	3,83	120,2	133,9	0,82
10	2,93	1,95	118,4	131,6	0,68
15	2,01	0,959	117,8	131,0	0,64
20	1,28	0,137	115,2	128,8	0,61
30	0,335	-0,843	115,5	129,1	0,59
50	-0,892	-2,120	115,7	129,7	0,57

Табл.1.1. Параметры формулы (1.61) и отношение n/p на высотах гор: $I_N^0(\tau)$ измеряется в единицах $(\text{м}^2 \cdot \text{с} \cdot \text{ср} \cdot \text{ГэВ})^{-1}$.

честве иллюстрации, в табл.1.1 приведены параметры формулы (1.61) для нескольких значений кинетической энергии T. Точность аппроксимации при $h \geq 600 \text{ г} \cdot \text{см}^{-2}$ в среднем лучше (1 - 1,5)% . В последней колонке табл.1.1 приведено отношение спектров нейтронов и протонов на глубине $h = 700 \text{ г} \cdot \text{см}^{-2}$.

ГЛАВА 2. МЕТОД РАСЧЕТА ГЕОМАГНИТНЫХ ПОПРАВК

§ 2.1. Геомагнитные эффекты.

Взаимодействие заряженных частиц космического излучения с магнитным полем Земли приводит к тому, что в произвольную точку земного шара P с геомагнитной широтой λ и долготой ψ не могут попасть частицы, движущиеся под зенитным углом ϑ и азимутальным углом φ , если их магнитная жесткость $R = pc/Ze$ меньше некоторого значения $R_s(\lambda, \psi; \vartheta, \varphi) \equiv R_s(\Omega)$ (конус Штермера). С другой стороны, все частицы, с жесткостью, превышающей некоторое значение $R_m(\Omega) > R_s(\Omega)$ попадут в точку P (главный конус). При этом, если поток частиц на бесконечности строго изотропен, то, согласно теореме Лиувилля, интенсивность частиц с $R > R_m(\Omega)$ одинакова на любом расстоянии от точки P внутри телесного угла $d\cos\vartheta d\varphi$.

Интервал жесткостей от $R_s(\Omega)$ до $R_m(\Omega)$ образует пenumбру, представляющую собой сложную структуру чередующихся разрешенных и запрещенных областей. Размер и конфигурация пenumбры определяется координатами точки P (см. подробнее /134/).

Зависимость R_s и R_m от $\lambda, \psi, \dots$ является причиной геомагнитных эффектов КЛ (широтного, долготного и др.), поскольку, из-за быстрого спадания интенсивности первичных КЛ с энергией, наблюдаемая интенсивность сильно зависит от координат места наблюдения и направления прихода частиц.

При расчетах интенсивностей КЛ в атмосфере с учетом геомагнитных эффектов обычно используют понятие "эффективной жесткости обрезания" $R_c(\Omega)$, точное определение которого диктуется характером задачи /134/. Для наших целей удобным является определение $R_c(\Omega)$, не учитывающее форму первич-

ного спектра КЛ (эффективное обрезание "белого" спектра)

$$R_c(R) = R_s(R) + \int_{R_s}^{R_m} \theta_R(R) dR, \quad (2.1)$$

где $\theta_R(R)$ — функция от R , равная нулю в запрещенных и единице в разрешенных областях пенумбры.

Таким образом, принимается, что интенсивность частиц сорта a (протонов или ядер) на границе атмосферы, распространяющихся внутри телесного угла $d\Omega = d\cos\Theta d\varphi$ к точке $P(\lambda, \psi)$ и имеющих магнитную жесткость в интервале $(R, R + dR)$, равна

$$\theta(R - R_c(R)) a_0(R) d\Omega dR,$$

где $a_0(R)$ — жесткостной спектр частиц a вдали от магнитосферы Земли.

В такой постановке задачи не учитываются протоны возвратного альbedo. Однако, их интенсивность не может превышать интенсивности частиц альbedo, которая в свою очередь невелика ($< 10\%$) даже в области низких энергий /101/ (см. также данные, представленные в /135-137/).

Поскольку геометрический путь релятивистской ядерно-активной частицы между двумя последовательными столкновениями в плотной атмосфере мал, по сравнению с ее ларморовским радиусом в геомагнитном поле, то можно также пренебречь искривлением траекторий вторичных протонов и ядер. Это качественное соображение подтверждается результатами Монте-Карловских расчетов /138/. В работе /138/, на примере монохроматического мононаправленного источника протонов на границе атмосферы показано, что действие геомагнитного поля на вторичные протоны не важно при энергиях $T \gtrsim 500$ МэВ.

В следующих параграфах излагается аналитический метод расчета "поправок" к дифференциальным энергетическим спектрам вторичных нуклонов, обусловленных геомагнитными эффектами, с учетом сделанных выше упрощающих предположений. Изложение основано на результатах работ /139, 140/. Мы будем использовать также приближения 1 - 4, сформулированные в §1.1, хотя развитый в /139/ подход допускает несколько более общее рассмотрение.

§2.2. Поправки, обусловленные геомагнитным обрезанием спектра первичных протонов.

Как и в предыдущей главе, рассмотрим сначала случай чисто протонного первичного спектра. Обозначим дифференциальные энергетические спектры протонов и нейтронов на глубине h , движущихся к точке $P(\lambda, \psi)$ в направлении (θ, φ) через $p_R(E, h)$ и $n_R(E, h)$ соответственно ($R = \{\lambda, \psi; \theta, \varphi\}$). Пусть далее, $\epsilon(R)$ - геомагнитный порог для протона, связанный с эффективной жесткостью обрезания (2.1) соотношением

$$\epsilon(R) = \sqrt{e^2 R_c^2(R) + m^2 c^4}. \quad (2.2)$$

Функции p_R и n_R удовлетворяют системе КУ (1.1), причем граничное условие для этой системы, в соответствии со сказанным в § 2.1, следует взять в виде

$$p_R(E, 0) = \theta(E - \epsilon(R)) p_0(E), \quad n_R(E, 0) = 0, \quad (2.3)$$

где функция Хевисайда выделяет конус разрешенных в геомагнитном поле направлений. Нашей целью в этом параграфе является вычисление "геомагнитных поправок" к спектрам протонов и ней-

тронов :

$$\Delta p = p(E, h) - p_R(E, h), \quad \Delta n = n(E, h) - n_R(E, h), \quad (2.4)$$

где $p(E, h)$ и $n(E, h)$ — спектры p и n в отсутствии магнитного поля, найденные в § 1.1. В приближении коллимированного каскада Δp и Δn , очевидно, являются функциями переменных E , h и ϵ . Они удовлетворяют системе КУ (1.1), причем

$$\Delta p|_{h=0} = \theta(\epsilon - E) p_0(E), \quad \Delta n|_{h=0} = 0. \quad (2.5)$$

В первом приближении можно пренебречь изменением Δp за счет реакций неупругой перезарядки $n + A \rightarrow p + X$. Действительно, поскольку геомагнитный эффект для нейтронов является вторичным, то $\Delta n \ll \Delta p$. Кроме того, сечение неупругой перезарядки в случае, когда инклюзивный протон сохраняет существенную долю энергии налетающего нейтрона, мало по сравнению с сечением процесса $p + A \rightarrow p + X$ (см. рис. 2 в /105/), т.е. при не слишком малых x

$$\omega_1(x, E) \ll \omega_0(x, E).$$

Итак, при $E \leq \epsilon$ можно написать приближенное уравнение

$$(\partial/\partial h + 1/\lambda_p - \beta_p \partial/\partial E) \Delta p = \lambda_p^{-1} \int_0^1 dx x^{-2} \omega_0(x, E) \Delta p(E x^{-1}, \dots). \quad (2.6)$$

Для решения уравнения (2.6) с граничным условием (2.5) введем функцию $D_\epsilon^p(E, h)$ с помощью соотношения

$$D_\epsilon^p(E, h) \Delta p(E, h; \epsilon) = \int_0^1 dx x^{-2} \omega_0(x, E) \Delta p(E x^{-1}, h; \epsilon). \quad (2.7)$$

Физический смысл этой функции виден из уравнения (2.6), которое с учетом (2.7) принимает вид

$$\left\{ \partial/\partial h + [1 - D_\epsilon^p(E, h)] \lambda_p^{-1} - \beta_p \partial/\partial E \right\} \Delta p = 0. \quad (2.8)$$

Согласно (2.8), величина $[1 - D_\epsilon^p(E, h)]/\lambda_p$ есть коэффициент поглощения в некоторой среде, зависящий от энергии и длины.

Из (2.8) и (2.5) получаем :

$$\Delta p(E, h; \epsilon) = \theta(\epsilon - E_h) e^{-t} J_\epsilon^p(E, h), \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} J_\epsilon^p(E, h) &= p_0(E_h) \exp \left\{ \int_0^h \frac{dh'}{\lambda_N} D_\epsilon^p(E_{h'}, h - h') \right\} = \\ &= p_0(E_h) \exp \left\{ \int_E^{E_h} \frac{dE'}{\beta_p \lambda_N} D_\epsilon^p(E', h - \frac{E' - E}{\beta_p}) \right\}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

где $E_h = E + \beta_p h$. Подставляя (2.9) и (2.10) в уравнение (2.7), приходим к функциональному соотношению

$$D_\epsilon^p(E, h) J_\epsilon^p(E, h) = \int_{E/(\epsilon - \beta_p h)}^1 dx x^{-2} \omega_0(x, E) J_\epsilon^p(E x^{-1}, h), \quad (2.11)$$

связывающему функции D_ϵ^p и J_ϵ^p при $\epsilon \geq E_h$. С помощью (2.11) нетрудно получить несколько первых членов разложения D_ϵ^p в ряд Маклорена по переменной h :

$$D_\epsilon^p(E, h) = D_\epsilon^p(E, 0) + \dot{D}_\epsilon^p(E, 0) h + \frac{1}{2} \ddot{D}_\epsilon^p(E, 0) h^2 + \dots \quad (2.12)$$

(точка над буквой означает частную производную по h). В самом деле, из (2.10) находим :

$$J_\epsilon^p(E, 0) = p_0(E), \quad (2.13)$$

$$\lambda_N \dot{J}_\epsilon^p(E, 0) = p_0(E) [D_\epsilon^p(E, 0) - u(\gamma(E) + 1)]$$

т.д. Подставляя (2.12) и (2.13) в (2.10), разлагая правую часть (2.10) по степеням $\hbar$ и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, получаем последовательно :

$$D_{\epsilon}^p(E, 0) = \Phi_{\epsilon}^0(E),$$

$$\lambda_N \dot{D}_{\epsilon}^p(E, 0) = \Phi_{\epsilon}^{00}(E) - [\Phi_{\epsilon}^0(E)]^2 + u[(\gamma(E)+1)\Phi_{\epsilon}^0(E) - \Psi_{\epsilon}^0(E)]$$

т.д. Здесь и далее используются рекуррентные определения стандартных квадратур ("обобщенных парциальных моментов") :

$$\Phi_{\epsilon}^i(E) = \int_{\mathbb{R}} dx W_i(x, E), \dots, \quad (2.14)$$

$$\Phi_{\epsilon}^{ij\dots}(E) = \int_{\mathbb{R}} dx W_i(x, E) \Phi_{\epsilon}^{j\dots}(Ex^{-1});$$

$$\Psi_{\epsilon}^i(E) = \xi^2 W_i(\xi, E) + \int_{\mathbb{R}} dx x [\gamma(Ex^{-1})+1] W_i(x, E), \dots, \quad (2.15)$$

$$\Psi_{\epsilon}^{ij\dots}(E) = \int_{\mathbb{R}} dx x W_i(x, E) \Psi_{\epsilon}^{j\dots}(Ex^{-1});$$

где $\xi = E/\epsilon$; $W_i(x, E) = x^{\Gamma(x, E)-1} w_i(x, E)$ ($i, j, \dots = 0, 1$).

Таким же способом можно найти поправку Δn . Она имеет вид

$$\Delta n(E, \hbar; \epsilon) = \theta(\epsilon - E) e^{-t} J_{\epsilon}^n(E, \hbar), \quad (2.16)$$

$$J_{\epsilon}^n(E, \hbar) = \int_0^{\tau} \frac{dh'}{\lambda_N} \exp \left\{ \int_{\hbar'}^{\hbar} \frac{dh''}{\lambda_N} D_{\epsilon}^n(E, \hbar'') \right\} P_{\epsilon}(E, \hbar'), \quad (2.17)$$

$$P_{\epsilon}(E, h) = \int_{E/(\epsilon - \beta_p h)}^1 dx x^{-2} \omega_1(x, E) J_{\epsilon}^P(E x^{-1}, h). \quad (2.18)$$

где $\tau = \min [h, \beta_p^{-1}(\epsilon - E)]$. Аналогом функционального соотношения (2.11) является уравнение

$$D_{\epsilon}^n(E, h) J_{\epsilon}^n(E, h) = \int_{E/\epsilon}^1 dx x^{-2} \omega_0(x, E) J_{\epsilon}^n(E x^{-1}, h). \quad (2.19)$$

Используя (2.17 - 2.19) нетрудно получить коэффициенты разложения функции D_{ϵ}^n , имеющей тот же смысл, что и D_{ϵ}^P :

$$\begin{aligned} D_{\epsilon}^n(E, 0) &= \Phi_{\epsilon}^{01}(E) / \Phi_{\epsilon}^1(E), \\ \lambda_N \dot{D}_{\epsilon}^n(E, 0) &= [2 \Phi_{\epsilon}^1(E)]^{-1} \{ [\Phi_{\epsilon}^{001}(E) + \Phi_{\epsilon}^{010}(E)] - \\ &- [\Phi_{\epsilon}^{01}(E) + \Phi_{\epsilon}^{10}(E)] D_{\epsilon}^n(E, 0) + u [\Psi_{\epsilon}^1(E) D_{\epsilon}^n(E, 0) - \Psi_{\epsilon}^{01}(E)] \} \\ &\text{и т.д.} \end{aligned}$$

Выражение (2.18) тоже сводится к стандартным квадратурам (2.14), (2.15). Действительно, представим функцию P_{ϵ} в факторизованной форме

$$P_{\epsilon}(E, h) = d_{\epsilon}^P(E, h) J_{\epsilon}^P(E, h) \quad (2.20)$$

и пользуясь формулами (2.13) и (2.18), получаем:

$$\begin{aligned} d_{\epsilon}^P(E, 0) &= \Phi_{\epsilon}^1(E), \\ \lambda_N \dot{d}_{\epsilon}^P(E, 0) &= \Phi_{\epsilon}^{10}(E) + \Phi_{\epsilon}^0(E) \Phi_{\epsilon}^1(E) + u [(\gamma(E) + 1) \Phi_{\epsilon}^1(E) - \Psi_{\epsilon}^1(E)], \dots \end{aligned}$$

При довольно общих ограничениях на функции $\omega_i(x, E)$ (см. подробнее /139/) можно показать, что ряды по степеням h для D -функций ($D = D_{\epsilon}^P, D_{\epsilon}^n, d_{\epsilon}^P$) являются знакопередающимися по крайней мере в асимптотическом смысле. С другой стороны, из уравнений (2.11), (2.19) и (2.20) следует, что при всех допустимых значениях E, h и $\epsilon \in D$ -функции положительно определены, причем

$$\lim_{E_h \rightarrow \epsilon} D_\epsilon^p(E, h) = \lim_{E_h \rightarrow \epsilon} d_\epsilon^p(E, h) = 0, \quad \lim_{E \rightarrow \epsilon} D_\epsilon^n(E, h) = 0 \quad (2.21)$$

Поэтому ограничиться в разложениях D -функций первыми двумя членами можно лишь при выполнении условия

$$h \leq -D(E, 0) / \dot{D}(E, 0) \quad (2.22)$$

Анализ, проведенный в /139, 140/ показал, что при $E \ll \epsilon$

$$\lambda_N |\dot{D}(E, 0)| \ll D(E, 0),$$

так что в этих, наиболее интересных случаях, достаточно ограничиться в разложениях D -функций только первым членом вплоть до $h \sim (3 \div 4) \lambda_N$, что превышает эффективную глубину генерации π - и K -мезонов. При $E \sim \epsilon$ функции $D(E, 0)$ и $\lambda_N |\dot{D}(E, 0)|$ становятся величинами одного порядка и, следовательно, условие (2.22) может выполняться лишь при $h \leq \lambda_N$.

Но, в силу (2.21), случай $E \sim \epsilon$ тривиален: геомагнитный эффект для нейтронов мал, а для протонов сводится к вычитанию из $p(E, h)$ вклада первичного излучения на данной глубине, равного, согласно (1.26), $p_0(E_h) \exp(-h/\lambda_N)$. Разумеется, с увеличением глубины, необходимое число членов разложений по h , типа (2.12), возрастает (см. § 2.4).

Приведем простые формулы, справедливые при выполнении условий

$$\beta_p h \leq \epsilon - E, \quad \beta_p h \ll E, \quad h \ll 2 D(E, 0) / |\dot{D}(E, 0)|. \quad (2.23)$$

Этот случай важен, поскольку геомагнитный эффект наиболее существен на небольших глубинах (см. рис.2.1).

$$J_\epsilon^p(E, h) \simeq p_0(E_h) \exp [D_\epsilon^p(E, 0) t],$$

$$J_{\epsilon}^n(E, h) \approx p_0(E) \varpi_{\epsilon}(E) \{ \exp[D_{\epsilon}^p(E, 0)t] - \exp[D_{\epsilon}^n(E, 0)t] \},$$

$$\varpi_{\epsilon}(E) = d_{\epsilon}^p(E, 0) [D_{\epsilon}^p(E, 0) - D_{\epsilon}^n(E, 0)]^{-1} = (\Phi_0^1)^2 (\Phi_{\epsilon}^0 \Phi_{\epsilon}^1 - \Phi_{\epsilon}^{01})^{-1}.$$

Асимптотика выражения J_{ϵ}^n при малых t следующая :

$$J_{\epsilon}^n(E, h) \rightarrow p_0(E) \Phi_{\epsilon}^1(E) t.$$

В заключение этого параграфа покажем, как можно учесть вклад реакций $n + A \rightarrow p + X$. Представим геомагнитную поправку Δp суммой

$$\Delta p = [\theta(\epsilon - E_h) J_{\epsilon}^p(E, h) + \theta(\epsilon - E) \tilde{J}_{\epsilon}^p(E, h)] e^{-t}$$

и запишем входящую сюда функцию $\tilde{J}_{\epsilon}^p$ в форме

$$\tilde{J}_{\epsilon}^p(E, h) = \int_0^{\tau} dh' \lambda_N^{-1} \exp \left\{ \int_0^{h'} dh'' \lambda_N^{-1} \tilde{D}_{\epsilon}^p(E_{h''}, h-h'') \right\} N_{\epsilon}(E_{h'}, h-h'),$$

$$N_{\epsilon}(E, h) = \int_{E/\epsilon}^1 dx x^{-2} \omega_1(x, E) J_{\epsilon}^n(E x^{-1}, h). \quad (2.24)$$

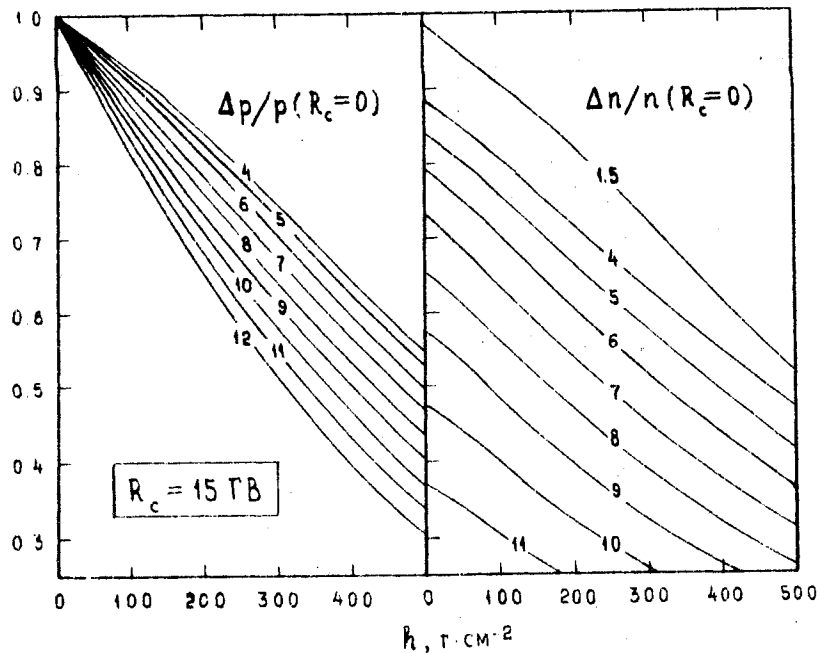


Рис. 2.1. Зависимость относительных геомагнитных поправок от глубины при жесткости обрезания 15 ГВ. В первичном спектре учтены только протоны. У кривых указаны значения кинетической энергии в ГэВх.

функциональное соотношение, связывающее функции $\tilde{D}_\epsilon^P$ и $\tilde{J}_\epsilon^P$, имеет вид

$$\tilde{D}_\epsilon^P(E, h) \tilde{J}_\epsilon^P(E, h) = \int_{E/\epsilon}^1 dx x^{-2} \omega_0(x, E) \tilde{J}_\epsilon^P(Ex^{-1}, h).$$

С помощью этих формул можно получить коэффициенты разложения функции $\tilde{D}_\epsilon^P(E, h)$. Например,

$$\tilde{D}_\epsilon^P(E, h) = \Phi_\epsilon^{0''}(E) [\Phi_\epsilon^{''}(E)]^{-1}.$$

Представив интеграл (2.24) в форме аналогичной (2.20),

$$N_\epsilon(E, h) = d_\epsilon^h(E, h) J_\epsilon^h(E, h),$$

найдем коэффициенты разложения $d_\epsilon^h(E, h)$ по h :

$$d_\epsilon^h(E, 0) = \Phi_\epsilon^{''}(E) [\Phi_\epsilon^{'}(E)]^{-1},$$

$$\lambda_N \dot{d}_\epsilon^h(E, 0) = [2\Phi_\epsilon^{'}(E)]^{-1} \{ [\Phi_\epsilon^{''0}(E) - \Phi_\epsilon^{''0}(E)] -$$

$$[\Phi_\epsilon^{0'}(E) + \Phi_\epsilon^{''0}(E)] d_\epsilon^h(E, 0) + u [\Psi_\epsilon^{'}(E) d_\epsilon^h(E, 0) - \Psi_\epsilon^{''}(E)] \}, \dots$$

При выполнении условий (2.28) легко получить приближенную формулу для $\tilde{J}_\epsilon^P$:

$$\tilde{J}_\epsilon^P(E, h) \approx p_0(E) x_\epsilon^1(E) \{ \exp[\tilde{D}_\epsilon^P(E, 0)t] - \exp[D_\epsilon^P(E, 0)t] \} \quad (2.25)$$

$$- p_0(E) x_\epsilon^2(E) \{ \exp[\tilde{D}_\epsilon^P(E, 0)t] - \exp[D_\epsilon^h(E, 0)t] \}.$$

Входящие сюда функции $x_\epsilon^i(E)$ имеют вид:

$$x_\epsilon^1(E) = \Phi_\epsilon^{'}(E) [\Phi_\epsilon^{''}(E)]^2 [\Phi_\epsilon^0(E) \Phi_\epsilon^{'}(E) - \Phi_\epsilon^{0'}(E)]^{-1} \cdot [\Phi_\epsilon^{0''}(E) - \Phi_\epsilon^0(E) \Phi_\epsilon^{''}(E)]^{-1},$$

$$x_\epsilon^2(E) = [\Phi_\epsilon^{'}(E) \Phi_\epsilon^{''}(E)]^2 [\Phi_\epsilon^0(E) \Phi_\epsilon^{'}(E) - \Phi_\epsilon^{0'}(E)]^{-1} \cdot [\Phi_\epsilon^{0''}(E) \Phi_\epsilon^{'}(E) - \Phi_\epsilon^{0'}(E) \Phi_\epsilon^{''}(E)]^{-1}.$$

при достаточно малых t выражение (2.25) переходит в следующее:

$$\tilde{J}_\epsilon^p(E, h) \approx p_0(E) \Phi_\epsilon''(E) t^2/2. \quad (2.26)$$

Поправка $\theta(\epsilon-E)e^{-t}\tilde{J}_\epsilon^p(E, h)$ важна в области $E < \epsilon < E_h$. Напомним, что в изложенной здесь методике расчета поправок Δp и Δn существенно использовалось предположение о малости инкрементного сечения неупругой перезарядки во фрагментационной области по сравнению с сечением процесса $p + A \rightarrow p + X$. Поэтому требование самосогласованности метода приводит к дополнительному ограничению. Именно, при $\epsilon \gtrsim E_h$ должно выполняться условие

$$\tilde{J}_\epsilon^p(E, h) \ll J_\epsilon^p(E, h). \quad (2.27)$$

Как следует из (2.26) при малых h условие (2.27) заведомо выполняется, поскольку $\tilde{J}_\epsilon^p/J_\epsilon^p \rightarrow \Phi_\epsilon'' t^2/2$ при $t \rightarrow 0$. Численный анализ показал, что (2.27) имеет место и на больших глубинах в интересующей нас области энергий и жесткостей обрезания.

§ 2.3. Поправки, обусловленные геомагнитным обрезанием спектра ядер первичного излучения

Энергетический спектр ядер Y на глубине h , движущихся в направлении, заданном угловыми переменными $(\lambda, \phi; \theta, \varphi) \equiv \Omega$ описывается (в пренебрежении регенерацией и энергетическими потерями) разрывной функцией⁷⁾.

⁷⁾ Напомним, что E — есть полная энергия, приходящаяся на один нуклон ядра. При учете ионизационных потерь энергии ядрами следует заменить аргумент E в правой части (2.28) на $E + Bh$, $B = Z_Y^2 \beta_p / A_Y$.

$$Y_{\Omega}(E, h) = \theta(E - \varepsilon_Y(\Omega)) Y(E, h). \quad (2.28)$$

Здесь $\varepsilon_Y(\Omega)$ — геомагнитный порог для нуклона, упакованного в ядро Y , связанный с геомагнитным порогом для свободного протона соотношением

$$\varepsilon_Y(\Omega) = \sqrt{(Z_Y \varepsilon(\Omega)/A_Y)^2 + (1 - Z_Y^2/A_Y^2) m^2 c^4}, \quad (2.29)$$

где Z_Y и A_Y — заряд и массовое число ядра Y (энергией связи нуклонов в ядре пренебрегаем). В дальнейшем, для простоты, будем предполагать, что $A_Y = 2Z_Y$. Тогда $\varepsilon_Y(\Omega)$ не зависит от сорта ядра :

$$\varepsilon_Y(\Omega) = (1/2) \sqrt{\varepsilon^2(\Omega) + 3m^2 c^4} \equiv \varepsilon(\Omega)$$

Заметим прежде всего, что в рамках принятой модели взаимодействия ядро-ядро, при $E < \varepsilon$ нуклоны-спектаторы не дадут вклада в потоки вторичных нуклонов с такой же энергией. Поэтому для дифференциальных спектров нуклонов, образующихся в атмосфере ядрами Y можно положить ⁸⁾

$$p_Y^{\Omega}(E, h) = p_Y(E, h) - \theta(\varepsilon(\Omega) - E) p_Y^{sp}(E, h) - \delta p_Y, \quad (2.30)$$

$$n_Y^{\Omega}(E, h) = n_Y(E, h) - \theta(\varepsilon(\Omega) - E) n_Y^{sp}(E, h) - \delta n_Y.$$

Здесь $p_Y(E, h)$ и $n_Y(E, h)$ — дифференциальные энергетические спектры p и n без учета геомагнитного (§ 1.3). Функции $p_Y^{sp}(E, h)$ и $n_Y^{sp}(E, h)$, описывающие спектры p и n , сформированные за счет нуклонов-спектаторов ядер Y , рассчитываются по форму-

⁸⁾ В работе /139/ рассмотрен более общий случай, без конкретизации модели взаимодействия ядер.

ам (1.44), (1.47) и (1.48), если вместо выражения в квадратных скобках, фигурирующего в (1.48), оставить только первое слагаемое $(a_Y \delta_{m0})$. В частности, при достаточно больших энергиях, когда можно пренебречь нарушением скейлинга, можно считать первичный спектр ядер степенным, легко получить (ср. (1.51)) :

$$p_Y^{sp}(E, h) = n_Y^{sp}(E, h) = (1/2)(A_Y - N_Y)(1 - \lambda_Y/\Lambda^+)^{-1} [\exp(-h/\Lambda^+) - \exp(-h/\lambda_Y)] Y_0(E).$$

Таким образом, задача заключается в вычислении поправок δp_Y и δn_Y . Представим их в удобной для дальнейшего форме

$$\delta p_Y = (1/2)(\Delta_Y^+ - \Delta_Y^-), \quad \delta n_Y = (1/2)(\Delta_Y^+ + \Delta_Y^-). \quad (2.31)$$

Подставляя (2.30) и (2.31) в систему КУ (1.36), и учитывая явный вид функций генерации G_{NY} , приходим к следующим уравнениям на функции $\Delta_Y^\pm(E, h; \varepsilon)$:

$$(\partial/\partial h + 1/\lambda_N) \Delta_Y^\pm(E, h; \varepsilon) = \pm(\beta_p/2) \partial(\Delta_Y^+ - \Delta_Y^-)/\partial E + \lambda_N^{-1} \int_0^1 dx x^{-2} \omega^\pm(x, E) \Delta_Y^\pm(Ex^{-1}, h; \varepsilon) + \delta^\pm N_Y \lambda_Y^{-1} \theta(\varepsilon - E) Y_\varepsilon(E, h), \quad (2.32)$$

$$Y_\varepsilon(E, h) = Y(E, h) \sum_{i=0,1} \Phi_\varepsilon^i(E), \quad \delta^+ = 1, \delta^- = 0. \quad (2.33)$$

Разница между величинами δp_Y и δn_Y целиком обусловлена ионизационными потерями энергий протонами и при релятивистских энергиях мала, т.е. $|\Delta_Y^-| \ll |\Delta_Y^+|$. Поэтому в уравнениях (2.32) с достаточной точностью можно пренебречь величиной $\partial \Delta^- / \partial E$ в выражении пропорциональном β_p . Полагая

$$\Delta_Y^\pm(E, h; \varepsilon) = \theta(\varepsilon - E) N_Y J_\varepsilon^\pm(E, h), \quad (2.34)$$

приводя функции $D_{\varepsilon}^{\pm}(E, h)$ с помощью соотношения

$$D_{\varepsilon}^{\pm}(E, h) J_{\varepsilon}^{\pm}(E, h) = \int_{E/\varepsilon}^1 dx x^{-2} \omega^{\pm}(x, E) J_{\varepsilon}^{\pm}(Ex^{-1}, h) \quad (2.35)$$

учитывая сделанное выше замечание о малости Δ_Y^{-} , получаем:

$$J_{\varepsilon}^{+}(E, h) = \left(\frac{\lambda_N}{\lambda_Y} \right) \int_E^{E^{+}} \frac{dE'}{E_0} Y_{\varepsilon} \left(E', h - \lambda_N \frac{E' - E}{E_0} \right) \cdot \exp \left\{ - \int_E^{E'} \frac{dE''}{E_0} \left[1 - D_{\varepsilon}^{+} \left(E'', h - \lambda_N \frac{E'' - E}{E_0} \right) \right] \right\} \quad (2.36)$$

$$= \int_0^{\tau^{+}} \frac{dh'}{\lambda_N} Y_{\varepsilon} \left(E_{h'/2}, h - h' \right) \exp \left\{ - \int_0^{h'} \frac{dh''}{\lambda_N} \left[1 - D_{\varepsilon}^{+} \left(E_{h''/2}, h - h'' \right) \right] \right\}$$

где $E_0 = \beta_p \lambda_N / 2$, а затем, после некоторых преобразований,

$$J_{\varepsilon}^{+}(E, h) + J_{\varepsilon}^{-}(E, h) = \int_0^h \frac{dh'}{\lambda_N} \exp \left\{ - \int_{h'}^h \frac{dh''}{\lambda_N} \left[1 - D_{\varepsilon}^{-}(E, h'') \right] \right\} \cdot \left\{ Y_{\varepsilon}(E, h') + (\lambda_Y / \lambda_N) \left[D_{\varepsilon}^{+}(E, h') - D_{\varepsilon}^{-}(E, h') \right] J_{\varepsilon}^{+}(E, h') \right\}. \quad (2.37)$$

$$\left\{ Y_{\varepsilon}(E, h') + (\lambda_Y / \lambda_N) \left[D_{\varepsilon}^{+}(E, h') - D_{\varepsilon}^{-}(E, h') \right] J_{\varepsilon}^{+}(E, h') \right\}.$$

Пределы интегрирования в (2.36) равны

$$E^{+} = \min(\varepsilon, E_{h/2}), \quad \tau^{+} = \min[h, (\beta_p/2)(\varepsilon - E)]. \quad (2.38)$$

Полученное решение является формальным до тех пор, пока неизвестны функции $D_{\varepsilon}^{\pm}(E, h)$. Вполне аналогично тому, как это делалось в § 2.2, можно найти коэффициенты разложений

$$D_{\varepsilon}^{\pm}(E, h) = D_{\varepsilon}^{\pm}(E, 0) + \dot{D}_{\varepsilon}^{\pm}(E, 0) h + \dots \quad (2.39)$$

Так, с помощью (2.35 - 2.38), получаем ($i, j, \dots = 0, 1$)

$$D_{\varepsilon}^{+}(E, 0) = \left[\sum_i \Phi_{\varepsilon}^i(E) \right]^{-1} \sum_j \Phi_{\varepsilon}^{ij}(E), \quad (2.40)$$

$$D_{\epsilon}^{-}(E, 0) = \left[\sum_i \varphi_{\epsilon}^i(E) \right]^{-1} \sum_{ij} (1-2i) \varphi_{\epsilon}^{ij}(E). \quad (2.41)$$

Фигурирующие в (2.41) функции φ_{ϵ}^i определяются следующим образом :

$$\begin{aligned} \varphi_{\epsilon}^i(E) &= [\gamma(E) + 1 - E d/dE] \Phi_{\epsilon}^i(E), \\ \varphi_{\epsilon}^{ij}(E) &= \int_{E/\epsilon}^1 dx W_i(x, E) \varphi_{\epsilon}^j(E x^{-1}). \end{aligned} \quad (2.42)$$

Зависимости комбинаций $\sum_i \Phi_{\epsilon}^i(E)$ и $\sum_{ij} \Phi_{\epsilon}^{ij} / \sum_i \Phi_{\epsilon}^i$ от E и ϵ приведены в работе /140/.

Используя явный вид энергетического спектра ядер Y на глубине h (1.42), можно получить выражения для производных функций $D_{\epsilon}^{\pm}$ в нуле. Например,

$$\begin{aligned} \lambda_N \dot{D}_{\epsilon}^{+}(E, 0) &= \left\{ \sum_{ijk} \Phi_{\epsilon}^{ijk}(E) - \sum_{ij} \Phi_{\epsilon}^{ij}(E) D_{\epsilon}^{+}(E, 0) + \right. \\ &\left. + (u/2) \left[\sum_i \varphi_{\epsilon}^i(E) D_{\epsilon}^{+}(E, 0) - \sum_{ij} \varphi_{\epsilon}^{ij}(E) \right] \right\} \left[2 \sum_i \Phi_{\epsilon}^i(E) \right]^{-1}. \end{aligned}$$

Аналогичная формула для $\dot{D}_{\epsilon}^{-}(E, 0)$ довольно сложна, но численные оценки показывают, что при $E \geq 2$ ГэВ и $E/\epsilon \sim (0.7 \div 0.8)$

$$\lambda_N |\dot{D}_{\epsilon}^{\pm}(E, 0)| / D_{\epsilon}^{\pm}(E, 0) \lesssim (1 \div 5) \cdot 10^{-2},$$

так что можно ограничиться в (2.39) одним лишь первым членом. Если при этом выполнены условия $\beta_p h/2E \ll 1$ и $\beta_p h/2 \leq \epsilon - E$, то, вместо (2.36), получим простую формулу

$$J_{\epsilon}^{+}(E, 0) \approx Y_0(E) \alpha_{\epsilon}^{+}(E) \{ \exp[-h/\Lambda_{\epsilon}^{+}(E)] - \exp[-h/\lambda_Y] \},$$

где

$$\alpha_{\epsilon}^{+}(E) = \sum_i \Phi_{\epsilon}^i(E) [1 - \lambda_Y / \Lambda_{\epsilon}^{+}(E)]^{-1},$$

$$\Lambda_{\epsilon}^{+}(E) = \lambda_N [1 - D_{\epsilon}^{+}(E, 0)]^{-1}.$$

Поскольку в этом приближении $J_{\varepsilon}^{-} = 0$, то из (2.31) и (2.34) следует, что поправки δp_Y и δn_Y одинаковы и равны

$$(1/2) N_Y \theta(\varepsilon - E) J_{\varepsilon}^{+}(E, h). \quad (2.43)$$

При достаточно малых h это выражение принимает вид (см. 2.33))

$$(1/2) N_Y \theta(\varepsilon - E) Y_{\varepsilon}(E, h) (h/\lambda_Y).$$

Учет ионизационных потерь энергии протонами приводит к тому, что $J_{\varepsilon}^{-}(E, h) \neq 0$ и, следовательно, поправка к спектру нейтронов δn_Y становится больше, чем δp_Y .

Отметим, что вклады в δp и δn , обусловленные ядрами $Z > 2$, мало существенны. Это связано с тем, что доля нуклонов ядра Y , некогерентно взаимодействующих с ядром-мишенью в процессах $Y + A \rightarrow N + X$, уменьшается с ростом Z_Y , в соответствии с (1.40). Таким образом, учет геомагнитного обрезания спектра ядер из групп L, M и H сводится, в основном, к вычитанию из интенсивности вторичных нуклонов с $E < \varepsilon$ вклада нуклонов-спектаторов. В [140] показано как зависит от E и h доля вторичных нуклонов, образовавшихся в YA -столкновениях за счет спектаторного механизма. При энергиях $E < (20 - 30)$ ГэВ зависимость отношений p_Y^{sp}/p_Y и n_Y^{sp}/n_Y от E и h вызвана, главным образом, эффектом нарушения скейлинга, усиливающимся с глубиной (при уменьшении энергии инклюзивные спектры в области фрагментации в среднем возрастают [105], что приводит к уменьшению относительно вклада нуклонов-спектаторов). При высоких энергиях отношения p_Y^{sp}/p_Y и n_Y^{sp}/n_Y выходят на константу, равную $(A_Y - N_Y)/(A_Y - N_Y \lambda_N/\Lambda^+)$. Для ядер с $Z > 2$ вклад спектаторов превышает (85÷90)% даже для небольших энергий и глубин. Поэтому малыми поправками δp_Y и δn_Y для групп L, M и H мож-

но пренебречь с хорошей точностью. Поправки же δp_α и δn_α оказываются существенными, что иллюстрирует табл.2.1, и их учитывать необходимо.

глубина h , $\text{г} \cdot \text{см}^{-2}$	$\delta p_{\text{He}} (p_{\text{He}} - p_{\text{He}}^{\text{sp}})^{-1}$		$\delta n_{\text{He}} (n_{\text{He}} - n_{\text{He}}^{\text{sp}})^{-1}$	
	$R_c = 6 \text{ ГВ}$	$R_c = 12 \text{ ГВ}$	$R_c = 6 \text{ ГВ}$	$R_c = 12 \text{ ГВ}$
50	0,225	0,702	0,224	0,698
100	0,203	0,710	0,180	0,630
200	0,179	0,717	0,133	0,559
300	0,146	0,715	0,102	0,501
400	0,122	0,711	0,075	0,453
500	0,097	0,703	0,056	0,415

Табл.2.1. Зависимость отношений $\delta p_{\text{He}} / (p_{\text{He}} - p_{\text{He}}^{\text{sp}})$ и $\delta n_{\text{He}} / (n_{\text{He}} - n_{\text{He}}^{\text{sp}})$ от глубины и жесткости геомагнитного обрезания при $T = 1,5 \text{ ГэВ}$.

§ 2.4. Интенсивности нуклонов КЛ в атмосфере с учетом геомагнитного эффекта (численные результаты).

В этом параграфе мы обсудим результаты вычислений дифференциальных энергетических спектров протонов и нейтронов в атмосфере при энергиях $(1 \div 20) \text{ ГэВ}$ для различных жесткостей геомагнитного обрезания R_c . При расчете геомагнитных поправок по методу, изложенному в предыдущих параграфах, мы используем исходные данные (параметры первичного спектра КЛ, инклюзивные сечения, пробеги), приведенные в § 1.5. В разложениях D -функций ($D = D_\epsilon^p, D_\epsilon^n, d_\epsilon^p, \dots$) по степеням h можно ограничиться учетом двух первых членов. Численные оценки коэффициентов $\ddot{D}(E, 0)$ показывают, что линейное приближение

$$D(E, h) \approx D(E, 0) + \dot{D}(E, 0)h.$$

применимо для расчета Δp и Δn в рассматриваемом энергетическом интервале вплоть до $h \sim 500 \text{ г} \cdot \text{см}^{-2}$ с точностью в среднем

лучшей $\sim 10\%$. Учет следующих членов разложений D -функций нецелесообразен, т.к. уже коэффициенты $\ddot{D}(E, C)$ зависят от производных $\partial \omega_i(x, E)/\partial x$ и $\partial \omega_i(x, E)/\partial E$, которые трудно извлечь из имеющихся сейчас ускорительных данных об инклюзивных сеченных нуклон-ядерных взаимодействиях с нужной точностью. С другой стороны, при возрастании глубины относительные геомагнитные поправки $\Delta p/p$ и $\Delta n/n$ быстро убывают (см. рис. 2.1), компенсируя тем самым некоторое ухудшение точности расчета Δp и Δn на больших глубинах.

Для учета геомагнитного обрезания первичного спектра ядерной компоненты мы используем упрощенные формулы (2.43). Как показано в § 2.3, основной вклад в геомагнитные поправки, связанные с ядрами КЛ, учитывается вычитанием из $p_Y(E, h)$ и $n_Y(E, h)$ величин $\theta(\epsilon - E) p_Y^{sp}(E, h)$ и $\theta(\epsilon - E) n_Y^{sp}(E, h)$ соответственно. Поэтому небольшие ошибки в поправках δp_Y и δn_Y мало сказываются на спектрах нуклонов с $E < \epsilon$.

Результаты расчетов дифференциальных спектров протонов и нейтронов на различных глубинах атмосферы при $R_c = 0, 3, 6, 9, 12$ и 15 ГВ представлены на рис. 2.2 - 2.6, значения R_c указаны у кривых. Там же, для нескольких значений h приведены результаты работ /100/ (нейтроны) и /101/ (протоны), полученные по методу Монте-Карло при $R_c = 14,9$ ГВ (гистограммы). Можно отметить хорошее согласие с /101/ для протонных спектров. В случае нейтронов согласие с расчетами /100/ ухудшается: при $E \approx 10$ ГэВ мы получаем систематически меньшие интенсивности нейтронной компоненты, что связано главным образом с различием в принятых нами и авторами /100, 101/ моделях взаимодействия.

Характерным различием в спектрах p - и n -компонент яв-

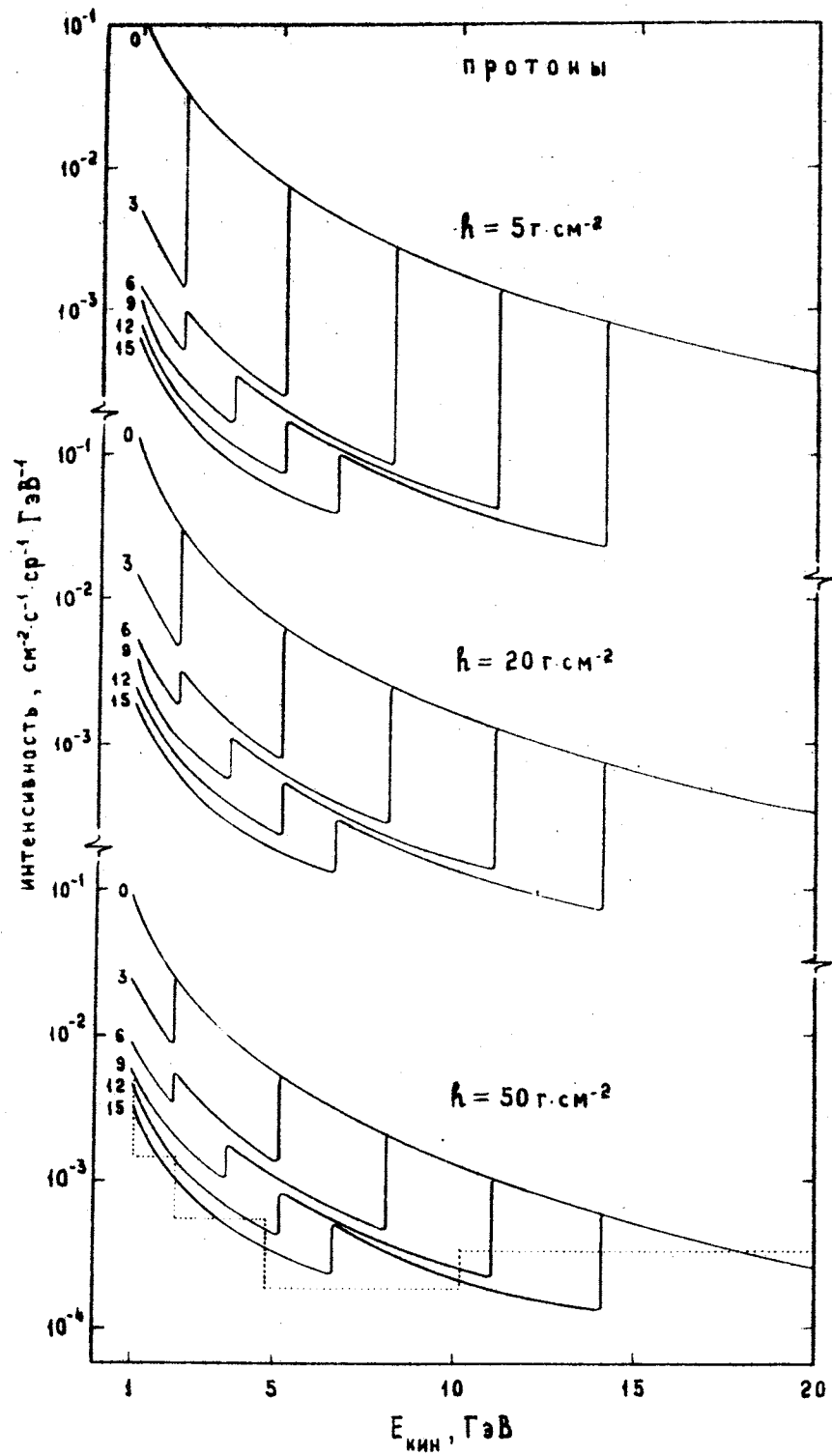


Рис.2.2.

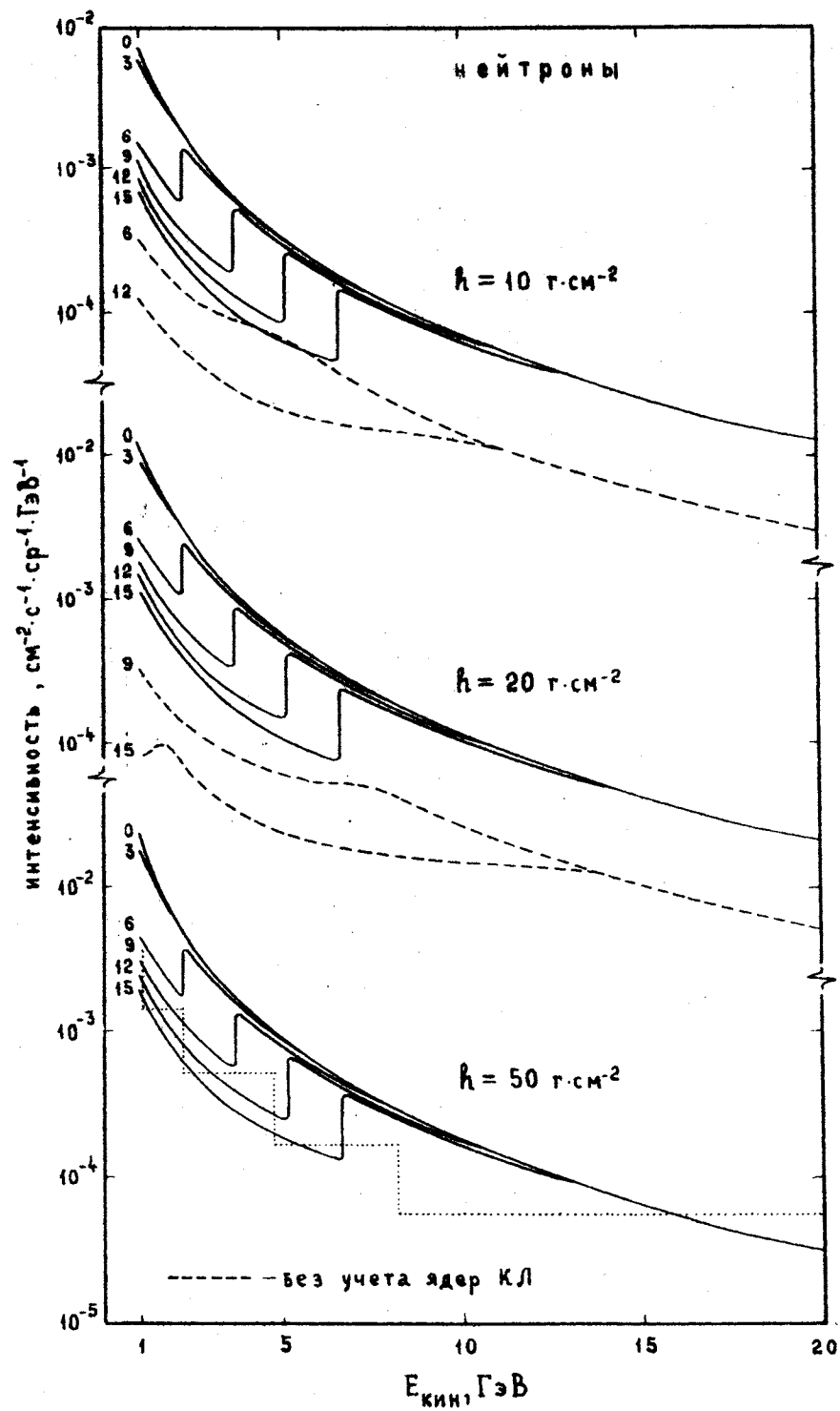


Рис.2.3.*

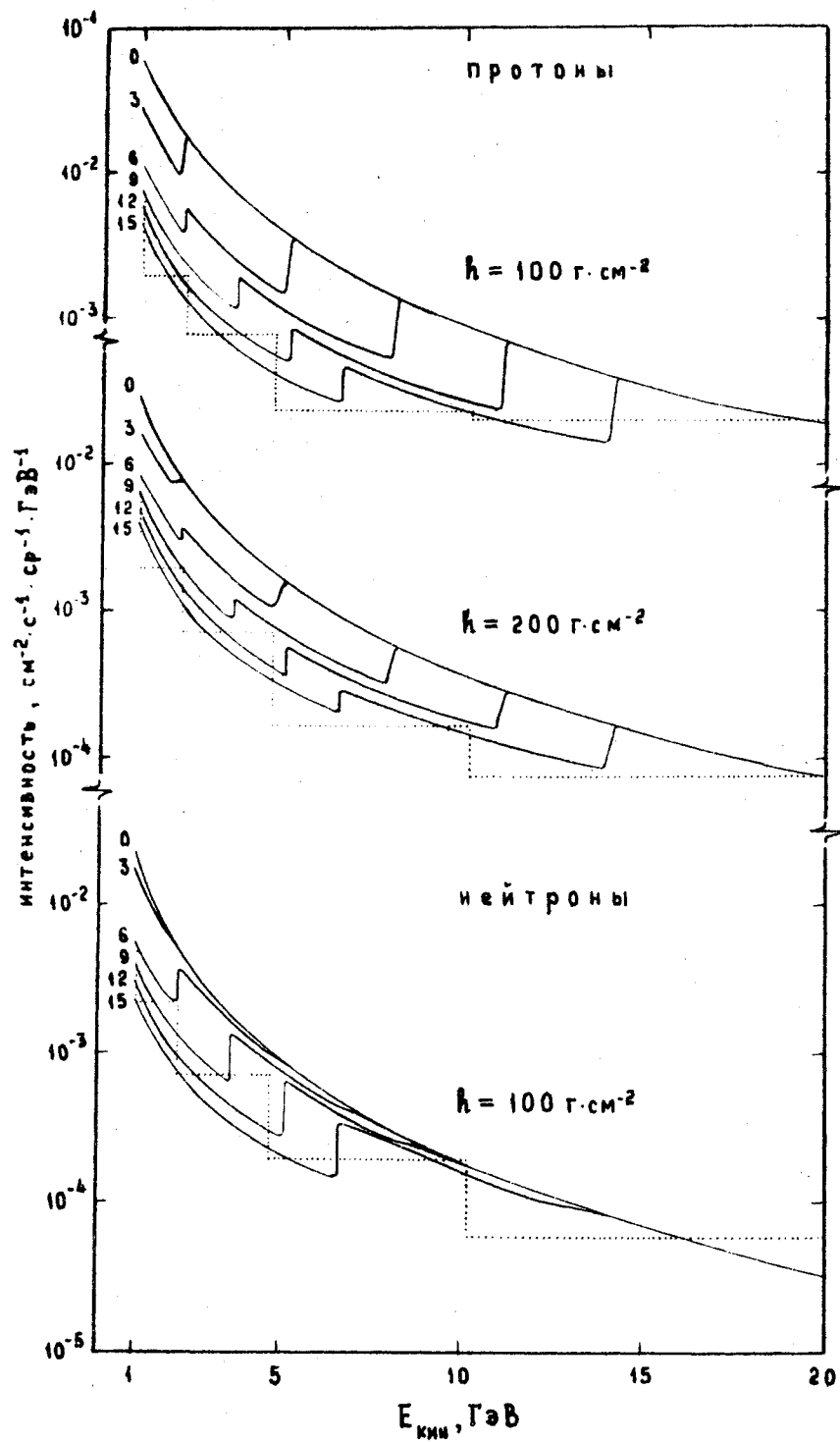


Рис.2.4.

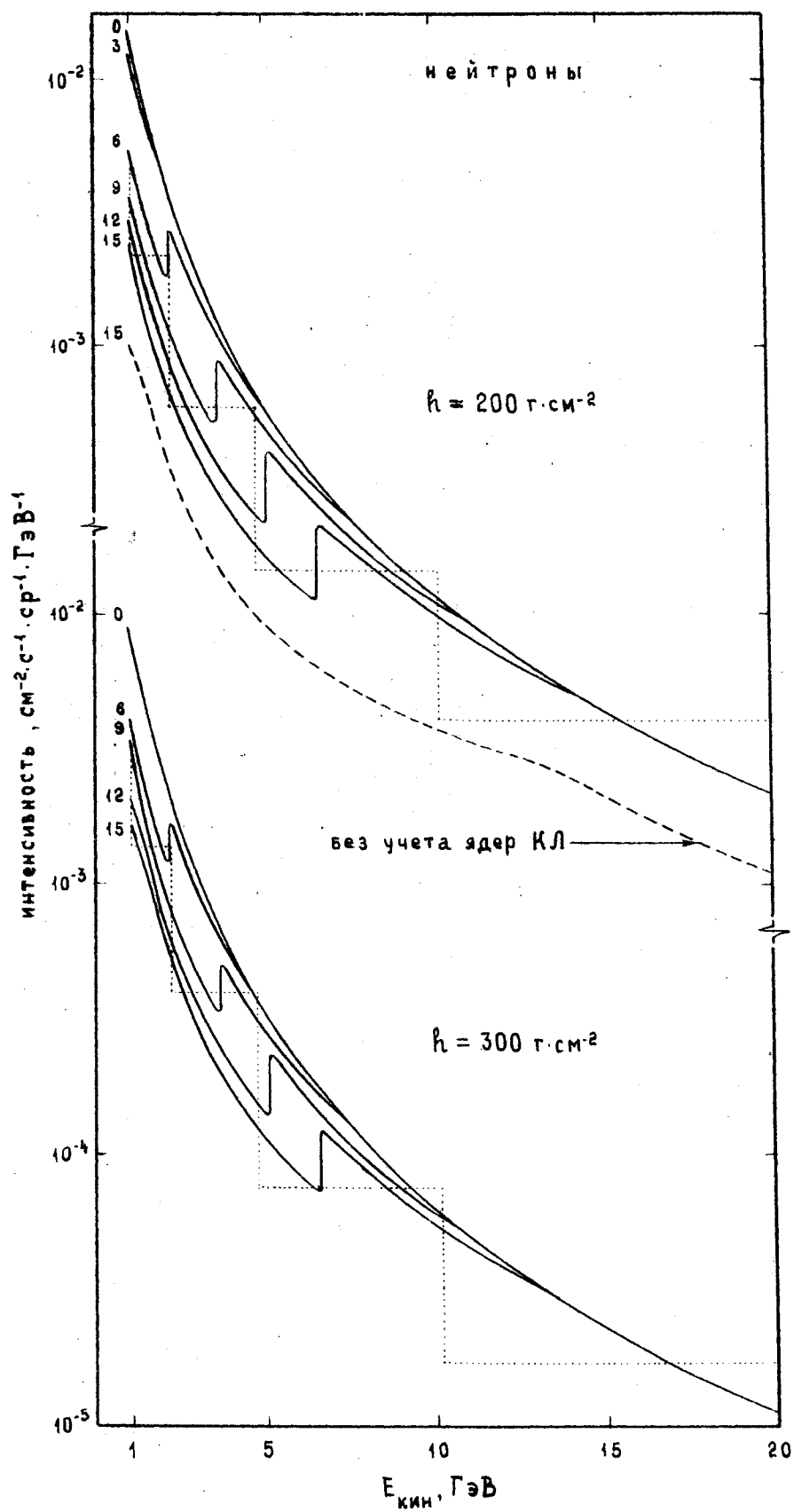


Рис.2.5.

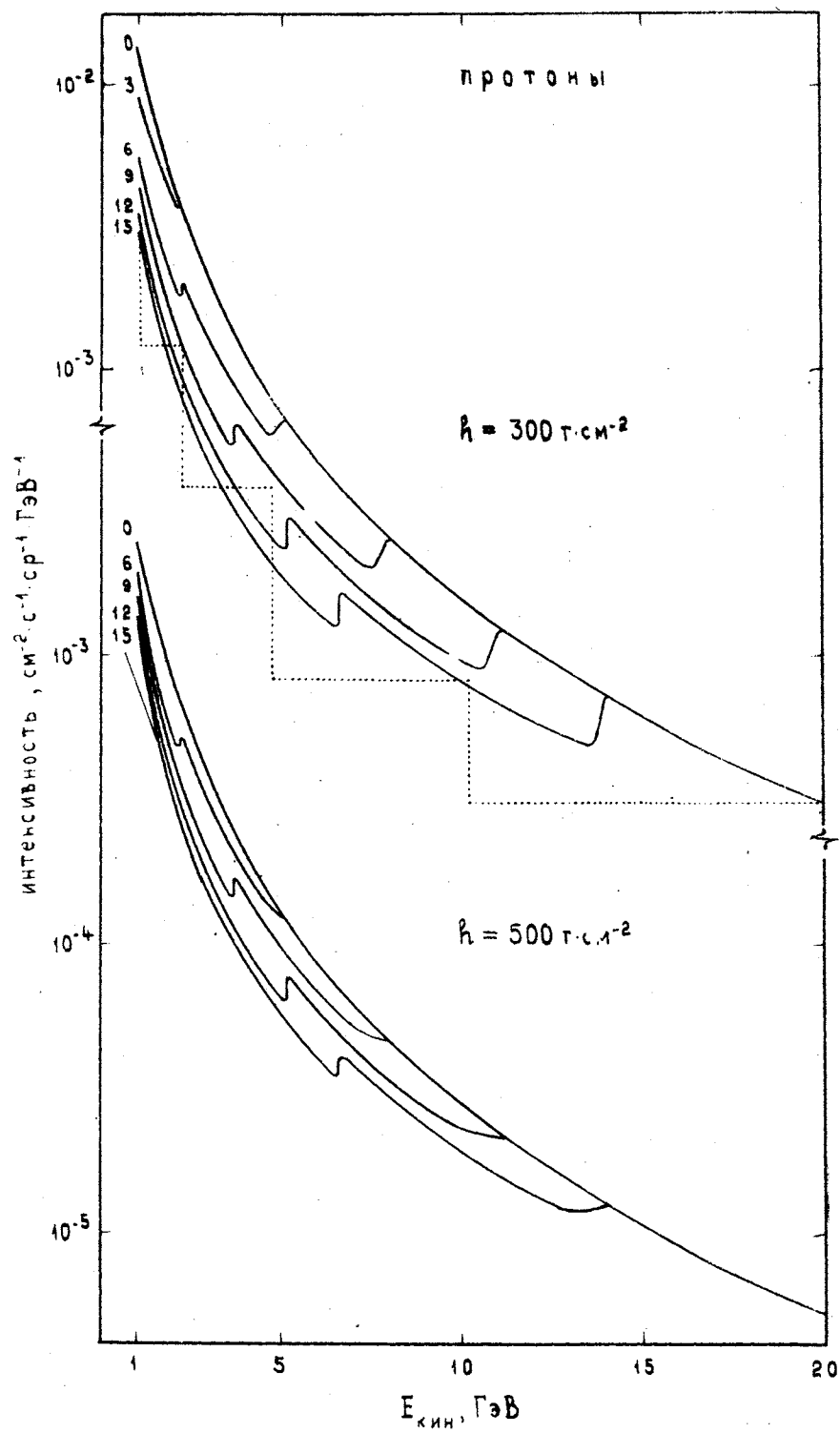


Рис.2.6.

метается наличие двух скачков (и двух локальных максимумов) в спектре протонов и только одного скачка в нейтронном спектре. Изменение наклона "протонного" скачка (при $E \leq \epsilon$) с глубиной вызвано ионизационными потерями. В области энергий $\epsilon - \beta_p h \leq E \leq \epsilon$ требуется поправка $\tilde{J}_\epsilon^p(E, h) e^{-t}$, связанная с учетом реакций нейтронной перезарядки нейтронов на ядрах. Скачки интенсивности при $E = \epsilon = (1/2)(\epsilon^2 + 3m^2 c^4)^{1/2}$ обусловлены вычитанием p_Y^{sp} , n_Y^{sp} и поправок δp_Y , δn_Y . На рисунках 2.3 и 2.5 штриховыми кривыми показаны, для сравнения, интенсивности нейтронов, вычисленные без учета вклада ядерной компоненты КЛ. Видно, что на небольших глубинах ($h \leq \lambda_N$) вклад фрагментации ядер в поток нейтронов является определяющим, чем объясняется, в частности, большие (по сравнению с протонами) величины "ядерных" скачков интенсивности. Учет поправки $\Delta \bar{Y} = \theta(\epsilon - E) N_Y \tilde{J}_\epsilon^-(E, h)$ (см. (2.31) и далее) приводит к небольшому сглаживанию этих скачков. В действительности, "ядерные" скачки в спектрах p и n должны сглаживаться сильнее по нескольким причинам. Во-первых, распределение по x "проскочивших" нуклонов в реакциях $YA \rightarrow NX$ не описывается δ -функцией, как принимается в данном расчете, а имеет конечную ширину. Во-вторых, из-за сложного изотопного состава первичного излучения имеется не один ядерный порог ϵ , а набор порогов $\{\epsilon_Y\}$, зависящих от отношения Z_Y/A_Y , согласно (2.29)⁹⁾. В третьих, некоторая доля фрагментов ядер первичного

⁹⁾ Так, например, геомагнитный порог для нуклонов ядра ${}^3\text{He}$ равен $\sqrt{(4/9)\epsilon^2 + R_c^2 + m^2 c^4} = (2/3)\sqrt{\epsilon^2 + 1,1 \text{ ГэВ}^2}$. Измерения в стратосфере при остаточном давлении $\sim 10 \text{ г}\cdot\text{см}^{-2}$ и $T \geq 1,13 \text{ ГэВ/нуклон}$ дают $/141/ : {}^3\text{He}/({}^3\text{He} + {}^4\text{He}) = 0,15 \pm 0,04$. Возможно, что при больших энергиях это отношение возрастает (см. сводку данных в $/147/$).

излучения с энергией на нуклон $E' > \varepsilon_Y$ на глубине $h \approx A_Y(E' - \varepsilon_Y) \cdot (\beta_p Z^2)^{-1}$ дает вклад в поток нуклонов с $E \lesssim \varepsilon_Y$ вследствие непрерывных потерь энергии ядрами на ионизацию (см. сноску 7)). И в четвертых, ядра Y с энергиями ниже пороговой могут образовываться на конечной глубине ($\sim \lambda_Y'$) при фрагментации первичных ядер Y' , имеющих энергию на нуклон $E'_0 > \varepsilon_{Y'}$. Т.о. участки спектров вблизи порогов ε_Y требуют более детального исследования. Учет перечисленных факторов возможен в рамках изложенного метода (или с использованием более общего формализма, разработанного в /139/) по мере уточнения данных о взаимодействиях ядер, зарядовом и изотопном составе космического излучения при средних энергиях.

Зависимости интенсивностей вторичных протонов и нейтронов, имеющих энергию ниже пороговой, от глубины при $\vartheta = 0^\circ$ показаны на рис. 2.7 - 2.9. В качестве примеров, на рис. 2.8 и 2.9 приведены аналогичные кривые, вычисленные без учета вклада ядерной компоненты. Видно, что геомагнитный эффект существенно влияет на форму "кривых поглощения" даже на сравнительно больших глубинах. Экспоненциальная зависимость интенсивностей от глубины (типа (1.61)) восстанавливается лишь при $h > h_{abs} \approx 600 \text{ г} \cdot \text{см}^{-2}$. Как h_{abs} , так и соответствующие пробеги до поглощения Λ_p и Λ_n существенно зависят от энергии и жесткости геомагнитного обрезания. Понятно, что h_{abs} , Λ_p и Λ_n должны увеличиваться с ростом R_c . Это явление хорошо видно на рисунках. Для количественного сравнения со случаем $R_c = 0$ в табл. 2.2 приведены значения параметров аппроксимации (1.61) при $R_c = 6 \text{ ГВ}$ и 9 ГВ . Там же приведены отношения n/p на глубине $700 \text{ г} \cdot \text{см}^{-2}$ (ср. с табл. 1.1). Точность аппроксимации (1.61) с ростом R_c ухудшается.

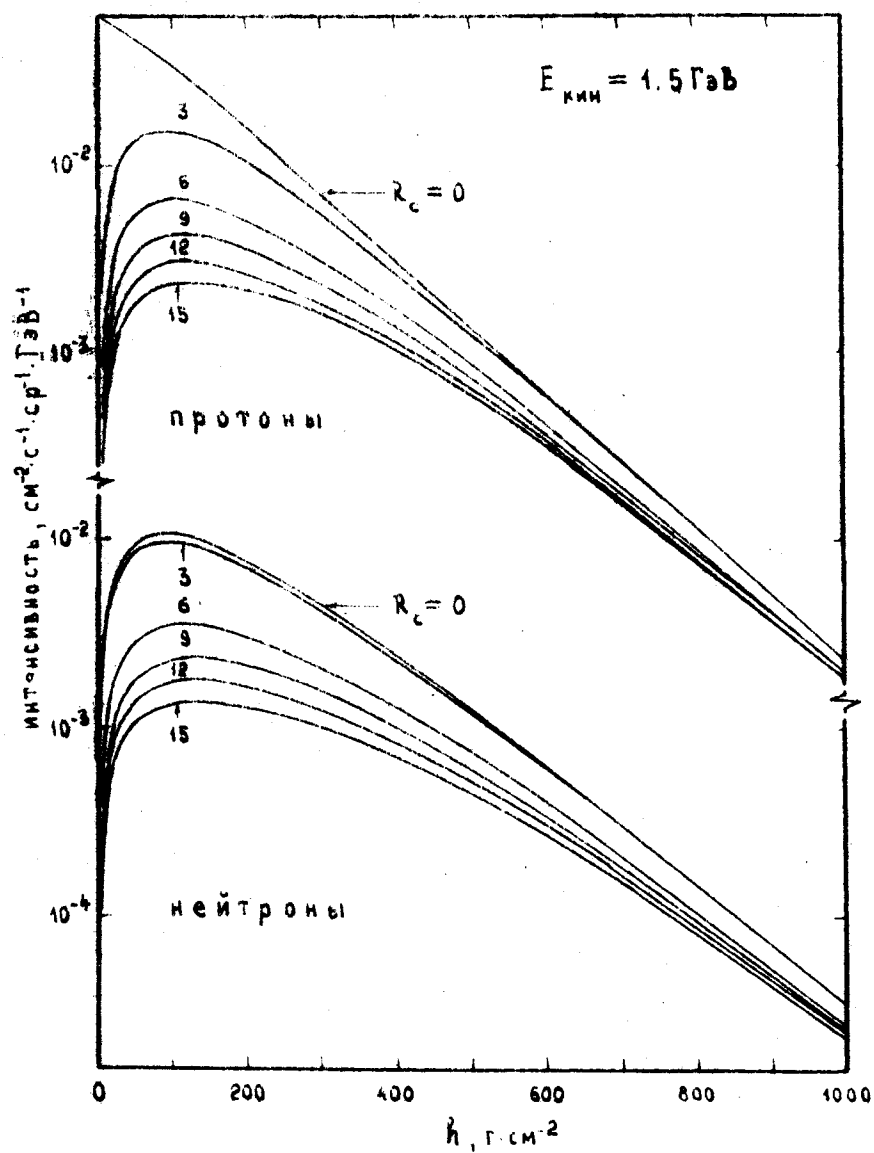


Рис.2.7. Зависимость дифференциальной интенсивности вторичных нуклонов от глубины при $T=1,5 \text{ ГэВ}$; у кривых указаны значения R_c в ГВ.

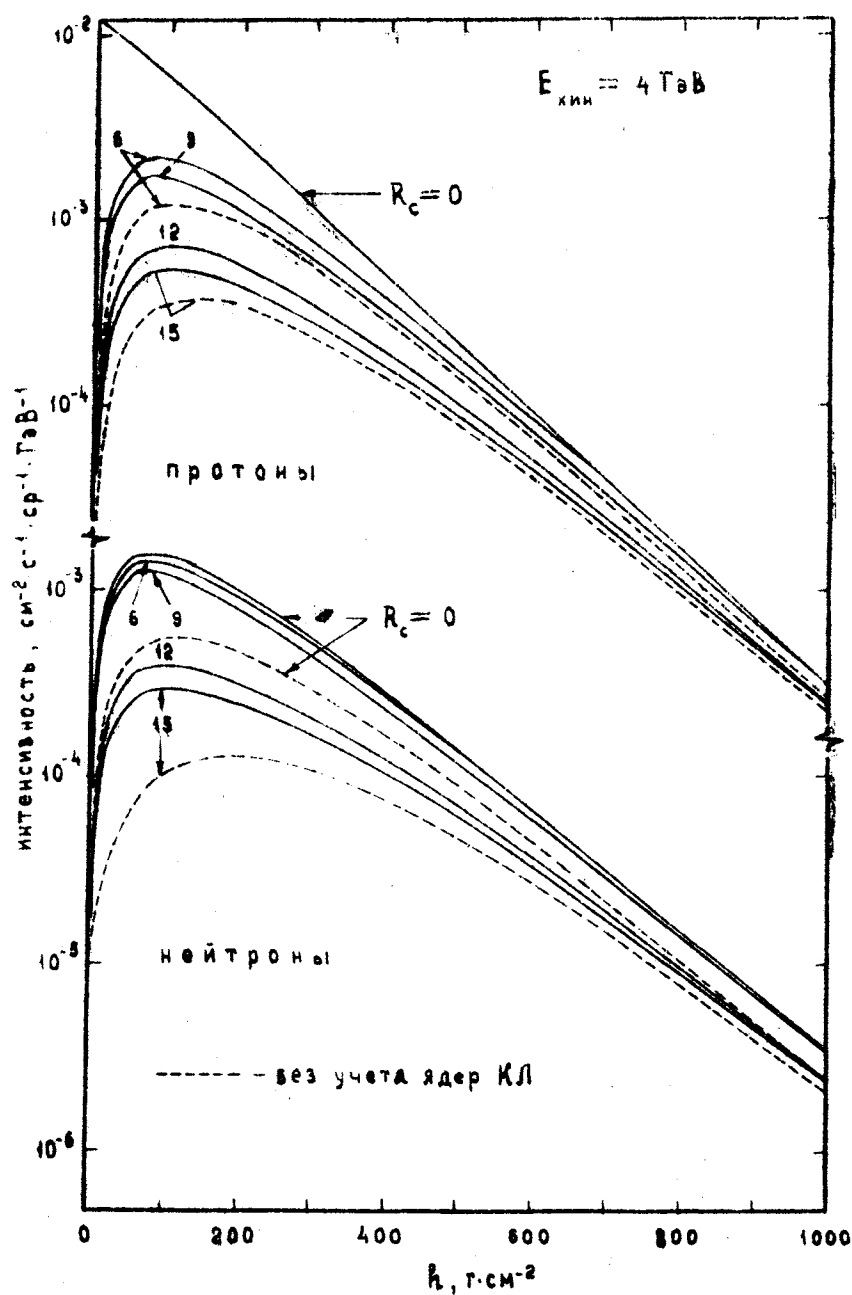


Рис. 2.8. Зависимость дифференциальной интенсивности вторичных нуклонов от глубины при $T=4 \text{ GeV}$; у кривых указаны значения R_c в ГВ.

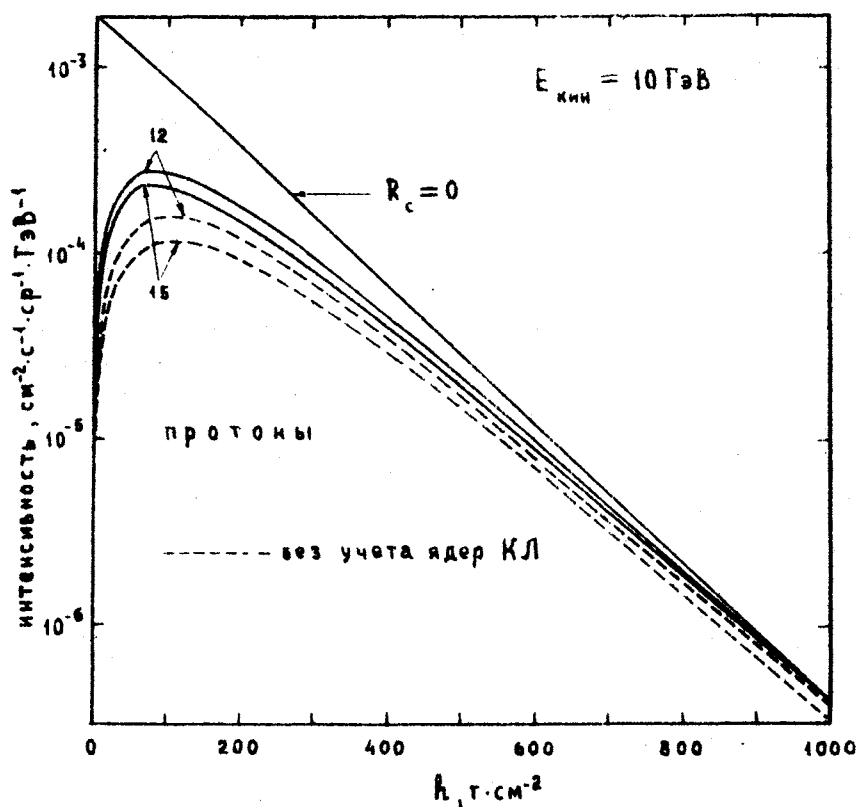


Рис.2.9. Зависимость дифференциальной интенсивности вторичных нуклонов от глубины при $T=10$ ГэВ; у кривых указаны значения R_c в ГВ.

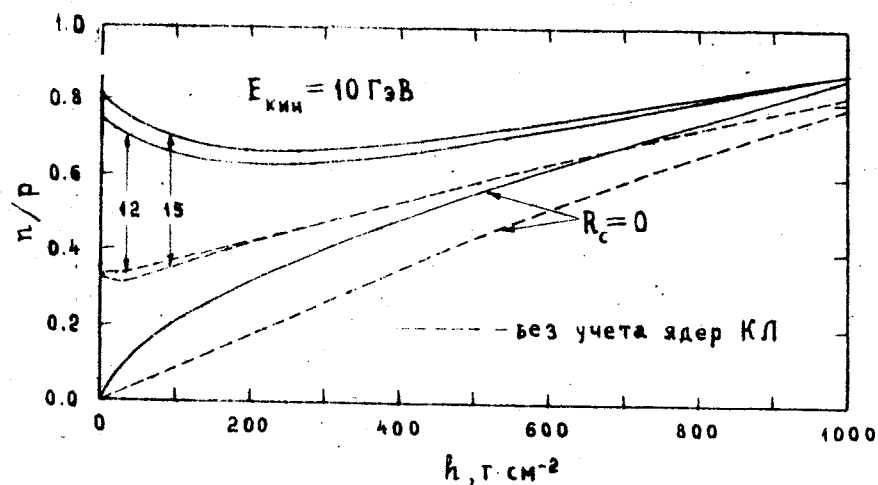


Рис.2.10. Зависимость от глубины отношения интенсивностей нейтронов и протонов с энергией 10 ГэВ. Указаны значения R_c в ГВ.

T, ГэВ	$\ln I_N^0(\tau)$		$\Lambda_N(\tau), \text{ см}^{-2} \cdot \tau$		n/p (700 г·см ⁻²)
	p	n	p	n	
$R_c = 6 \text{ ГВ}$					
1,5	6,09	5,48	129,7	147,8	1,06
2,5	5,43	4,97	127,3	139,3	1,02
3,5	4,79	4,32	126,8	136,4	0,93
$R_c = 9 \text{ ГВ}$					
1,5	5,83	5,18	133,9	153,6	1,03
2,5	4,90	4,24	132,9	148,8	0,91
3,5	4,32	3,63	130,6	144,5	0,84
4,5	4,12	3,62	127,8	137,4	0,88

Табл. 2.2. Параметры формулы (1.61) и отношение n/p на высотах гор; $I_N^0(\tau)$ измеряется в единицах $(\text{м}^2 \cdot \text{с} \cdot \text{ср} \cdot \text{ГэВ})^{-1}$.

Еще одно интересное следствие геомагнитного эффекта показано на рис. 2.10. Если при $R_c = 0$ отношение интенсивностей нейтронов и протонов монотонно растет с глубиной, то при достаточно больших значениях R_c это отношение вначале убывает, достигая минимального значения на глубине $h = h_{\min} \sim 200 \text{ г} \cdot \text{см}^{-2}$ и только при больших h начинает вновь возрастать. Для фиксированного значения h отношение n/p медленно убывает с энергией до $E \sim \epsilon$. При $E \sim \epsilon$ оно резко возрастает и выходит на плато, которое обрывается при $E \sim \epsilon \sim \beta_p h$. При наличии нескольких ядерных порогов, плато превращается в "лестницу" с пологими ступеньками, по величине которых в принципе можно судить о доле ядер с данным значением Z/A в первичном излучении. Поведение n/p на больших глубинах сравнительно слабо зависит от R_c .

Для оценки влияния геомагнитного обрезания на спектры и

угловые распределения лептонов низких энергий наиболее важно изучить поведение интенсивностей нуклонов с $E < \epsilon$ в окрестностях их максимумов по h . Величина и положение максимумов ($I_{\max}$ и $h_{\max}$ соответственно) существенно зависят от энергии и жесткости геомагнитного обрезания). Величина $I_{\max}$, естественно, уменьшается с ростом R_c . Однако, зависимость $h_{\max}$ от R_c не столь же очевидна (см. табл.2.3). Если разность $\epsilon - E = \Delta$ достаточно велика (скажем, $\Delta > E$), то с ростом пороговой жесткости положение максимума смещается в сторону больших глубин, а окрестность максимума Δh (т.е. интервал h , на котором интенсивность мало отличается от $I_{\max}$) возрастает. При этом $h_{\max}$ для нейтронов существенно превышает $h_{\max}$ для протонов. Если же $\Delta \lesssim E$, то $h_{\max}$ очень медленно уменьшается с ростом R_c , а окрестность максимума столь же слабо сужается, причем интенсивность нейтронов достигает максимального значения на меньших глубинах по сравнению с протонами. Этот эффект объясняется конечно тем, что при $\epsilon < E < \epsilon$ основной вклад в поток нейтронов вносит фрагментация ядер, средние пробеги которых значительно меньше $\lambda_n \approx 90 \text{ г} \cdot \text{см}^{-2}$. Тот факт, что при $\Delta > E$ в h -зависимости потоков p и n имеется плато вблизи $h = h_{\max}$, приводит к важному следствию. Именно, при $h \sim h_{\max}$, как дифференциальный, так и интегральный спектры нуклонов в области энергий много меньших геомагнитного порога слабо зависят от зенитного угла θ при условии

$$\cos \theta \gtrsim h_{\max} (h_{\max} + \Delta h/2)^{-1}.$$

Другими словами, на высотах $\sim (15 \div 17)$ км для вторичных КЛ с $E \lesssim \epsilon/2$ должна приближенно восстанавливаться изотропия первичного излучения. Этот вывод прекрасно подтверждается экспериментом /94/. При указанных условиях в диапазоне зенитных

T, ГэВ	R _c = 3,0 ГВ		R _c = 4,5 ГВ		R _c = 8,6 ГВ	
	I _{max}	h _{max}	I _{max}	h _{max}	I _{max}	h _{max}
0,8	267 143	96 118	193 107	105 128	103 60,0	121 146
0,9	311 209	87 94	167 92,1	103 123	88,2 51,3	120 141
1,0	272 182	86 90	147 80,5	101 118	76,6 45,0	119 137
2,0	100 63,2	84 84	80,4 54,6	83 81	29,4 16,2	108 112
2,5	- 41,2	- 81	56,5 37,2	84 80	21,4 11,5	109 106
T, ГэВ	R _c = 7,0 ГВ		R _c = 7,5 ГВ		R _c = 9,0 ГВ	
	I _{max}	h _{max}	I _{max}	h _{max}	I _{max}	h _{max}
3,5	23,8 17,0	83 77	22,9 16,6	82 76	11,9 6,55	100 97
4,0	19,6 13,7	82 76	18,7 13,4	81 75	16,8 12,7	77 73
4,5	16,1 11,0	82 76	15,4 10,7	81 75	13,8 10,1	80 73
5,0	13,3 8,90	81 76	12,7 8,64	80 75	11,2 8,08	80 74
7,0	- 4,37	- 73	- 4,37	- 73	6,24 4,16	80 75

Табл. 2.3. Величина и положение максимумов интенсивности вторичных нуклонов в атмосфере. Верхние числа в строках относятся к протонам, нижние - к нейтронам. Значения $I_{\max}$ даны в единицах $(\text{м}^2 \cdot \text{с} \cdot \text{ср. ГэВ})^{-1}$, $h_{\max}$ - в $\text{г} \cdot \text{см}^{-2}$.

углов $(0 \div 50)^\circ$ измеренные потоки меняются слабо с тенденцией к изотропизации при уменьшении энергии протонов.

Перейдем к сравнению с экспериментом. На рис. 2.11-2.13 показаны вертикальные энергетические спектры протонной компоненты на больших высотах (тропопауза, стратосфера) при энергиях от сотен МэВ до 10 ГэВ. Большая часть приведенных на рисунках экспериментальных данных получена /94/ в полярных и средних широтах (диапазон жесткостей геомагнитного обрезания R_c - (0,4 - 9) ГВ) с помощью магнитного спектрометра в период 1975-77 гг., т.е. во время минимума СА. Точки на рис. 2.11(а) взяты из работы /137/. Диапазоны вертикальных пороговых жесткостей и глубины остаточной атмосферы, для которых проводились измерения указаны на рисунках. Наши расчеты изображены сплошными кривыми; гистограммы - результат Монте-Карловского моделирования /101/; темные точки - аналитический расчет /142/ при $R_c = 3,2$ ГВ; пунктир (рис. 2.12(а)) - экстраполяция спектра протонов из работы /137/, полученного при $R_c = 4,5$ ГВ на высотах (35 - 40) км, к высоте ~ 10 км с использованием кривой высотного хода интегральной интенсивности протонов из работы /135/; штриховые кривые на рис. 2.12 (в) - расчет работы /143/ для $h = 100 \text{ г} \cdot \text{см}^{-2}$ и на рис. 2.13(а) - расчет работы /144/ для $h = 270 \text{ г} \cdot \text{см}^{-2}$; штрих-пунктирные кривые (рис. 2.13 (в)) - спектр протонов, вычисленный по эмпирической формуле Тerasимы /109/ :

$$I_p(T, h) = 10h \exp(-h/125 \text{ г} \cdot \text{см}^{-2}) \cdot (T+a)^{-2,8} \text{ (м}^2 \cdot \text{с} \cdot \text{ср} \cdot \text{ГэВ)}^{-1}$$

при двух значениях параметра a ; штрих-пунктирная кривая (рис. 2.12 (а)) - расчет работы /145/ ($h = 100 \text{ г} \cdot \text{см}^{-2}$). Значения пороговых жесткостей, при которых выполнены расчеты, указаны

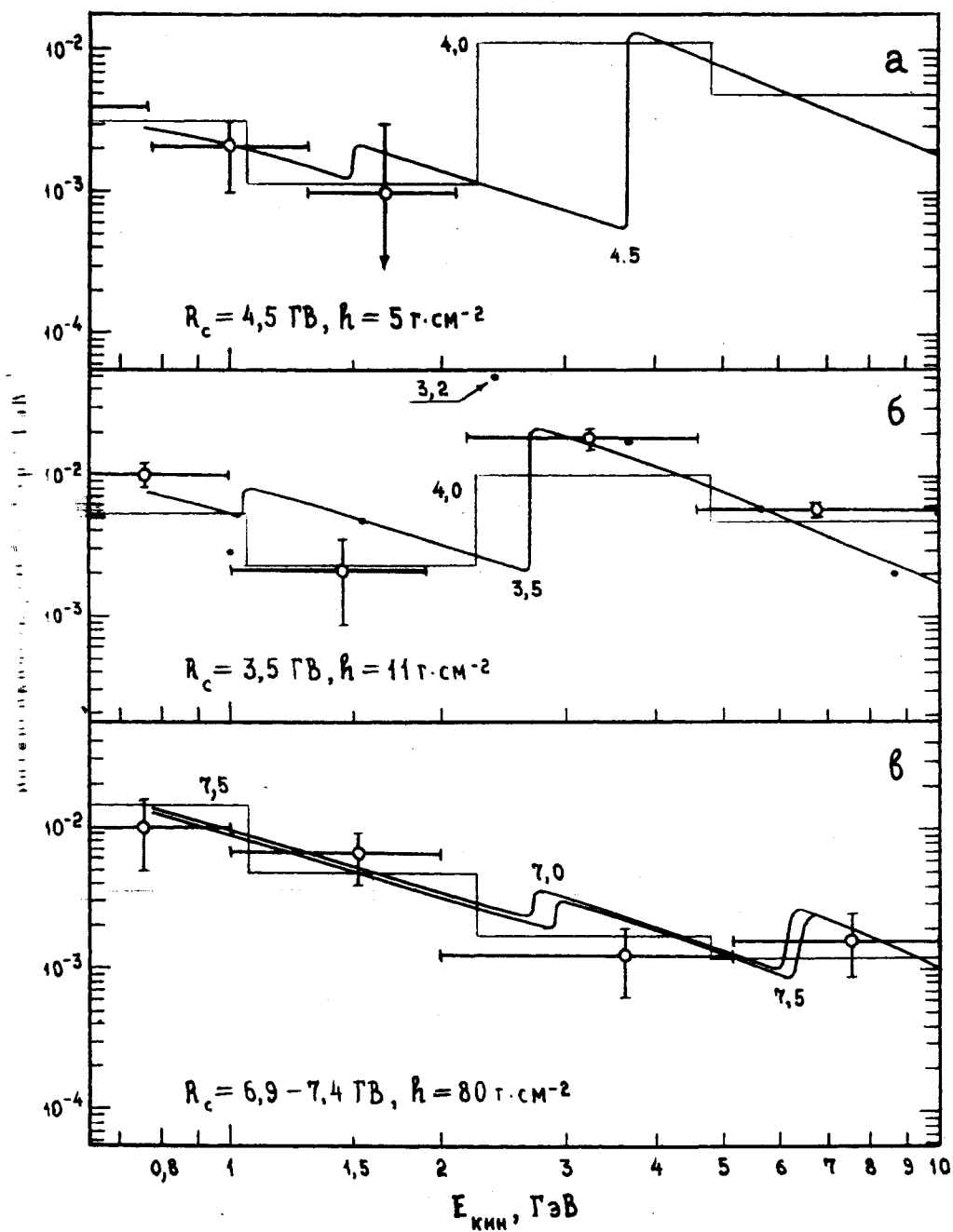


Рис.2.11. Дифференциальные энергетические спектры протонов на высотах от 18 до 35 км над у.м. ($\vartheta = 0^\circ$). Обозначения объясняются в тексте.

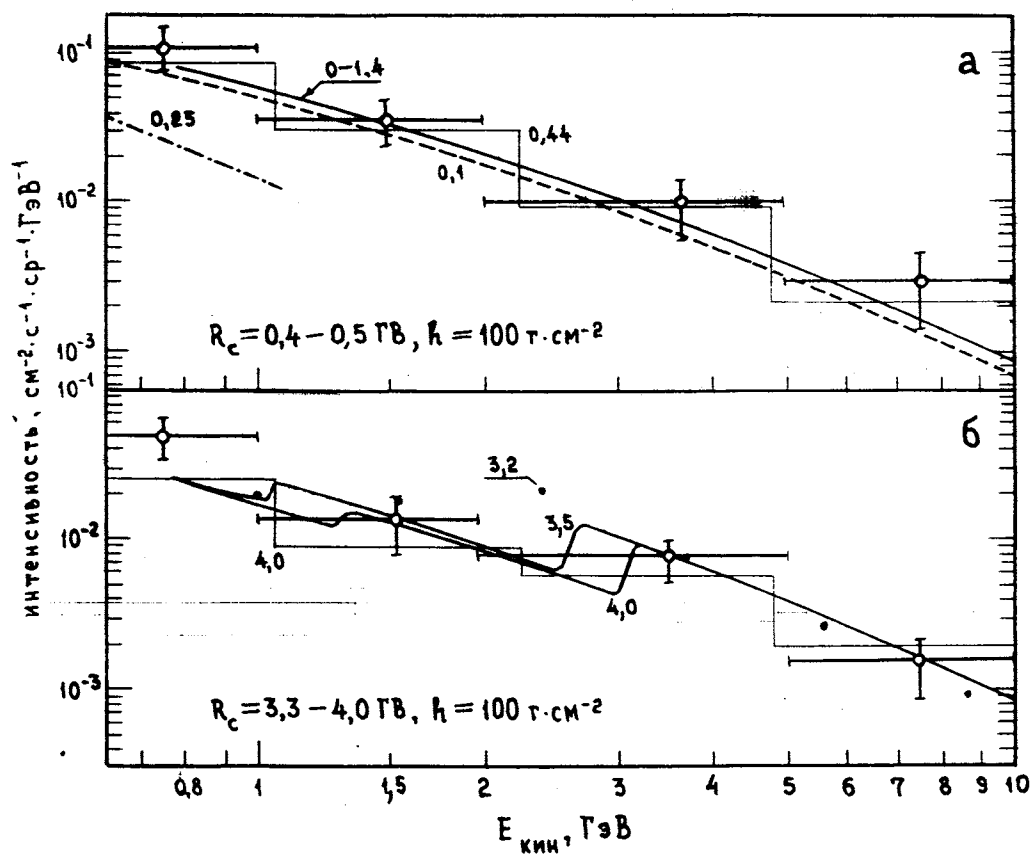


Рис.2.12. Дифференциальные энергетические спектры протонов на высотах 15,5–16,6 км над у.м. Обозначения объясняются в тексте.

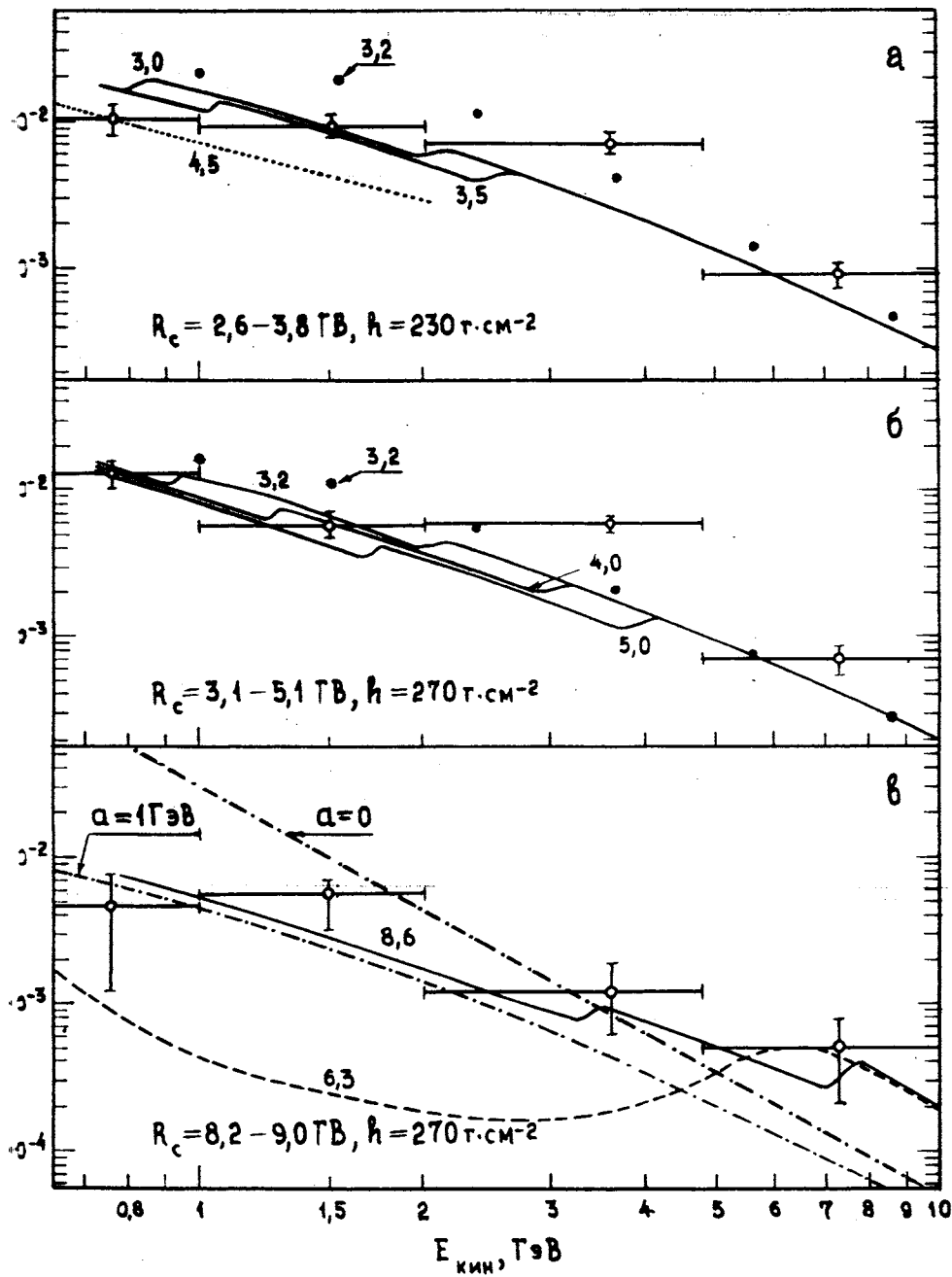


Рис. 2.13. Дифференциальные энергетические спектры протонов на высотах 10-11 км над у.м.* ($\theta = 0^\circ$). Обозначения объясняются в тексте.

у соответствующих кривых и гистограмм (в ГВ). Более подробное сопоставление результатов работ /142-145/ дано в /94/ и /101/.

В целом, из рис.2.11-2.13 видно хорошее совпадение наших результатов с экспериментальными данными и с расчетами /101, 142, 143/. Небольшое превышение расчетных кривых над экспериментальными точками в областях $\varepsilon < E < \epsilon_{\text{на}}^{\text{малых}} \sqrt{\text{глубинах}}$ (рис.2.11) можно объяснить тем, что здесь не учитывается наличие дополнительных ядерных порогов, обусловленных присутствием в первичном излучении ядер с $A \neq 2Z$, о чем говорилось выше.

На рис.2.14 представлены энергетические спектры протонов на высотах от 15,5 до 18 км при зенитном угле 47° (диапазоны R_c° и H указаны на рисунке). В эксперименте /94/ не фиксировался азимутальный угол, поэтому расчетные спектры усреднялись по φ . При вычислении "наклонных" жесткостей обрезания использовалась, следуя работе /101/, формула Штермера (см. /134/)

$$R_c(\lambda, \psi; \theta, \varphi) = \frac{4R_c^\circ(\lambda, \psi)}{(1 + \sqrt{1 - (R_c^\circ(\lambda, \psi)/14,9 \text{ ГВ})^{0,75} \sin \theta \cdot \cos \varphi})^2}, \quad (2.44)$$

в которую подставлялось экспериментальное значение вертикальной жесткости обрезания $R_c^\circ(\lambda, \psi)$. Поскольку, указанные в /94/ диапазоны R_c° довольно широки, такого приближения достаточно для расчета средних по φ величин.

Подробное сопоставление полученных в /94/ зенитно-угловых распределений с расчетом заняло бы слишком много места. Отметим здесь, что вплоть до $\theta \sim 50^\circ$ имеется хорошее согласие расчетов с экспериментом и с результатами работ /100-102/ как для дифференциальных, так и для интегральных интенсивнос-

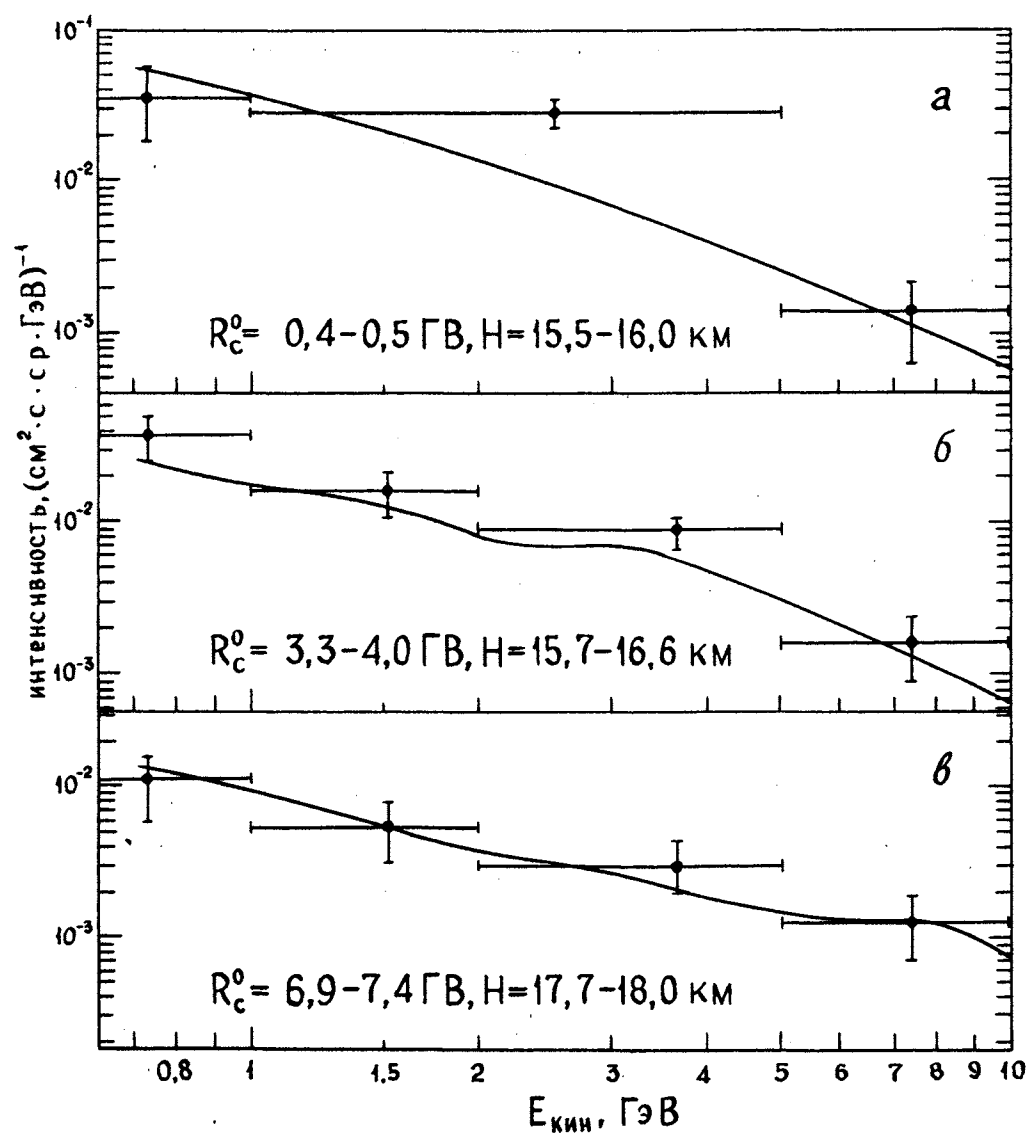


Рис. 2.14. Дифференциальные энергетические спектры протонов на высотах 15,5 – 18 км при зенитном угле $\vartheta = 47^\circ$, усредненные по азимутальному углу

тей. При больших зенитных углах мы получаем заниженные по сравнению с /100-102/ потоки p и n в низкоэнергетической области спектра. Например, для $H=11$ км и $R_c=4$ ГВ отличие интегрального спектра p с $T \geq 1$ ГэВ, полученного в данном расчете, от результата /101/ составляет $\sim 40\%$ в диапазоне зенитных углов $(53 - 66)^\circ$ и быстро увеличивается с ростом ϑ . Причина такого расхождения - неприменимость приближения "прямо-вперед" на больших глубинах, т.е. при $\cos \vartheta \leq h_0/10^3$ г.см $^{-2}$, уже обсуждалось выше.

Из представленных в этой и предыдущей главах результатов можно сделать вывод, что изложенная модель ядерно-каскадного процесса с учетом геомагнитных эффектов хорошо согласуется со всей совокупностью экспериментальных данных по нуклонной компоненте КЛ в области применимости одномерной теории переноса.

ГЛАВА 3. МЮОНЫ И НЕЙТРИНО В АТМОСФЕРЕ И ПОД ЗЕМЛЕЙ

Можно пойти несколько дальше и упомянуть нейтрино, которые играют важную роль в генерации энергии Солнца, и мюоны — просто "подарок небес"...

К.Хуанг, "Кварки, лептоны и калибровочные поля"

§ 3.1. Генерация π - и K-мезонов и модель атмосферы.

В этой главе изучаются спектры лептонов, рождающихся при распадах π - и K-мезонов. Дальнейшее изложение основано на результатах работ /68-71, 73/. В данном параграфе рассматривается мезонная компонента КЛ при средних энергиях, интересующая нас лишь в качестве "родителей" μ и ν .

При рассматриваемых энергиях можно пренебречь регенерацией π - и K-мезонов в мезон-ядерных взаимодействиях, а также рождением пионов в K-распадах ($K_S^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$ и др.). Как показано в работе /115/, учет регенерации пионов приводит к увеличению вертикального потока мюонов с импульсами ≈ 100 ГэВ/с на у.м. примерно на 10%, а регенерация каонов не существенна вплоть до $p = (200-250)$ ГэВ/с. Понятно, что с ростом зенитного угла роль процессов регенераций уменьшается. Из наших оценок интенсивности пионов от распадов K_S^0 следует, что при $p = (0,1-100)$ ГэВ/с она не превышает $\sim 3\%$ от полной интенсивности $\pi^+ \pi^-$ на высотах эффективной генерации лептонов.

Можно показать (см. Приложение 3), что ионизационные потери энергии заряженными мезонами тоже не существенны. Так, обусловленная ионизационными потерями относительная поправка

к дифференциальному спектру пионов на интервале импульсов $p = (0,2-10) \text{ ГэВ/с}$ практически не зависит от импульса и зенитного угла и не превышает $\sim 1,7 (h_0/10^3 \text{ г.см}^{-2})\%$ на уровне атмосферы с остаточным давлением h_0 .

С учетом этих замечаний и приближении "прямо-вперед" дифференциальный энергетический спектр мезонов сорта M ($M = \pi^\pm, K^\pm, \dots$) на глубине атмосферы h , распространяющихся под зенитным углом θ дается выражением

$$M(E, h, \theta) = \int_0^h dt \exp \left\{ -\frac{h-t}{\lambda_M(E)} - \frac{m_M}{\tau_M \rho} \int_t^h \frac{du}{\rho(u, \theta)} \right\} G_M(E, t). \quad (3.1)$$

Здесь λ_M — средний пробег мезона M до неупругого взаимодействия в воздухе, а m_M , τ_M , E и p — его масса, время жизни, полная энергия и импульс соответственно (далее в этой главе полагаем $c=1$); $\rho(h, \theta) = \rho(H)$ — плотность воздуха на уровне H , соответствующем глубине h вдоль направления θ . Угол θ отсчитывается от вертикали, проведенной через точку пересечения продолжения траектории частицы с поверхностью Земли (текущий зенитный угол ξ , отсчитываемый от вертикали на высоте H , связан с θ соотношением $\sin \xi = \sin \theta (1 + H/R_E)^{-1}$, где R_E — радиус Земли).

Функция генерации мезонов $G_M(E, h) = G_M(E, h; R_c)$ имеет вид

$$G_M(E, h; R_c) = \sum_j \frac{1}{\lambda_j} \int_{E_0^{\min}}^{\infty} \frac{dN_{Mj}(E, E_0)}{dE} j(E_0, h; R_c) dE_0, \quad (3.2)$$

где $j(E_0, h; R_c) dE_0$ — интенсивность частиц сорта j ($j = p, n, \alpha, \dots$) с энергиями от E_0 до $E_0 + dE_0$ на глубине h ; $R_c =$

$\epsilon_i(\Omega)$ — эффективная жесткость геомагнитного обрезания, зависящая от координат точки наблюдения, а также от зенитного и азимутального углов (см. (2.1));

$$\frac{dN_{Mj}(E, E_0)}{dE} = \frac{2\pi}{\epsilon_{jA}^{in}} \int_0^{p_T^{max}} dp_T \frac{p_T}{p_L} \left(E \frac{d^3\epsilon_{Mj}}{d^3p} \right) \theta(p_L^{min}) - (3.3)$$

инклюзивный спектр частиц M в реакции $j + A \rightarrow M + X$. Пределы интегрирования в (3.2) и (3.3) неодинаковы для разных реакций. В рамках кинематики NN — столкновения, которой мы ограничимся при расчетах,

$$E_0^{min} = \frac{m[(E-m)(E-m+\omega) + p\sqrt{p^2 + \omega^2 + 2\omega(E-m)}]}{2mE - m^2 - m_M^2},$$

$$(p_T^{max})^2 = p^2 - \frac{[(E-m)(E_0+m) + m\omega]^2}{E_0^2 - m^2}, \quad \omega = \frac{s_X^{min} - m_M^2}{2m}$$

где m и m_M — массы нуклона и мезона, а s_X^{min} — минимальное значение квадрата инвариантной массы X в реакции $NA \rightarrow MX$ (см. табл. 3.1). При достаточно больших энергиях мезонов, $E \gg m$,

реакция	$\sqrt{s_X^{min}}$	реакция	$\sqrt{s_X^{min}}$	реакция	$\sqrt{s_X^{min}}$
$p \rightarrow \pi^+$	$2m$	$p \rightarrow K^+$	$m + m_{\Lambda^0}$	$p \rightarrow K^0$	$m + m_{\Sigma^+}$
$n \rightarrow \pi^+$	$2m + m_{\pi^-}$	$n \rightarrow K^+$	$m + m_{\Sigma^-}$	$n \rightarrow K^0$	$m + m_{\Lambda^0}$
$p \rightarrow \pi^-$	$2m + m_{\pi^+}$	$p \rightarrow K^-$	$2m + m_K$	$p \rightarrow \bar{K}^0$	$2m + m_{K^0}$
$n \rightarrow \pi^-$	$2m$	$n \rightarrow K^-$	$2m + m_K$	$n \rightarrow \bar{K}^0$	$2m + m_{K^0}$

Табл. 3.1. Минимальная недостающая масса в инклюзивных реакциях нуклонов с изоскалярной ядерной мишенью.

выражение для E_0^{min} принимает вид

$$E_o^{\min} = E + \frac{s_x^{\min} - m^2}{2m} \left(1 - \frac{m^2 - m_M^2}{2mE} + \dots \right).$$

Для расчета инклюзивных спектров мезонов (3.3) удобно, как и в случае реакций $N A \rightarrow N X$ применять аналитические аппроксимации инвариантных сечений $E d^3\sigma_{Mj} / d^3p$. При кинетической энергии нуклона $T_N > 4$ ГэВ используется следующая формула для инвариантного сечения $N + A \rightarrow M + X$ /112/ (см. также /131, 132/) :

$$E d^3\sigma_{MN} / d^3p = c_1 \sigma_{NA}^{\text{in}} (1-x)^{c_2} [1 - \exp(-s p^{*2}/c_3 - p_T^2/c_4)] \cdot \quad (3.4)$$

$$\cdot \exp(-c_5 x) [(1-c_6) \exp(-c_7 p_T^2) + c_6 \exp(-c_8 p_T^2)],$$

где $x = p^*/p_{\text{max}}^*$ (p^* — импульс мезона в с.ц.м.). Параметры $c_i = c_i(M)$ ($M = \pi^\pm, K^\pm$) для нескольких ядерных мишеней приведены в /112/. Формула (3.4) применима при импульсах вторичных частиц $p_\pi \geq 0,15$ ГэВ/с, $p_K \geq 0,3$ ГэВ/с, что достаточно для наших целей. В работе /71/ представлено сравнение аппроксимации (3.4) с современными экспериментальными данными для реакций $pBe \rightarrow \pi^\pm + X$ при импульсах протонов от 4,54 до 10,1 ГэВ/с, не использовавшимися при подгонке параметров c_i . Из сравнения видно, что аппроксимация (3.4) хорошо работает в широкой кинематической области. Поскольку распады каонов вносят очень небольшой вклад в потоки мюонов и нейтрино с энергиями $E_{\mu, \nu} \leq 1$ ГэВ, то для сечений процессов $N + A \rightarrow K^\pm + X$ мы применяли формулу (3.4) также и в области $T_N < 4$ ГэВ, несмотря на то, что ее точность здесь ухудшается. Инклюзивные сечения рождения нейтральных каонов можно получить из сечений процессов $p + A \rightarrow K^\pm + X$ и $n + A \rightarrow K^\pm + X$, используя соображения изотопической симметрии.

Для реакций $N + A \rightarrow \pi^\pm + X$ при $T_N \leq 4$ ГэВ применялась мо-

дель инклюзивных спектров из /103/ , исправленная с учетом ускорительных данных по средней множественности $\pi^\pm$ в $N A$ -взаимодействиях (см. подробнее /71/ , где приведена удобная параметризация dN_{mn}/dE для низких энергий).

Когда налетающая частица есть ядро Y с зарядом $Z_Y \geq 2$, то, в соответствии с принятой в § 1.4 моделью взаимодействия, полагаем

$$dN_{mY}/dE = (N_Y/2)(dN_{mp}/dE + dN_{mn}/dE)$$

Для дальнейшего необходимо знать распределение плотности или температуры в нижней атмосфере. Средняя температура воздуха зависит, вообще говоря, от времени года и региона, но соответствующие изменения относительно невелики. /136/ и слабо влияют на спектры вторичных КЛ. Исходя из этого, примем, следуя /136/ , простую модель, в которой температура T зависит от остаточного давления h_0 по закону

$$T(h_0) = T_s [1 + \alpha \theta (h_0 - h_t)(h_0/h_t - 1)] , \quad (3.5)$$

где T_s - средняя температура стратосферы, h_t - давление над тропопаузой и α - параметр, характеризующий температурный градиент в тропосфере. В расчетах полагаем

$$T_s = 220 \text{ К}, \quad h_t = 200 \text{ г.см}^{-2}, \quad \alpha = 0,073. \quad (3.6)$$

Приближенную зависимость плотности ρ от h и θ , как и в случае изотермической атмосферы можно записать в виде

$$\rho(h, \theta) = \rho(h \cos \theta^*, 0) = g h \cos \theta^* / R_0 T(h \cos \theta^*). \quad (3.7)$$

Здесь, по определению, $\cos \theta^* = h_0/h$. В пределе плоской атмосферы (реально, при $\theta \leq 70^\circ$) "эффективный угол" θ^* совпадает с зенитным углом θ . Для сферической изотермической атмо-

сферы не трудно получить приближенную формулу

$$\sec \vartheta^* = \sqrt{\frac{\pi(R_E + H)}{2H_0}} \frac{\operatorname{erfc}(\alpha)}{\exp(\alpha^2)}, \quad (3.8)$$

$$\alpha^2 = \frac{R_E \cos^2 \vartheta + 2H}{2H_0} (1 + O(H/R_E)), \quad H_0 = \frac{R_0 T_s}{g} \approx 6,44 \text{ км},$$

где R_E — радиус Земли, g — ускорение свободного падения, R_0 — удельная газовая постоянная. Если не интересоваться поведением спектров и интенсивностей мезонов на небольших высотах при $\vartheta \sim 90^\circ$, то формулу (3.8) можно использовать и для неизотермического случая. Для упрощения расчетов при больших зенитных углах воспользуемся приближением, обоснованным в работе /80/, заменив в (3.8) переменную H на параметр H^* , зависящий от ϑ и имеющий смысл эффективной высоты генерации лептонов. В этом приближении ϑ^* зависит только от зенитного угла, так что, учитывая (3.5–3.7) нетрудно представить спектр мезонов (3.1) в следующей форме :

$$M(E, h, \vartheta) = M_I(E, h, \vartheta) - \theta(h \cos \vartheta^* - h_t) \Delta M(E, h, \vartheta) \quad (3.9)$$

где

$$M_I(E, h, \vartheta) = h \int_0^1 dx x^z e^{-(1-x)h/\lambda_M} G_M(E, hx) - \quad (3.10)$$

— спектр M в изотермической (с температурой T_s) атмосфере, а

$$\begin{aligned} \Delta M(E, h, \vartheta) = & h \int_0^1 dx x^z e^{-(1-x)h/\lambda_M} [1 - e^{-\alpha z(y - xy + \ln x)}] G_M(E, hx) - \\ & - h_t \int_0^1 dx x^z e^{(x-y)h_t/\lambda_M - \alpha z(y-1)} [1 - e^{-\alpha z(1-x + \ln x)}] \cdot \\ & \cdot G_M(E, h_t x) - \end{aligned} \quad (3.11)$$

- поправка на неизотермичность . В (3.10) и (3.11) обозначено:

$$y = h \cos \theta^* / h_t, \quad z = p_M^c \sec \theta^* / p, \quad p_M^c = m_M H_0 / \tau_M. \quad (3.12)$$

При импульсах $p \ll p_M^c \sec \theta^*$ (т.е. при $z \gg 1$) можно пренебречь "временем задержки" до распада M , положив в слабо меняющихся с x подынтегральных факторах в (3.10) и (3.11) $k=1$. В результате получим :

$$M_1(E, h, \theta) \simeq (z+1)^{-1} h G_M(E, h), \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} \Delta M(E, h, \theta) \simeq (z+1)^{-1} [h G_M(E, h) \varphi(y, z) + \\ + h_t G_M(E, h_t) \varphi(1, z) y^{-(1-\alpha)z} e^{(h_t/\lambda_M - \alpha z)(y-1)}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

где

$$\varphi(y, z) = 1 - \frac{1}{1-\alpha} \left[1 - \frac{\alpha}{(1-\alpha)z} \right] \Phi_{as}(1, (1-\alpha)z+2; -\alpha y z)$$

а $\Phi_{as}(\dots)$ - асимптотическое значение вырожденной гипергеометрической функции. Воспользовавшись разложением (см. /146/, стр. 268)

$$\Phi(1, t; \xi t) \sim \frac{1}{1-\xi} \left[1 - \frac{1}{t} \left(\frac{\xi}{1-\xi} \right)^2 + O(t^{-2}) \right],$$

справедливым при $|\xi| < 1-\delta$, $\delta > 0$ и $t \rightarrow \infty$, находим :

$$\varphi(y, z) = \alpha \left\{ \frac{y-1}{1+\alpha(y-1)} - \frac{\alpha y^2 + (1-\alpha)(2y-1)}{z [1+\alpha(y-1)]^3} \right\}, \quad \varphi(1, z) = -\frac{\alpha}{z},$$

при условии $\alpha y z < (1+\delta)[(1-\alpha)z+2]$, $\delta > 0$, $z \gg 1$, т.е., согласно (3.6), при $h_0 \leq 2540 \text{ г} \cdot \text{см}^{-2}$. Пренебрегая членами $1/z$, получим

$$M(E, h, \theta) \simeq [T_s / T(h \cos \theta^*)] M_T(E, h, \theta),$$

или

$$M(E, h, \theta) \simeq (\tau_m p / m_m) \rho(h, \theta) G_m(E, h; R_c), \quad (3.15)$$

что совпадает с точной (независимо от модели атмосферы) асимптотикой (3.1) при $z \rightarrow \infty$. Для $M=K^\pm$ и K_s^0 выражение (3.15) можно использовать практически на всем интересующем нас энергетическом интервале. Для пионов с импульсами $p > (15-20) \sec \theta^* \text{ ГэВ/с}$ нужно пользоваться точными формулами (3.9-3.11). При импульсах $p > p_m^c \sec \theta^*$ становится необходимым учитывать регенерацию мезонов. Это обстоятельство ограничивает область применимости полученных здесь формул. Аналитическая модель адронного каскада при высоких энергиях, в которой учтена регенерация пионов (включая процессы неупругой перезарядки) изложена в работе /104/.

Из (3.15) следует, что число распавшихся на участке от h до $h + dh$ мезонов низких энергий равно $G_m(E, h; R_c) dh$, так что угловая зависимость продуктов распадов полностью определяется геомагнитным полем (зависимостью пороговой жесткости R_c от направления). В частности, на высоких широтах $\pi_{\mu 2}$ - и $K_{\mu 2}$ -распады дадут изотропный вклад в потоки НКМ низких энергий.

§ 3.2. Мюоны в атмосфере и на уровне моря.

Кинетическое уравнение, описывающее в одномерном приближении перенос мюонов в атмосфере, имеет вид (как и выше, аргумент R_c для простоты опускаем)

$$\left\{ \partial/\partial h + m_\mu / [p \tau_\mu \rho(h, \vartheta)] \right\} \mu(E, h, \vartheta) =$$

$$= \partial [\beta_\mu(E) \mu(E, h, \vartheta)] / \partial E + G_\mu(E, h, \vartheta), \quad (3.16)$$

где $\mu(E, h, \vartheta)$ - энергетический спектр мюонов на глубине h , распространяющихся под зенитным углом ϑ ; $\beta_\mu(E) = -dE/dh$ - непрерывные потери энергии; G_μ - функция генерации μ в $\pi_{\mu 2}$ - и $K_{\mu 2}$ -распадах,

$$G_\mu(E, h, \vartheta) = \sum_M \frac{B_M \tau_M}{\tau_M \rho(h, \vartheta)} \left(1 - \frac{m_\mu^2}{m_M^2} \right)^{-1} \int_{E_M^-}^{E_M^+} \frac{dE_M}{p_M^2} M(E_M, h, \vartheta), \quad (3.17)$$

B_M - относительная вероятность распада $M \rightarrow \mu \nu$. Пределы интегрирования в (3.17) равны

$$E_M^\pm = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{m_M^2}{m_\mu^2} + 1 \right) E \pm \left(\frac{m_M^2}{m_\mu^2} - 1 \right) p \right]. \quad (3.18)$$

Остальные обозначения аналогичны использованным в § 3.1.

Решение уравнения (3.16) дается выражением :

$$\mu(E, h, \vartheta) = \int_0^h dt W_\mu(E, t, h, \vartheta) G_\mu(E_{h-t}, t, \vartheta), \quad (3.19)$$

в котором

$$W_\mu(E, t, h, \vartheta) = \frac{\beta_\mu(E_{h-t})}{\beta_\mu(E)} \exp \left\{ \int_0^t \frac{m_\mu du}{p_{h-u} \tau_\mu \rho(u, \vartheta)} \right\} =$$

$$= \frac{\beta_\mu(E_{h-t})}{\beta_\mu(E)} \exp \left\{ \int_E^{E_{h-t}} \frac{m_\mu d\omega}{\beta_\mu(\omega) \sqrt{\omega^2 - m_\mu^2} \tau_\mu \rho(h - R_\mu(\omega, E), \vartheta)} \right\} - \quad (3.20)$$

- вероятность выживания мюона при прохождении слоя воздуха от t до h в направлении θ ; E_h - корень уравнения $R_\mu(E_h, E) = h$, а

$$R_\mu(\omega, E) = \int_E^\omega \frac{dE'}{\beta_\mu(E')} -$$

- пробег мюона с начальной энергией E и конечной ω ; $p_h = \sqrt{E_h^2 - m_\mu^2}$.

Далее в этом разделе мы ограничимся рассмотрением мюонов с импульсами в интервале $(0, 1 \div 100) \text{ ГэВ/с}$ на глубинах $h \leq 10^3 \text{ г/см}^2$. При $E_h \leq 100 \text{ ГэВ}$ доля радиационных и фотоядерных потерь энергии в общем коэффициенте потерь энергии мюоном не превышает $\sim 10\%$ /147/ и скорость потерь слабо зависит от энергии. Для упрощения формул будем считать, что $\beta_\mu = -(dE/dh)_{\text{ion}} \equiv \beta = \text{const}$. В этом приближении, используя модель атмосферы (3.5 - 3.7) и считая θ^* не зависящим от h ($h \rightarrow h^*$), получим явное выражение для вероятности выживания мюона в виде

$$W_\mu(E, t, h, \theta) = [\tilde{\psi}(E, t_m, h)]^{-\alpha \theta (h_0 - h_t) p_h^c / \beta h_t} \cdot [(t/h) \psi(E, t, h)]^5 [(t_m/h) \psi(E, t, h)]^{-\alpha \theta (h_0 - h_t) \approx} \quad (3.21)$$

В (3.21) введены следующие обозначения:

$$\psi(E, t, h) = \frac{E E_h + p p_h - m_\mu^2}{E_{h-t} E_h + p_{h-t} p_h - m_\mu^2} = \frac{1 - (m_\mu^2 / \omega^2) \beta (h-t) / E}{1 + \beta (h-t) / E}, \quad (3.22)$$

$$\tilde{\psi}(E, h, t) = \frac{E + p}{E_{h-t} + p_{h-t}} = \frac{1 - (m_\mu^2 / \tilde{\omega}^2) \beta (h-t) / E}{1 + \beta (h-t) / E}, \quad (3.23)$$

$$[\omega(E, t, h)]^2 = \frac{(E p_{h-t} + p E_{h-t})(E_h E_{h-t} + p_h p_{h-t} - m_\mu^2)}{E(p_h + p_{h-t}) + E_{h-t}(p_h + p)}, \quad (3.24)$$

$$[\tilde{\omega}(E, t, h)]^2 = \frac{(E_{h-t} + p_{h-t})(E p_{h-t} + p E_{h-t})}{E + E_{h-t}}, \quad (3.25)$$

$$\xi = p_\mu^c \sec \vartheta^* / p_h, \quad p_\mu^c = m_\mu H_0 / \tau_\mu \approx 1,03 \text{ ГэВ/с},$$

$$E_h = E + \beta h, \quad p_h = \sqrt{(E + \beta h)^2 - m_\mu^2},$$

$$h_0 = h \cos \vartheta^*, \quad t_m = \max(t, h_t \sec \vartheta^*).$$

При выполнении условия $p \gg \beta h$ выражение (3.21) для W_μ значительно упрощается. Действительно, при этом $\omega^2 \approx p^2$, $\tilde{\omega}^2 \approx p(p+E)$, так что

$$\psi \approx 1 - (E/p)\beta(h-t)/p, \quad \tilde{\psi} \approx 1 - \beta(h-t)/p,$$

откуда получаем вместо (3.21)

$$W_\mu(E, t, h, \vartheta) \approx \left[(t/h)(t_m/h)^{-\alpha \theta(h_0 - h_t)} \right] p_\mu^c \sec \vartheta^* / p \cdot \exp[\alpha \theta(h_0 - h_t)(p_\mu^c/p)(h - t_m)/h_t].$$

Анализ решения показывает, что низкоэнергетический участок мюонного спектра существенно определяется величиной β при больших значениях h . Поэтому использованные приближения ($\beta_\mu = \text{const}$, $H \rightarrow H^*$) не позволяют корректно рассчитать интенсивности мюонов на уровне моря при зенитных углах $\vartheta \geq 70^\circ$. Кроме того, для больших глубин становятся важными кулоновское рассеяние и влияние магнитного поля Земли на длиннопробежные μ (см., например, /148, 149/). В то же время, для расчета потоков нейтрино от μ_{e3} -распадов при больших зенитных углах, как

энергетические потери, так и эффекты рассеяния мюонов можно вообще не принимать во внимание, поскольку подавляющая доля $\mu_{\text{ез}}$ -распадов, дающих вклад в горизонтальные потоки нейтрино КЛ низких энергий, происходит в верхних, разреженных слоях атмосферы. Учет влияния искривления траекторий мюонов в геомагнитном поле на угловые распределения нейтрино требует, вообще говоря, выхода за рамки одномерного приближения (см./138/)

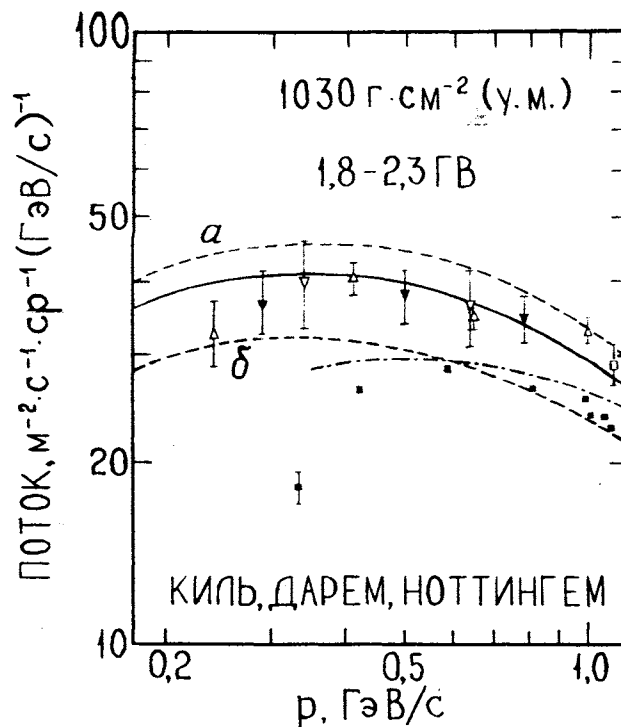


Рис.3.1. Вертикальный импульсный спектр мюонов на у.м. (средние широты). Экспериментальные точки: ∇ , ∇ , $\square$ - /150/; Δ - /151/; $\blacksquare$ - /152/. Кривые: штрих-пунктирная - наилучший фит экспериментальных данных /153, 154/ для $p \geq 0,35$ ГэВ/с, штриховые - расчет при $\beta = 1,82$ МэВ·см²/г (а) и $\beta = 2,35$ МэВ·см²/г (б), сплошная - расчет при $\beta = 2$ МэВ·см²/г.

Обсудим результаты расчетов интенсивностей мюонов КЛ в атмосфере. На рис.3.1 - 3.3 дано сравнение расчетных вертикальных спектров мюонов на у.м. с экспериментальными данными из работ /150-157/ для средних и экваториальных широт.

Чтобы продемонстрировать чувствительность результата к вели-

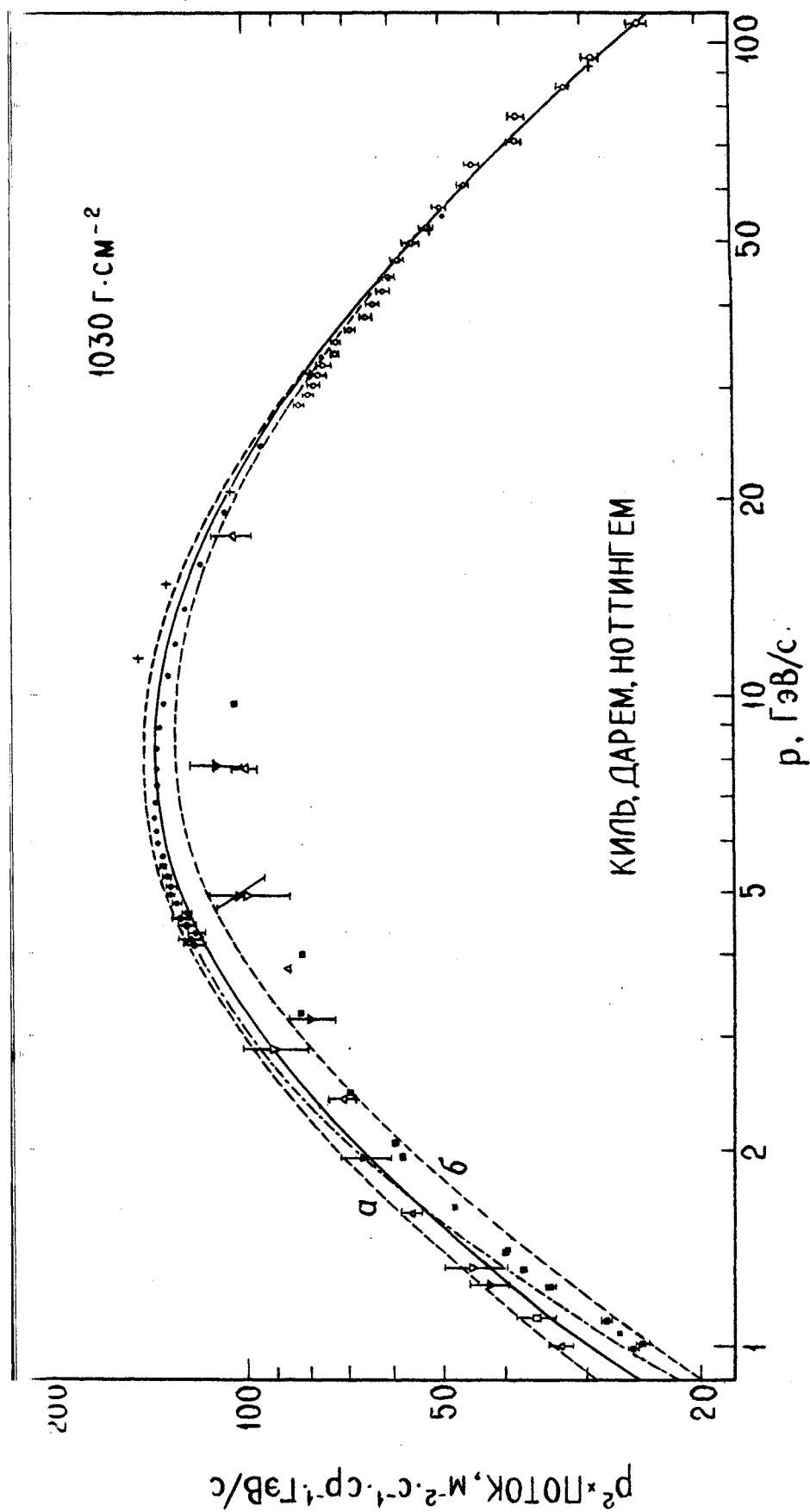


Рис. 3.2. Вертикальный импульсный спектр мюонов на у.м. при $p=(1-100) \text{ ГэВ/с}$ ($R_c < 2,3 \text{ ГВ}$).
Экспериментальные данные: + - /150/; · · - /154/. Обозначения остальных точек и кривых те же, что и на рис. 3.1

чине энергетических потерь, приведены спектры, рассчитанные с тремя значениями β (указанными в подписи к рис.3.1). Видно, что расчетные импульсные спектры на у.м. хорошо согласуются с большинством экспериментальных данных при стандартном значении $\beta = 2 \text{ МэВ} \cdot \text{см}^2/\text{г}$, которое и используется во всех последующих расчетах.

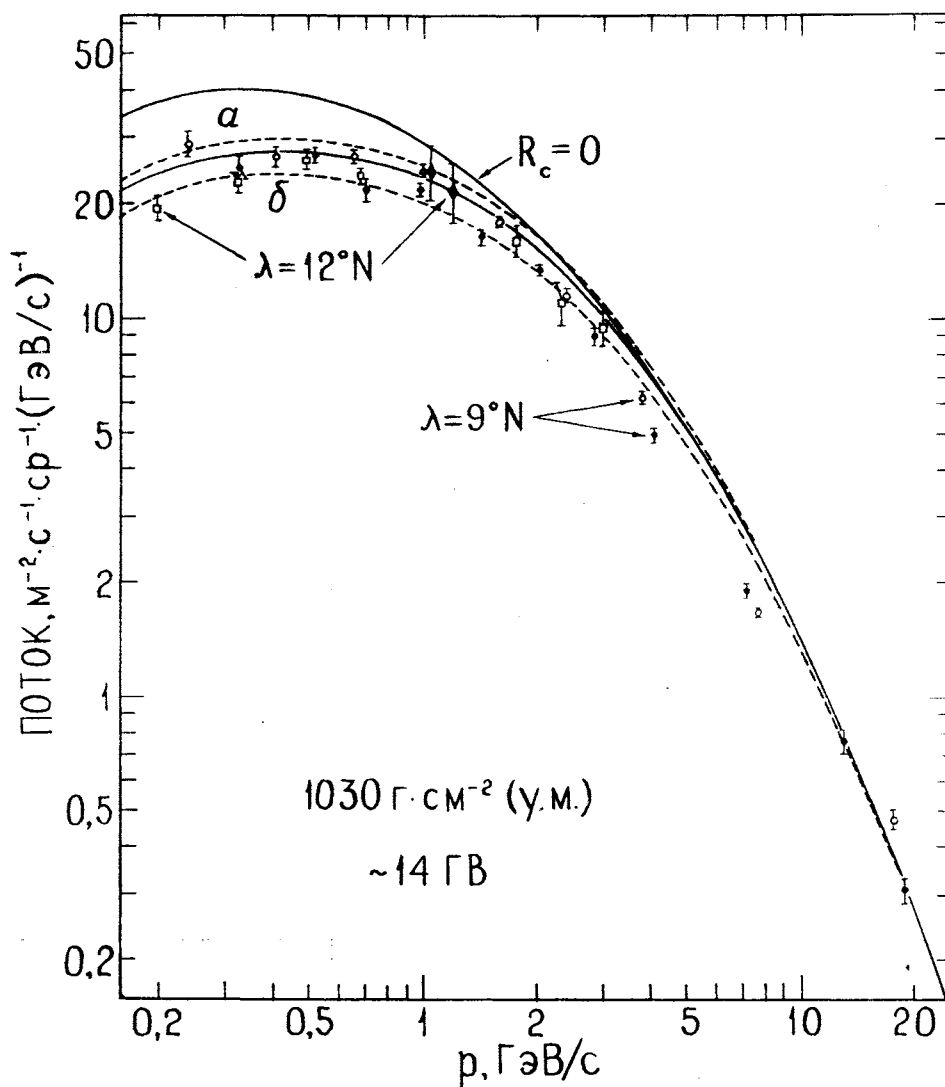


Рис.3.3. Вертикальный импульсный спектр мюонов на у.м. вблизи экватора (геомагнитные широты 9°N и 12°N). Экспериментальные точки: $\circ$ - /151 /, $\square$ - /155 /, $\diamond$ - /156 /, $\bullet$ - /157 /. Верхняя кривая - расчетный спектр без учета геомагнитного эффекта. Остальные кривые - расчет при $R_c = 14,1 \text{ ГВ}$ (обозначения - как на рис. 3.1).

Кривые на рис.3.1 - 3.3, рассчитанные с $\beta = 1,82 \text{ МэВ/}(\text{г/см}^2)$ (минимум энергетических потерь мюона в воздухе) дают верхнюю границу спектров $\mu^+ + \mu^-$ на у.м. для соответствующих геомагнитных широт. Из приведенных результатов можно заключить, что учет зависимости β_μ от энергии способен изменить спектр $\mu^+ + \mu^-$ не более чем на (8-10)% даже в области самых малых импульсов, что не превышает неопределенности современных экспериментальных данных. Поскольку ошибка, обусловленная приближением постоянных потерь, уменьшается с увеличением высоты над у.м., то она практически не повлияет на спектры нейтрино и антинейтрино от $\mu_{\text{ез}}$ -распадов.

С точностью лучшей (1-2)% вертикальный импульсный спектр мюонов на у.м. $\mu(p)$, рассчитанный с $\beta = 2 \text{ МэВ/}(\text{г/см}^2)$ при $R_c = 0$, можно аппроксимировать выражением (p - импульс в единицах ГэВ/с).

$$\mu(p) = 29,5 p^{-0,384 + a \lg p + b \lg^2 p} \quad (\text{м}^2 \cdot \text{с} \cdot \text{ср} \cdot \text{ГэВ/с})^{-1}, \quad (3.26)$$

$$\begin{cases} a = 0,589 & , & b = 1,620 & \text{при } p \leq 1 \text{ ГэВ/с,} \\ a = -1,083 & , & b = 0,132 & \text{при } p \geq 1 \text{ ГэВ/с.} \end{cases}$$

Формула (3.26) не противоречит имеющимся экспериментальным данным при высоких энергиях вплоть до $p \approx 1,5 \text{ ТэВ}$ (см. /150, 154, 158, 159/). При низких энергиях она хорошо согласуется с Монте-Карловским расчетом /95/.

Рис.3.4 иллюстрирует геомагнитный эффект для вертикальных потоков мюонов на у.м. при нескольких значениях кинетической энергии. Из анализа имеющихся данных по широтной зависимости мюонной компоненты /151, 155 - 157, 160/ трудно сделать определенный вывод о точности полученного предсказания для ве-

личины $I_\mu(E, R_c)/I_\mu(E, 0)$ на у.м., но качественное согласие с экспериментом заведомо есть (см.рис. 3.3).

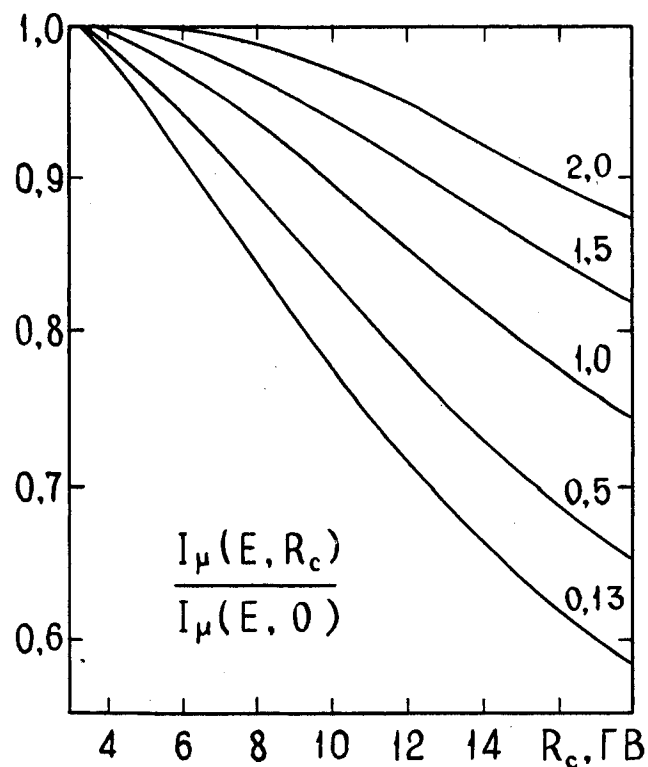


Рис.3.4. Геомагнитный эффект для мюонов на у.м. ($\theta=0^\circ$). Кривые — отношения дифференциального спектра при заданном значении эффективной жесткости геомагнитного обрезания к спектру при $R_c=0$. У кривых указана кинетическая энергия мюонов (в ТэВ).

При небольших зенитных углах наш расчет для уровня моря согласуется с данными работы /161/ ($\theta = 30^\circ, 45^\circ$ и 60°).

Спектр μ при $\theta=68^\circ$ показан на рис. 3.5 (широта $43^\circ N$, $R_c = 1,5$ ГВ). Так как при $h > (2-2,5) \cdot 10^3$ г·см⁻² приближение постоянных потерь работает плохо, расчетный спектр оказывается несколько завышенным в области импульсов $\sim (3 \div 30)$ ГэВ/с.

Вертикальные импульсные спектры мюонов на высотах 3,2 км (Арагац) и 9 км (широта Москвы) представлены на рис.3.6 и 3.7 соответственно. Значения эффективных жесткостей обрезания

указаны на рисунках. Экспериментальные точки /93/ для спектра μ^+ на высоте 9 км относятся к области импульсов ниже порога регистрации протонов (730 МэВ/с). Спектр положительно заряженных частиц, содержащий как μ^+ , так и протоны, показан на рис.1.7. Можно видеть, что согласие расчетов с данными /89, 93, 163/ в целом хорошее. Однако, расчетная величина положительного избытка мюонов для $H=3,2$ км не согласуется с результатом /163/ при импульсах $p \lesssim 1$ ГэВ/с (например, при $p \approx 0,24$ ГэВ/с

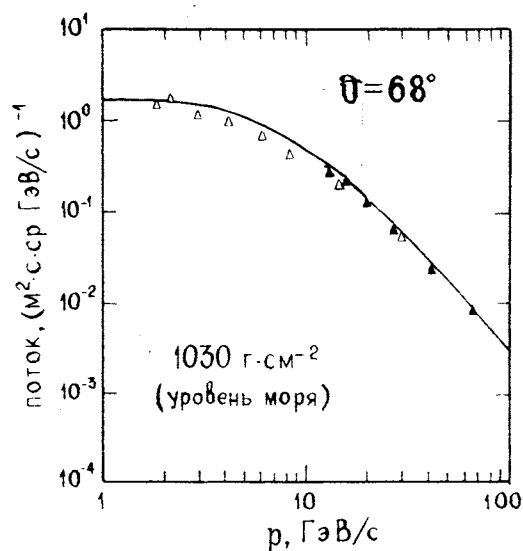


Рис.3.5. Импульсный спектр мюонов на у.м. при зенитном угле 68° . Экспериментальные точки — из работы /162/. Кривая — расчет.

расчетное значение μ^+/μ^- равно 1,16, тогда как эксперимент /163/ дает $\mu^+/\mu^- = 1$ с ошибкой $\sim 4\%$). Отметим, что измерения μ^+/μ^- /163/ противоречат результатам, приведенным в работе /164/ (Араган, $H=3,25$) : согласно /164/ (см. рис.7.9 на стр. 370) зарядовое отношение на интервале импульсов (0,2–2) ГэВ/с меняется в пределах (1,31 – 1,58).

Наибольший интерес представляет проверка расчета интенсивностей мюонной компоненты КЛ в стратосфере. На рис.3.8 и

3.9 представлены расчетные и экспериментальные данные на высотах от 11 до 30 км над у.м. при зенитных углах 0° (рис.3.8 (а-г) и 3.9(а)) и 47° (рис.3.9(б-г)). Экспериментальные данные /165, 166/ получены на нескольких геомагнитных широтах (диапазоны пороговых жесткостей и высот указаны на рисунках) в период минимума солнечной активности. На рис.3.9(а) приведены

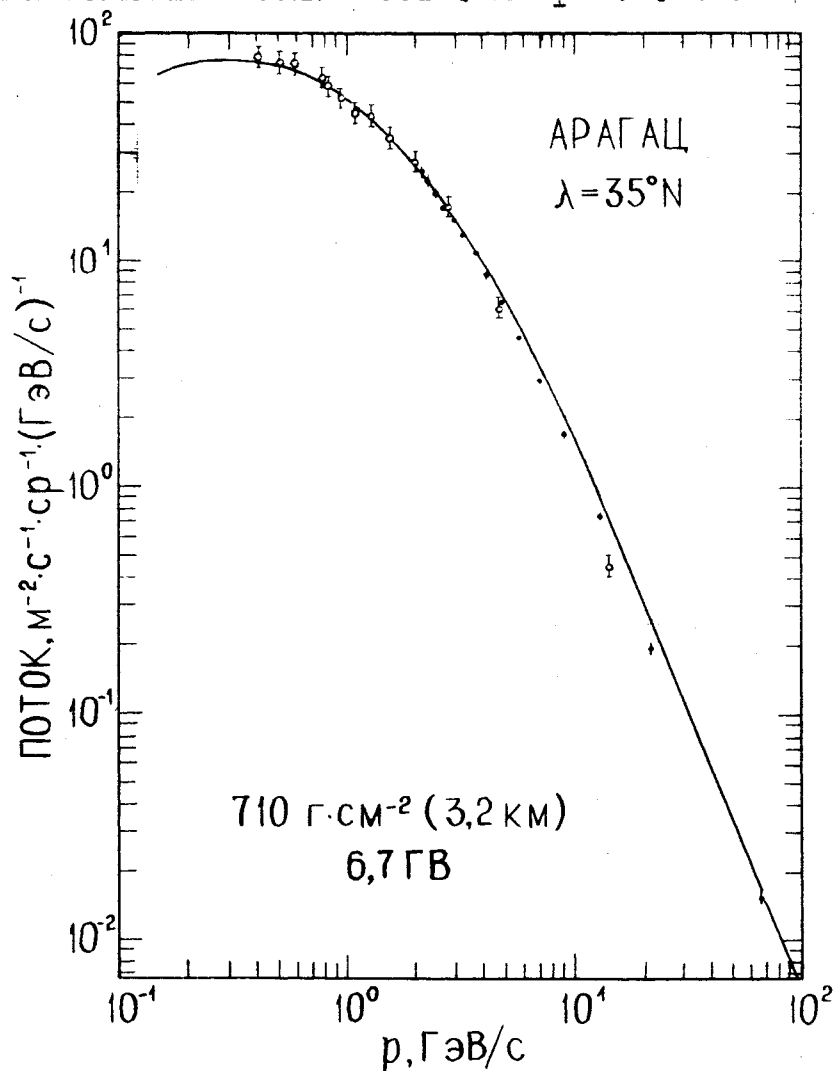


Рис.3.6. Вертикальный импульсный спектр мюонов на высоте 3,2 км над у.м. (геомагнитная широта $\lambda = 35^\circ N$). Экспериментальные точки: • - /89/, ° - /163/. Кривая - расчет.

также результаты расчетов, выполненных в работах /142/ ($R_c = 3,2$ ГВ, $E_{\text{кин}} \geq 1$ ГэВ) и /167/ ($R_c \approx 8$ ГВ, $E_{\text{кин}} \geq 400$ МэВ) для глубины остаточной атмосферы $h = 10 \text{ г/см}^2$ (сравнение расчетов /142,

167/с экспериментом для других глубин см. в/166/). В скобках на кривых приведены значения h_0 (в г·см⁻²) и R_c^0 (в ГВ), при которых выполнены расчеты. Как видно из рисунков, данные измерений на высотах (15-18) км сильно флуктуируют, так что

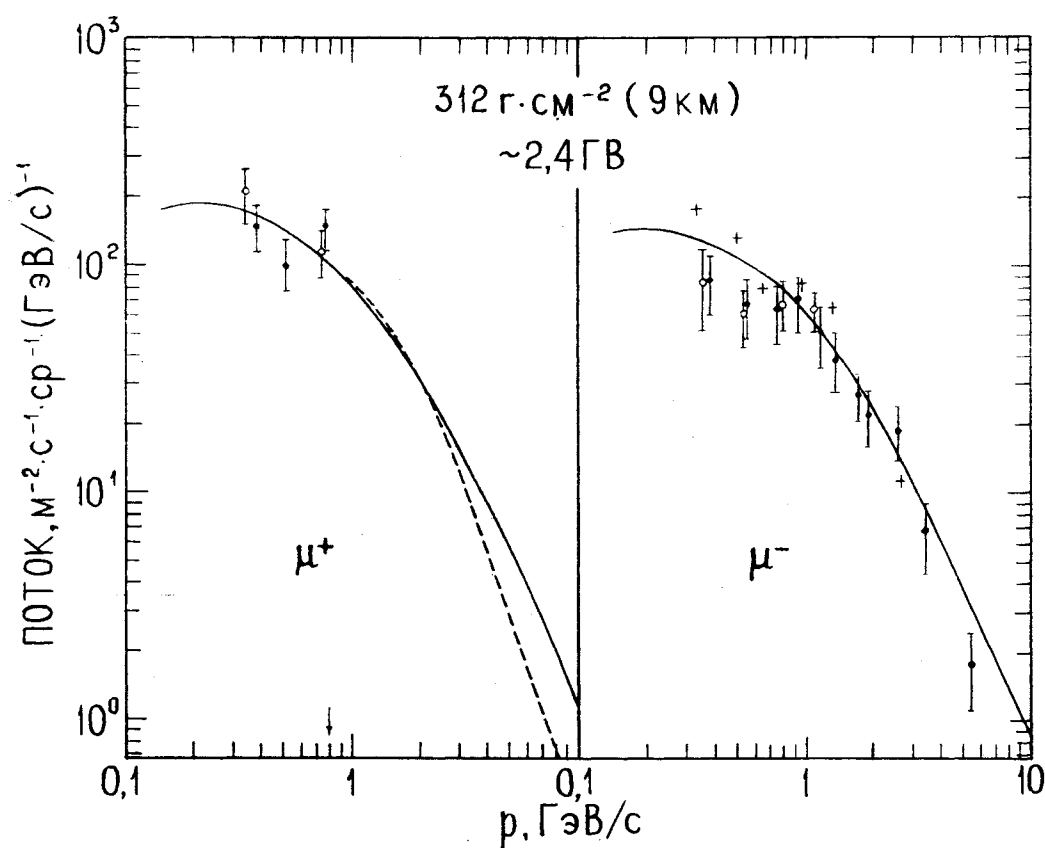


Рис.3.7. Вертикальные импульсные спектры μ^+ и μ^- на высоте 9 км над у.м. (широта 56° N). Экспериментальные данные взяты из работы /93/. Штриховая кривая - оценка спектра μ^+ выше порога регистрации протонов, полученная в/93/ из спектра всех зарегистрированных частиц с положительным зарядом, в предположении $\mu^+/\mu^- = 1,25$. Сплошные кривые - расчет (ср. с рис.1.7).

для этих высот можно говорить о сравнении расчета с экспериментом лишь на качественном уровне. Поэтому, в частности, при расчете наклонных потоков мюонов вместо усреднения по азимуту использовались средние по φ жесткости геомагнитного обрезания

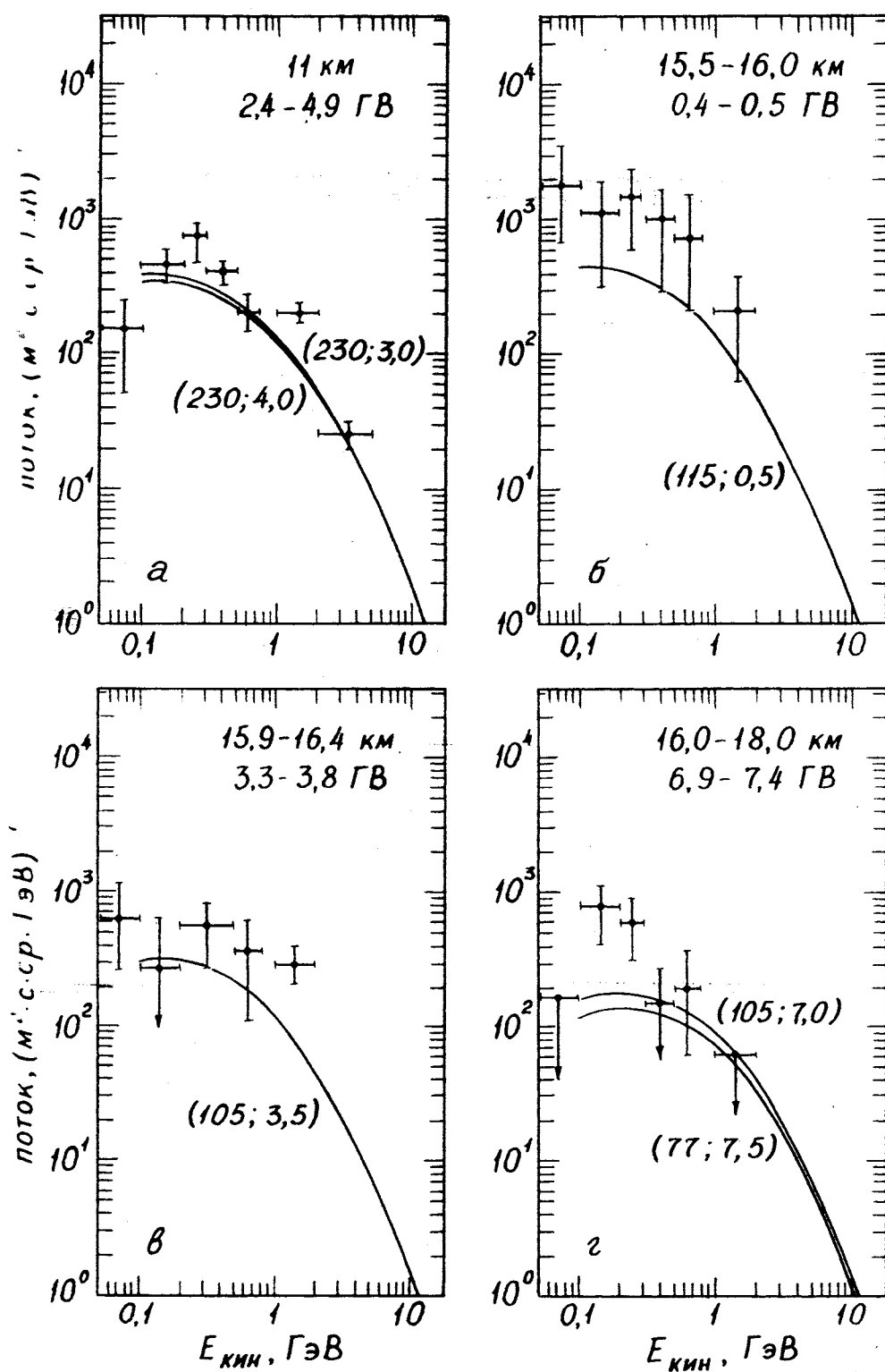


Рис. 3.8. Вертикальные энергетические спектры мюонов в стратосфере. Экспериментальные данные из работы /166/. Обозначения см. в тексте

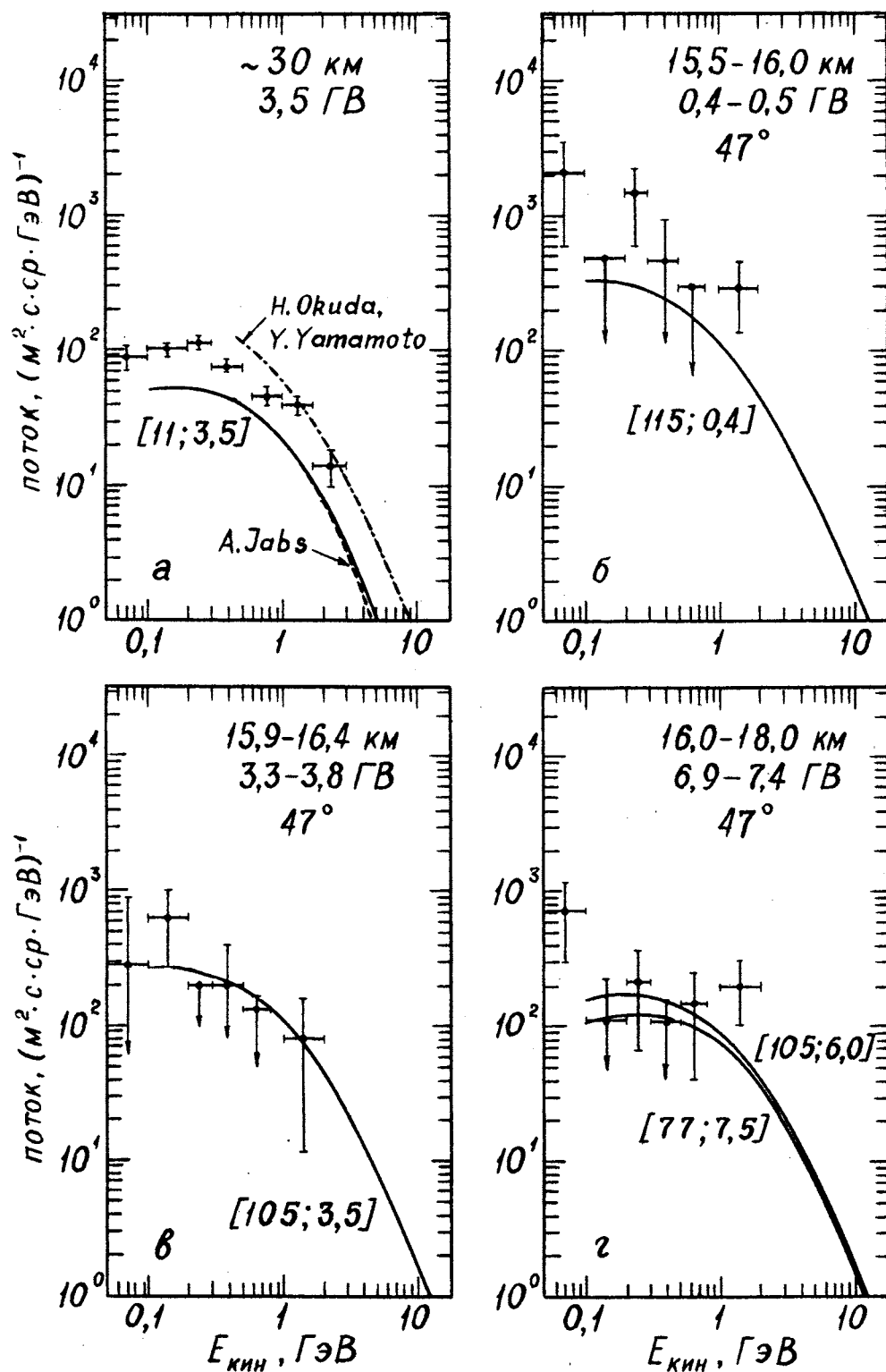


Рис. 3.9. Энергетические спектры мюонов в стратосфере при $\bar{U} = 0^\circ$ и 47° . Экспериментальные данные из работы /166/. Штриховая и штрих-пунктирная кривые - расчеты из работ /142/ и /167/. Остальные обозначения - как на рис. 3.8

$\langle R_c \rangle$ для данного зенитного угла¹⁰⁾.

В высокоширотной области (рис.3.8(б) и 3.9(б)) расчетные спектры плохо согласуются с данными /166/. Наша точка зрения состоит в том, что экспериментальный спектр /166/ при $R_c^0 = (0,4-0,5) \text{ ГВ}$ в среднем несколько завышен (возможно, из-за слишком малой экспозиции магнитного спектрометра). Действительно, из имеющихся данных по высотному ходу вертикальной интенсивности мюонов (см., например, /136/, стр.151) следует, что отношение интегральных энергетических спектров $n = N_\mu(h) / N_\mu(10^3 \text{ г} \cdot \text{см}^{-2})$ при $h \approx 100 \text{ г} \cdot \text{см}^{-2}$ не превышает значения $n = 6-6,5$, в то время как из сравнения результата /166/ для высот (15,5-16) км (рис.3.8(б)) с данными измерений на у.м. (рис.3.1) получаем $5 \leq n \leq 15$ и $\bar{n} \approx 10$ ($E_{\text{кин}} \geq 300 \text{ МэВ}$).

Для высоты $H \approx 30$ км наш спектр, как и спектр, рассчитанный в /142/, почти вдвое ниже экспериментального (рис.3.9(а)). Такое расхождение объяснить затруднительно (вряд ли, например, оно является следствием грубости модели взаимодействия ядро-ядро....)¹¹⁾. С другой стороны, измеренная в /165, 166/ величина зарядового отношения для $H=30$ км ($\langle \mu^+/\mu^- \rangle = 1,26 \pm 0,12$ на интервале энергий от 50 МэВ до 3 ГэВ) хорошо согласуется с нашим результатом: $\langle \mu^+/\mu^- \rangle = 1,30$ (усреднение по спектру в энергетическом интервале $(0,1 \div 3) \text{ ГэВ/с}$ при $h = 11 \text{ г} \cdot \text{см}^{-2}$ и $R_c = 3,5 \text{ ГВ}$).

¹⁰⁾ Как следует из формулы Штермера (2.44), в указанных на рис. 3.9 диапазонах вертикальных пороговых жесткостей R_c^0 , эффективная жесткость обрезания $R_c(\lambda, \psi; \theta, \varphi)$ при $\theta = 47^\circ$ слабо зависит от азимутального угла φ , так что с достаточной точностью можно считать $\langle R_c \rangle = R_c^0$.

¹¹⁾ Напомним, что спектр протонов, измеренный в том же эксперименте, расчету не противоречит (см. Гл.2).

Отметим также, что измерения высотной зависимости потока мюонов низких энергий в стратосфере на геомагнитных широтах 31°N и 51°N /168/ дают в целом более низкие (до 2-2,5 раз) значения интенсивностей $\mu^+ + \mu^-$ на высотах $H > 10$ км по сравнению с результатами работы /166/. Полученные в /166/ угловые распределения мюонов в пределах экспериментальных ошибок согласуются с нашим расчетом.

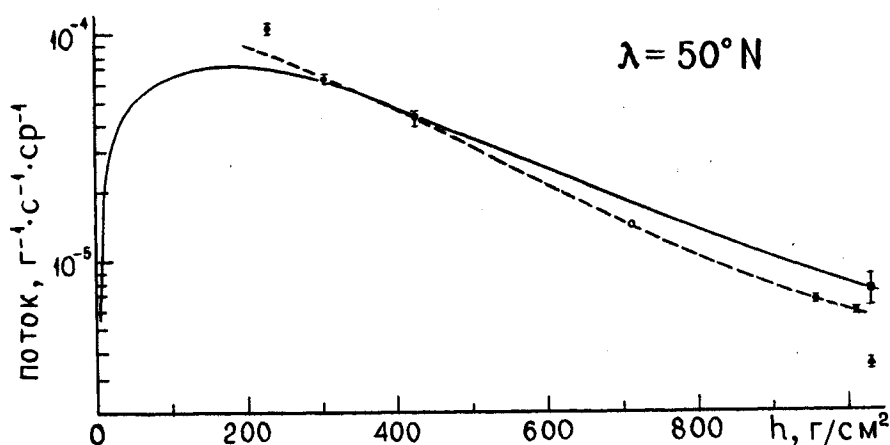


Рис.3.10. Дифференциальная по пробегу интенсивность вертикального потока мюонов с кинетическими энергиями от 224 до 255 МэВ как функция глубины атмосферы на геомагнитной широте 50°N . Экспериментальные данные: ■ - /151/ ($E_{\text{кин}} = 250$ МэВ), ▲ - /152/; экспериментальная точка Краушаара ° взята из /170/. Сплошная кривая - расчет данной работы, штриховая - расчет по эмпирической формуле Олберта /170/.

На рис. 3.10 показана h -зависимость распределения мюонов по пробегаем, усредненного по интервалу $E_{\text{кин}} = (224 \div 255)$ МэВ, на геомагнитной широте 50°N . Приведены экспериментальные данные Конверси /169/ и Краушаара (см. /109, 170/), относящиеся к этому интервалу энергий, а также данные измерений /151, 152/ (у.м.), пересчитанные к спектру по R_μ . Из рисунка видно, что расчетная h -зависимость оказывается более по-

логий, чем это следует из эксперимента /169/. Практически совпадающий с нашим результат получен в работе /74/ методом Монте-Карло¹²⁾. Наиболее существенным (с точки зрения генерации нейтрино) является ~ 40-процентное несовпадение расчета с экспериментом при $h=231 \text{ г}\cdot\text{см}^{-2}$. В качестве возможной причины такого расхождения в /74/ указан неучтенный в /169/ вклад π -мезонов. Однако, при данных энергиях отношение $(\pi^+ + \pi^-)/(\mu^+ + \mu^-)$ на высоте 11 км не превышает по величине 0,015. Более вероятным источником экспериментальных неопределенностей могут быть электроны, интенсивность которых по крайней мере в 20 раз превышает интенсивность мюонов при $p_{\mu,e} \sim 300 \text{ МэВ/с}$ и $H=11 \text{ км}$ (см. /166/). Расчет положительного избытка мюонов низких энергий не противоречит результатам /169/, но предсказываемая широтная зависимость на высоте 9 км оказывается в целом более сильной и очень близкой к полученной в /74/ (см. обсуждение в работе /172/).

Из представленного анализа можно заключить, что изложенная в работе модель хорошо согласуется с экспериментом в тропосфере и на уровне моря, но из имеющихся данных /165, 166, 168, 169/ нельзя получить надежную количественную оценку точности расчета мюонных спектров в стратосфере. Поскольку именно в стратосфере генерируется основная часть потока нейтрино $\bar{\nu}_\mu$, очень важно продолжить эксперименты по измерению спектральных и угловых характеристик мюонов на больших высотах для возможно более широкого диапазона жесткостей геомагнитного обрезания.

¹²⁾ Отметим, что трехмерный расчет по методу Монте-Карло /171/ дает примерно вдвое большую интенсивность $\mu^+ + \mu^-$ на глубинах $h \leq 700 \text{ г/см}^2$ (ср. также /167/).

§ 3.3. Нейтрино и антинейтрино на уровне моря.

Основными каналами генерации нейтрино (антинейтрино) космических лучей (НКЛ) с энергиями до нескольких ГэВ являются $\pi_{\mu 2}$ —, $K_{\mu 2}$ — и μ_{e3} — распады; при $E_\nu \gtrsim 10$ ГэВ становится важным вклад в потоки ν_e и $\bar{\nu}_e$ от K_{e3} — распадов (в основном, это распады K_L^0)¹³⁾. Так как нас будет интересовать низкоэнергетический участок спектра НКЛ, ограничимся в дальнейшем учетом лишь трех первых каналов. Кроме того, не будем принимать во внимание частичную поляризацию $\mu^\pm$, приводящую к небольшим поправкам в спектрах ν и $\bar{\nu}$ от μ_{e3} — распадов ($\sim 5\%$, согласно /44/). Главное приближение, ограничивающее интервал рассматриваемых энергий снизу, связано с игнорированием распределения нейтрино по углу вылета в актах двух- и трехчастичных распадов (приближение "прямо-вперед"). Точные формулы для трехчастичного расчета потоков НКЛ низких энергий и некоторые численные оценки приведены в Приложении 4. Из результатов трехмерных Монте-Карловских расчетов /64-66/ следует, что приближение "прямо-вперед" справедливо при $E_\nu > (100-200)$ МэВ по крайней мере для усредненных по направлениям интенсивностей НКЛ. Ниже мы вернемся к этому вопросу.

В рамках указанных приближений дифференциальный энергетический спектр НКЛ на глубине h в атмосфере, распространяющихся под зенитным углом ϑ , равен

¹³⁾ Согласно работе /54/, доля $(\nu_e + \bar{\nu}_e)$ от K_{e3} — распадов при $E_\nu = 10$ ГэВ и $\vartheta = 0^\circ$ составляет $\sim 12\%$, но по нашим оценкам она не превышает $\sim 10\%$. С увеличением зенитного угла вклад K_{e3} — распадов быстро уменьшается.

$$\nu(E, h, \theta) = \int_0^h G_\nu(E, t, \theta) dt \quad (\nu = \nu_e, \bar{\nu}_e, \nu_\mu, \bar{\nu}_\mu), \quad (3.27)$$

причем функции генерации ν имеют вид

$$\begin{aligned} G_{\nu_e, \bar{\nu}_e}(E, h, \theta) = \\ = \frac{m_\mu}{\tau_\mu \rho(h, \theta)} \int_{E_\mu^{\min}}^{\infty} \frac{dE_\mu}{p_\mu^2} f_e\left(\frac{2E}{E_\mu + p_\mu}\right) \mu^{(\pm)}(E_\mu, h, \theta), \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} G_{\nu_\mu, \bar{\nu}_\mu}(E, h, \theta) = \\ = \frac{m_\mu}{\tau_\mu \rho(h, \theta)} \int_{E_\mu^{\min}}^{\infty} \frac{dE_\mu}{p_\mu^2} f_\mu\left(\frac{2E}{E_\mu + p_\mu}\right) \mu^{(\mp)}(E_\mu, h, \theta) + \\ + \sum_M \frac{B_M m_M}{\tau_M \rho(h, \theta)} \int_{E_M^{\min}}^{\infty} \frac{dE_M}{p_M^2} \left(1 - \frac{m_\mu^2}{m_M^2}\right)^{-1} M^{(\pm)}(E_M, h, \theta). \end{aligned} \quad (3.29)$$

Здесь $f_e(x) = 2(1 - 3x^2 + 2x^3)$, $f_\mu(x) = (1/3)(5 - 9x^2 + 4x^3)$, при $E > m_\mu/2$ (см. /44/);

$$E_\mu^{\min} = E + \frac{m_\mu^2}{4E}, \quad E_M^{\min} = \frac{m_M^2 E}{m_M^2 - m_\mu^2} + \frac{m_M^2 - m_\mu^2}{4E}.$$

Для расчета функций генерации при больших зенитных углах необходимо рассчитать значения параметра H^* , как функции θ . В работе /80/ H^* определяется как уровень в атмосфере, выше и ниже которого генерируются равные потоки лептонов КЛ. В /80/ (см. также /50/) значения $H^*(\theta)$ были найдены для энергий $E_\nu \geq 1$ ГэВ. Результаты /50, 80/ можно аппроксими-

ровать в интервале зенитных углов $(70-90)^\circ$ следующей формулой:

$$H^* = 34 - 10,5 \cos \vartheta - 120 \cos^2 \vartheta + 250 \cos^3 \vartheta \quad (\text{км}) \quad (3.30)$$

(при $\vartheta \leq 70^\circ$ полагаем $\vartheta^* = \vartheta$). Как следует из численного анализа, формула (3.30) применима с точностью лучшей (20-30)% (при $R_c \leq 10$ ГВ) вплоть до $E_\gamma \sim 100$ МэВ. В области энергий (0,5-3) ГэВ горизонтальные спектры НКЛ оказываются практически не чувствительными к выбору значения H^* , но при $E_\gamma < 0,5$ ГэВ и $\cos \vartheta \leq 0,1$ зависимость спектров от H^* становится существенной. Отметим здесь, что в работах /68, 69/ было использовано слишком грубое приближение для эффективного угла ϑ^* , которое применимо для $\vartheta < 80^\circ$, но приводит к сильному завышению интенсивностей НКЛ с энергиями (0,1-0,3) ГэВ при зенитных углах $\vartheta = (85-90)^\circ$.

Обсудим результаты расчетов спектров и угловых распределений НКЛ на уровне моря для минимума солнечной активности, (далее используется обозначение: $J_\gamma(E, \vartheta) = \nu(E, h = 1030 \text{ г/см}^2, \vartheta)$)).

На рис. 3.11 показаны вклады перечисленных выше каналов генерации в потоки мюонных нейтрино и антинейтрино при $R_c = 0$ для зенитных углов 0° и 90° . Показаны также спектры ν_μ и $\bar{\nu}_\mu$, вычисленные без учета потерь энергии мюонами. Видно, что определяющими являются вклады $\pi_{\mu 2}$ - и μ_{e3} -распадов, которые близки по величине. С увеличением ϑ относительный вклад μ_{e3} -распадов возрастает, а для $\bar{\nu}_\mu$ становится главным. Учет потерь энергии мюонами незначительно изменяет форму вертикальных спектров ν_μ и $\bar{\nu}_\mu$ и практически не сказывается на спектрах при $\vartheta = 90^\circ$. Для электронных нейтрино и антинейтрино влияние энергетических потерь мюонов более существенно (до

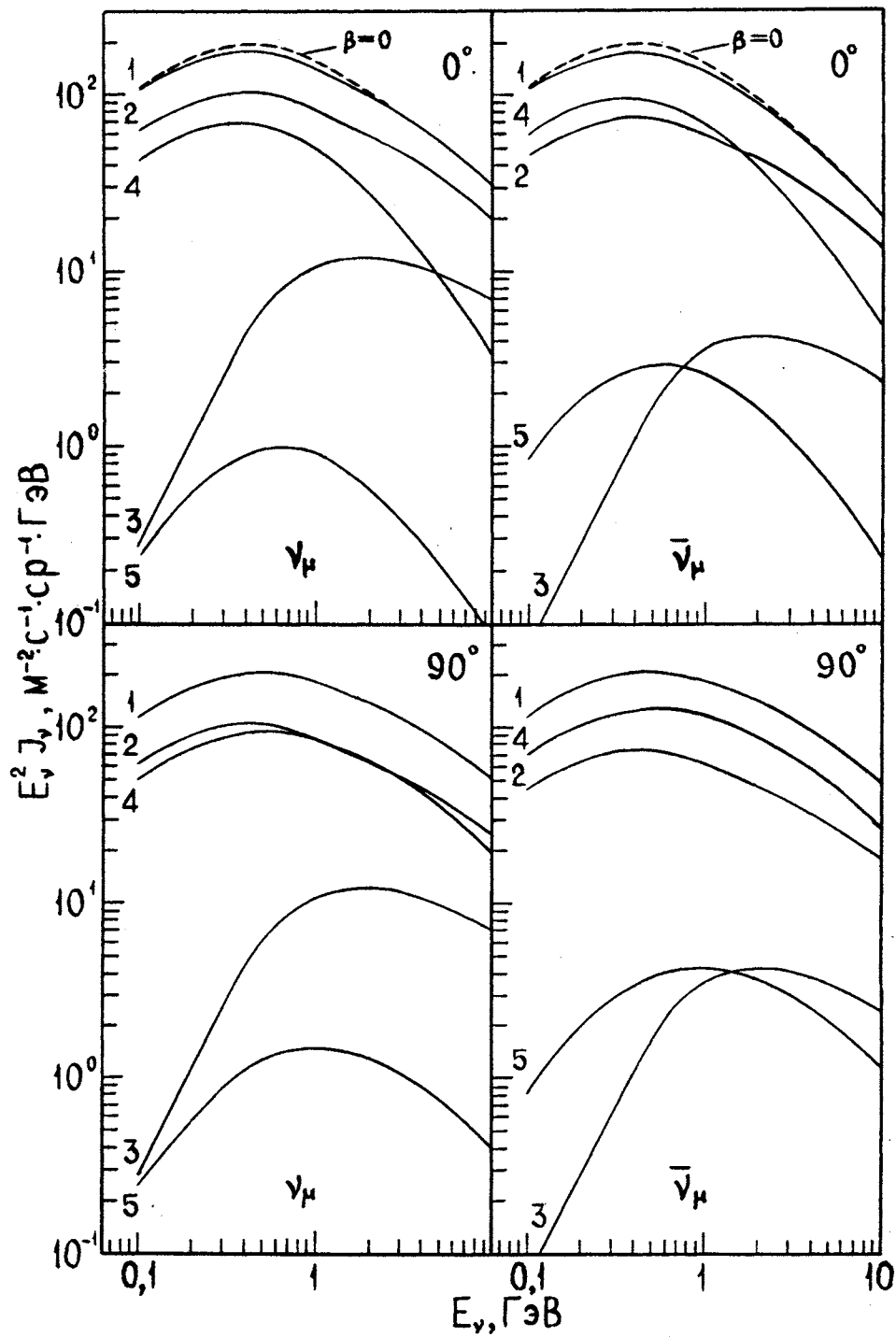


Рис. 3.II. Вклады различных распадов в вертикальные и горизонтальные энергетические спектры мюонных нейтрино и антинейтрино при $R_c=0$: 1 – сумма по всем каналам (штриховые кривые – без учета потерь энергии мюонами), 2 и 3 – вклады $\pi_{\mu 2}$ – и $K_{\mu 2}$ – распадов, 4 и 5 – вклады β – распада мюонов, образовавшихся в $\pi_{\mu 2}$ – и $K_{\mu 2}$ – распадах соответственно

22% при $E_\nu = 1$ ГэВ и $\theta = 0^\circ$), но зависимость β_μ от энергии мюона можно не принимать во внимание.

В таблице 3.2 представлены вертикальные и горизонтальные спектры НКЛ при энергиях от 100 МэВ до 15 ГэВ, вычисленные для минимума СА без учета геомагнитных эффектов. Поскольку при $R_c \leq 1$ ГВ интенсивности НКЛ с $E_\nu \geq 100$ МэВ не зависят от пороговой жесткости, данные таблицы относятся к геомагнитным широтам $|\lambda| > (55-60)^\circ$. Существенно (в частности для опытов по поиску $\nu \leftrightarrow \bar{\nu}$ - осцилляций), что интенсивности ν_μ и $\bar{\nu}_\mu$ низких энергий практически одинаковы при небольших зенитных углах. Этот факт обусловлен близостью вкладов от распадов $\pi^\pm$ и $\mu^\pm$, а также тем, что отношения π^+/π^- и μ^+/μ^- на глубинах эффективной генерации различаются незначительно (из-за малого вклада $K_{\mu 2}$ - распадов в потоки $\mu^\pm$). Возрастание роли $\mu_{\text{ез}}$ - распадов при больших углах приводит к относительному увеличению выхода $\bar{\nu}_\mu$ при $E_\nu \leq 3$ ГэВ. Отношение $\nu_e/\bar{\nu}_e$ слабо зависит от энергии и зенитного угла: на интервале энергий (0,1-10) ГэВ

$$1,42 \leq \nu_e/\bar{\nu}_e \leq 1,49 \text{ при } \theta = 0^\circ, \quad 1,40 \leq \nu_e/\bar{\nu}_e \leq 1,47 \text{ при } \theta = 90^\circ.$$

На рис.3.12 дано сравнение расчета вертикальных и горизонтальных спектров $\nu_\mu + \bar{\nu}_\mu$ и $\nu_e + \bar{\nu}_e$ на геомагнитной широте 50°N (принимается, что $R_c = 3$ ГВ) с теоретическими результатами других авторов.

В работе /54/ (см. также /53/) сделана попытка в рамках единой модели описать спектры НКЛ в диапазоне энергий от 200 МэВ до 10^5 ГэВ. Работы /45 - 52/ ориентированы главным образом на область высоких энергий и их результаты довольно сильно различаются при энергиях (1-2) ГэВ. Согласие

E, ГэВ	$\theta = 0^\circ$				$\theta = 90^\circ$			
	γ_μ	$\bar{\gamma}_\mu$	γ_e	$\bar{\gamma}_e$	γ_μ	$\bar{\gamma}_\mu$	γ_e	$\bar{\gamma}_e$
0,10	1,06E+4	1,06E+4	5,82E+3	4,09E+3	1,14E+4	1,17E+4	6,82E+3	4,84E+3
0,12	1,39E+3	1,41E+3	4,56E+3	3,21E+3	9,03E+3	9,26E+3	5,33E+3	3,78E+3
0,15	6,10E+3	6,15E+3	3,25E+3	2,29E+3	6,57E+3	6,76E+3	3,81E+3	2,71E+3
0,20	3,86E+3	3,89E+3	2,00E+3	1,41E+3	4,17E+3	4,29E+3	2,38E+3	1,70E+3
0,25	2,64E+3	2,65E+3	1,33E+3	9,42E+2	2,87E+3	2,96E+3	1,63E+3	1,16E+3
0,30	1,90E+3	1,90E+3	9,40E+2	6,63E+2	2,10E+3	2,16E+3	1,18E+3	8,44E+2
0,35	1,43E+3	1,42E+3	6,89E+2	4,87E+2	1,60E+3	1,64E+3	8,94E+2	6,39E+2
0,40	1,11E+3	1,10E+3	5,21E+2	3,68E+2	1,25E+3	1,28E+3	6,97E+2	4,98E+2
0,50	7,07E+2	6,91E+2	3,19E+2	2,25E+2	8,16E+2	8,35E+2	4,51E+2	3,22E+2
0,60	4,79E+2	4,64E+2	2,08E+2	1,47E+2	5,65E+2	5,78E+2	3,11E+2	2,22E+2
0,70	3,39E+2	3,26E+2	1,43E+2	1,00E+2	4,08E+2	4,17E+2	2,24E+2	1,59E+2
0,80	2,48E+2	2,36E+2	1,02E+2	7,11E+1	3,04E+2	3,12E+2	1,67E+2	1,18E+2
0,90	1,87E+2	1,76E+2	7,45E+1	5,20E+1	2,33E+2	2,39E+2	1,28E+2	9,03E+1
1,00	1,44E+2	1,35E+2	5,60E+1	3,90E+1	1,82E+2	1,87E+2	1,00E+2	7,05E+1
1,20	9,08E+1	8,40E+1	3,35E+1	2,33E+1	1,18E+2	1,21E+2	6,46E+1	4,54E+1
1,50	5,13E+1	4,65E+1	1,75E+1	1,21E+1	6,91E+1	7,08E+1	3,73E+1	2,61E+1
2,00	2,45E+1	2,14E+1	7,36E+0	5,10E+0	3,44E+1	3,49E+1	1,81E+1	1,26E+1
2,50	1,38E+1	1,17E+1	3,71E+0	2,57E+0	2,00E+1	2,01E+1	1,03E+1	7,16E+0
3,00	8,59E+0	7,11E+0	2,10E+0	1,45E+0	1,28E+1	1,27E+1	6,42E+0	4,47E+0
3,50	5,71E+0	4,63E+0	1,29E+0	8,86E-1	8,65E+0	8,59E+0	4,29E+0	2,98E+0
4,00	3,99E+0	3,17E+0	8,35E-1	5,74E-1	6,15E+0	6,08E+0	3,01E+0	2,08E+0
5,00	2,17E+0	1,67E+0	3,99E-1	2,72E-1	3,44E+0	3,37E+0	1,63E+0	1,12E+0
6,00	1,30E+0	9,83E-1	2,14E-1	1,46E-1	2,11E+0	2,06E+0	9,71E-1	6,66E-1
7,00	8,45E-1	6,23E-1	1,25E-1	8,50E-2	1,39E+0	1,34E+0	6,18E-1	4,23E-1
8,00	5,77E-1	4,18E-1	7,81E-2	5,28E-2	9,62E-1	9,20E-1	4,14E-1	2,83E-1
10,00	3,03E-1	2,14E-1	3,49E-2	2,35E-2	5,15E-1	4,83E-1	2,08E-1	1,42E-1
15,00	9,23E-2	6,17E-2	7,73E-3	5,18E-3	1,61E-1	1,45E-1	5,65E-2	3,83E-2

Табл.3.2. Дифференциальные энергетические спектры атмосферных нейтрино и антинейтрино на $y.M.$ (в единицах $m^{-2} \cdot c^{-1} \cdot sr^{-1} \cdot ГэВ^{-1}$) при $R_c \leq 1 ГВ.$

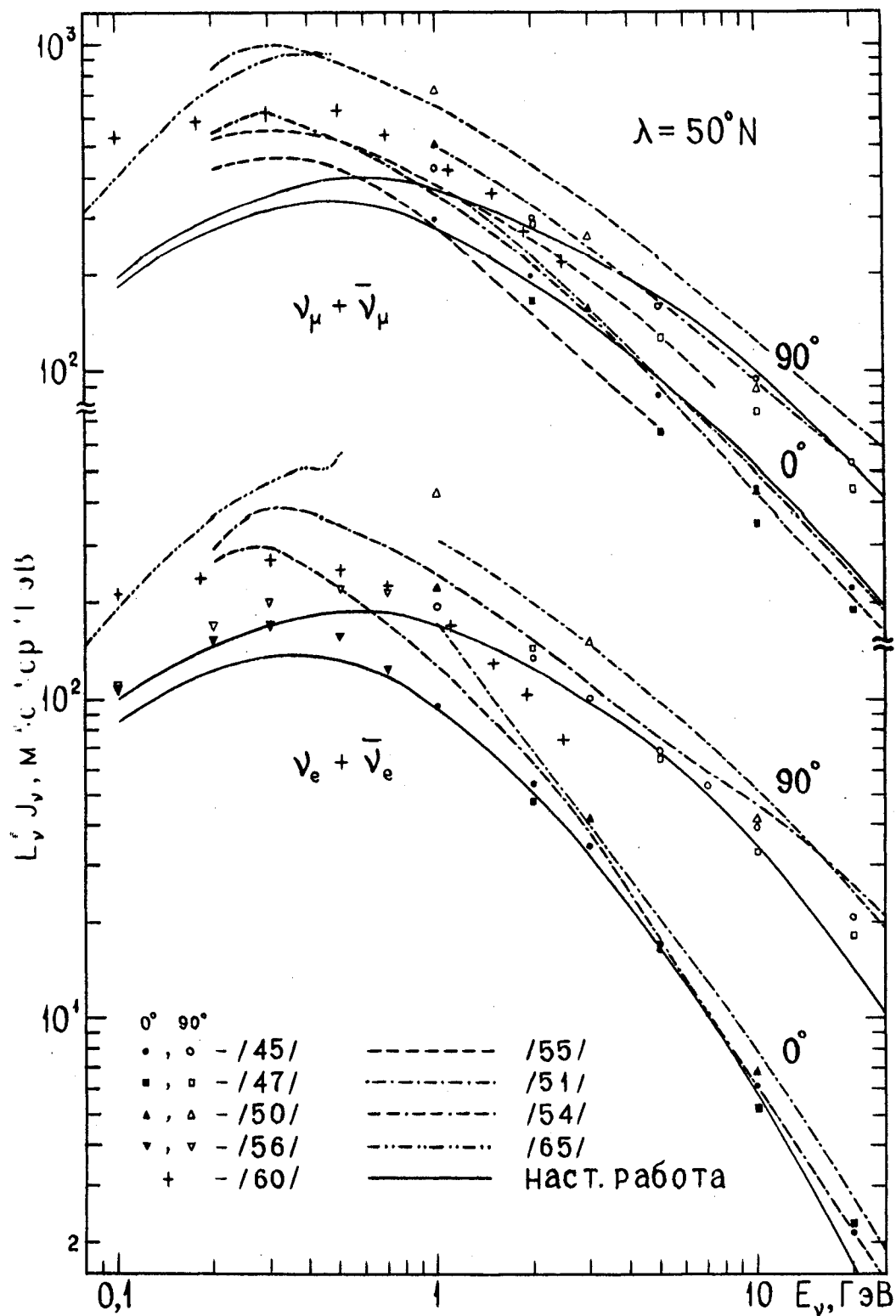


Рис. 3.12. Дифференциальные энергетические спектры $\nu + \bar{\nu}$ на геомагнитной широте 50°N при $\bar{U} = 0^\circ$ и 90° , рассчитанные разными авторами. Результаты расчетов /60/ и /65/ относятся к усредненным по всем направлениям спектрам НКЛ в минимуме СА

между всеми расчетами при $E_\nu > (2-3) \text{ ГэВ}$ и $\theta = 0^\circ$, с учетом неопределенностей в исходных данных можно считать удовлетворительным. В области низких энергий наш расчет хорошо согласуется с результатом работы /56/ для $\nu_e + \bar{\nu}_e$, но существенно расходится для $\nu_\mu + \bar{\nu}_\mu$ с расчетом /55/ (см. также /57/). Расчеты /55-57/ основаны на параметризации Олберта /170/ экспериментальных данных по мюонам низких энергий /169/, обсуждавшихся в § 3.2. Понятно, что при таком подходе спектры $\nu_\mu + \bar{\nu}_\mu$ определяются с небольшой точностью. При $E_\nu \leq 1 \text{ ГэВ}$ имеется систематическое расхождение между нашими результатами и расчетом /60/, выполненным методом Монте-Карло в одномерном приближении. Это расхождение, по крайней мере частично может быть обусловлено различием используемых моделей инклюзивных спектров адронов в NA - и AA -взаимодействиях. На рис. 3.12 изображен также результат трехмерного расчета по Монте-Карло /65/, выполненного для $E_\nu < 500 \text{ МэВ}$. Интенсивности $\nu_\mu + \bar{\nu}_\mu$ и $\nu_e + \bar{\nu}_e$, полученные в /65,66/ значительно превышают при $E_\nu = (200 \div 500) \text{ МэВ}$ как наш результат, так и результат /60/, полученный при тех же предположениях (за исключением учета трехмерности), что и в /65,66/ (ср. также /58, 59, 72, 74/).

Угловые распределения НКЛ низких энергий кардинальным образом зависят от геомагнитных координат пункта наблюдения. Здесь мы рассмотрим случай $R_c \leq 1 \text{ ГВ}$ (высокие широты), а угловые характеристики НКЛ для конкретных нейтринных детекторов проанализируем в следующем параграфе. На рис. 3.13 и 3.14 изображены зенитно-угловые распределения ν_e , $\bar{\nu}_e$, ν_μ и $\bar{\nu}_\mu$ при энергиях от 0,1 до 20 ГэВ ($R_c \leq 1 \text{ ГВ}$). Для сравнения, на рис. 3.13 приведены рассчитанные в работе /50/ распределения

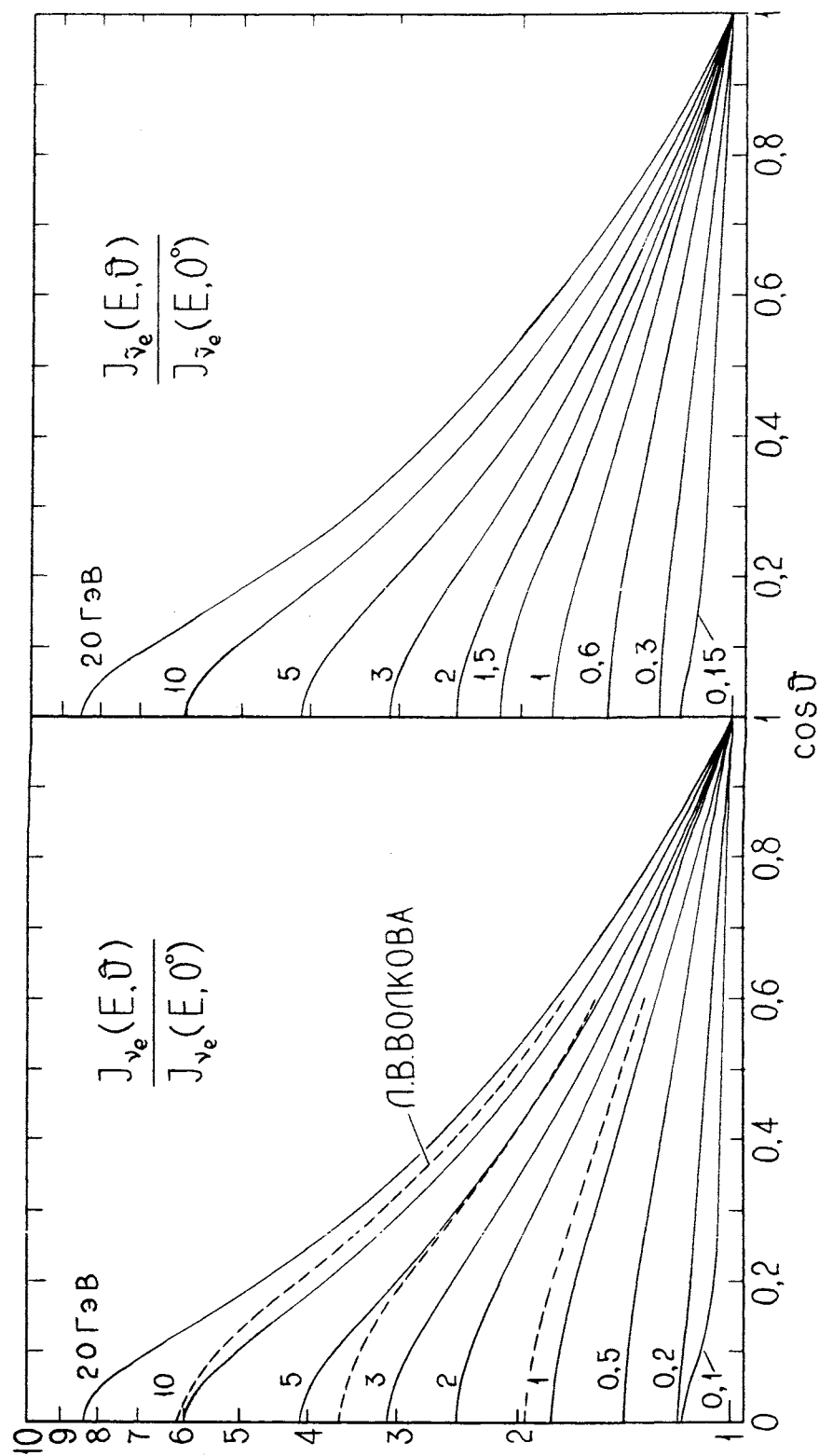


Рис. 3.13. Зенитно-угловые распределения электронных нейтрино и антинейтрино при $R_c \approx 1$ ГВ. Штриховые кривые – распределения $\nu_e + \bar{\nu}_e$, рассчитанные в работах /49,50/ для $E_\nu = 1, 3$ и 10 ГэВ

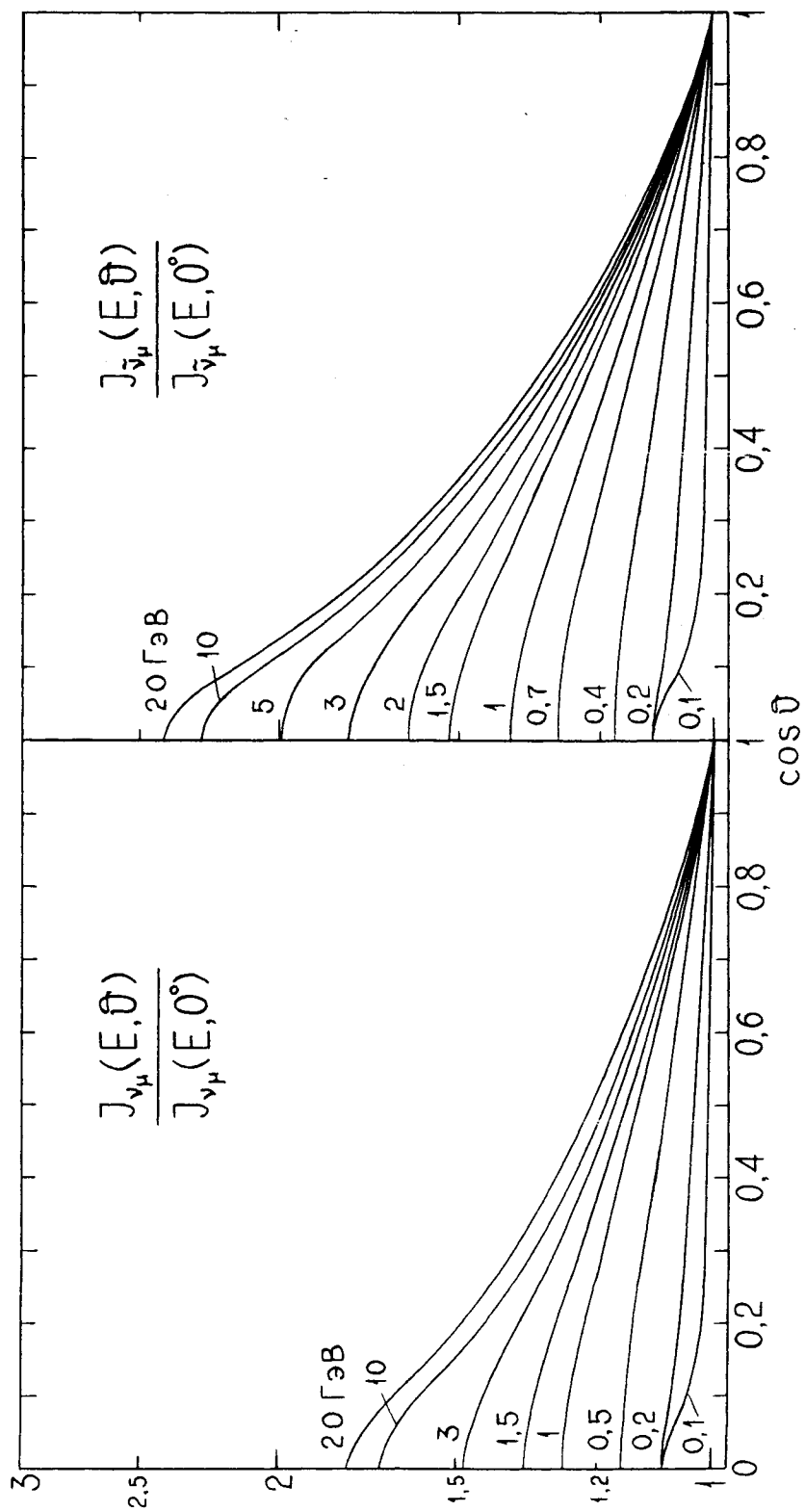


Рис. 3.14. Зенитно-угловые распределения мюнных нейтрино и антинейтрино при $R_c \leq 17B$

для суммарного потока $\nu_e + \bar{\nu}_e$ при $E_\nu = 1, 3$ и 10 ГэВ (согласно /50/ и /49/, отношение $\nu_e / \bar{\nu}_e$ слабо зависит от энергии и при $E_\nu = 10$ ГэВ равно 1,3). В табл.3.3 представлены энергитно-угловые распределения $\nu_e + \bar{\nu}_e$ и $\nu_\mu + \bar{\nu}_\mu$ в сравнении с результатом расчета /54/ (см. также /53/). Имеющиеся различия в предсказаниях θ - зависимостей обусловлены рядом факторов, частично работающих "в разные стороны": в расчетах /49, 50, 53, 54/ не учитываются энергетические потери протонов и мюонов, изменение с энергией n/p -отношения в первичном излучении (ядра КЛ считаются совокупностью свободных нуклонов), зависимость от энергии средних множественностей $\pi^\pm$, $K^\pm$, ... в NA -взаимодействиях. Есть и другие, менее существенные причины (например, несовпадение используемых параметров атмосферы). Отметим, что при $E_\nu \gtrsim 10$ ГэВ наш расчет дает несколько завышенную величину отношения $J_\nu(E, \theta) / J_\nu(E, 0)$ для электронных (анти)нейтрино, так как не учитывает вклад полулептонных распадов каонов. Поэтому расхождение с результатами обсуждаемых работ в действительности более сильное.

В работе /66/ (моделирование трехмерного каскада) рассчитаны зависимости

$$n_{\nu+\bar{\nu}}(\theta) = \int E J_{\nu+\bar{\nu}}(E, \theta) dE. \quad (3.31)$$

Полученные результаты качественно отличаются от предсказаний одномерных моделей. Так, согласно /66/, величина $n_{\nu+\bar{\nu}}(\theta)$ (для $R_c=0$) максимальна при $\theta = (60-70)^\circ$ и имеет минимум при $\theta = 90^\circ$. Для мюонных нейтрино отношение $n_{\nu+\bar{\nu}}$ в максимуме к $n_{\nu+\bar{\nu}}(\theta = 90^\circ)$ равно 1,52, а для электронных - 1,49. Поскольку вклад в интеграл (3.31) области энергий $E_\nu > 100$ МэВ состав-

ϑ , град	45	60	75	80	84	87	90	45	60	75	80	84	87	90
$E_{\gamma},$ ГэВ	$J_{\nu_e + \bar{\nu}_e}(E, \vartheta) / J_{\nu_e + \bar{\nu}_e}(E, 0^\circ)$							$J_{\nu_\mu + \bar{\nu}_\mu}(E, \vartheta) / J_{\nu_\mu + \bar{\nu}_\mu}(E, 0^\circ)$						
0,2	1,04 1,02	1,09 1,03	1,12 1,04	1,15 1,05	1,16 1,06	1,17 1,07	1,18 1,09	1,02 1,07	1,04 1,13	1,06 1,20	1,07 1,28	1,07 1,36	1,08 1,52	1,09 1,55
0,3	1,07 1,07	1,14 1,11	1,20 1,14	1,23 1,18	1,25 1,22	1,26 1,25	1,27 1,32	1,03 1,07	1,06 1,12	1,09 1,21	1,10 1,30	1,11 1,40	1,12 1,56	1,12 1,62
0,5	1,12 1,13	1,22 1,20	1,32 1,27	1,35 1,33	1,39 1,40	1,41 1,47	1,42 1,61	1,05 1,09	1,09 1,19	1,14 1,25	1,16 1,35	1,17 1,46	1,18 1,64	1,18 1,68
1,0	1,19 1,24	1,36 1,42	1,60 1,69	1,69 1,78	1,75 1,84	1,78 1,88	1,81 1,92	1,08 1,15	1,15 1,25	1,25 1,32	1,28 1,42	1,31 1,52	1,32 1,73	1,32 1,79
2,0	1,26 1,40	1,53 1,76	2,00 2,12	2,19 2,23	2,34 2,31	2,42 2,37	2,47 2,42	1,10 1,17	1,20 1,29	1,36 1,45	1,42 1,54	1,47 1,67	1,50 1,91	1,51 1,98
3,0	1,30 1,42	1,64 1,85	2,28 2,54	2,59 2,70	2,84 2,87	3,02 2,97	3,08 3,02	1,10 1,20	1,21 1,33	1,41 1,53	1,49 1,69	1,57 1,78	1,61 2,14	1,62 2,24
5,0	1,35 1,48	1,77 2,01	2,73 2,96	3,16 3,35	3,66 3,79	3,98 4,17	4,12 4,29	1,11 1,15	1,22 1,34	1,46 1,63	1,56 1,81	1,69 2,02	1,74 2,32	1,78 2,38
10,0	1,41 1,54	1,95 2,16	3,24 3,80	4,07 4,70	5,13 5,70	5,71 6,82	6,03 7,32	1,11 1,23	1,24 1,42	1,49 1,84	1,63 2,13	1,79 2,52	1,88 2,82	1,93 2,91

Табл. 3.3. Зенитно-угловые распределения суммарных потоков $\nu_e + \bar{\nu}_e$ и $\nu_\mu + \bar{\nu}_\mu$ при $R_c \leq 1$ ГВ; верхние числа в каждой строке - расчет данной работы, нижние - расчет работы /54/ .

ляет не менее 85%, следует ожидать, что этот эффект должен быть заметен при интересующих нас энергиях. Однако, оценки следующие из формул, приведенных в Приложении 4, показывают, что величина эффекта для нейтрино от $\pi\mu_2$ -распадов вряд ли может быть столь большой.

В методике расчета /66/ (см. также /64, 65/) при розыгрыше направлений продуктов распада не учитывается закон сохранения импульса. При этом, нарушение баланса импульсов может достигать величины импульса распадающейся частицы p_0 . Но, при больших зенитных углах поток НКЛ с энергиями $E, \leq 500$ МэВ существенно определяется широким участком неубывающего спектра мюонов и среднее значение p_0 велико. Таким образом, нарушение баланса импульсов в расчете возрастает с увеличением θ и учет кинематики "в среднем по ансамблю" (как это делается в /64-66/) его не компенсирует, что может привести к искажению распределений лептонов по зенитному углу.

Перейдем к анализу геомагнитного эффекта НКЛ, который удобно характеризовать отношением

$$\mathcal{F}(\nu) \equiv \mathcal{F}_\nu(E, \theta; R_c) = J_\nu(E, \theta; R_c) / J_\nu(E, \theta; R_c = 15 \text{ ГВ})$$

(пороговая жесткость $R_c = 15$ ГВ примерно соответствует геомагнитному экватору, где интенсивности всех компонент КЛ минимальны). Вертикальные энергетические спектры НКЛ на экваторе приведены в табл.3.4, а отношения $\mathcal{F}_\nu(E, \theta = 0^\circ; R_c^\circ)$ - на рис.3.15 (подробные данные представлены в работе /71/). Наиболее чувствителен к геомагнитному эффекту спектр ν_e , поскольку большая часть потока электронных нейтрино генерируется в цепочки процессов, инициированных протонами: $p + A \rightarrow \pi^+(K^+) \rightarrow \mu^+ \rightarrow \nu_e$.

Вклад цепочки $n + A \rightarrow \pi^+(K^+) \rightarrow \mu^+ \rightarrow \nu_e$ меньше, так как ии-

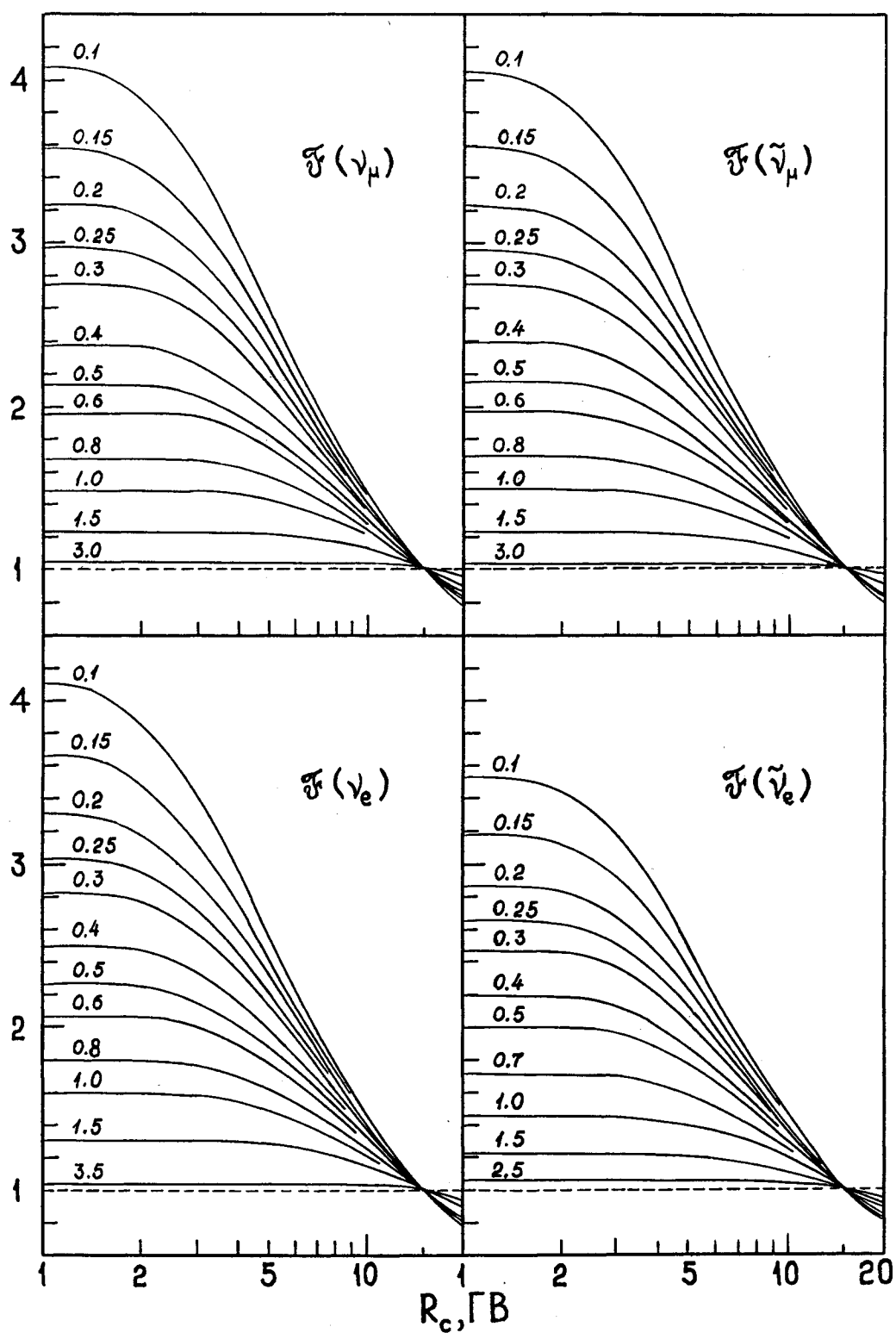


Рис. 3.15. Зависимость вертикальных энергетических спектров НКЛ от R_c . У кривых указаны значения E_γ в ГэВ

клизивное сечение реакции $p + A \rightarrow \pi^+ + X$ в области пиониза-ции существенно превосходит сечение реакции $n + A \rightarrow \pi^+ + X$,

E_ν , ГэВ	$\theta = 0^\circ$			
	ν_μ	$\bar{\nu}_\mu$	ν_e	$\bar{\nu}_e$
0,10	2,58 E+ 3	2,59 E + 3	1,41 E + 3	1,16 E + 3
0,12	2,16 E+ 3	2,17 E + 3	1,16 E + 3	9,47 E + 2
0,15	1,70 E+ 3	1,70 E + 3	8,84 E + 2	7,22 E + 2
0,20	1,19 E+ 3	1,20 E + 3	6,03 E + 2	4,91 E + 2
0,25	8,89 E+ 2	8,95 E + 2	4,38 E + 2	3,56 E + 2
0,30	6,93 E+ 2	6,95 E + 2	3,32 E + 2	2,69 E + 2
0,35	5,68 E+ 2	5,59 E + 2	2,60 E + 2	2,10 E + 2
0,40	4,68 E+ 2	4,57 E + 2	2,09 E + 2	1,67 E + 2
0,50	3,32 E+ 2	3,21 E + 2	1,42 E + 2	1,12 E + 2
0,60	2,46 E+ 2	2,36 E + 2	1,01 E + 2	7,94 E + 1
0,70	1,88 E+ 2	1,79 E + 2	7,46 E + 1	5,83 E + 1
0,80	1,48 E+ 2	1,40 E + 2	5,67 E + 1	4,40 E + 1
0,90	1,16 E+ 2	1,11 E + 2	4,41 E + 1	3,40 E + 1
1,00	9,67 E+ 1	9,01 E + 1	3,50 E + 1	2,68 E + 1
1,20	6,70 E+ 1	6,16 E + 1	2,30 E + 1	1,74 E + 1
1,50	4,18 E+ 1	3,77 E + 1	1,33 E + 1	9,96 E + 0
2,00	2,19 E+ 1	1,92 E + 1	6,29 E + 0	4,60 E + 0
2,50	1,29 E+ 1	1,10 E + 1	3,38 E + 0	2,43 E + 0
3,00	8,22 E+ 0	6,85 E + 0	1,98 E + 0	1,41 E + 0
3,50	5,54 E+ 0	4,52 E + 0	1,24 E + 0	8,71 E - 1
4,00	3,90 E+ 0	3,13 E + 0	8,16 E - 1	5,68 E - 1
5,00	2,14 E+ 0	1,67 E + 0	3,95 E - 1	2,72 E - 1
6,00	1,30 E+ 0	9,81 E - 1	2,13 E - 1	1,46 E - 1

Табл. 3.4. Дифференциальные энергетические спектры атмосферных нейтрино и антинейтрино на у.м. (в единицах $m^{-2} \cdot c^{-1} \cdot sr^{-1} \cdot GeV^{-1}$) при $R_c^\circ = 15$ ГВ.

а "порог" E_0^{min} реакции $p + A \rightarrow \pi^+ + X$ (предел интегрирования в (3.2)) ниже. Напротив, в поток электронных антинейтрино ($\bar{\nu}_e$)

большой вклад вносит цепочка процессов $n + A \rightarrow \pi^-(K^-) \rightarrow \mu^- \rightarrow \bar{\nu}_e$. Поскольку нейтроны в существенно меньшей степени чем протоны чувствительны к изменению пороговой жесткости (см. Гл.2), спектр $\bar{\nu}_e$ зависит от R_c слабее спектра ν_e . Ядра КЛ с $Z \geq 2$ дают практически равные потоки нейтрино и анти-нейтрино, т. к. в среднем $Z/A = 1/2$. Потоки ν_μ и $\bar{\nu}_\mu$ низких энергий в примерно одинаковой степени формируются за счет πA - и $n A$ -взаимодействий и геомагнитный эффект для них практически одинаков. Полученные зависимости спектров НКЛ от R_c хорошо согласуются с результатами расчетов /58-61, 72, 74/ и значительно отличаются от аналогичных результатов работ /55-57/. В целом, мы получаем более сильный (до 1,5-2 раз) эффект при $E_\nu < (1-2)$ ГэВ. Как уже отмечалось, в работах /55-57/ широтная зависимость потоков $\nu + \bar{\nu}$ вычислялась на основе эмпирической формулы Олберта для спектра генерации мюонов, которая дает лишь качественное описание широтной зависимости. Точный количественный расчет необходим для интерпретации экспериментов по поиску нейтринных осцилляций при $E_\nu \lesssim 1$ ГэВ, поскольку для детектора, расположенного на любой широте, поток НКЛ из нижней полусферы собирается со всех широт земного шара. Исходя из проведенного выше анализа широтной зависимости для протонов и мюонов (в частности по данным работ /94/ и /166/) можно ожидать, что точность нашего расчета геомагнитного эффекта НКЛ при $R_c \leq 9$ ГВ лучше (10-15)%. Для экваториальных широт количественную оценку точности расчета получить сложнее, так как кроме результатов экспериментов Конверси /169/, проведенных почти 40 лет назад, данных о широтной зависимости мюонной компоненты КЛ в стратосфере фактически нет. Надежность метода Гл.2 вообще говоря ухудшается при

$R_c(\Omega) \geq 20$ ГВ (низкие широты, большие зенитные углы) потому, что здесь становится важным учет структуры пенумбры, влияния геомагнитного поля на вторичные частицы и, возможно, учет вклада возвратного альbedo. Но так как соответствующая область направлений прихода НКЛ дает малый вклад в их суммарный поток, можно надеяться, что точность расчета усредненных по направлениям спектров НКЛ достаточна для предсказаний статистики событий на нейтринных детекторах.

§ 3.4. Геомагнитные эффекты для усредненных характеристик НКЛ, как фон в экспериментах по исследованию нейтринных осцилляций.

Для вычисления средних по направлениям спектров НКЛ в заданной точке Р с геомагнитными координатами (λ, ψ) предполагаем, что угловая зависимость эффективной жесткости обреза определяется дипольной формулой Квенби-Венка /134/ (для высоких широт она совпадает с (2.44))

$$R_c(\lambda, \psi; \vartheta, \varphi) = \frac{R_c^0(\lambda, \psi)}{(1 + \sqrt{1 - \sin \vartheta \cos \varphi \cos^3 \lambda})^2} \quad (3.32)$$

Азимутальный угол φ отсчитывается в направлении W - S - E - N - W от геомагнитной параллели, проходящей через точку Р. В расчетах использовались подробные таблицы вертикальных эффективных жесткостей обреза для "белого спектра" (см. §2.1), полученные Шей и Смартом путем численного интегрирования уравнений движения частиц в геомагнитном поле по модели Финча-Литона (см. /134/). Приведенные в /134/ данные относятся к эпохе 1955 года, но, согласно работе /173/, относительные вариации

$R_c^0(\lambda, \phi)$ за годы с 1955 по 1985 не выходят за интервал $(-22,2, +28,5)\%$, а для большинства районов земного шара не превышает по модулю $\sim 15\%$. Поскольку такие отклонения находятся в пределах точности, с которой формула (3.32) описывает угловую зависимость R_c , соответствующие поправки не вводились.

Усредненный по азимутальным углам спектр нейтрино определяется формулами

$$j(\nu, E, \vartheta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi J_\nu(E, \vartheta; R_c(\lambda, \phi; \vartheta, \varphi)) \quad (3.33)$$

при $0 \leq \vartheta \leq \pi/2$ и

$$j(\nu, E, \vartheta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi J_\nu(E, \vartheta^*; R_c(\lambda^*, \phi^*; \vartheta^*, \varphi^*)) \quad (3.34)$$

при $\pi/2 \leq \vartheta \leq \pi$. Помеченные звездочкой величины в (3.34) относятся к локальной системе координат в точке падения нейтрино P^* (т.е. λ^* и ϕ^* — геомагнитные координаты точки P^* , а ϑ^* и φ^* — зенитный и азимутальный углы прихода нейтрино) и связаны с λ, ϕ, ϑ и φ соотношениями

$$\vartheta^* = \pi - \vartheta;$$

$$\sin \lambda^* = \sin 2\vartheta \sin \varphi \cos \lambda - \cos 2\vartheta \sin \lambda, \quad |\lambda^*| < \pi/2;$$

$$\begin{cases} \sin(\phi^* - \phi) = \sin 2\vartheta \cos \varphi / \cos \lambda^*, \\ \cos(\phi^* - \phi) = -(\sin 2\vartheta \sin \varphi \sin \lambda + \cos 2\vartheta \cos \lambda) / \cos \lambda^*; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin \varphi^* = -(\sin 2\vartheta \sin \lambda + \cos 2\vartheta \sin \varphi \cos \lambda) / \cos \lambda^*, \\ \cos \varphi^* = \cos \varphi \cos \lambda / \cos \lambda^*. \end{cases}$$

На рис. 3.16 изображены зависимости $j(\nu_\mu + \bar{\nu}_\mu, E, \theta)$ и $j(\nu_e + \bar{\nu}_e, E, \theta)$ при $\theta \geq 90^\circ$ (нейтрино из нижней полусферы) для двух крупнейших детекторов распада протона IMB (США) и Kamiokande (Япония). Географические координаты детекторов приведены ниже в табл.3.7. Видно, что распределения по θ при низких энергиях совершенно различны для IMB и Kamiokande. Например, для мюонных нейтрино с энергией 100 МэВ разница достигает фактора 2,5 на вертикали, 3,4 - на горизонтали и $\sim 0,69$ при $\theta = 135^\circ$. При $E_\nu \gtrsim 2$ ГэВ распределения перестают зависеть от места наблюдения и совпадают с приведенными на рис.3.13 и 3.14 (с заменой θ на $\pi - \theta$). На рис.3.17 для тех же детекторов показаны отношения $r_\mu(E, \theta) = j(\nu_\mu + \bar{\nu}_\mu, E, \pi - \theta) / j(\nu_\mu + \bar{\nu}_\mu, E, \theta)$, характеризующие геомагнитный эффект "в чистом виде" (в отсутствие магнитного поля интенсивности НКЛ, попадающих в детектор из противоположных направлений, одинаковы). Сильная зависимость r_μ от θ усложняет интерпретацию экспериментов по нейтринным осцилляциям, искажая возможный при $E_\nu \lesssim 1$ ГэВ эффект резонансного усиления осцилляций в материи. Согласно /34/ и /35/, наиболее сильные резонансные пики возникают, если пучек нейтрино пересекает земное ядро и мантию, т.е. при $\cos(\pi - \theta) \lesssim 0,6$. В этой области углов средняя величина r_μ значительно отличается от единицы и геомагнитный эффект сравним с ожидаемым эффектом от резонансного перехода.

В работе /35/, в качестве теста на присутствие $\nu_\mu - \nu_e$ - переходов, предлагается измерять отношение ν_μ / ν_e (как функцию энергии и зенитного угла) исходя из того, что геомагнитные эффекты и солнечная активность слабо влияют на эту величину. Такой метод, однако, нуждается в оговорке. В работе /35/ не учтено, что отношения ν_μ / ν_e и $\bar{\nu}_\mu / \bar{\nu}_e$, вообще го-

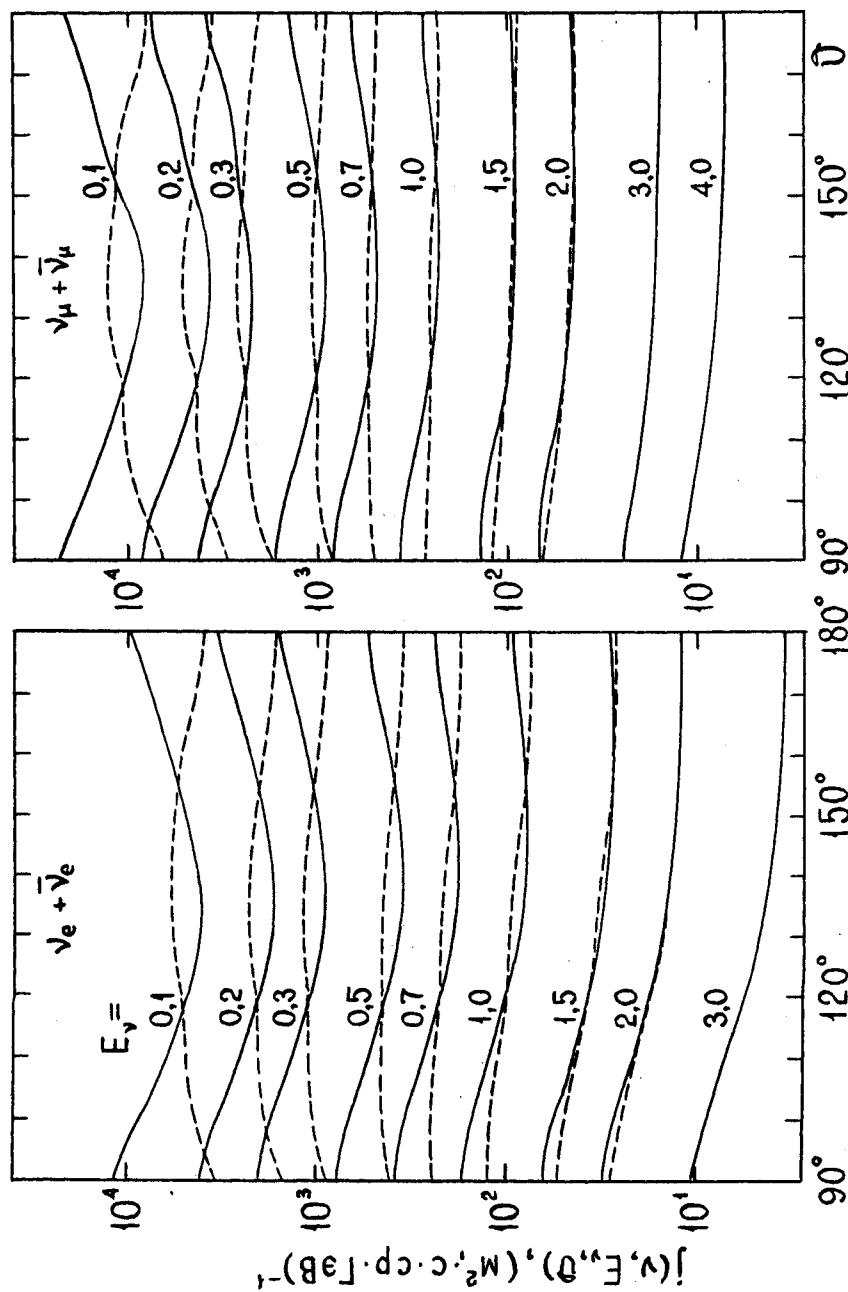


Рис. 3.16. Зенитно-угловые распределения НЧЛ ($\nu_\mu + \bar{\nu}_\mu$), приходящих из нижней полусферы (спектр усреднен по азимутальным углам) для детекторов IMB (сплошные кривые) и Kamiokande (штриховые кривые). Числа у кривых означают энергию в ГэВ

вора заметно различаются¹⁴⁾ (см. рис. 3.18). Поскольку в че-

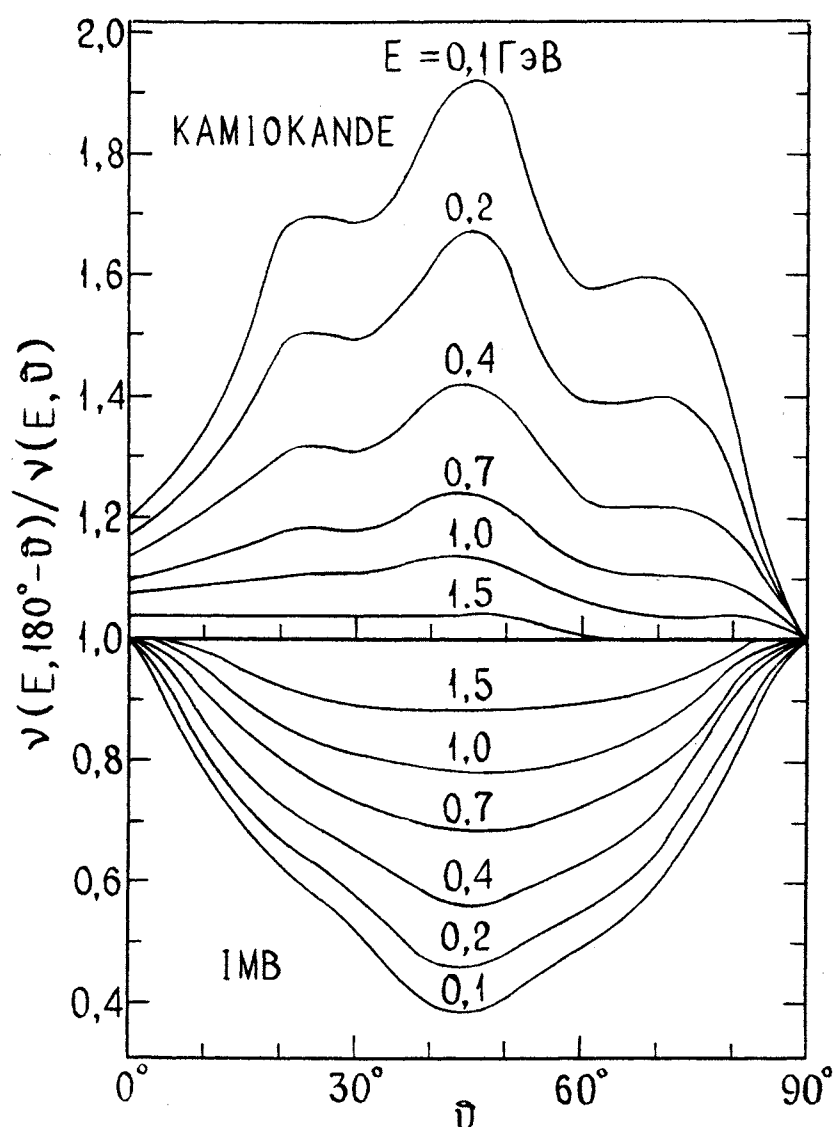


Рис. 3.17. Зависимости от энергии и угла отношения усредненных по азимуту интенсивностей мюонных нейтрино и антинейтрино, приходящих в детектор из противоположных направлений. Значения энергии указаны у кривых в ГэВх.

ренковском детекторе может реально измеряться лишь отношение $(\mu^+ + \mu^-)/(e^+ + e^-)$, зависящее от ν_μ , $\bar{\nu}_\mu$, ... интегрально по углу и энергии (см. следующий параграф), то эффект ос-

¹⁴⁾ Резонансный переход возможен либо для нейтрино, либо для антинейтрино /34/ .

целляций при малых углах смешивания в вакууме θ_ν частично "замазывается" и не определяется отношением $(\nu_\mu + \bar{\nu}_\mu)/(\nu_e + \bar{\nu}_e)$ однозначно. Рассчитанное в работе /35/ на основе модели /62,63/ отношение $(\nu_\mu + \bar{\nu}_\mu)/(\nu_e + \bar{\nu}_e)$ при $E = 0,3$ ГэВ и $\theta_\nu = 0$ совпадает с нашим результатом на интервале $50^\circ \leq \vartheta \leq 100^\circ$, но превы-

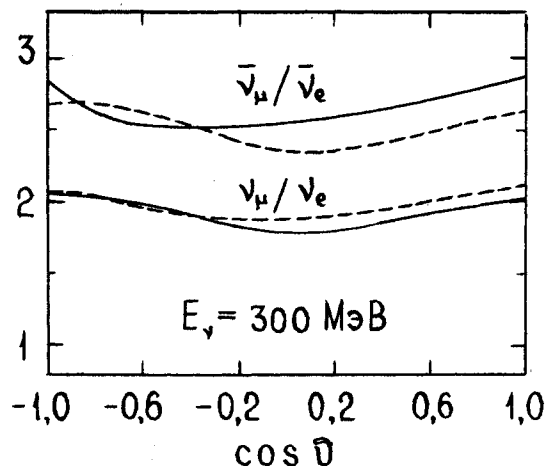


Рис.3.18. Зависимости отношений $j(\nu_\mu, E, \vartheta)/j(\nu_e, E, \vartheta)$ и $j(\bar{\nu}_\mu, E, \vartheta)/j(\bar{\nu}_e, E, \vartheta)$ от ϑ при $E = 0,3$ ГэВ для детекторов IMB (сплошные кривые) и Kamiokande (штриховые кривые).

шает его в области резонансных пиков в мантии и ядре соответственно на (5-6)% и (10-12)%.

Введем в рассмотрение величины

$$\nu^d(E) = \int_0^1 j(\nu, E, \vartheta) d\cos\vartheta \quad \text{и} \quad \nu^u(E) = \int_{-1}^0 j(\nu, E, \vartheta) d\cos\vartheta,$$

т.е. усредненные по полусферам спектры НКИ идущих вниз (downwards) и вверх (upwards). В отсутствие осцилляций и геомагнитных эффектов величины $\nu^d(E)$ и $\nu^u(E)$ совпадают и достигают максимального значения $\nu^{\max}(E)$. На интервале $(0, 1 \div 15)$ ГэВ результат расчета зависимостей $\nu^{\max}(E)$ ($\nu = \nu_\mu, \bar{\nu}_\mu, \nu_e, \bar{\nu}_e$) с точностью лучшей 1,5% можно аппроксимировать формулой

$$\nu^{\max}(E) = \nu(E_0) (E_0/E)^{\gamma_\nu + \alpha_\nu(E) \ln(E/E_0)}, \quad (3.35)$$

где $\alpha_\nu(E) = \theta(E_0 - E)\alpha_\nu^1 + \theta(E - E_0)\alpha_\nu^2$, $E_0 = 1$ ГэВ. Входящие сюда параметры приведены в табл. 3.5. Интегрируя (3.35) по E ,

ν	$\nu(E_0), (m^2 \cdot c \cdot \text{ср. ГэВ})^{-1}$	γ_ν	α_ν^1	α_ν^2
ν_μ	163	2,40	0,252	0,102
$\bar{\nu}_\mu$	161	2,44	0,269	0,121
ν_e	77,2	2,53	0,278	0,181
$\bar{\nu}_e$	54,1	2,54	0,283	0,181

Табл. 3.5. Параметры аппроксимации (3.35) для усредненных по направлениям спектров НКЛ, рассчитанных без учета геомагнитных эффектов.

нетрудно получить аналитическое выражение для интегральных спектров НКЛ, обладающее той же точностью при энергиях (0,1÷10) ГэВ :

$$\nu^{\max}(\geq E) = \begin{cases} \nu(E_0) E_0 [\psi_\nu(E, \alpha_\nu^1) - \psi_\nu(E_0, \alpha_\nu^1) + \psi_\nu(E_0, \alpha_\nu^2)], & \text{при } E < E_0, \\ \nu(E_0) E_0 \psi_\nu(E, \alpha_\nu^2), & \text{при } E \geq E_0, \end{cases} \quad (3.36)$$

где

$$\psi_\nu(E, \alpha) = \sqrt{\frac{\pi}{4\alpha}} \exp \left[\frac{(\gamma_\nu - 1)^2}{4\alpha} \right] \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\alpha} \ln \frac{E}{E_0} + \frac{\gamma_\nu - 1}{2\sqrt{\alpha}} \right).$$

Формулы (3.35) и (3.36) применимы для расчета спектров НКЛ из верхней полусферы на геомагнитных широтах $|\lambda| \geq 53^\circ$. В табл.

3.6 дано сравнение расчета по формуле (3.36) суммарных по полусфере интегральных спектров $\nu_\mu + \bar{\nu}_\mu$ и $\nu_e + \bar{\nu}_e$ с аналогичным

E, ГэВ	$2\pi(\nu_\mu + \bar{\nu}_\mu)^d, \text{ м}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$		$2\pi(\nu_e + \bar{\nu}_e)^d, \text{ м}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$	
	/54/	(3.36)	/54/	(3.36)
0,2	$1,79 \cdot 10^4$	$1,04 \cdot 10^4$	$7,68 \cdot 10^3$	$4,51 \cdot 10^3$
0,3	$1,09 \cdot 10^4$	$6,79 \cdot 10^3$	$4,56 \cdot 10^3$	$2,85 \cdot 10^3$
0,5	$5,17 \cdot 10^3$	$3,59 \cdot 10^3$	$2,07 \cdot 10^3$	$1,44 \cdot 10^3$
1,0	$1,69 \cdot 10^3$	$1,31 \cdot 10^3$	$6,34 \cdot 10^2$	$4,77 \cdot 10^2$
2,0	$4,99 \cdot 10^2$	$4,24 \cdot 10^2$	$1,67 \cdot 10^2$	$1,33 \cdot 10^2$
3,0	$2,33 \cdot 10^2$	$2,10 \cdot 10^2$	$7,10 \cdot 10^1$	$5,84 \cdot 10^1$
5,0	$8,61 \cdot 10^1$	$8,23 \cdot 10^1$	$2,34 \cdot 10^1$	$1,92 \cdot 10^1$
10,0	$2,18 \cdot 10^1$	$2,13 \cdot 10^1$	$4,98 \cdot 10^0$	$3,67 \cdot 10^0$

Табл. 3,6. Сравнение интегральных спектров НКЛ из верхней полусферы, рассчитанных в работе /54/ и по формуле (3.36) для высоких широт.

результатом работы /54/. Причины имеющихся расхождений (для дифференциальных по углам и энергии спектров) обсуждались в § 3.3.

На рис. 3.19(а,б) и (3.20) приведены важные для исследования осцилляции отношения $(\nu_\mu + \bar{\nu}_\mu)^d / (\nu_\mu + \bar{\nu}_\mu)^{\text{max}}$, $(\nu_\mu + \bar{\nu}_\mu)^u / (\nu_\mu + \bar{\nu}_\mu)^{\text{max}}$ и $(\nu_\mu + \bar{\nu}_\mu)^u / (\nu_\mu + \bar{\nu}_\mu)^d$, как функции энергии, для нескольких подземных лабораторий (см. табл. 3.7). Абсолютные значения усредненных спектров $\nu^{u,d}$ и $\bar{\nu}^{u,d}$ приведены в работе /73/. Поскольку, как отмечалось выше, точность расчета при больших значениях пороговой жесткости R_c ухудшается, спектр для детектора KGF ($\lambda \approx 3^\circ \text{N}$) усреднялся по интервалам зенитных углов $0 \leq \vartheta \leq 60^\circ$ и $120^\circ \leq \vartheta \leq 180^\circ$, в которых значения R_c не слишком велики. Из сравнения кривых на рисун-

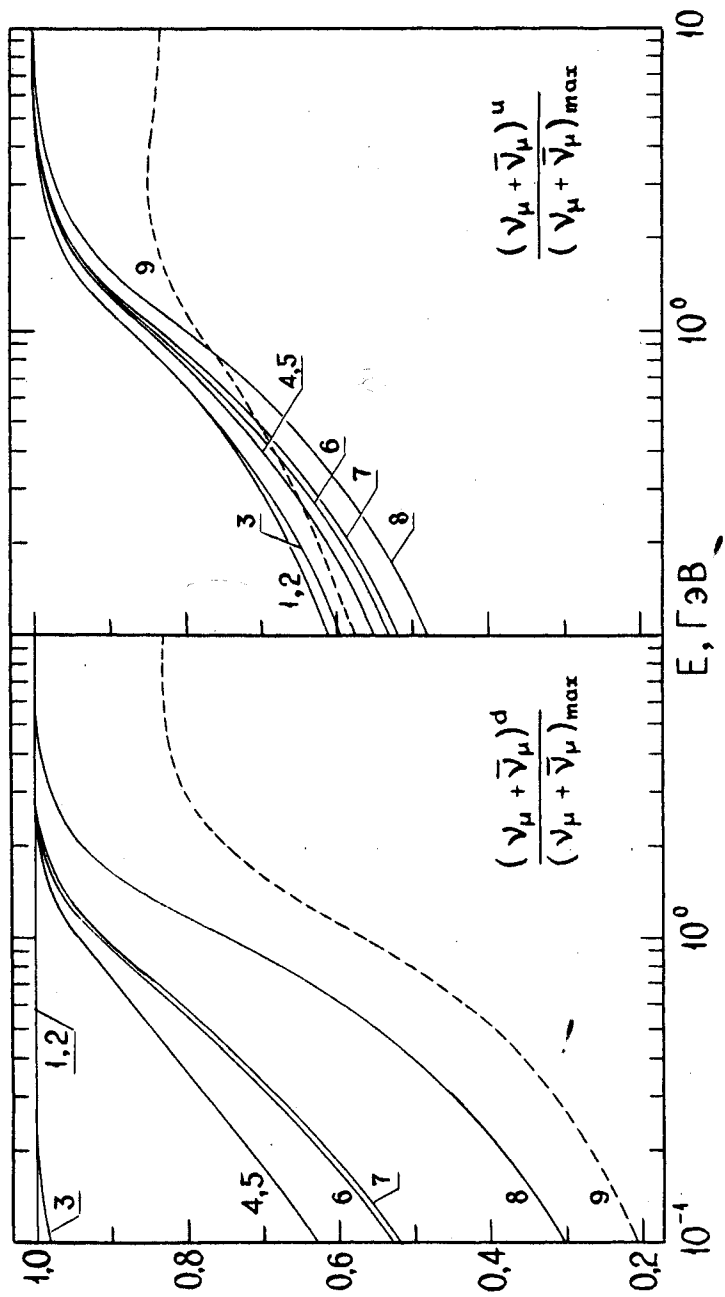


Рис. 3.19. Зависимости от энергии отношений усредненных по верхней и нижней полусфере дифференциальных спектров $\nu_\mu + \bar{\nu}_\mu$ к величине $(\nu_\mu + \bar{\nu}_\mu)_{\max}$ (см. текст) для детекторов нейтрино, указанных в таблице 3.7 (цифры у кривых соответствуют нумерации в таблице). Спектры для установки KGF (штриховые кривые) усреднены по конусу с углом полураствора 60°

как видно, что ν^d -спектры для разных детекторов существенно

№	Страна	Детектор (лаборатория)	Географические коор- динаты		λ
			широта	долгота	
1	США	Soudan	48,0°N	92,0°W	58,4°
2	Канада	Sudbury	46,8°N	81,2°W	57,9°
3	США	IMB	41,7°N	81,3°W	52,9°
4	Италия	Mont Blanc	45,8°N	6,8°E	47,2°
5	Франция	Frejus	45,1°N	6,7°E	46,6°
6	Италия	Gran Sasso	42,5°N	13,6°E	42,7°
7	СССР	БНО	43,3°N	42,7°E	38,0°
8	Япония	Kamiokande	36,4°N	137,3°E	26,1°
9	Индия	KGT	13,0°N	78,3°E	3,2°

Табл.3.7. Координаты установок, способных служить нейтринными телескопами с низким порогом по энергии нейтрино.

неодинаковы, тогда как ν^u -спектры почти подобны в пределах $\sim 20\%$ (при интегрировании по всем широтам геомагнитные эффекты усредняются). Аналогичные отношения для электронных нейтрино в пределах нескольких процентов совпадают с приведенными на рис. 3.19 и 3.20. В связи с проблемой исследования нейтринных осцилляций следует отметить, что для всех рассматриваемых детекторов отношения $(\nu_\mu/\nu_e)^u/(\nu_\mu/\nu_e)^d$ близки к единице, в соответствии с утверждением работ/35,72/. Обозначим

$$(\nu_\mu/\nu_e)^u = (1+x)(\nu_\mu/\nu_e)^d, \quad (\bar{\nu}_\mu/\bar{\nu}_e)^u = (1+\bar{x})(\bar{\nu}_\mu/\bar{\nu}_e)^d.$$

Как показывают расчеты, величины $x(E)$ и $\bar{x}(E)$ на интервале $(0,1+1)$ ГэВ монотонно меняясь с энергией, не превосходят по модулю значения $\sim 0,07$. В частности, для детектора **Kamioka**

$$-0,015 \leq x < 0 ; \quad 0,014 \leq \bar{x} \leq 0,059 ,$$

а для IMB

$$0 < x \leq 0,020 ; \quad -0,044 \leq \bar{x} \leq -0,022 .$$

С другой стороны, для вероятной области значений параметров

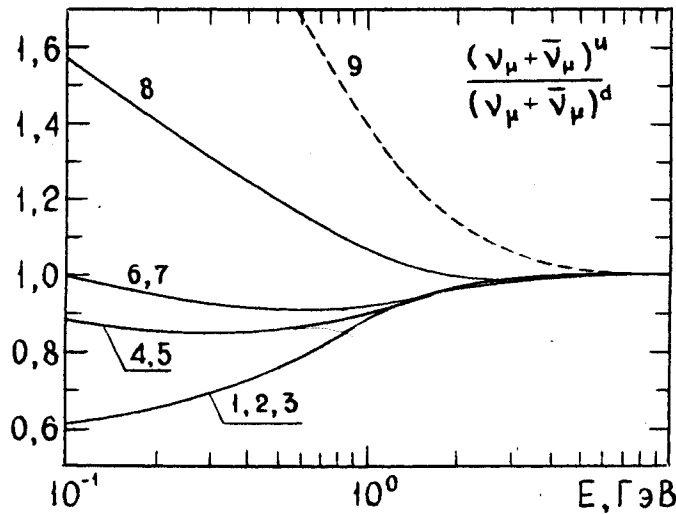


Рис. 3.20. Зависимость от энергии отношений $(\nu_\mu + \bar{\nu}_\mu)^u / (\nu_\mu + \bar{\nu}_\mu)^d$. Обозначения - как на рис.3.19.

смешивания, следующей из т.н. "решений" проблемы солнечных нейтрино /34, 35/ , ожидаемые значения величины $|x(E)|$ могут быть довольно велики. Так, согласно /35/ , при $\Delta m^2 \cos 2\theta_y = 1,23 \cdot 10^{-4} \text{ эВ}^2$ и $\sin^2 2\theta_y = 0,02$: $x < 0$, $x_{\min} \approx x(E=0,3 \text{ ГэВ}) \approx -0,23$, что заметно отличается от значений x и $\bar{x}$ при отсутствии осцилляций.

В Приложении 5 приведены аппроксимации усредненных спектров ν_μ , $\bar{\nu}_\mu$, ν_e и $\bar{\nu}_e$ для детекторов IMB и Kamiokande , используемые ниже при расчете числа событий и т.п..

§ 3.5. Спектры электронов и мюонов, образующихся при квазиупругих взаимодействиях НКЛ с ядрами в подземных черенковских детекторах.

Электроны и мюоны низких энергий могут образовываться под толщей грунта или воды в результате 1) взаимодействий атмосферных и космических нейтрино (антинейтрино) с ядрами, обусловленных как заряженными (СС), так и нейтральными (НС) слабыми токами; 2) распадов генерированных в этих процессах адронов; 3) распадов дошедших до данной глубины атмосферных мюонов и мюонов, рождающихся в СС-реакциях. Другие источники лептонов — это "экзотические" процессы (распад нуклона, $n-\bar{n}$ — переходы в ядрах, взаимодействия НС- типа зеркальных космических лучей в веществе /26/ и т.д.), которые являются объектами исследований на подземных установках.

В этом параграфе изучаются спектры мюонов и электронов с импульсами $p_{e,\mu} \leq 1,5$ ГэВ/с, рождающихся в подземных водяных детекторах распада протона (IMB, Kamiokande) при квазиупругих взаимодействиях НКЛ с ядрами кислорода и водорода и регистрируемых по их черенковскому излучению и ливневому сопровождению (т.н. события М-типа и S-типа). Нижняя граница регистрации импульсов $\mu^\pm$ (черенковский порог) определяется условиями $p_\mu/E_\mu > n_w^{-1}$, где $n_w = 4/3$ — показатель преломления света в воде,

$$p_\mu^{\min} \approx 120 \text{ МэВ/с}, \quad E_\mu^{\min} \approx 160 \text{ МэВ}.$$

Реальные пороги детектирования $\mu^\pm$, вообще говоря, превышают $p_\mu^{\min}$, а порог для $e^\pm$ зависит от методики регистрации

электромагнитного каскада¹⁵⁾.

Число лептонов l ($l = \mu^+ + \mu^-$ или $e^+ + e^-$) с импульсами от p_l до $p_l + dp_l$, генерируемых в квазиупругих реакциях НКЛ с нуклонами в объеме 10^3 м^3 воды за 1 год экспозиции, равно

$$\left(\frac{dN_l}{dp_l} \right) dp_l = \left\{ 2T \int dE_\nu \frac{d\sigma_{\bar{\nu}}}{dp_l} \bar{\nu}_l(E_\nu) + \right. \\ \left. + 8T \int dE_\nu \left[\frac{d\sigma_\nu^b}{dp_l} \nu_l(E_\nu) + \frac{d\sigma_{\bar{\nu}}^b}{dp_l} \bar{\nu}_l(E_\nu) \right] \right\} dp_l, \quad (3.37)$$

где $T = (N_A/18,02) \cdot 1 \text{ Кт} \cdot 1 \text{ год} = 1,055 \cdot 10^{39} \text{ сек}$; ν_l ($\bar{\nu}_l$) — суммарные по направлениям спектры нейтрино (антинейтрино),

$$\nu_l = 2\pi (\nu_l^d + \nu_l^u), \quad \bar{\nu}_l = 2\pi (\bar{\nu}_l^d + \bar{\nu}_l^u);$$

$d\sigma_{\nu, \bar{\nu}}/dp_l$ — дифференциальные сечения реакций

$$\nu_l + n \rightarrow l^- + p, \quad \bar{\nu}_l + p \rightarrow l^+ + n, \quad (3.38)$$

а $d\sigma_{\nu, \bar{\nu}}^b/dp_l$ — сечения соответствующих процессов на нуклонах, связанных в ядре.

Сечения реакций (3.38) хорошо известны и имеют вид /174/

¹⁵⁾ Полный выход энергии в конкретном событии определяется после поправок на поглощение света в воде, угловое разрешение фотоумножителей и другие систематические эффекты (см. работы /3, 4, 17/ и цитируемую в них литературу).

$$\frac{d\sigma_{\nu, \bar{\nu}}}{dp_l} = \frac{G_F^2 \cos^2 \theta_c m^3 p_l}{4\pi E_l E_\nu^2} [A(Q^2) + B(Q^2)y + C(Q^2)y^2],$$

где $G_F = 1,166 \cdot 10^{-5} \text{ ГэВ}^{-2}$ - константа Ферми, θ_c - угол Кабиббо ($\cos \theta_c = 0,973$),

$$Q^2 = 2m(E_\nu - E_l), \quad y = [2m(E_\nu + E_l) - m_l^2] / m^2,$$

m и m_l - массы нуклона и лептона l соответственно. Инвариантные функции A, B и C , в отсутствие токов второго рода, являются комбинациями четырех слабых формфакторов нуклона :

$$A = \frac{Q^2 + m_l^2}{m^2} \left\{ \left(1 + \frac{Q^2}{4m^2}\right) F_A^2 + \left(1 - \frac{Q^2}{4m^2}\right) \left(\frac{Q^2}{4m^2} F_M^2 - F_V^2\right) + \right. \\ \left. + \frac{Q^2}{m^2} F_V F_M - \frac{m_l^2}{4m^2} [F_V^2 + F_A^2 + 4F_P(F_A - \frac{Q^2}{4m^2} F_P)] \right\},$$

$$B = \frac{Q^2}{m^2} F_A (F_V + F_M),$$

$$C = \frac{1}{4} (F_A^2 + F_V^2 + \frac{Q^2}{4m^2} F_M^2).$$

Из гипотезы сохранения векторного тока следует связь F_V и F_M с электромагнитными формфакторами

$$G_E = F_V - (Q^2/4m^2) F_M, \quad G_M = F_V + F_M,$$

для которых принимается обычная дипольная параметризация :

$$G_E = (1 + Q^2/m_V^2)^{-2}, \quad G_M = (\mu_p - \mu_n + 1) G_E,$$

$$m_V = 0,84 \text{ ГэВ}/c^2, \quad \mu_p - \mu_n = 3,706.$$

Для аксиально-векторного и псевдоскалярного формфакторов по-

лагаем¹⁶⁾

$$F_A = g_A (1 + Q^2/m_A^2)^{-2}, \quad F_P = 2m^2 F_A (Q^2 + m_\pi^2)^{-1},$$

$$g_A = -1,26, \quad m_A = 1,0 \text{ ГэВ}/c^2, \quad m_\pi = 0,14 \text{ ГэВ}/c^2.$$

Область интегрирования по E_ν для первого члена в (3.37) и импульсов лептонов $p_l > \omega_l = m_l^2/(2m)$ определяется условиями (в пренебрежении разностью масс p и n)

$$\left\{ \begin{array}{l} (E_l - \omega_l) \left(1 - \frac{2\omega_l}{E_l + p_l}\right)^{-1} \leq E_\nu \leq (E_l - \omega_l) \left(1 - \frac{E_l + p_l}{m}\right)^{-1}, \\ \text{при } p_l < m/2 - \omega_l, \\ E_\nu \geq (E_l - \omega_l) \left(1 - \frac{2\omega_l}{E_l + p_l}\right)^{-1}, \quad \text{при } p_l \geq m/2 - \omega_l. \end{array} \right.$$

Расчет сечений $d\sigma_{\nu, \bar{\nu}}^b / d p_l$ требует привлечения модельных представлений, адекватность которых трудно установить из-за скудности имеющихся ускорительных данных по взаимодействиям ν ($\bar{\nu}$) низких энергий с ядрами (в особенности, при малых переданных импульсах $Q^2 = (\vec{p}_\nu - \vec{p}_l)^2 - (E_\nu - E_l)^2 \leq 0,1 \text{ ГэВ}^2/c^2$). Ниже используется ферми-газовая модель яд-

¹⁶⁾ Современное средне-мировое значение аксиальной массы $m_A = (1,032 \pm 0,036) \text{ ГэВ}/c^2$, полученное из анализа реакций (3.38), хорошо согласуется с величиной $m_A = (1,06 \pm 0,05) \text{ ГэВ}/c^2$, найденной из данных по NC -реакциям $\bar{\nu}_\mu p \rightarrow \bar{\nu}_\mu p$ /175/. Отметим, что в работе /67/, для расчета спектров лептонов генерируемых НКЛ, использовано довольно грубое приближение: $F_A = -1,23 F_V$, $F_V = G_F$, приводящее к систематическому занижению $dN_l / d p_l$.

ра (ФГ-модель) в ее наиболее общем варианте, предложенном в работе /81/. Согласно /81/ ядро считается вырожденным (симметричным, в случае $^{16}_0$) газом нуклонов с законом дисперсии $p_0 = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} - \epsilon_b$ в начальном состоянии ядра (константа ϵ_b эффективно учитывает энергию связи нуклонов в ядре). Поскольку в /81/ приведены все необходимые для расчета $d\sigma_{\nu, \bar{\nu}}/d p_l$ формулы и кинематические ограничения, мы не будем повторять их здесь.

Как и в случае рассеяния на свободных нуклонах, считаем, что токи второго рода отсутствуют и принимаем приведенные выше параметризации для формфакторов $F_{V,M,A,P}$. Следуя работе /67/, полагаем, что импульс Ферми и параметр ϵ_b для ядра $^{16}_0$ равны

$$p_F = 220 \text{ МэВ/с}, \quad \epsilon_b = 25 \text{ МэВ}.$$

Как показал численный анализ, изменение значения p_F на величину $\Delta p_F \ll p_F$ приводит к относительному изменению выхода лептонов на величину, не превышающую $\Delta p_F/p_F$. Например, при $p_F = 270 \text{ МэВ/с}$ выходы μ и e при $p = (200 \div 250) \text{ МэВ/с}$ уменьшаются, по сравнению со случаем $p_F = 220 \text{ МэВ/с}$, на (12-18)%. Вариации параметра ϵ_b сказываются на результате в меньшей степени. При $\epsilon_b = 0$, в соответствии с выводом работы /67/, выход лептонов возрастает не более, чем на 30% (по сравнению со случаем $\epsilon_b = 25 \text{ МэВ}$). Можно ожидать, что имеющийся произвол в выборе значений параметров ФГ-модели не выводит результат из (15-20)-процентного "коридора", практически независимо от вида спектра НКЛ. На рис. 3.21 показаны ожидаемые импульсные спектры электронов и мюонов, образующихся в 1 кт воды за 1 год в детекторах IMB и Kamiokande.

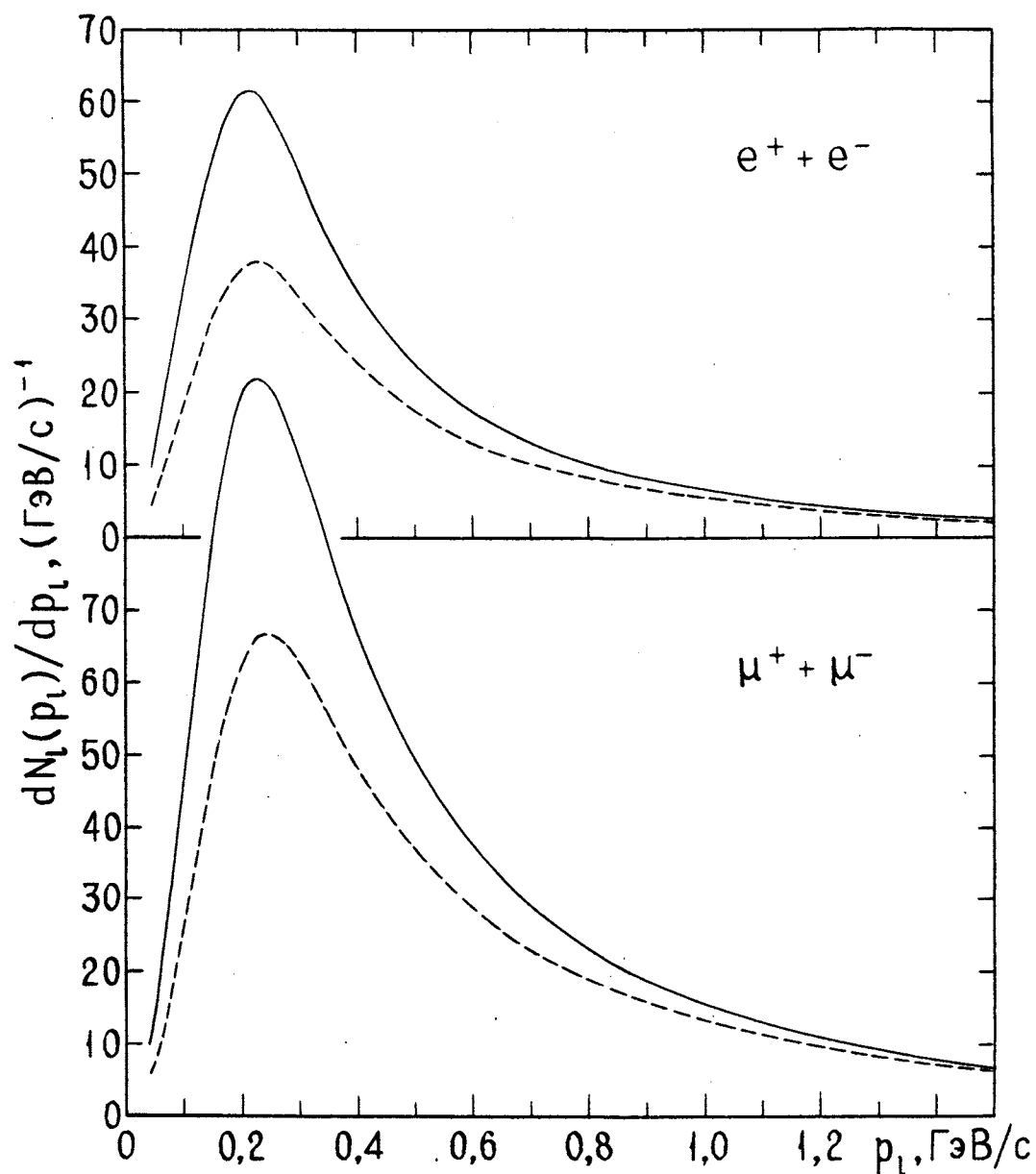


Рис. 3.21. Импульсные спектры электронов и мюонов, образующихся при квазиупругих взаимодействиях НКЛ с ядрами ^{16}O и ^1H в килотонне воды за год в подземных детекторах IMB (сплошные кривые) и Kamiokande (штриховые кривые). Расчет реакций на кислороде выполнен в рамках ФГ-модели работы /81/

Отношение спектров $(dN_l / dp_l)_{IMB} / (dN_l / dp_l)_{KamioKande} \equiv \delta_l$ существенно отличается от единицы при $p_l \ll 1$ ГэВ/с, а в окрестности максимумов ($p_l \sim (200 - 250)$ МэВ/с) достигает значений $\delta_e \approx 1,6$ и $\delta_\mu \approx 1,5$. При $p_l = 1,5$ ГэВ/с соответствующие различия составляют 10% (электроны) и 8% (мюоны). На рис. 3.22 изображены отношения $\eta_l = l^u / l^d$, где l^u и l^d

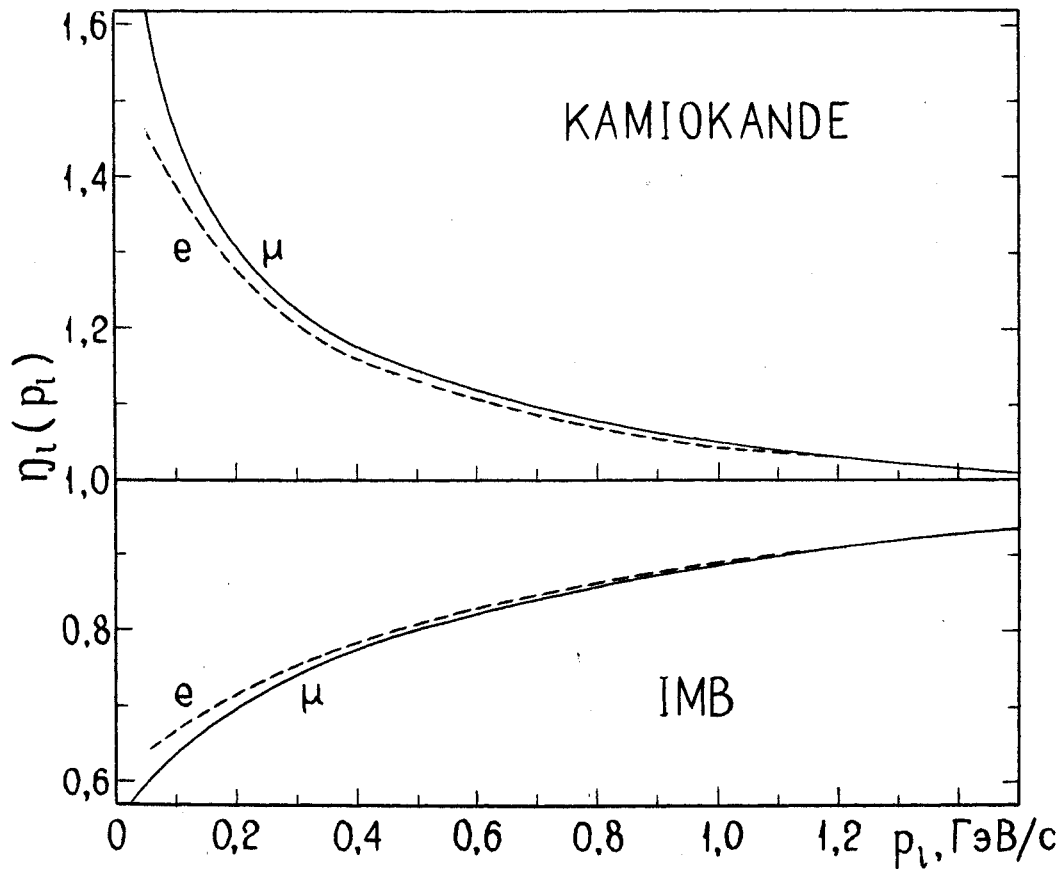


Рис. 3.22. Отношение вкладов в спектры $(\mu^+ + \mu^-)$ и $(e^+ + e^-)$, генерированных НКЛ, приходящими в детектор из нижней и верхней полусфер.

означают вклады в спектр лептонов от НКЛ, идущих вверх (ν_l^u) и вниз (ν_l^d) соответственно. Видно, что несмотря на усреднение по нейтринному спектру, качественное поведение функций $\eta_l(p_l)$ подобно поведению отношений ν_l^u / ν_l^d (ср. с рис. 3.20 предыдущего параграфа). Более детальные безразмерные характе-

ристики -

$$\frac{\mu^+ + \mu^-}{e^+ + e^-}, \quad \frac{\mu^+}{\mu^-}, \quad \frac{e^+}{e^-} \quad \text{и} \quad \eta = \frac{(\mu^+ + \mu^-)^u / (e^+ + e^-)^u}{(\mu^+ + \mu^-)^d / (e^+ + e^-)^d}, \quad (3.39)$$

представляющие интерес для экспериментов по нейтринным осцилляциям, приводятся на рис. 3.23. В отличие от абсолютных спектров μ и e , величины (3.39) очень слабо зависят от геомагнитных эффектов НКЛ, а, следовательно, и от местоположения детектора. В частности, при импульсах мюонов, превышающих черенковский порог, отношение $\eta(p)$, упоминавшееся в § 3.4, практически равняется единице. По понятным причинам, точность расчета отношений типа (3.39) существенно выше точности расчета спектров НКЛ. Неопределенности, обусловленные моделью взаимодействия $\nu(\bar{\nu})$ с ядром, также мало влияют на эти величины. Поэтому их измерение с хорошей статистической обеспеченностью могло бы служить важным тестом не только при исследовании осцилляций.

Обсудим имеющиеся экспериментальные данные. На рис. 3.24 и 3.25 приведены полученные в работе /176/ (Kamiokande) импульсные распределения однокольцевых событий M- и S-типов, ассоциируемые авторами с распределениями $\mu^+ + \mu^-$ и $e^+ + e^-$ соответственно. Данные /176/ выделены из 181 события, зарегистрированного в течение 645 дней, за период с июля 1983 г. по март 1986 г., близкий к минимуму СА. Приведенные на рисунках расчетные распределения получены в соответствии с (3.37), со спектрами ν_1 и $\bar{\nu}_1$ настоящей работы (минимум СА) и работы /67/ (спектры НКЛ усреднены по одиннадцатилетнему циклу). Для сравнения показан также результат расчета импульсных рас-

ределений лептонов, образующихся в квазиупругих реакциях на свободных нуклонах ($10p + 8n$). Во всех случаях эффективность

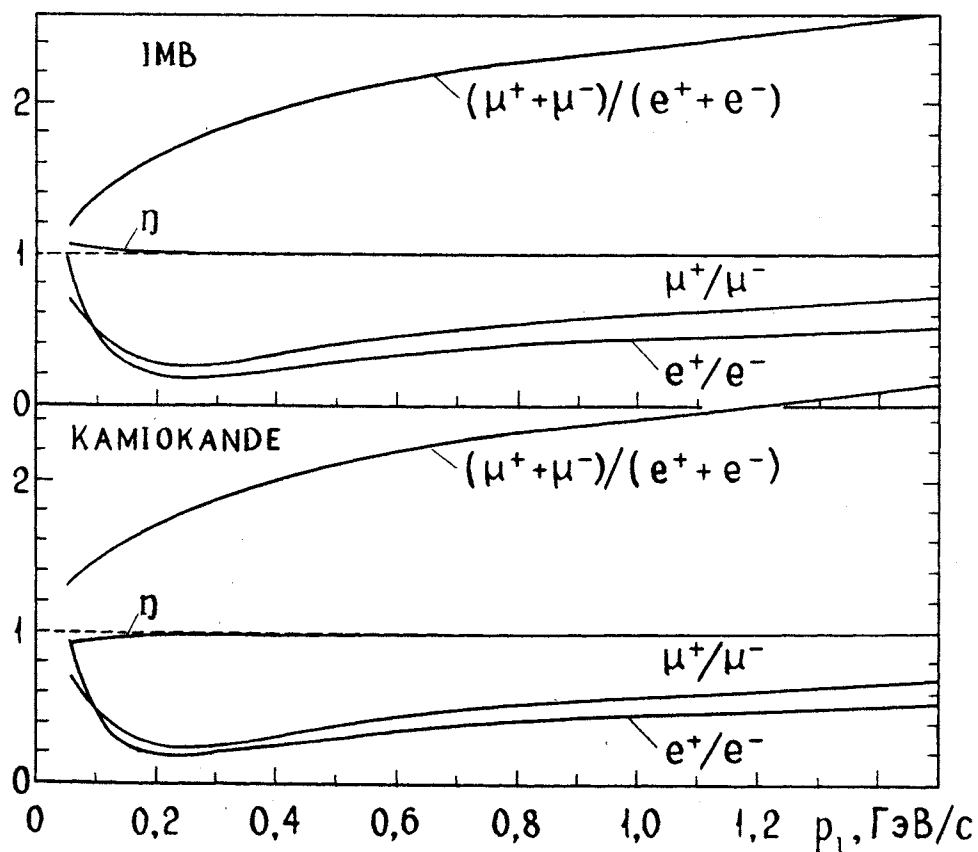


Рис.3.23. Относительные характеристики спектров мюонов и электронов, генерируемых НКЛ в водяной мишени.

регистрации не учитывалась¹⁷⁾.

Из сравнения теоретических кривых с экспериментом можно сделать лишь сугубо предварительные выводы. Для полного анализа необходима оценка вклада в однокольцевые события от многочисленных фоновых процессов, упомянутых в начале этого параграфа. Важнейшими из них являются CC - и NC -реакции типа

¹⁷⁾ Соответствующая поправка должна привести к смещению максимумов распределений в сторону больших импульсов.

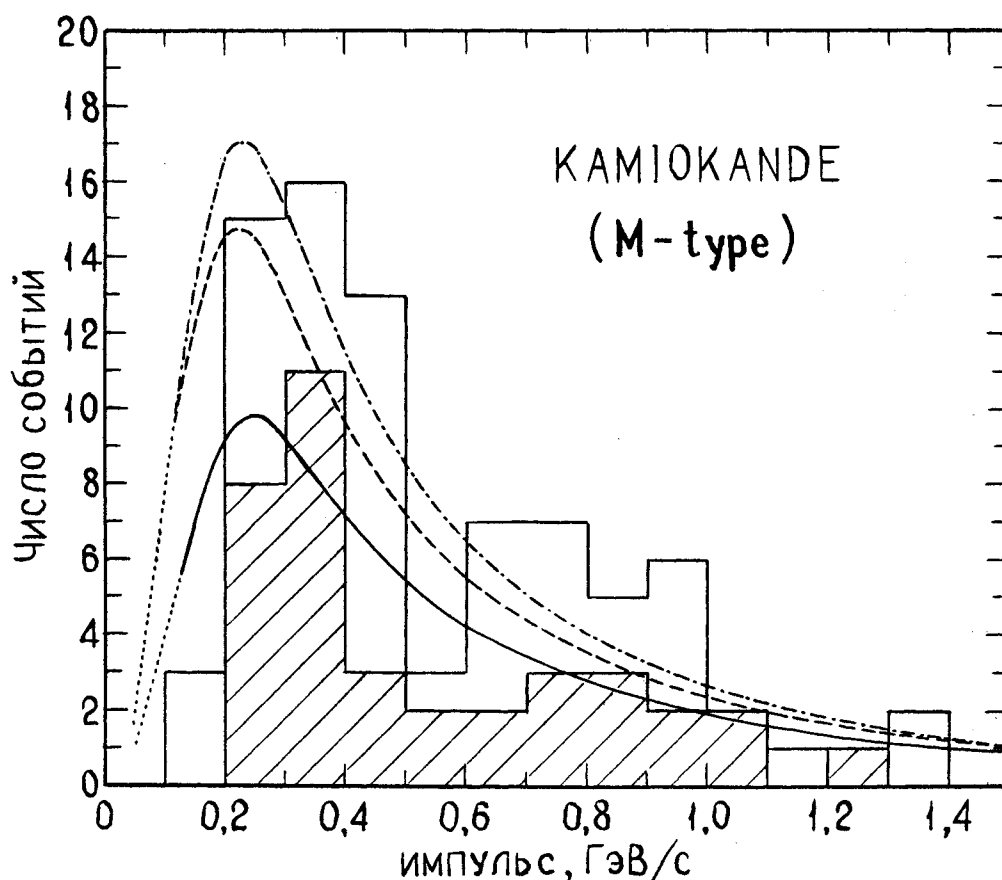


Рис. 3.24. Распределение по импульсам числа однокольцевых событий М-типа (в единицах $(100 \text{ МэВ/с})^{-1}$), наблюдаемое в детекторе KamioKande за 645 дней экспозиции (1,47 кт·год), согласно работе /176/. Заштрихованные участки гистограммы – события, сопровождавшиеся $\mu_{\text{ез}}$ – распадом. Расчетные кривые получены без учета эффективности регистрации; сплошная – мюоны от квазиупругих реакций НКЛ на водороде и кислороде (расчет по ФГ-модели /81/), штриховая – то же для реакции на свободных нуклонах ($10p+8n$), штрих-пунктирная – расчет по ФГ-модели со спектрами ν_{μ} и $\bar{\nu}_{\mu}$, приведенными в /67/ (усреднение по 11-летнему циклу СА)

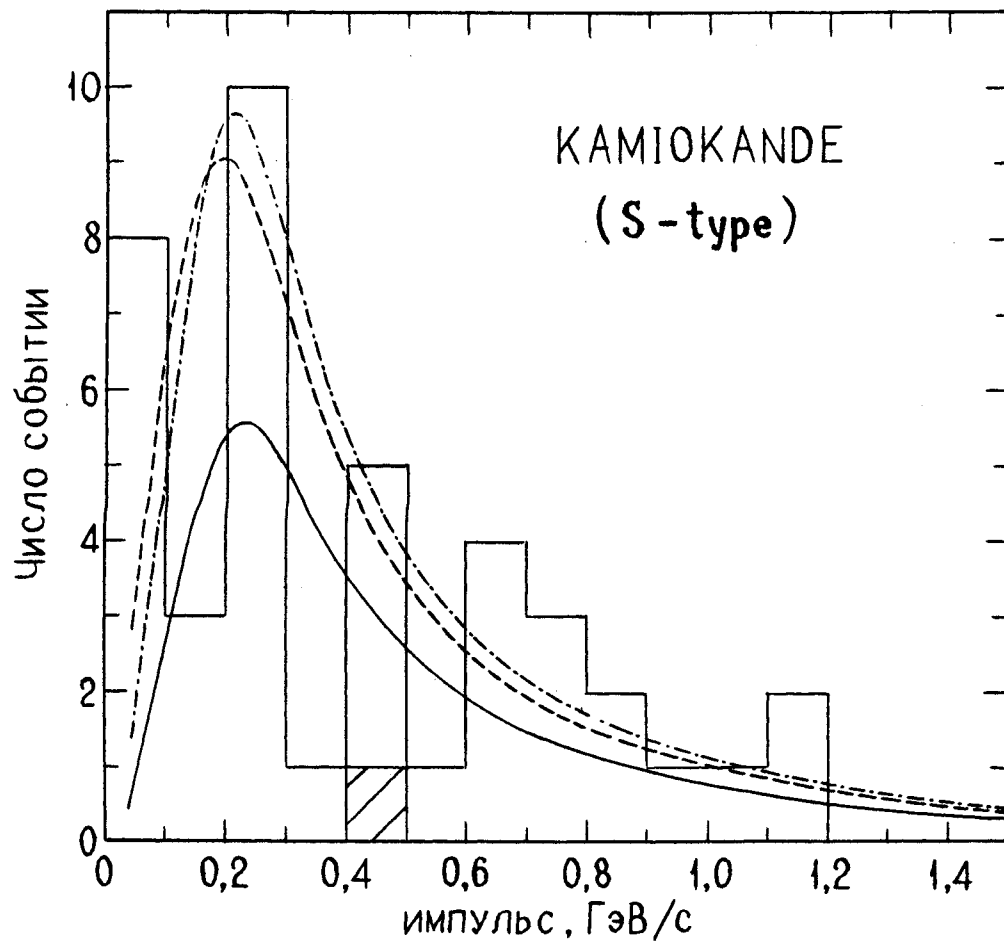


Рис. 3.25. Распределение по импульсам числа однокольцевых событий S-типа (в единицах $(100 \text{ МэВ/с})^{-1}$, наблюдаемое в детекторе Kamiokande за 645 дней. Кривые - расчет спектров e^+e^- . Обозначения аналогичны использованным на рис.3.24

$$\nu_{\mu} + N \rightarrow \mu + \pi + N', \quad \nu_l + N \rightarrow \nu_l + \pi + N', \quad (3.40)$$

имеющие относительно низкие пороги по энергии нейтрино (см. /12-16/). Для неупругих СС-реакций имеется ввиду кинематическая область, в которой мюон или пион приобретает энергию, меньшую его черенковского порога (160 и 211 МэВ соответственно) и распадается (поглощается) за пределами объема детектора. В случае реакции на связанном нуклоне, образовавшийся мягкий пион может поглощаться внутри ядра, имитируя тем самым квазиупругий процесс.

Электроны с импульсами $p_e \lesssim 100$ МэВ/с эффективно генерируются в $\mu_{\text{ез}}$ - распадах "невидимых" мюонов, как рождающихся в детекторе, так и атмосферного происхождения. В последнем случае необходим расчет низкоэнергетического участка спектра атмосферных мюонов, дошедших до глубины, на которой расположен детектор. Кроме того, электромагнитный ливень может быть инициирован распадами нейтральных мезонов, рождающихся в реакциях (3.40), на $\gamma\gamma$ или $e^+e^-\gamma$.

На важность учета фоновых процессов указывает 30-процентное превышение предсказываемого в /176/ (исходя из спектров НКЛ, рассчитанных в работах /58-61, 67/) числа $\mu_{\text{ез}}$ -распадов, сопровождающих однокольцевые события, над их наблюдаемым распределением, приведенным на рис.3.24, 3.25.

Если, наряду со сказанным, учесть, что $\Phi\Gamma$ -модель взаимодействия ν_l и $\bar{\nu}_l$ с ядром скорее всего занижает сечения $d\sigma_{\nu, \bar{\nu}}^b / dp_i$ в области малых значений Q^2 (см. например /174/), то можно заключить, что полученные в настоящей работе спектры НКЛ не противоречат имеющимся экспериментальным данным в пределах ожидаемой точности расчета ($\sim 20\%$).

Заключение

Перечислим основные результаты, полученные в диссертации.

1. Разработан аналитический метод решения системы КУ, описывающей перенос протонов и нейтронов КЛ средних энергий в атмосфере. Метод основан на представлении парциальных моментов $\Phi_j^{\pm}(E)$ в виде полиномов по обратным степеням полной энергии E и позволяет учесть нестепенной характер спектра и реальный химический состав первичного излучения, энергетическую зависимость инклюзивных сечений взаимодействия нуклонов и ядер с ядрами (отсутствие фейнмановского скейлинга), а также ионизационные потери энергии протонами (в приближении $dE/dh = \text{const}$). Исследована сходимость и устойчивость найденного решения. Получены простые формулы для отыскания коэффициентов аппроксимирующих полиномов по значениям моментов $\Phi_j^{\pm}$ в конечном числе точек E_n (Приложение 1). Построена точно решаемая модель нуклонного каскада, распространяющая метод на случай высоких энергий с логарифмически растущим неупругим сечением $\sigma_{NA}^{in}(s)$ (Приложение 2).

2. Разработан метод расчета геомагнитных поправок к спектрам вторичных нуклонов, основанный на сведении интегро-дифференциальных КУ с разрывным граничным условием к интегральным уравнениям для D -функций, связанных с эффективными коэффициентами поглощения. Исследованы особенности энергетических спектров протонов и нейтронов, обусловленные геомагнитными эффектами, а также зависимости интенсивностей вторичных нуклонов от глубины. Показано, в частности, что наблюдаемая на высотах (15-18) км изотропизация потоков протонов с энергиями ниже геомагнитного порога (при $\vartheta \leq 50^\circ$) объясня-

ется наличием у кривых поглощения максимума, в окрестности которого интенсивность слабо зависит от глубины.

3. Проведено детальное сравнение расчетных спектров нуклонов с экспериментальными данными для различных глубин в атмосфере и геомагнитных широт, при энергиях от (700–800) МэВ до сотен ГэВ. В результате сравнения можно сделать вывод, что изложенная в работе модель ядерно-каскадного процесса, с учетом геомагнитных эффектов, хорошо описывает всю совокупность данных по нуклонной компоненте КЛ средних энергий в области применимости одномерной теории переноса. Полученные результаты применяются для расчета спектров π – и К-мезонов.

4. Основываясь на решении одномерного КУ, с использованием реалистичной модели сферической неизотермической атмосферы и приближения постоянных энергетических потерь, выполнены расчеты спектров мюонной компоненты КЛ в интервале импульсов $(0,1 \div 100)$ ГэВ/с. Рассмотрена широтная зависимость мюонных потоков. Проведено подробное сопоставление результатов расчетов с большим массивом экспериментальных данных на высотах $(0 \div 30)$ км над у.м. при вертикальных жесткостях геомагнитного обрезания от 0,4 до ~ 14 ГВ. Рассчитанные спектры мюонов находятся в хорошем согласии с данными измерений в тропосфере и на уровне моря и не противоречат имеющимся данным в стратосфере и тропопаузе. Однако, фрагментарность и недостаточная статистическая обеспеченность экспериментов на больших высотах ($H > 10$ км) не позволяет получить надежную количественную оценку точности расчета интенсивностей мюонов низких энергий в стратосфере.

5. В рамках приближения "прямо-вперед" рассчитаны спект-

ры и зенитно-угловые распределения атмосферных нейтрино и антинейтрино от $\pi_{\mu 2}$ -, $K_{\mu 2}$ - и μ_{e3} -распадов при энергиях (0,1 - 10) ГэВ. Получены точные формулы для спектров НКЛ, учитывающие распределение ν ($\bar{\nu}$) по углу вылета в актах двухчастичных распадов мезонов, из которых следует, что в рассматриваемой области энергий учет трехмерности распадов не существен при малых зенитных углах (Приложение 4). Можно ожидать, что одномерное приближение с точностью лучшей $\pm 20\%$ применимо и для расчета спектров, усредненных по θ и φ . Усредненные характеристики потоков НКЛ рассчитаны для ряда подземных установок, способных работать в качестве "нейтринных телескопов".

6. Исследованы геомагнитные эффекты НКЛ. Показано, что влияние геомагнитного обрезания первичного спектра, вообще говоря, неодинаковое в случаях нейтрино и антинейтрино, существенно сказывается на низкоэнергетической области спектров и угловых распределениях ν и $\bar{\nu}$. Например, отношение вертикальных интенсивностей $\nu_{\mu} + \bar{\nu}_{\mu}$ на высоких широтах и экваторе достигает значения ~ 4 при $E_{\nu} = 100$ МэВ. Показано, что обусловленные геомагнитными эффектами различия усредненных спектров ν ($\bar{\nu}$), приходящих в детектор снизу и сверху, могут, в зависимости от расположения детектора, либо имитировать либо частично компенсировать результат возможного резонансного усиления нейтринных осцилляций в Земле. В то же время, относительные характеристики, типа $(\nu_{\mu}/\nu_e)^u/(\nu_{\mu}/\nu_e)^d$, почти не зависят от местоположения детектора, так что их измерение позволило бы изучать эффекты осцилляций в отсутствие фона от геомагнитных эффектов.

7. В рамках ферми-газовой модели ядра рассчитаны им-

пульсные спектры электронов и мюонов, генерируемых при квазиупругих взаимодействиях НКЛ с кислородом и водородом в черенковских детекторах распада протона IMB и Kamio-kande. Из сравнения результатов расчета (без учета эффективности регистрации и фоновых процессов) с распределениями однокольцевых событий M- и S-типов, наблюдаемых в детекторе Kamio-kande, можно заключить, что полученные в работе спектры НКЛ не противоречат эксперименту в пределах ожидаемой точности расчета.

Часть результатов диссертации докладывалась на XX Международной конференции по космическим лучам (Москва, 1987), Международной конференции по подземной физике (Москва, 1987), Японо-Американском совещании по физике и астрофизике мюонов и нейтрино космических лучей (Токио, 1986), Всесоюзной конференции по космическим лучам (Тбилиси, 1986), на сессиях ОЯФ АН СССР 1983–1986 гг., а также на научных семинарах ИЯИ АН СССР, ФИАН им. П. Н. Лебедева, ИЯФ СО АН СССР, НИИ ПФ ИГУ. Основные результаты опубликованы в работах /68–71, 73, 104–106, 116, 139, 140/.

В заключение благодарю Э. В. Бугаева, который ввел меня в круг затронутых в диссертации проблем и чье влияние на эволюцию моих научных интересов было решающим. Я глубоко признателен Г. В. Домогацкому за руководство работой, постоянную поддержку и стимулирующие обсуждения.

Я благодарен коллективам кафедры теоретической физики Иркутского университета, отдела ЭЧНА НИИ ПФ ИГУ и лаборатории НАВЭ ИЯИ АН СССР за товарищескую атмосферу, столь важную для плодотворной работы.

Приложение I. Аппроксимация парциальных моментов
по методу наименьших квадратов

Пусть $\Phi(E)$ — некоторый парциальный момент (индексы j и μ для простоты будем опускать), заданный в точках $E_0, E_1, \dots, E_N$, а $z_0, z_1, \dots, z_M$ ($M < N$) — параметры, минимизирующие квадратичную форму

$$R = \sum_{n=0}^N \left[\Phi(E_n) - \sum_{m=0}^M z_m (E_N/E_n)^m \right]^2.$$

Тогда

$$\Phi(E) \approx \sum_{m=0}^M (z_m E_N^m) E^{-m} = \sum_{m=0}^M z_m v^m, \quad v = E_N/E, \quad (\text{П.1})$$

где символ " $\approx$ " означает равенство в смысле метода наименьших квадратов. Ниже будут получены явные выражения для коэффициентов z_m ($\sim z_{jm}^\mu$) в частном случае, когда функции $\Phi(E)$ заданы на равномерной по $(1/E)$ сетке

$$1/E_n = n/(NE_N), \quad n = 0, 1, \dots, N$$

(т.о. E_N — есть нижняя граница аппроксимации (П.1)). Поскольку при высоких энергиях функция $\Phi(E)$ слабо меняется с энергией (предельная фрагментация), то в качестве асимптотики $\Phi(E)$ при $E=E_0=\infty$ достаточно взять значение Φ в некоторой точке $E = E_{\max} \gg E_1$. Т.о. E_1 — есть верхняя граница аппроксимации. Представим правую часть (П.1) в виде

$$\sum_{m=0}^M z_m v^m = \sum_{m=0}^M \alpha_m t^m(Nv), \quad (\text{П.2})$$

где $t^m(x) \equiv t_N^m(x)$ — полиномы Чебышева для равноотстоящих точек, ортонормированные на промежутке $[0, N]$:

$$\sum_{n=0}^N t^k(n) t^l(n) = \delta_{kl}. \quad (\text{П.3})$$

Воспользуемся явным видом $t^m(x)$ (см., например, /177/, стр.598)

$$t^m(x) = \sum_{l=0}^m \tau_l^m x^{[l]},$$

$$x^{[l]} = \Gamma(x+1) / \Gamma(x-l+1), \quad (\text{П.4})$$

$$\tau_l^m = (-1)^l (N-l)! \binom{m}{l} \binom{m+l}{l} \left[\frac{2m+1}{(N-m)!(N+m+1)!} \right]^{1/2}.$$

Поскольку $x^{[l]}$ есть производящая функция для чисел Стирлинга 1-го рода S_k^l ,

$$x^{[l]} = \sum_{k=0}^l S_k^l x^k$$

(см. /177/, стр.626), то из (П.4) находим

$$t^m(x) = \sum_{l=0}^m \tau_l^m x^l, \quad \tau_l^m = \sum_{k=l}^m \tau_k^m S_l^k. \quad (\text{П.5})$$

С помощью (П.2) и (П.5) получаем связь

$$z_m = N^m \sum_{l=m}^M \alpha_l \tau_m^l. \quad (\text{П.6})$$

Т.к., в силу (П.3), минимум квадратичной формы

$$R = \sum_{n=0}^N \left[\Phi(E_n) - \sum_{m=0}^M \alpha_m t^m(n) \right]^2$$

реализуется при

$$\alpha_m = \sum_{n=0}^N t^m(n) \Phi(E_n),$$

то, с помощью (П.5) и (П.6), получаем окончательно

$$z_m = N^m \sum_{k=m}^M \sum_{l=0}^k \tau_m^k \tau_l^k \tau_l^l, \quad (\text{П.7})$$

где обозначено

$$F^l = \sum_{n=0}^N n^l \Phi(E_n), \quad E_n = (N/n) E_N.$$

Частные случаи формулы (П.7) для $M \leq 2$ приводятся в работе /105/

В наших расчетах для разных энергетических областей используются различные формы аналитического представления экспериментальных данных о двойных дифференциальных сечениях N_A - взаимодействий. Для сшивания парциальных моментов на границах этих областей мы применяем процедуру сглаживания функций локальными В-сплайнами второй степени, что позволяет рассчитать моменты на равномерной по $1/E$ сетке и использовать полученные выше формулы.

Отметим наконец, что равенство (П.1) имеет смысл, если коэффициенты z_m не зависят от N , начиная с некоторых значений N . Точнее говоря, должно существовать такое число $N_0 > M$, что при $N \geq N_0$ изменение N влечет изменения коэффициентов z_m ($m = 0, 1, \dots, M$) на величину, не превышающую некоторого заданного значения $\delta > 0$. Фактически оказывается, что $N \sim 10$ достаточно для стабилизации z_m с ошибкой меньшей $(0,1 \div 0,2)\%$. Устойчивость решения системы КУ, полученного в основном тексте, по отношению к малым вариациям параметров z_{jm}^K , а также по отношению к изменению интервала минимизации (E_N, E_1) проверялась численно.

Приложение 2. Модель нуклонного каскада
при высоких энергиях

Рассмотрим модель нуклонного каскада при высоких энергиях, основанную на представлении (1.14) в его простейшем варианте. Решение этой задачи может быть полезно при анализе нарушения Фейнмановского скейлинга в экспериментах с космическими лучами.

Для простоты ограничимся случаем однородной системы КУ (1.1) со степенным первичным спектром, полагая

$$p(E, 0) = p_0(E) = \tilde{C}_p (E_1/E)^{\gamma+1},$$

$$n(E, 0) = n_0(E) = \tilde{C}_n (E_1/E)^{\gamma+1},$$

где $\tilde{C}_p$, $\tilde{C}_n$, γ и E_1 — константы. Примем далее, что при $E > E_0 \sim 10^2 \text{ ГэВ}$ неупругое NA -сечение имеет вид

$$\sigma_{NA}^{in}(E) = \sigma_0 [1 + \alpha \ln(E/E_0)], \quad \sigma_0 \equiv \sigma_{NA}^{in}(E_0).$$

Зависимость такого вида используется многими авторами (см. ссылки в работах /104, 110/) и не противоречит имеющимся экспериментальным данным вплоть до $E \sim 3 \cdot 10^{10} \text{ ГэВ}$ ($\sqrt{s} \sim 240 \text{ ТэВ}$!) /178/. Теоретические аргументы в пользу логарифмического роста $\sigma_{NA}^{in}(E)$, основанные на концепции кратного померона с надкритическим интерсептом в рамках u -матричного подхода, а также сравнение с экспериментом приводятся в работе /104/.

В соответствии с (1.14) предположим, что нарушение скейлинга в реакциях $N + A \rightarrow N' + X$ может быть параметризовано следующим образом

$$x (d\sigma_{pp}/dx \pm d\sigma_{np}/dx) = \sigma_0 [\omega_0^\pm(x) + \omega_8^\pm(x) (E_0/E)^\delta], \quad (\text{П.8})$$

где δ — неотрицательное число. Подобная параметризация, осно-

ванная на анализе ускорительных данных по модели Редже-Мюллера, предлагалась ранее в работе /179/ (см. также /180/).

Решение уравнений (1.1) будем искать в виде ($\beta_p \equiv 0$, разумеется)

$$p(E, h) \pm n(E, h) = [p_0(E) \pm n_0(E)] \exp[-h/\lambda_n(E)] \psi^\pm(E, t),$$

где $\lambda_n(E) = \lambda_0 / [1 + \alpha \ln(E/E_0)]$, $\lambda_0 = 1/(N_0 \sigma_0)$, $t = h/\lambda_0$.

Для функций $\psi^k(E, t)$ имеем два независимых уравнения:

$$\partial \psi^k(E, t) / \partial t = \int_0^1 dx x^{\gamma + \alpha t - 1} \omega^k(x, E) \psi^k(Ex^{-1}, t).$$

Представляя $\psi^k(E, t)$ в виде формального ряда

$$\psi^k(E, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n^k(t) (E_0/E)^{\delta n} \quad (\text{II.9})$$

(его сходимость доказана в /105/) и используя предположение (II.8), приходим к цепочке обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} & \left[d/dt - \int_0^1 dx x^{\gamma + \alpha t + \delta n - 1} \omega_0^k(x) \right] \psi_n^k(t) = \\ & = \theta(n) \psi_{n-1}^k(t) \int_0^1 dx x^{\gamma + \alpha t + \delta(n-1) - 1} \omega_\delta^k(x) \end{aligned}$$

с граничными условиями $\psi_n^k(0) = \delta_{n0}$. Решая эти уравнения, найдем

$$\psi_n^k(t) = \delta_{n0} \exp[\varphi_0^k(t)] + \quad (\text{II.10})$$

$$\theta(n) \int_0^1 dx A_{n-1}^k(x) \int_0^t dy x^{\alpha y} \psi_{n-1}^k(y) \exp[\varphi_n^k(t) - \varphi_n^k(y)].$$

Здесь использованы обозначения:

$$\varphi_n^k(t) = \int_0^1 dx x^{\gamma + \delta n - 1} [(x^{\alpha t} - 1) / \alpha \ln x] \omega_0^k(x), \quad (\text{II.11})$$

$$A_n^H(x) = x^{\gamma+\delta n-1} \omega_0^H(x).$$

Полученное решение значительно упрощается, если глубина не слишком велика. В самом деле, разлагая подынтегральное выражение (II.11) по t , имеем

$$\begin{aligned} \varphi_n^H(t) &= \int_0^1 dx x^{\gamma+\delta n-1} \omega_0^H(x) \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha \ln x)^k t^{k+1} / (k+1)! \approx \\ &\approx z_n^H t - (\alpha/2) \tilde{z}_n^H t^2 + O(\alpha^2 t^3), \end{aligned}$$

где обозначено

$$z_n^H = \int_0^1 dx x^{\gamma+\delta n-1} \omega_0^H(x), \quad \tilde{z}_n^H = - \int_0^1 dx x^{\gamma+\delta n-1} \ln x \omega_0^H(x).$$

Следовательно, при выполнении условия

$$t \ll t_n = (2/\alpha)(z_n^H / \tilde{z}_n^H)$$

можно положить приближенно

$$\varphi_n^H(t) \approx z_n^H t. \quad (\text{II.12})$$

Если функции $\omega_0^H(x)$ достаточно гладкие, то $z_n^H / \tilde{z}_n^H \sim \gamma + \delta n$

Поскольку $\alpha \approx (0,06 - 0,07) / 104$, видно, что все t_n достаточно велики :

$$t_n \geq t_0 \sim 2\gamma/\alpha \geq 50.$$

Используя приближение (II.12), получаем последовательно :

$$\psi_0^H(t) = \exp(z_0^H t),$$

$$\psi_1^H(t) = \int_0^1 dx A_0^H(x) \frac{x^{\alpha t} \exp(z_0^H t) - \exp(z_1^H t)}{z_0^H - z_1^H + \alpha \ln x},$$

$$\psi_2^H(t) = \int_0^1 dx A_1^H(x) \int_0^1 dy A_0^H(y) (z_0^H - z_1^H + \alpha \ln y)^{-1}.$$

$$\left\{ \frac{(xy)^{\alpha t} \exp(z_0^H t) - \exp(z_2^H t)}{z_0^H - z_2^H + \alpha \ln(xy)} - \frac{x^{\alpha t} \exp(z_1^H t) - \exp(z_2^H t)}{z_1^H - z_2^H + \alpha \ln x} \right\}$$

и т.д.. Первый член разложения (П.9), отвечающий случаю точного скейлинга, приводит к формулам :

$$\left\{ \begin{array}{l} p(E, h) \\ n(E, h) \end{array} \right\} = \frac{p_0 + n_0}{2} \exp \left[-\frac{h}{\Lambda^+(E)} \right] \pm \frac{p_0 - n_0}{2} \exp \left[-\frac{h}{\Lambda^-(E)} \right],$$

$$1/\Lambda^\pm(E) = 1/\lambda_N(E) \pm z_0^\pm / \lambda_0$$

(Аналогичные формулы были получены в /116/ методом (1-x)-разложений). Остальные члены ряда (П.9) учитывают поправки, обусловленные зависимостью ω^h от энергии. В качестве иллюстрации приведем простой, но важный пример :

$$\omega_g^h(x) = W^h x^p \quad (W^h, p = \text{const})$$

Если $\gamma + p > 0$, то нетрудно получить явное выражение для ψ_1^h :

$$\psi_1^h(t) = (W^h/\alpha) \exp(z_1^h t - \xi^h) [Ei(\xi^h - z_1^h t) - Ei(\xi^h)],$$

где $\xi^h = (1/\alpha)(\gamma + p)(z_0^h - z_1^h)$, а $Ei(x)$ - интегральная показательная функция.

На больших глубинах (которые реализуются при движении частиц в направлениях близких к горизонтальному) нужно пользоваться точными выражениями (П.10).

Приложение 3. Влияние энергетических потерь на спектры π - и K -мезонов в атмосфере

Оценим поправку к спектру мезонов, обусловленную их ионизационными потерями энергии, ограничившись приближением изотермической атмосферы и постоянной скорости потерь: $T = T_s = \text{const}$, $\beta = |dE/dh| = \text{const}$. Интерес представляет область небольших импульсов, при которых доля энергии, теряемой на ионизацию, велика ($\epsilon = \beta h/E \approx 1$). Поэтому будем считать выполненным следующее условие:

$$\xi = \frac{p_M^c \sec \vartheta^*}{p_h} \gg 1 \quad (\text{П.13})$$

(обозначения см. в основном тексте). При условии (П.13) ядерным взаимодействием можно пренебречь. Тогда спектр M будет описываться формулами вида (3.19 - 3.25), в которых следует положить $\alpha = 0$ и сделать замены: $G_\mu \rightarrow G_M$, $m_\mu \rightarrow m_M$, $p_\mu^c \rightarrow p_M^c$. Действуя по аналогии с § 3.1 нетрудно получить:

$$M(E, h, \vartheta) \approx (z+1) \int_0^1 dx \left\{ \frac{x}{1 + \epsilon(1-x)} \left[1 - \frac{m_M^2 \epsilon(1-x)}{\omega^2(E, h, x, h)} \right] \right\}^\xi M(E, h, \vartheta) \Big|_{\beta=0}$$

Отсюда следует ограничение

$$\begin{aligned} \frac{M(E, h, \vartheta)}{M(E, h, \vartheta) \Big|_{\beta=0}} &\equiv \frac{M_\beta}{M_0} \leq \frac{z+1}{(\epsilon+1)^\xi} \int_0^1 dx x^\xi \left(1 - \frac{\epsilon x}{\epsilon+1} \right)^{-\xi} = \\ &= \frac{z+1}{(\epsilon+1)(\xi+1)} F\left(1, 2, \xi+2; \frac{\epsilon}{\epsilon+1}\right). \end{aligned}$$

Оставляя два первых члена ряда Гаусса для $F(\dots)$, имеем:

Приложение 4. Общие формулы для нейтринных спектров с учетом распределения нейтрино по углу вылета в двухчастичных распадах мезонов.

Пусть θ и φ -зенитный и азимутальный углы, определяющие направление прихода нейтрино в точку наблюдения P_0 на поверхности Земли, ξ и χ -соответствующие углы в точке генерации P_H на высоте H ($\sin \theta = (1+H/R_E) \sin \xi$), а ξ_0 и χ_0 -зенитный и азимутальный углы, под которыми попадают в точку P_H мезоны (см. рис. I). Найдем интенсивность нейтрино, рождающихся при распаде мезонов (для определенности - пионов) в объеме,

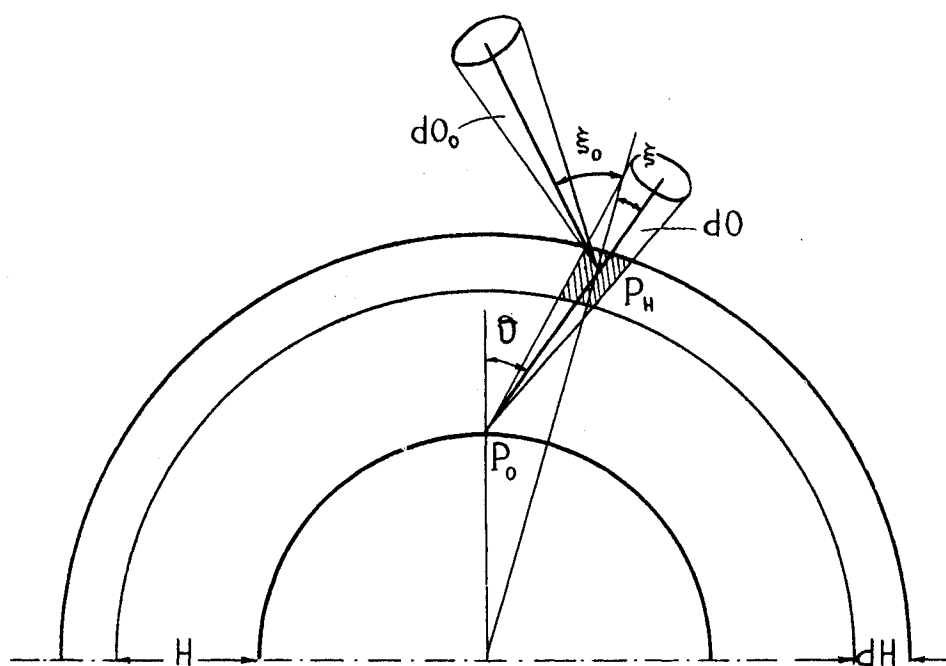


Рис. I.

ограниченном шаровым слоем толщиной dH на высоте H и телесным углом $d\Omega = d\cos \theta d\varphi$ с вершиной в точке P_0 (заштрихованная область на рис. I).

В произвольном бесконечно малом объеме dV за единицу

времени распадается

$$(m_{\pi}/\tau_{\pi} \rho_0) \pi(E_0, H; \xi_0, \chi_0) dE_0 d\theta_0 dV \equiv \delta\pi$$

пионов с энергиями от E_0 до $E_0 + dE_0$, распространяющихся в телесном угле $d\theta_0 = d\cos\xi_0 d\chi_0$. Пусть $\omega_{\pi}(E, E_0, \alpha)$ — распределение нейтрино в $\pi_{\mu 2}$ -распаде по энергии E и углу вылета α , а B_{π} — относительная вероятность распада. Из объема dV за единицу времени в единичном телесном угле вылетает $B_{\pi} \omega_{\pi} \delta\pi dE$ нейтрино с энергиями в интервале $(E, E+dE)$ в направлении (ξ, χ) , причем

$$\cos\alpha = \cos\xi \cos\xi_0 + \sin\xi \sin\xi_0 \cos(\chi - \chi_0). \quad (\text{П.17})$$

Из них на площадку dS , расположенную в точке P_0 перпендикулярно потоку ν попадает $B_{\pi} \omega_{\pi} \delta\pi dE dS/L^2$ нейтрино, где $L = (R_E + H) \cos\xi - R_E \cos\theta$ — расстояние между P_0 и P_H . Поскольку $dV = L^2 \sec\xi dH d\theta$ то, интегрируя по кинематически допустимой области энергий и направлений пионов, получаем следующее выражение для скорости изменения спектра ν с высотой:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \nu}{\partial H} &= - \int \frac{B_{\pi} \omega_{\pi} \delta\pi dE dS/L^2}{dS d\theta dE dH} = \\ &= - \int \frac{B_{\pi} m_{\pi}}{\tau_{\pi} \rho_0 \cos\xi} \omega_{\pi}(E, E_0, \alpha) \pi(E_0, H; \xi_0, \chi_0) dE_0 d\theta_0. \end{aligned} \quad (\text{П.18})$$

Из кинематики $\pi_{\mu 2}$ -распада следует

$$\begin{aligned} \omega_{\pi}(E, E_0, \alpha) &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{m_{\pi}}{2\rho_0 E^*} \right) \delta \left(\cos\alpha - \frac{EE_0 - m_{\pi} E^*}{E\rho_0} \right), \\ E_0^{\min} &= \frac{m_{\pi}}{2} \left(\frac{E}{E^*} + \frac{E^*}{E} \right), \quad E_0^{\max} = \infty, \quad E^* = \frac{m_{\pi}^2 - m_{\mu}^2}{2m_{\pi}} \end{aligned} \quad (\text{П.19})$$

(здесь звездочка помечает систему покоя пиона), так что одно из интегрирований в (II.18) можно снять. Ограничимся ниже случаем $E > E^* \simeq 29,8$ МэВ. При этом, согласно (II.19), $0 \leq \alpha < \pi/2$ (нейтрино в л.с. вылетает только в переднюю полусферу). С помощью (II.17) можно преобразовать выражение (II.19) для ω_π к виду

$$\omega_\pi = (m_\pi / 2E^* p_0) \left\{ \theta(\alpha - \xi) x^\pm \delta(\cos \xi_0 - \cos \xi_0^\pm) + \right. \\ \left. + \theta(\xi - \alpha) \theta(D) \theta(\cos \omega) \sum_{\pm} x^\pm \delta(\cos \xi_0 - \cos \xi_0^\pm) \right\}, \quad (\text{II.20})$$

где введены обозначения :

$$\begin{cases} \cos \xi_0^\pm = \frac{\cos \alpha \cos \xi \mp \sin \xi \cos \omega \sqrt{D}}{1 - \sin^2 \xi \sin^2 \omega}, \\ \sin \xi_0^\pm = \frac{\cos \alpha \sin \xi \cos \omega \pm \cos \xi \sqrt{D}}{1 - \sin^2 \xi \sin^2 \omega}, \end{cases} \quad (\text{II.21})$$

$$x^\pm = \frac{1}{2\pi} \left| \frac{\partial \cos \alpha}{\partial \cos \xi_0} \right|_{\xi_0 = \xi_0^\pm}^{-1} = \frac{\sin \xi_0^\pm}{2\pi \sqrt{D}}, \quad (\text{II.22})$$

$$D = \sin^2 \alpha - \sin^2 \xi \sin^2 \omega, \quad \omega = \chi - \chi_0,$$

$$\cos \alpha = (EE_0 - m_\pi E^*) / (p_0 E). \quad (\text{II.23})$$

Подставляя (II.20) в (II.18) получаем окончательное выражение для спектра нейтрино на у.м. от $\pi_{\mu 2}$ -распадов :

$$\nu(E, \vartheta, \varphi) = \\ = \int_0^\infty \frac{dN \rho(H)}{\cos \xi} \int_{E_{\min}}^\infty dE_0 \frac{B_\pi m_\pi}{2E^* p_0} F(E_0, H; \xi, \chi, \alpha) \quad (\text{II.24})$$

где

$$F = \theta(\alpha - \xi) F_0 + \theta(\xi - \alpha) \sum_{\pm} F_{\pm}, \quad (\text{II.25})$$

$$F_0 = \int_0^{2\pi} d\omega \, \varkappa^+ \frac{m_{\pi}}{\tau_{\pi} \rho_0 \rho(H)} \mathcal{T}(E_0, H; \xi_0^+, \chi - \omega), \quad (\text{II.26})$$

$$F_{\pm} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\omega \, \theta(D) \varkappa^{\pm} \frac{m_{\pi}}{\tau_{\pi} \rho_0 \rho(H)} \mathcal{T}(E_0, H; \xi_0^{\pm}, \chi - \omega). \quad (\text{II.27})$$

Рассмотрим область энергий нейтрино, для которых выполняется условие $E_0^{\min} \ll p_{\pi}^C$. В этом случае, несмотря на бесконечный верхний предел интегрирования по E_0 в (II.24) можно считать (см. § 3.1), что

$$\mathcal{T}(E_0, H; \xi_0, \chi_0) = \tau_{\pi} m_{\pi}^{-1} \rho_0 \rho(H) G_{\pi}(E_0, h[H, \xi_0]; R_c). \quad (\text{II.28})$$

Здесь G_{π} — функция генерации пионов ядрами и нуклонами КЛ, а $h[H, \xi_0]$ — глубина атмосферы выше уровня H вдоль направления ξ_0 , равная

$$h[H, \xi_0] = \int_H^{\infty} \frac{\rho(H') dH'}{\cos \xi'_0},$$

$$\xi'_0 = \arcsin \left[\left(\frac{R_E + H}{R_E + H'} \right) \cdot \sin \xi_0 \right] \quad (R_E = 6368 \text{ км}).$$

Таким образом, при $E^* < E \ll 2E^* p_{\pi}^C / m_{\pi}$ получаем:

$$F_0 = \int_0^{2\pi} d\omega \, \varkappa^+ G_{\pi}(E_0, h[H, \xi_0^+]; R_c), \quad (\text{II.29})$$

$$F_{\pm} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\omega \theta(D) \mathfrak{x}^{\pm} G_{\pi} (E_0, h[N, \xi_0^{\pm}]; R_c). \quad (\text{П.30})$$

С помощью этих выражений очень просто проследить переход к одномерному приближению, используемому в основном тексте. Поскольку на высотах эффективной генерации нейтрино функции источников π -мезонов слабо зависят от h , то, считая угол вылета нейтрино α малым, можно положить в (П.29) и (П.30) $h[N, \xi_0^{\pm}] \approx h[N, \xi]$ и считать, что $R_c \approx R_c^0(\lambda, \psi; \vartheta, \varphi)$ (при больших зенитных углах последнее приближение является довольно грубым для областей близких к геомагнитному экватору). Вычисляя с помощью (П.21-П.23) оставшиеся интегралы от якобианов $\mathfrak{x}^{\pm}$ получаем:

$$F_0 \approx G_{\pi}(E_0, h[N, \xi]; R_c),$$

$$F_{\pm} \approx [1/2 \pm (1/\pi) \arctg(\tg \alpha \cdot \tg \xi)] G_{\pi}(E_0, h[N, \xi]; R_c),$$

откуда

$$\nu(E, \vartheta, \varphi) = \int_0^{h[0, \vartheta]} dh \int_{E_{\min}}^{\infty} dE_0 \frac{B_{\pi}}{p_0} \left(1 - \frac{m_{\pi}^2}{m_{\mu}^2}\right)^{-1} G_{\pi}(E_0, h; R_c)$$

что, с учетом (П.28), совпадает с формулами § 3.3.

В случае вертикального спектра нейтрино и не слишком больших значений R_c^0 легко получить точное выражение для F , не содержащее интегрирования по ω . Действительно, при $\vartheta = 0^\circ$

$$\xi = 0, \quad \xi^+ = \alpha, \quad \mathfrak{x}^+ = 1$$

и, согласно (П.25) и (П.29),

$$F = G_{\pi}(E_0, h[N, \alpha]; R_c).$$

При $E=100$ МэВ максимальный угол вылета нейтрино в $\pi_{\mu 2}$ -распаде равен $\alpha_{\max} = \arcsin(E^*/E) \approx 17,3^\circ$ и, следовательно, $h[N, \alpha]/h[N, 0] - 1 < 0,048$. Простая оценка показывает, что в этом случае одномерное приближение приводит к результату,

отличающемуся от точного менее чем на 1%. Заметим, что даже при $\lambda = 0$ (геомагнитный экватор) эффективная жесткость обреза $R_c(\lambda, \psi; \xi_0, \chi_0)$ при $\xi_0 < 18^\circ$ изменяется в интервале от $\sim 0,87 R_c^0$ до $\sim 1,18 R_c^0$. В этих пределах зависимость G_{π} от R_c на высотах эффективной генерации лептонов практически не существенна. Таким образом, одномерное приближение применимо для расчета вертикальных спектров ν при $E \gtrsim 100$ МэВ на всех геомагнитных широтах.

Приложение 5. Аппроксимации усредненных по направлениям спектров НКЛ для детекторов IMB и Kamiokande.

На интервале энергий (0,05 + 20) ГэВ дифференциальные энергетические спектры НКЛ в минимуме СА, усредненные по верхней (нижней) полусфере или по всем направлениям прихода можно аппроксимировать выражением вида (3.35):

$$\nu(E) = \nu(E_0) (E_0/E)^{\gamma_\nu + \alpha_\nu(E) \ln(E/E_0)}, \quad (\text{П.31})$$

$$\alpha_\nu(E) = \theta(E_0 - E) \alpha_\nu^1 + \theta(E - E_0) \alpha_\nu^2, \quad E_0 = 1 \text{ ГэВ}.$$

Параметры (П.31) для детекторов IMB и Kamiokande представлены в таблице 1 и 2.

ν	$\nu(E_0), (\text{м}^2 \cdot \text{с} \cdot \text{ср} \cdot \text{ГэВ})^{-1}$	γ_ν	α_ν^1	α_ν^2
усреднение по верхней полусфере				
ν_μ	163	2,40	0,256	0,099
$\bar{\nu}_\mu$	161	2,44	0,272	0,121
ν_e	77,2	2,53	0,284	0,180
$\bar{\nu}_e$	54,1	2,55	0,284	0,180
усреднение по нижней полусфере				
ν_μ	142	2,21	0,244	0,160
$\bar{\nu}_\mu$	139	2,25	0,255	0,181
ν_e	66,1	2,33	0,263	0,240
$\bar{\nu}_e$	47,8	2,38	0,273	0,234
усреднение по всем направлениям				
ν_μ	152	2,31	0,247	0,127
$\bar{\nu}_\mu$	150	2,36	0,261	0,148
ν_e	71,6	2,44	0,271	0,207
$\bar{\nu}_e$	51,0	2,47	0,276	0,205

Табл.1. Параметры аппроксимационной формулы (П.31) для спектров НКЛ в детекторе IMB.

Точность аппроксимации лучше 2,5% в случае IMB и 4% в случае Kamiokande. Для получения интегральных спектров можно ис-

пользовать выражение аналогичное (3.36).

ν	$\nu (E_0), (m^2 \cdot c \cdot \text{ср} \cdot \text{ГэВ})^{-1}$	γ_ν	α_ν^1	α_ν^2
усреднение по верхней полусфере				
ν_μ	123	2,00	0,252	0,231
$\bar{\nu}_\mu$	118	2,03	0,258	0,250
ν_e	54,9	2,10	0,258	0,308
$\bar{\nu}_e$	41,4	2,18	0,275	0,296
усреднение по нижней полусфере				
ν_μ	131	2,13	0,235	0,179
$\bar{\nu}_\mu$	127	2,17	0,244	0,198
ν_e	59,5	2,25	0,249	0,255
$\bar{\nu}_e$	43,8	2,30	0,262	0,251
усреднение по всем направлениям				
ν_μ	127	2,07	0,239	0,204
$\bar{\nu}_\mu$	123	2,10	0,247	0,223
ν_e	57,2	2,18	0,249	0,281
$\bar{\nu}_e$	42,6	2,24	0,265	0,273

Табл.2. Параметры аппроксимационной формулы (П.31) для спектров НКЛ в детекторе KamioKande.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алексеев Е.Н., Бакатанов В.Н., Буткевич А.В. и др. Ограничение на время жизни протона по данным Баксанского подземного СПИНТИЛЛЯЦИОННОГО телескопа // Письма в ЖЭТФ. 1981. Т.33, вып.12. С.664-667.
2. Cherry M.L., Deakynе M., Lande K. et al. Experimental test of baryon conservation : a new limit on the nucleon lifetime // Phys.Rev.Lett. 1981. V.47, N.21. P.1507-1510.
3. Park H.S., Blewitt G., Cortez B.G. et al. Experimental limits on monopole catalysis, $n\bar{n}$ oscillations, and nucleon lifetimes // Nucl.Phys. 1985. V.B252, N.1,2. P.261-276.
Seidel S., Bionta R.M., Blewitt G. et al. Recent results from the IMB nucleon decay experiment // Proc. of the 20th Cosmic Ray Conf.Moscow, 1987. V.6. P.346-349.
4. Koshiha M. KAMIOKA nucleon decay experiment // Nuovo Cim. 1986. V.9C, N.2. P.141-158.
5. Bareyre P., Barloutaud R., Behr L. et al. Status of the Frejus experiment and preliminary results on contained events // ibid. P.159-166.
6. Krishnaswamy M.R., Menon M.G.K., Mondal N.K. et al. Results from the KGF proton decay experiment // ibid. P.167-181.
7. Battistoni G., Campana P., Chiarella V. et al. Contained events in the Mont-Blanc nucleon stability experiment // ibid. P.182-184.
8. Aglietta M., Badino G., Bologna G.F. et al. Results of the Liquid Scintillation Detector of the Mont-Blanc Laboratory // ibid. P.185-195.
9. Alberini C., Bari G., Basile M. et al. The Large-Volume Detector (LVD) of the Gran Sasso Laboratory // ibid. P.237-261.

10. Bartelt J., Courant H., Heller K. et al. Monopole-flux and proton-decay limits from the Soudan I detector // Phys.Rev. 1987. V.D36, N.7. P.1990-2000.
11. Ambats I., Ayres D., Barrett W. et al. Initial results from the Soudan II experiment // Proc. of the 20th Intern.Cosmic Ray Conf.Moscow, 1987. V.6. P. 246-249.
12. Rein D. Neutrino-induced pion production and proton decay // Phys.Rev. 1983. V.D28, N.7. P.1800-1801.
13. Derrick M., Musgrave B., Ammar R. et al. Two- and three - pion production by $\nu_\mu d$ reaction near threshold : the implications for nucleon-decay experiments // Phys.Rev. 1984. V.D30, N.7. P.1605-1608.
14. Battistoni G., Bellotti E., Bologna G. et al. An experimental study of the neutrino background in underground experiments on nucleon decay // Nucl.Instruments and Methods in Phys.Res. 1984. V.219. P.300-310.
15. Berezinsky V.S., Castagnoli C., Ryazhskaya O.G., Saavedra O. On the possibility of a search for a supersymmetric channel of proton decay $p \rightarrow K^+ \bar{\nu}$, with lifetime around 10^{33} years // Nucl.Phys. 1985. V.B262, N.3. P.383-392.
16. Haines T.J., Bionta R.M., Blewitt G. et al. Calculation of atmospheric neutrino-induced backgrounds in a nucleon-decay search // Phys.Rev.Lett. 1986. V.57, N.16. P.1986-1989.
17. Perkins D.H. Proton decay experiments // Annual Review of Nuclear and Particle Science / Ed. by J.D.Jackson, H.E.Gove and R.F.Schwitters. USA, 1984. V.34. P.1-52.
18. Meyer H. Search for nucleon decay with iron calorimeters // Nucl.Phys. 1985. V.B252, N.1,2. P.277-283.
19. Gaissner T.K., Stanev T. Neutrino astronomy and the atmosphe-

- ric background // Proc. of the 19th Intern.Cosmic Ray Conf. La Jolla, 1985. V.8. P.156-159.
- Gaisser T.K., Stanev T. Response of deep detectors to extraterrestrial neutrinos // Phys.Rev. 1985. V.D31, N.11. P.2770-2772.
20. Svoboda R., Bionta R.M., Blewitt G. et al. An upper limit on the flux of extraterrestrial neutrinos // Astrophys. Journal. 1987. V.315, N.2. P.420-424.
21. Домогацкий Г.В. Возможности изучения частоты гравитационных коллапсов звезд во Вселенной с помощью регистрации изотропного потока электронных антинейтрино // Астрономический Журнал. 1984. Т.61, вып.1. С.51-52.
22. Dar A. Has a cosmological background from gravitational stellar collapse been detected ? // Phys.Rev.Lett. 1985. V.55, N.13. P.1422-1425.
23. Krause L.M., Srednicki M., Wilczek F. Solar system constraints and signatures for dark-matter candidates // Phys. Rev. 1986. V.D33, N.8. P.2079-2083.
24. Gaisser T.K., Steigman G., Tilav S.Z. Limits on cold-dark-matter candidates from deep underground detectors // Phys. Rev. 1986. V.D34, N.8. P.2206-2222.
25. Ng K.-W., Olive K.A., Srednicki M. Dark matter induced neutrinos from the Sun : theory versus experiment // Phys.Lett. 1987. V.B188, N.1. P.138-142.
26. Okun L.B. On a search for mirror particles / ITEP. Preprint N.149. M., 1983. 10p.
27. Boliev M.M., Butkevich A.V., Chudakov A.E. et al. ν_μ - flux as measured by Baksan underground telescope // Proc. of the 17th Intern.Cosmic Ray Conf. Paris, 1981. V.7. P.106-109.

- Болиев М.М., Буткевич А.В., Закидышев Н.В. и др. Ограничения на параметры осцилляций нейтрино по данным Баксанского подземного телескопа // ЯФ. 1981. Т.34, вып.5(11) С.1418-1421.
28. LoSecco J.M., Bionta R.M., Blewitt G. et al. Investigation of matter enhanced neutrino oscillations relevant to solar neutrino problem // Phys. Lett. 1987. V.B184, N.2,3. P.305-308.
29. Ayres D.S., Cortez B., Gaisser T.K. et al. Neutrino-oscillation search with cosmic-ray neutrinos // Phys.Rev. 1984. V.D29, N.5. P.902-910.
30. Dass G.-V., Sarma K.L.V. Neutrino oscillations and the atmospheric neutrino fluxes // Phys.Rev. 1984. V.D30, N.1. P.80-88.
31. Gaisser T.K., Stanev T. Neutrino-induced muon flux deep underground and search for neutrino oscillations // Phys.Rev. 1984. V.D30, N.5. P.985-990.
32. Михеев С.П., Смирнов А.Ю. Резонансное усиление осцилляций в веществе и спектроскопия солнечных нейтрино // ЯФ. 1985. Т.42, вып.6(12). С.1441-1448.
33. Mikheyev S.P., Smirnov A.Yu. Resonant amplification of ν oscillation in matter and solar-neutrino spectroscopy // Nuovo Cim. 1986. V.9C, N.1. P.17-25.
34. Михеев С.П., Смирнов А.Ю. Резонансные осцилляции нейтрино в веществе // УФН. 1987. Т.153, вып.1. С.3-58.
35. Dar A., Mann A., Melina Y., Zajfman D. Neutrino oscillations and the solar-neutrino problem // Phys.Rev. 1987. V.D35, N.12. P.3607-3620.
36. Коломеец Е.В., Мурзин В.С. Эксперимент по исследованию осцилляций и стабильности нейтрино (эксперимент "БАТИСС") // Изв. АН СССР, сер. физ. 1981. Т.45, № 7. С. 1346-1348.

37. Alexeyev E.N., Alexeyeva L.N., Chudakov A.E., Krivosheina I.V. The Baksan experiment on the search for stellar collapse and solar flare neutrinos // Proc. of the 12th Intern.Conf. on Neutrino Physics and Astrophysics "Neutrino'86", Sendai / Ed. by T.Kitagaki and H.Yuta. World Scientific, Singapore, 1986. P.270-284.
38. Алексеев Е.Н., Алексеева Л.Н., Кривошеина И.В. и др. Возможности поиска нейтрино от солнечных вспышек на Баксанском подземном сцинтилляционном телескопе ИЯИ АН СССР // Частицы и Космология: Материалы III Всесоюзной школы / М.: ИЯИ, 1987. С.136-142.
39. Ковальцов Г.А. Генерация нейтрино в солнечных вспышках // Изв. АН СССР, сер. физ. 1981. Т.45, № 7. С.1151-1154.
40. Кочаров Г.Е., Ковальцов Г.А., Кочаров Л.Г. и др. Об энергетическом спектре ускоренных в солнечных вспышках частиц // Изв. АН СССР, сер. физ. 1984. Т.48, № 11. С.2246-2253.
41. LoSecco J.M., Bionta R.M., Blewitt G. et al. Limits on the neutrino lifetime // Phys.Rev. 1987. V.D35, N.7. P.2073-2076.
42. Greisen K. Cosmic ray showers // Annual Review of Nuclear Science / Ed. by F.Segre, G.Friedlander and V.E.Meyerhaf. USA, 1960. V.10. P.63-108.
43. Markov M.A., Zheleznykh I.M. On high energy neutrino physics in cosmic rays // Nucl.Phys. 1961. V.27, N.3. P.385-394.
44. Зацепин Г.Т., Кузьмин В.А. Генерация нейтрино в атмосфере // ЖЭТФ. 1961. Т.41, вып.6(12). С.1818-1827.
45. Osborn J.L., Said S.S., Wolfendale A.W. The energy spectra of cosmic ray neutrinos at ground level in the range 1-1000

- GeV // Proc.Phys.Soc. 1965. V.86. P.93-99.
46. Волкова Л.В., Зацепин Г.Т. Энергетические спектры мюонных и электронных нейтрино в атмосфере // Изв. АН СССР, сер. Физ. 1965. Т.29, № 9. С.1740-1742.
 47. Cowsik R., Pal Y., Tandon S.N. Evaluation of high energy natural neutrino experiments // Proc.Indian Acad. of Sciences, Sect.A. 1966. V.63, N.4. P.217-243.
 48. Allkofer O.C., Kitamura T., Okada A., Vernon W. Muon and neutrino spectra : extrapolation from muon spectrometer measurements // Proc.of the 1978 DUMAND Summer Workshop / Ed. by A.Roberts. La Jolla, 1979. V.I. P.37-50.
 49. Volkova L.V. Energy spectra and angular distributions of atmospheric neutrinos // ibid. P.75-101.
 50. Волкова Л.В. Энергетические спектры и угловые распределения нейтрино атмосферного происхождения // ЯФ. 1980. Т.31, вып.6. С.1510-1521.
 51. Буткевич А.В., Деденко Л.Г., Железных И.М. Спектры лептонов в атмосфере и на больших глубинах океана // Исследование мюонов и нейтрино в больших водных объемах: Труды I Всесоюзной конференции / Алма-Ата: Каз.ГУ, 1983. С.180-187.
 52. Butkevich A.V., Dedenko L.G., Zheleznykh I.M. Neutrino and muon spectra in the atmosphere and at large depths in the ocean // Proc. of the 18th Intern.Cosmic Ray Conf.Bangalore. 1983, V.11. P.435-438.
 53. Mitsui K., Minorikawa Y. The energy spectrum of cosmic ray neutrinos at sea level // ibid. P.475-478.
 54. Mitsui K., Minorikawa Y., Komori H. Energy spectrum of cosmic ray neutrinos in the atmosphere // Nuovo Cim. 1986. V.9C, N.5. P.995-1020.

55. Tam A.C., Young E.C.M. The energy spectra of cosmic ray muon-neutrinos at low energies // Proc. of the 11th Intern. Cosmic Ray Conf. Budapest, 1969 : in Acta Physica Academiae Scientiarum Hungaricae. 1970. V.29, Suppl.4. P.307-312.
56. Young E.C.M. Electron neutrinos // Cosmic rays at ground level / Ed. by A.W.Wolfendale. London : Inst. of Phys., 1973. P.105-117.
57. Choi M.C., Young E.C.M. A study of the cosmic ray muon neutrino intensities // Proc. of the 14th Intern. Cosmic Ray Conf. München, 1975. V.6. P.2134-2137.
58. Gaisser T.K., Stanev T., Lee H., Bludman S.A. The flux of atmospheric cosmic ray neutrinos // Proc. of the 4th Workshop on Grand Unification / Ed. by A.Weldon, P.Langacker and P.J.Steinhardt. Birkhäuser, Boston, 1983. P.83-100.
59. Gaisser T.K., Stanev T., Lee H., Bludman S.A. Flux of atmospheric neutrinos // Phys.Rev.Lett. 1983. V.51, N.3. P.223-226.
60. Gaisser T.K., Stanev T. Atmospheric neutrinos in underground detectors // Proc. of the 11th Intern.Conf. on Neutrino Physics and Astrophysics "Neutrino ' 84", Nordkirchen near Dortmund / Ed. by K.Kleinknecht and E.A.Paschos. World Scientific. Singapore, 1984. P.370-373.
61. Gaisser T.K., Stanev T. Atmospheric neutrinos observed in underground detectors // Proc. of the 19th Intern. Cosmic Ray Conf. La Jolla, 1985. V.8. P.120-123.
62. Dar A. Astrophysical neutrinos in proton decay experiments // Proc. of the 4th Workshop on Grand Unification / Ed. by A. Weldon, P.Langacker and P.J.Steinhardt. Birkhäuser, Boston, 1983. P.101-115.

63. Dar A. Atmospheric neutrinos, astrophysical neutrinos and proton-decay experiments // Phys.Rev.Lett. 1983. V.53, N.3. P.227-230.
64. Lee H., Bludman S.A. Three dimensional calculation of flux of low energy atmospheric neutrinos // Proc. of the 19th Intern.Cosmic Ray Conf. La Jolla, 1985. V.5. P.454-457.
65. Lee H., Bludman S.A. Low energy atmospheric neutrinos / University of Pennsylvania. Preprint UPR-0305T. Philadelphia, 1986. 14p.
66. Lee H., Bludman S.A. Low energy atmospheric neutrinos // Phys.Rev. 1988. V.^D37, N.1. P.122-125.
67. Gaisser T.K., O'Connell J.S. Interactions of atmospheric neutrinos in nuclei at low energy // Phys.Rev. 1986. V.D34, N.3. P.822-825.
68. Бугаев Э.В., Наумов В.А. Нейтрино низких и средних энергий в атмосфере // Изв. АН СССР, сер. физ. 1986. Т.50, № 11. С.2239-2241.
69. Bugaev E.V., Domogatsky G.V., Naumov V.A. Cosmic rays and atmospheric neutrinos at low energies // Proc. of the Japan-US Seminar on Cosmic Ray Muon and Neutrino Physics (Astrophysics) Using Deep Underground (Underwater) Detectors / Ed. by Y.Ohashi and V.Z.Peterson. Tokyo: Inst. for Cosmic Ray Research University of Tokyo, 1986. P.232-241.
70. Бугаев Э.В., Наумов В.А. Мюоны и нейтрино космических лучей при низких и средних энергиях // ЯФ. 1987. Т.45, вып.5. С.1380-1391.
71. Бугаев Э.В., Наумов В.А. Геомагнитный эффект и спектры мюонов и нейтрино космических лучей / ИЯИ АН СССР. Препринт П-0537. М., 1987. 35 с.

72. Gaisser T.K., Stanev T., Barr G. Muon charge ratio and ratio of neutrinos to antineutrinos in the atmospheric cosmic rays // Proc. of the 20th Intern.Cosmic Ray Conf. Moscow, 1987. V.6. P.169-172.
73. Bugaev E.V., Naumov V.A. Atmospheric muons and neutrinos of low and medium energies // ibid. P.196-199.
74. Gaisser T.K., Stanev T., Barr G. Cosmic ray neutrinos in the atmosphere / Bartol Research Institute, University of Delaware. Preprint BA-88-1. Newark, 1988. 27p.
75. Дорман Л.И. Экспериментальные и теоретические основы астрофизики космических лучей. М.: Наука, 1975. 462 с.
76. Топтыгин И.Н. Космические лучи в межпланетных магнитных полях. М.: Наука, 1983. 302 с.
77. Чарахьян А.Н., Чарахьян Т.Н. Крупномасштабные вариации космических лучей, вызываемые изменениями общего магнитного поля Солнца // Изв. АН СССР, сер. физ. 1983. Т.47, № 9. С.1744-1753.
78. Чарахьян Т.Н. Загадки зональной модуляции космических лучей // Геомагнетизм и Аэронавтика. 1986. Т.26, № 1. С.10-17.
79. Benecke J., Chou T.T., Yang C.N., Yen E. Hypothesis of limiting fragmentation in high-energy collisions // Phys.Rev. 1969. V.188, N.5. P.2159-2169.
80. Зацепин Г.Т., Кузьмин В.А. Угловые распределения μ -мезонов высокой энергии и механизм их генерации // ЖЭТФ. 1960. Т.39, вып.6(12). С.1677-1685.
81. Smith R.A., Moniz E.J. Neutrino reactions on nuclear targets // Nucl.Phys. 1972. V.B43, N.2. P.605-622.
82. Brooke G., Wolfendale A.W. The momentum spectrum of cosmic-

- ray protons near sea level in the momentum range 0.6-150 GeV/c // Proc.Phys.Soc. 1964. V.83. P.843-851.
83. Hughes E.B., Marsden P.L. Responce of a standard IGY neutron monitor // J.Geophys.Res. 1966. V.71, N.5. P.1435-1444.
84. Ashton F., Coats R.B. The energy spectrum of cosmic-ray neutrons at sea level in the range 20-4000 GeV // J.Phys. A : Gen.Phys. 1968. V.1. P.169-171.
85. Аштон Ф., Кинг Дж., Мамиджаниян Э.А., Смитт Н.Л. Энергетический спектр нейтронов космических лучей на уровне моря // Изв. АН СССР, сер.физ. 1969. Т.33, № 9. С.1557-1559.
86. Diggory I.S., Hook J.R., Jenkins I.A., Turver K.E. The momentum spectra of nuclear active particles in the cosmic radiation at sea level I. Experimental data // J.Phys.A : Math., Nucl., Gen. 1974. V.7, N.6. P.741-764.
87. Nieminen M., Torsti J.J., Valtonen E. Analysis of neutron multiplicity frequencies observed in a double monitor // Phys.Rev. 1982. V.D26, N.5. P.1036-1042.
88. Nieminen M., Torsti J.J., Valtonen E. et al. Composition and spectra of cosmic-ray hadrons at sea level // J.Phys.G : Nucl.Phys. 1985. V.11, N.3. P.421-437.
89. Кочарян Н.М., Саакян Г.С., Киракосян З.А. Энергетические спектры и ядерные взаимодействия частиц космического излучения // ЖЭТФ. 1958. Т.35, вып.6(12). С.1335-1349.
90. Allkofer O.C., Kraft E. Das Spektrum der Muonen, der Protonen und der Electronen in 5200 m Höhe // Nuovo Cim. 1965. V.39, N.4. P.1051-1056.
91. Григоров Н.Л., Рапопорт И.Д., Шестоперов В.Я. Частицы высоких энергий в космических лучах. М.: Наука, 1973. 303 с.

92. Barber H.B., Bowen T., Delise D.A. et al. Predictions and measurements of mass spectra of the charged nucleonic component of cosmic rays at mountain altitude // Phys.Rev. 1980. V.D22, N.II. P.2667-2687.
93. Барадзей Л.Т., Соловьев М.В., Тулинова З.И., Филатова Л.И. Спектр импульсов частиц жесткой компоненты космических лучей на высоте 9000 м // ЖЭТФ. 1959. Т.36, вып.6. С.1617-1620.
94. Богомолов Э.А., Иванов К.Г., Романов В.А. и др. Исследование спектров и угловых характеристик протонов в атмосфере в энергетическом диапазоне 0,1-10 ГэВ / ЛФТИ АН СССР. Препринт № 626. Л., 1979. 29 с.
95. Lumme M., Nieminen M., Peltonen J. et al. Cosmic-ray spectra as calculated from atmospheric hadron cascades // J.Phys. G:Nucl.Phys. 1984. V.10, N.5. P.683-694.
96. Arvela H., Lumme M., Nieminen M. et al. Accompanied hadrons in sea-level detectors // ibid. P.695-703.
97. Барашенков В.С., Ле Ван Нгок, Шмаков С.Ю. Распространение потоков ядерных частиц в атмосфере / ОИЯИ. Препринт Р2-85-135. Дубна, 1985. 6 с.
98. Allkofer O.C., Bhattacharyya D.P. The nucleon spectra at different atmospheric depth derived from the primary spectrum // Europhys.Lett. 1986. V.1, N.II. P.603-608.
99. Liland A. The energy spectrum of nucleons in the atmosphere // Proc. of the 20th Intern.Cosmic Ray Conf. Moscow, 1987. V.5. P.295-297.
100. Богомолов Э.А., Васильев Г.И., Гунько Н.А. Расчет по методу Монте-Карло спектров и угловых характеристик нейтронов в ат-

- мосфере в энергетическом диапазоне от 50 МэВ до 1000 ГэВ / ЛФТИ АН СССР. Препринт № 735. Л., 1981. 48 с.
101. Богомолов Э.А., Васильев Г.И., Гунько Н.А. Расчет по методу Монте-Карло спектров и угловых характеристик протонов в атмосфере в энергетическом диапазоне от 50 МэВ до 1000 ГэВ / ЛФТИ АН СССР. Препринт № 736. Л., 1981. 60 с.
102. Богомолов Э.А., Васильев Г.И. Исследование спектров, угловых и широтных распределений протонов с энергией от 50 МэВ до 100 ГэВ в остаточной атмосфере на глубине 10-100 г·см⁻² // Изв. АН СССР, сер. физ. 1984. Т.48, № 11. С.2087-2089.
103. Серов А.Я., Сычев Б.С. Феноменологические формулы для двойных дифференциальных распределений вторичных адронов, возникающих в нуклон-ядерных взаимодействиях при высоких энергиях // Труды Радиотехнич. Инст. АН СССР. М., 1973, № 11 (Ускорители заряженных частиц). С.173-187.
104. Валл А.Н., Наумов В.А., Синеговский С.И. Адронная компонента космических лучей высоких энергий и рост неупругих сечений // ЯФ. 1986. Т.44, вып.5(11). С.1240-1250.
105. Бугаев Э.В., Наумов В.А. Нуклоны космических лучей в атмосфере / ИЯИ АН СССР. Препринт П-0385. М., 1985. 28 с.
106. Бугаев Э.В., Наумов В.А. Нуклонная компонента космического излучения в атмосфере при средних энергиях // Исслед. по геомагнетизму, аэронавигации и физике Солнца. М.: Наука, 1985, вып. 73 (Солнечно-Земная физика). С.198-211.
107. Кимель Л.Р. Физические аспекты защиты протонных ускорителей высоких энергий. М.: Атомиздат, 1976. 136 с.
108. Барашенков В.С., Тонеев В.Д. Взаимодействие высокоэнергетических частиц и атомных ядер с ядрами. М.: Атомиздат, 1972. 648 с.

109. Хаякава С. Физика космических лучей. Часть I (Ядерно-физический аспект). М.: Мир, 1973. 702 с.
110. Иваненко И.П., Роганова Т.М. Каскадные ливни, вызываемые частицами сверхвысоких энергий. М.: Наука, 1983. 114 с.
111. Дунаевский А.М., Пашков С.В., Мухамедшин Р.А. и др. Расчеты ядерно-электромагнитных каскадов высокой энергии // Труды ФИАН им. П.Н.Лебедева. М.: Наука, 1984. Т.154. С.142-217.
112. Калиновский А.Н., Мохов Н.В., Никитин Ю.П. Прохождение частиц высоких энергий через вещество. М.: Энергоатомиздат, 1985. 248 с.
113. Христиансен Г.Б. Широкие атмосферные ливни и адронные взаимодействия при сверхвысоких энергиях // Проблемы физики космических лучей. М.: Наука, 1987. С.226-241.
114. Liland A. Analytic evaluation of pion, kaon and muon distributions in the atmosphere // Fortschritte der Physik. 1975. V.23. P.571-606.
115. Волкова Л.В., Зацепин Г.Т., Кузьмичев Л.А. Спектр мюонов космических лучей на уровне моря-спектр нуклонов первичного космического излучения // ЯФ. 1979. Т.29, вып.5. С.1252-1264.
116. Бугаев Э.В., Наумов В.А. Прохождение нуклонов космического излучения через атмосферу / ИЯИ АН СССР.Препринт П-0235. М., 1982. 14 с.
117. Кузевский Б.М. Зарядовый и изотопный состав галактических космических лучей // Исследование космических лучей. М.: Наука, 1975. С.84-113.
118. Сыроватский С.И. Космические лучи // Физика космоса. М.: Советская Энциклопедия, 1976. С.271-289.
119. Bialas A., Bleszyński M., Czyż W. Multiplicity distributions in nucleus-nucleus collisions at high energies // Nucl.Phys. 1976. V.VIII, N.3. P.461-476.

120. Богданов В.Г., Вокал С., Карабова М. и др. Сравнительный анализ взаимодействий протонов и α -частиц при импульсе 4,5 ГэВ/с на нуклон с ядрами (C,0) и (Ag, Br) / ОИЯИ. Препринт 1-83-908. Дубна, 1983. 8 с.
121. Агакишиев Г.Н., Армутлийский Д., Ахабабян Н. и др. Множественности, импульсные и угловые характеристики π^- -мезонов, образовавшихся во взаимодействиях протонов, дейтронов, α -частиц и углерода с ядрами углерода при импульсе 4,2 ГэВ/с на нуклон / ОИЯИ. Препринт РИ-84-35. Дубна, 1984. 18 с.
122. Abdrahmanov E.O., Basina A.N., Chasnikov I.Ya. et al. Interaction cross section and negative pion multiplicities in nucleus collisions at 4.2 GeV/c per nucleon // Zeitschrift für Physik C : Part. and Fields. 1980. V.5, N.1. P.1-8.
123. Ryan M.J., Ormes J.F., Balasubrahmanyam V.K. Cosmic-ray proton and helium spectra above 50 GeV // Phys.Rev.Lett. 1972. V.28, N.15. P.985-988.
124. Webber W.R., Lesniak J.A. The comparative spectra of cosmic-ray protons and helium nuclei // Astrophys. and Space Sci. 1974. V.30, N.2. P.361-380.
125. Jones W.V. Very high energy cosmic ray events // Nucl.Phys. 1984. V.A418. P.139c-160c.
126. Webber W.R., Golden R.L., Stephens S.A. Cosmic-ray protons and helium spectra from 5-200 GV measured with a magnetic spectrometer // Proc. of the 20th Cosmic Ray Conf. Moscow, 1987. V.1. P.325-328.
127. Григоров Н.Л., Нестеров В.Е., Прохин В.Л. и др. Энергети-

- ческий спектр α -частиц первичных космических лучей в области высоких энергий по данным измерений на ИСЗ "Протон-3" // Исследования космических лучей. М.: Наука, 1975. С.20-25.
128. Лунд Н. Химический и изотопный состав космических лучей // Космические лучи. Материалы 7-го Европейского симпозиума по космическим лучам. Ленинград, 1980. С.55-69.
129. Simon M., Spiegelhauer H., Schmidt W.K.H. et al. Energy spectra of cosmic-ray nuclei to above 100 GeV per nucleon // Astrophys.Journal. 1980. V.239, N.2(pt.1). P.712-724.
130. Dwyer R., Meyer P. Cosmic-ray elemental abundance from 1-10 GeV per nucleon for boron through nickel // Proc. of the 20th Intern.Cosmic Ray Conf. Moscow, 1987. V.1. P.321-324.
131. Кимель Л.Р., Мохов Н.В. Распределения частиц в диапазоне энергий 10^{-2} - 10^{12} эВ, инициированные в плотных средах высокоэнергетическими адронами // Изв.ВУЗов.Физика.1974.Вып.10. С.17-23.
132. Кимель Л.Р., Мохов Н.В. Дифференциальные сечения адрон-ядерных взаимодействий и некоторые результаты расчета межъядерных каскадов // Вопросы дозиметрии и защиты от излучений. М.: Атомиздат, 1975. Вып.14. С.41-44.
133. Аникина М.Х., Варденга Г.Л., Голохвастов А.И. и др. Сечения неупругого взаимодействия ядер неона с ядрами // ЯФ. 1983. Т. 38, вып.1(7). С.149-151.
134. Дорман Л.И., Смирнов В.С., Тясто М.И. Космические лучи в магнитном поле Земли. М.: Наука, 1973. 400 с.
135. Verma S.D. Measurement of the charged splash and re-entrant albedo of the cosmic radiation // J.Geophys.Res. 1967. V.72, N.3. P.913-925.
136. Дорман Л.И. Метеорологические эффекты космических лучей. М.: Наука, 1972. 212 с.

137. Pennypacker C.R., Smoot G.F., Buffington A. et al. Measurements of geomagnetic cutoff rigidities and particle fluxes below geomagnetic cutoff near Palestine, Texas // J.Geophys.Res. 1973. V.78, N.10. P.1515-1527.
138. Дорман Л.И., Пахомов Н.И. Воздействие геомагнитного поля на космические лучи в атмосфере Земли // Геомагнетизм и Аэронавтика. 1983. Т.23, № 5. С.710-714.
139. Наумов В.А. Метод расчета геомагнитных поправок к дифференциальным энергетическим спектрам нуклонов космического излучения в атмосфере // Исслед.по геомагнетизму, аэронавтике и физике Солнца. М.: Наука, 1984. Вып.69 (Теорет. физика).С.82-94.
140. Бугаев Э.В., Наумов В.А. Геомагнитный эффект и спектры вторичных космических нуклонов / ИЯИ АН СССР. Препринт П-0401. М., 1985. 32 с.
141. Иодко М.Г., Каракадько В.К., Романов В.А. Измерение изотопного состава гелия в первичных космических лучах // Изв. АН СССР, сер. физ. 1978. Т.42, № 5. С.912-913.
142. Jabs A. A general study of the effect of collision parameters on the cosmic-ray fluxes in the atmosphere // Nuovo Cim. 1972. V.12A, N.3. P.569-609.
143. Bogdanova O.A., Kolomeets E.V., Shmonin V.L. Integral multiplicities of various cosmic ray components in the earth's atmosphere as function of altitude, geomagnetic cutoff rigidity and primary cosmic ray spectrum // Proc. of the 14th Intern.Cosmic Ray Conf. Munchen, 1975. V.4. P.1441-1445.
144. Bogdanova O.A., Barsukov O.A., Gavrilov P.F. et al. Space-energy distribution of electrons, protons and neutrons at different atmospheric depth // Proc. of the 15th Intern. Cosmic Ray Conf. Plovdiv, 1977. V.3. P.176-180.

145. Rygg T.A., Earl J.A. Balloon measurements of cosmic ray protons and helium over half a solar cycle 1965-1969 // J. Geophys. Res. 1971. V.76, N.31. P.7445-7469.
146. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т.1 (Гипергеометрическая функция, функции Лежандра). М.: Наука, 1973. 294 с.
147. Lohmann W., Kopp R., Voss R. Energy loss of muons in the energy range 1-10000 GeV / CERN. Preprint 85-03. Geneva, 1985. 30p.
148. Judge R.J.R., Nash W.F. The spectrum of muons arriving at large zenith angles // Nuovo Cim. 1965. V.35, N.4. P.1025-1030.
149. Maeda K. Energy and zenith angle dependence of atmospheric muons // Fortschritte der Physik. 1973. V.21. P.113-154.
150. Allkofer O.C., Carstensen K., Dau W.D. The absolute cosmic ray muon spectrum at sea level // Phys. Lett. 1971. V.36B, N.4. P.425-428.
- Allkofer O.C. Cosmic ray muon physics done at Kiel // Proc. of the 1978 DUMAND Summer Workshop / Ed. by A. Roberts. La Jolla, 1979. V.1. P.13-27.
151. Allkofer O.C., Clausen K., Dau W.D. The low-momentum muon spectrum near the equator // Lett. Nuovo Cim. 1975. V.12, N.4. P.107-110.
152. Gardener M., Jones D.G., Taylor F.E., Wolfendale A.W. The momentum spectrum of cosmic ray muons near sea level in the momentum range 0.4-10 GeV/c // Proc. Phys. Soc. 1962. V.80. P.697-709.
153. Barbouti A.I., Rastin B.C. A study of the absolute intensity

- of muons at sea level and under various thicknesses of absorber // J.Phys. G: Nucl.Phys. 1983. V.9, N.12. P.1577-1595.
154. Rastin B.C. An accurate measurement of the sea-level muon spectrum within the range 4 to 3000 GeV/c // J.Phys. G : Nucl.Phys. 1984. V.10, N.12. P.1609-1628.
155. Bhattacharyya D.P. The dependence of muon intensity on the geomagnetic latitude // Zeitschrift für Physik. 1970. V.234. P.17-22.
156. De A.K., Ghosh P., Mitra S. et al. The muon flux of cosmic rays at sea level // J.Phys. A : GenPhys. 1975. V.5, N.8. P.1236-1242.
157. Allkofer O.C., Andresen R.D., Dau W.D. The muon spectra near the geomagnetic equator // Proc. of the 10th Intern. Cosmic Ray Conf. Calgary, 1967 : in Canadian Journal of Physics. 1968. V.46. P.S301-S305.
158. Nandi B.C., Sinha M.S. The momentum spectrum of muons at sea level in the range 5-1200 GeV/c // J.Phys. A : Gen. Phys. 1972. V.5, N.9. P.1384-1394.
159. Ayre C.A., Baxendale J.M., Hume C.J. et al. Precise measurement of the vertical muon spectrum in the range 20-500 GeV/c // J.Phys. G : Nucl.Phys. 1975. V.1, N.5. P.584-600.
160. Del Rosario L., Davila-Aponte J. Range distribution of sea-level mesons at low geomagnetic latitudes // Phys.Rev. 1952. V.88, N.5. P.998-1002.
161. Judge R.J.R., Nash W.F. Measurements on the muon flux at various zenith angles // Nuovo Cim. 1965. V.35, N.4 P.999-1024.
162. Pak W., Ozaki S., Roe B.P., Greisen K. Momentum spectrum

- of muons // Phys.Rev. 1961. V.124, N.3. P.905-907.
163. Кочарян Н.М., Айвазян М.Т., Киракосян З.А., Алексанян А.С. Мезонная компонента космического излучения на высоте 3200 м над уровнем моря // ЖЭТФ. 1956. Т.30, вып.2. С.243-247.
164. Вайсенберг А.О. Мю-мезон. М.: Наука, 1964. 400 с.
165. Богомолов Э.А., Лубяная Н.Д., Романов В.А. и др. Балонные исследования спектров и состава однозарядной компоненты первичного и вторичного космического излучения с использованием магнитного спектрометра // Изв. АН СССР, сер.физ. 1979. Т.43, № 12. С.2487-2490.
166. Богомолов Э.А., Романов В.А., Степанов С.В., Шулакова М.С. Спектры и угловые характеристики мюонов и электронов в атмосфере в энергетической области выше 50 МэВ / ЛФТИ. Препринт № 629. Л., 1979. 41 с.
167. Okuda H., Yamamoto Y. Cosmic rays in the upper atmosphere // Rep.Ionosphere and Space Res. in Japan. 1965. V.19, N.3. P.322-338.
168. Агешин П.Н., Чарахчян Т.Н. Изучение μ -мезонов космического излучения в стратосфере // Вестник Московского Университета. 1956. № 2. С.77-88.
169. Conversi M. Experiments on cosmic-ray mesons and protons at several altitudes and latitudes // Phys.Rev. 1950. V.79, N.5. P.749-767.
170. Olbert S. Production spectra of cosmic-ray mesons in the atmosphere // Phys.Rev. 1954. V.96, N.5. P.1400-1407.
171. Lee H., Bludman S.A. A calculation of low energy atmospheric muon flux / University of Pennsylvania. Preprint UPR-0306T. Philadelphia, 1986. 7p.

172. Evenson P., Gaisser T.K., Stanev T., Tuska E. Ratio of helium to hydrogen around 10 GeV/nucleon // Proc. of the 20th Intern.Cosmic Ray Conf. Moscow, 1987. V.1, P.349-351.
173. Smart D.F., Shea M.A., Gentile L.G. Vertical cutoff rigidities calculated using the estimated 1985 geomagnetic field coefficients // ibid. V.4. P.204-207.
174. Llewellyn-Smith C.H. Neutrino reactions at accelerator energies // Phys.Reports. 1972. V.30, N.5. P.261-379.
175. Ahrens L.A., Aronson S.H., Connolly P.L. et al. Measurement of neutrino-proton and antineutrino-proton elastic scattering // Phys.Rev. 1987. V.D35, N.3. P.785-809.
176. Kajita T., Kifune T., Koshiba M. et al. Recent results of Kamioka nucleon decay experiment // Proc. of the Intern. colloquium on Baryon Nonconservation "ICOBAN'86", Toyama. P.54-63.
177. Справочник по специальным функциям / Под ред. М.Абрамовица и И.Стиган. М.: Наука, 1979. 830 с.
178. Dyakonov M.N., Egorova V.P., Ivanov A.A. et al. On some parameters of the nuclear interaction of primary cosmic rays with $E_0 > 10^{17}$ eV // Proc. of the 20th Intern.Cosmic Ray Conf. Moscow, 1987. V.6. P.147-150.
179. Liland A. The approach to scaling and the charge ratio of cosmic ray // Proc. of the 15th Intern.Cosmic Ray Conf. Plovdiv, 1977. V.11. P.348-353.
180. Liland A. Inclusive hadron production with nuclei targets // Proc. of the 20th Intern.Cosmic Ray Conf. Moscow, 1987. V.5, P.178-181.