

Z-ФАКТОРНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ОДНОМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРЕНОСА НУКЛОНОВ КОСМИЧЕСКИХ ЛУЧЕЙ В АТМОСФЕРЕ

В. А. Наумов, Т. С. Синеговская
Иркутский государственный университет,
664003 Иркутск, Россия

Аннотация

Предложен простой и эффективный метод решения уравнений переноса протонов и нейтронов космических лучей в атмосфере при высоких энергиях. Показано, что при учете нестепенного характера первичного спектра, роста полных неупругих сечений и нарушения скейлинга в нуклон-ядерных взаимодействиях, эффективные пробеги поглощения нуклонов сильно зависят не только от энергии, но и от глубины. Результаты расчетов сравниваются с имеющимися экспериментальными данными.

1 Введение

Измерения потоков вторичных протонов и нейтронов космических лучей (КЛ) могут дать ценную информацию о первичном космическом излучении и о взаимодействиях нуклонов и ядер при высоких энергиях. Для извлечения этой информации из экспериментальных данных необходимо, помимо прочего, уметь вычислять пробеги поглощения нуклонов, являющиеся функционалами от спектра первичных КЛ, инклюзивных и полных неупругих сечений взаимодействия, а также, в общем случае, функциями энергии и глубины в атмосфере. Точное аналитическое решение этой задачи возможно лишь в рамках очень простых и, поэтому, далеких от реальности моделей первичного спектра и сечений взаимодействия. Между тем, быстрое развитие экспериментальной техники позволяет надеяться на качественное повышение точности измерений потоков как первичных, так и вторичных КЛ высоких энергий уже в ближайшем будущем, что требует разработки адекватных по точности расчетных методов. Кроме того, аккуратный расчет нуклонной компоненты вторичных КЛ является необходимым этапом расчета потока атмосферных нейтрино, — основного источника фоновых событий в астрофизических экспериментах на больших нейтринных телескопах и одного из важнейших "инструментов" исследования нейтринных осцилляций и других нестандартных эффектов физики электрослабых взаимодействий (см., например, [1] и цитируемую литературу).

В данной работе предлагается простой и эффективный итерационный алгоритм приближенного решения *одномерных* уравнений переноса (УП) нуклонов КЛ, применимый при достаточно высоких энергиях без использования каких-либо нереалистичных предположений о форме первичного спектра, дифференциальных и полных сечений нуклон-ядерных взаимодействий. С некоторыми оговорками (см. раздел 2), решение УП может быть найдено с заданной точностью для произвольной глубины h , что позволяет изучать потоки нуклонов на уровне моря (у.м.) даже для наклонных направлений.¹

¹Напомним, что глубина атмосферы по вертикали $h_0 \simeq 1030 \text{ г/см}^2 \simeq 11.4\lambda_N^*$, где $\lambda_N^* = 90 \text{ г/см}^2$ — характерная величина пробега нуклона до взаимодействия в воздухе. Глубина атмосферы по горизонтали превышает $440\lambda_N^*$. Поэтому поток нуклонов, приходящих из околоризонтальных направлений полностью определяется эффектами рассеяния на большие углы, что делает бессмысленной одномерную

Основная идея метода заключается в сведении интегро-дифференциального УП к (нелинейному) интегральному уравнению для т.н. "Z-фактора", – величины непосредственно связанной с эффективным пробегом поглощения. Уравнение для Z-фактора решается затем простыми итерациями. Эффективность такого подхода уже была продемонстрирована в решении задачи переноса мюонных нейтрино в плотной среде с $h \gg \lambda_\nu(E)$ [2] (λ_ν – пробег нейтрино до взаимодействия), т.е. в ситуации, где стандартные численные методы, включая метод Монте-Карло, либо неприменимы, либо требуют неприемлемо больших затрат машинного времени. С использованием ряда естественных физических приближений метод может быть легко модифицирован для решения задач переноса мезонов и мюонов высоких энергий в атмосфере и в плотных средах.

2 Основные приближения ядерно-каскадной модели

Нас будут интересовать дифференциальные энергетические спектры протонов и нейтронов КЛ при энергиях достаточно высоких, чтобы можно было пренебречь энергетическими потерями протонов на ионизацию и возбуждение атомов воздуха, геомагнитными эффектами и эффектами 3-мерности каскадного процесса (в частности, рассеянием). Одномерное приближение (приближение "прямо-вперёд") основано на сильной анизотропии в угловом распределении вторичных частиц, образующихся при неупругих взаимодействиях нуклонов и ядер и оправдано при импульсах нуклонов $p \gg \langle p_T \rangle \approx 0.4$ ГэВ/с. Благодаря падающему характеру энергетического спектра КЛ (и, как следствие, преимущественной роли в развитии каскада процессов с $p_T \ll p_L$), а также высокой степени изотропии первичного излучения, область применимости приближения "прямо-вперёд" существенно расширяется для направлений близких к вертикальному [3].

В данной работе мы будем использовать стандартную модель суперпозиции для ядро-ядерных взаимодействий. Поскольку свободный пробег ядра быстро убывает с ростом атомного номера A , в этой модели считается, что ядра первичных КЛ с $A > 1$ полностью фрагментируют в верхних слоях атмосферы и, следовательно, интегральный спектр ядер с энергиями $\geq E_A$ можно аппроксимировать эквивалентным суммарным спектром Z протонов и $A - Z$ нейтронов с энергиями $E \geq E_A/A$. При низких и промежуточных энергиях (в особенности, при энергиях меньших геомагнитного порога) такая модель оказывается слишком грубой и для расчета нуклонной компоненты необходимо применять более строгие подходы, учитывающие взаимодействия ядер КЛ явным образом [4]. При высоких энергиях применимость модели суперпозиции оправдывается в конечном счете (а) малостью соответствующего вклада в полный поток вторичных нуклонов и (б) отсутствием адекватных теоретических моделей взаимодействия ядер высоких энергий и достаточно детальных эмпирических данных.

Еще одно существенное приближение, которое будет использоваться ниже, заключается в пренебрежении процессами рождения $N\bar{N}$ -пар в мезон-ядерных взаимодействиях. На не слишком больших глубинах и (или) при небольших энергиях² вклад в поток ну-

постановку задачи. Однако, для не слишком больших зенитных углов ϑ эффекты рассеяния могут быть учтены в виде поправок к решению одномерных УП.

²Конкретнее, при $E \lesssim E_M^{cr}(\vartheta)$, где $E_M^{cr}(\vartheta)$ – критическая энергия мезона M , зависящая от зенитного угла ϑ . В частности, $E_{\pi^\pm}^{cr}(0^\circ) \simeq 115$ ГэВ, $E_{K_L^0}^{cr}(0^\circ) \simeq 206$ ГэВ, $E_{K^\pm}^{cr}(0^\circ) \simeq 857$ ГэВ.

клонов, обусловленный этими процессами совершенно несуществен, поскольку (а) мезоны отсутствуют в первичном излучении и, следовательно, в верхних слоях атмосферы их поток мал по сравнению с потоком нуклонов, (б) дифференциальные сечения реакций $\pi A \rightarrow N\bar{N}X$, $KA \rightarrow N\bar{N}X, \dots$ малы по сравнению с сечениями реакций $NA \rightarrow N'X$ и (в) лишь небольшая доля мезонов с $E \lesssim E_M^{\text{cr}}(\vartheta)$ успевает провзаимодействовать с ядрами до распада. Однако, полные неупругие сечения NA -взаимодействий превышают сечения взаимодействий легких мезонов с ядрами (приблизительно на 30%). Поэтому при некоторой, достаточно большой глубине $h = h_M(E, \vartheta)$ и при $E \gtrsim E_M^{\text{cr}}(\vartheta)$ поток мезонов M становится равным потоку нуклонов тех же энергий. При $h \gg h_M(E, \vartheta)$ вкладом процессов генерации нуклонов в MA -взаимодействиях (в основном, – процессов $\pi^\pm A \rightarrow N\bar{N}X$) пренебречь уже невозможно [5]. Таким образом, применимость излагаемого ниже формализма ограничена глубинами $h \lesssim h_\pi(E, \vartheta)$. В действительности, эта область оказывается довольно широкой.

В рамках перечисленных приближений задача вычисления дифференциальных энергетических спектров протонов $D_p(E, h)$ и нейтронов $D_n(E, h)$ на глубине h сводится к решению следующей системы одномерных УП:

$$\left[\frac{\partial}{\partial h} + \frac{1}{\lambda_N(E)} \right] D_p(E, h) = \frac{1}{\lambda_N(E)} \int_E^\infty \frac{1}{\sigma_{NA}^{\text{in}}(E)} \frac{d\sigma_{pp}(E, E_0)}{dE} D_p(E_0, h) dE_0 + \frac{1}{\lambda_N(E)} \int_E^\infty \frac{1}{\sigma_{NA}^{\text{in}}(E)} \frac{d\sigma_{np}(E, E_0)}{dE} D_n(E_0, h) dE_0, \quad (1)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial h} + \frac{1}{\lambda_N(E)} \right] D_n(E, h) = \frac{1}{\lambda_N(E)} \int_E^\infty \frac{1}{\sigma_{NA}^{\text{in}}(E)} \frac{d\sigma_{nn}(E, E_0)}{dE} D_n(E_0, h) dE_0 + \frac{1}{\lambda_N(E)} \int_E^\infty \frac{1}{\sigma_{NA}^{\text{in}}(E)} \frac{d\sigma_{pn}(E, E_0)}{dE} D_p(E_0, h) dE_0, \quad (2)$$

с граничным условием

$$D_p(E, 0) = D_p^0(E), \quad D_n(E, 0) = D_n^0(E), \quad (3)$$

где $D_p^0(E)$ и $D_n^0(E)$ – дифференциальные энергетические спектры протонов и нейтронов на "границе атмосферы", включающие (согласно модели суперпозиции) как первичные протоны, так и продукты фрагментации ядер КЛ.

В (1) и (2) использованы следующие обозначения:

$$\frac{d\sigma_{NN'}(E, E_0)}{dE} = 2\pi \int_0^{p_T^{\text{max}}} \frac{p_T}{p_L} \left(E \frac{d^3\sigma_{NN'}}{d^3p} \right) dp_T;$$

$E d^3\sigma_{NN'}/d^3p$ – инвариантное дифференциальное сечение инклюзивной реакции $N + A \rightarrow N' + X$ (где A – ядро атома воздуха, а X – система всех недетектируемых вторичных частиц, включая продукты развала ядра A); E_0 – полная энергия налетающего нуклона N ; E – полная энергия, а p_T и p_L – составляющие импульса $\mathbf{p}$ конечного нуклона N' ; $\lambda_N(E) = 1/(N_0 \sigma_{NA}^{\text{in}}(E))$ – пробег нуклона до взаимодействия³ (где N_0 – число ядер A в 1 г воздуха). Величина p_T^{max} определяется (в " NN -кинематике") условием

$$E^* \leq \frac{s + M - s_X^{\text{min}}}{2\sqrt{s}},$$

³В дальнейшем мы полагаем $\sigma_{pA}^{\text{in}} = \sigma_{nA}^{\text{in}}$.

где E^* – энергия инклюзивной частицы в системе центра масс сталкивающихся нуклонов, а $s_X^{\min}$ – минимальное значение квадрата инвариантной массы системы X . В рамках NN -кинematики и в пренебрежении кумулятивной кинематической областью

$$p_T^{\max} = \sqrt{\frac{2ME(E-M)(1-x)}{E-Mx}}.$$

Здесь $x = E/E_0$ – доля энергии, уносимая нуклоном N' , а M – масса нуклона.

Приближенная изотопическая симметрия NA -взаимодействий позволяет свести систему уравнений (1) и (2) к двум независимым уравнениям для линейных комбинаций

$$N_{\pm}(E, h) = D_p(E, h) \pm D_n(E, h).$$

После простых преобразований, эти уравнения можно записать в виде

$$\left[\frac{\partial}{\partial h} + \frac{1}{\lambda_N(E)} \right] N_{\pm}(E, h) = \frac{1}{\lambda_N(E)} \int_0^1 \Phi_{\pm}(x, E) N_{\pm}(E/x, h) \frac{dx}{x^2}, \quad (4)$$

где

$$\Phi_{\pm}(x, E) = \frac{E}{\sigma_{NA}^{\text{in}}(E)} \left[\frac{d\sigma_{pp}(E, E_0)}{dE} \pm \frac{d\sigma_{pn}(E, E_0)}{dE} \right]_{E_0=E/x}.$$

3 Z-факторный метод

Введем определение эффективных пробегов поглощения $\Lambda_{\pm}(E, h)$ с помощью соотношения

$$N_{\pm}(E, h) = N_{\pm}(E, 0) \exp \left[-\frac{h}{\Lambda_{\pm}(E, h)} \right]. \quad (5)$$

Удобно ввести также вспомогательные безразмерные функции $Z_{\pm}(E, h)$ ("Z-факторы"), следующим образом связанные с $\Lambda_{\pm}(E, h)$ и $\lambda_N(E)$:

$$\frac{1}{\Lambda_{\pm}(E, h)} = \frac{1 - Z_{\pm}(E, h)}{\lambda_N(E)}. \quad (6)$$

Как и пробеги поглощения, Z-факторы содержат полную информацию о кинетике нуклонов в атмосфере. Непосредственно из УП (4) и определений (5) и (6) нетрудно увидеть, что $0 < Z_+(E, h) < 1$. Функция $Z_-(E, h)$, вообще говоря, не обязана быть знакоопределенной. Тем не менее, учитывая поведение реального первичного спектра КЛ и тот факт, что почти во всей кинематической области процессы регенерации ($pA \rightarrow pX$ и $nA \rightarrow nX$) преобладают над процессами перезарядки ($pA \rightarrow nX$ и $nA \rightarrow pX$), можно показать, что для нее тоже справедливы неравенства $0 < Z_-(E, h) < 1$. Более того, легко доказать, что $Z_-(E, h) < Z_+(E, h)$.

Подставляя (5) и (6) в УП (4), получаем уравнение на Z-факторы:

$$\frac{\partial Z_{\pm}(E, h)}{\partial h} + \frac{Z_{\pm}(E, h)}{h} = \int_0^1 \eta_{\pm}(x, E) \Phi_{\pm}(x, E) \exp \left[\frac{h}{\Lambda_{\pm}(E, h)} - \frac{h}{\Lambda_{\pm}(E/x, h)} \right] dx, \quad (7)$$

где

$$\eta_{\pm}(x, E) = \frac{N_{\pm}(E/x, 0)}{x^2 N_{\pm}(E, 0)}. \quad (8)$$

Поскольку во всем интересующем нас диапазоне энергий реальный первичный спектр убывает существенно быстрее, чем E^{-2} , то $0 \leq \eta_{\pm}(x, E) \leq 1$, причем $\eta_{\pm}(0, E) = 0$. В частности, для чисто степенного спектра ($D_{p,n}^0(E) \sim E^{-\gamma+1}$) имеем: $\eta_{\pm}(x, E) = x^{\gamma-1}$.

Интегрируя (7) по частям, приходим к следующему интегральному уравнению:

$$Z_{\pm}(E, h) = \frac{1}{h} \int_0^h dh' \int_0^1 \eta_{\pm}(x, E) \Phi_{\pm}(x, E) \exp[-h' D_{\pm}(x, E, h')] dx, \quad (9)$$

где

$$D_{\pm}(x, E, h) = \frac{1 - Z_{\pm}(E/x, h)}{\lambda_N(E/x)} - \frac{1 - Z_{\pm}(E, h)}{\lambda_N(E)}.$$

Хотя полученное уравнение нелинейно, оно гораздо удобнее для решения итерационным методом, чем исходное УП (4). Скорость сходимости итераций определяется выбором нулевого приближения. Простейшим выбором является

$$Z_{\pm}^{(0)}(E, h) = 0.$$

При этом

$$D_{\pm}^{(0)}(x, E, h) \equiv \mathcal{D}(x, E) = \frac{1}{\lambda_N(E/x)} - \frac{1}{\lambda_N(E)} \quad (10)$$

не зависит от h и, в первом приближении, имеем:

$$Z_{\pm}^{(1)}(E, h) = \int_0^1 \eta_{\pm}(x, E) \Phi_{\pm}(x, E) \left\{ \frac{1 - \exp[-h \mathcal{D}(x, E)]}{h \mathcal{D}(x, E)} \right\} dx. \quad (11)$$

Рассмотрим сперва случай небольших глубин. Учитывая, что область малых x в подынтегральном выражении (11) обрезается фактором $\eta_{\pm}(x, E)$, можно формально разложить выражение в фигурных скобках по h . Это дает

$$Z_{\pm}^{(1)}(E, h) = \int_0^1 \eta_{\pm}(x, E) \Phi_{\pm}(x, E) \left[1 - \frac{h \mathcal{D}(x, E)}{2} + \dots \right] dx. \quad (12)$$

Главный член разложения (12)

$$\mathcal{Z}_{\pm}(E) \equiv Z_{\pm}(E, 0) = \int_0^1 \eta_{\pm}(x, E) \Phi_{\pm}(x, E) dx \quad (13)$$

совпадает с классической формулой Зацепина [6], которая была первоначально получена в рамках простейших предположений (степенной первичный спектр, скейлинг инвариантных инклюзивных сечений, независимость σ_{NA}^{in} от энергии)⁴ и до сих пор используется во многих аналитических расчетах ядерно-каскадных процессов в атмосфере.

⁴Легко проверить, что при перечисленных предположениях $Z_{\pm} = \int_0^1 x^{\gamma-1} \Phi_{\pm}(x) dx = \text{const}$ есть точное решение уравнения (9).

В противоположном предельном случае, учитывая известный рост $\sigma_{pA}^{\text{in}}(E)$ с энергией, из (10) и (12) нетрудно увидеть, что $\lim_{h \rightarrow \infty} Z_{\pm}^{(0)}(E, h) = 0$. При весьма общих предположениях можно доказать также, что $\lim_{h \rightarrow \infty} Z_{\pm}(E, h) = 0$ и, следовательно, на достаточно больших глубинах пробеги поглощения $\Lambda_{\pm}(E, h)$ совпадают со свободным пробегом $\lambda_N(E)$. Мы не будем останавливаться на доказательстве этого утверждения, т.к. уже по причинам, отмеченным выше (пренебрежение эффектами рассеяния, энергетическими потерями и вкладом нуклонов от мезон-ядерных взаимодействий) оно представляет лишь академический интерес. Важным является лишь тот факт, что с ростом глубины Z_+ и Z_- убывают, т.е. роль процессов регенерации уменьшается.

С помощью формулы (12) можно воспроизвести приближенные аналитические результаты ряда работ, в которых учитывался (в рамках той или иной модели) рост σ_{NA}^{in} с энергией (см., например, [5, 7]).

Для n -ного приближения получаем рекуррентные соотношения ($n > 0$)

$$Z_{\pm}^{(n)}(E, h) = \frac{1}{h} \int_0^h dh' \int_0^1 \eta_{\pm}(x, E) \Phi_{\pm}(x, E) \exp \left[-h' D_{\pm}^{(n-1)}(x, E, h') \right] dx, \quad (14)$$

$$D_{\pm}^{(n)}(x, E, h) = \frac{1 - Z_{\pm}^{(n)}(E/x, h)}{\lambda_N(E/x)} - \frac{1 - Z_{\pm}^{(n)}(E, h)}{\lambda_N(E)}. \quad (15)$$

Численный анализ показал, что даже при простейшем выборе $Z_{\pm}^{(0)} = 0$, скорость сходимости итерационного алгоритма (14–15) вполне достаточна для практического использования. Однако, как отмечалось выше, ее можно повысить более удачным выбором нулевого приближения. Например, учитывая неравенства $0 < Z_{\pm}(E, h) < 1$, разумно положить $Z_{\pm}^{(0)}(E, h) = Z_{\pm}(E)/2$, что заметно улучшает сходимость в среднем.

4 Исходные данные и численные результаты

4.1 Первичный спектр. Мы применяем параметризацию интегрального спектра первичных КЛ, предложенную Никольским, Стаменовым и Ушевым [8]. В этой модели ядерная компонента КЛ разделена на 5 стандартных групп ядер с $\langle A \rangle = 1, 4, 15, 26, 51$, спектры которых подобны при энергиях $E_A \ll E_A^{\text{knee}}$ и $E_A \gg E_A^{\text{knee}}$, где E_A^{knee} характеризует область излома спектра для соответствующей группы. Значения параметров модели и явные формулы для эквивалентных дифференциальных спектров протонов и нейтронов приведены в [10, 11]. В [10] дается также сопоставление модели Никольского-Стаменова-Ушева с экспериментальными данными по первичным КЛ, полученными до 1993 г.

Рассматриваемая модель не претендует на количественное описание первичного спектра при энергиях выше $(10^8 - 10^9)$ ГэВ/нуклон. Однако вклад этой области энергий в статистику событий, представляющих интерес для экспериментов по измерению одиночной компоненты вторичных КЛ (включая эксперименты по глубоководной регистрации мюонов и нейтрино) несуществен. Поэтому, для упрощения расчетов, мы ввели искусственное "мягкое обрезание" первичного спектра,⁵ заменив функции $D_{p,n}^0(E)$ в граничном

⁵Фактически, это обрезание грубо моделирует эффект Грейзена-Зацепина-Кузьмина, обусловленный взаимодействием внегалактических КЛ с реликтовым микроволновым излучением [9].

условии (3) на $D_{p,n}^0(E)\phi(E/E_c)$, где $\phi(t)$ – некоторая безразмерная функция, удовлетворяющая условиям: $\phi(t) = 1$ при $t \ll 1$ и $\phi(t) = 0$ при $t \geq 1$. Явный вид этой функции не важен до тех пор, пока мы интересуемся энергиями $E \ll E_c$ и не слишком большими глубинами h . Ниже полагаем $E_c = 3 \times 10^{10}$ ГэВ.

4.2 Сечения NA -взаимодействий. Имеющиеся данные по полному неупругому сечению $\sigma_{pA}^{\text{in}}(E)$ (как ускорительные, так и извлеченные из экспериментов с космическими лучами) хорошо описываются эмпирической зависимостью

$$\sigma_{pA}^{\text{in}}(E) = \sigma_0 - \theta(E - E_*) \left[\sigma_1 \ln \left(\frac{E}{E_1} \right) - \sigma_2 \ln^2 \left(\frac{E}{E_1} \right) \right], \quad (16)$$

где $\theta(E - E_*) = 0$ при $E < E_*$ и $\theta(E - E_*) = 1$ при $E \geq E_*$, $E_* = 45.4$ ГэВ и $E_1 = 1$ ГэВ. Ниже мы используем формулу (16), со значениями параметров, найденными в [12]: $\sigma_0 = (290 \pm 5)$ мбарн, $\sigma_1 = (8.7 \pm 0.5)$ мбарн, $\sigma_2 = (1.14 \pm 0.05)$ мбарн.

Для инвариантных инклюзивных сечений $Ed^3\sigma_{pp}(x_F, s, p_T)/d^3p$ и $Ed^3\sigma_{pn}(x_F, s, p_T)/d^3p$ мы приняли за основу (с минимальными модификациями) полуэмпирические формулы Кимеля-Мохова [13]. Свободные параметры в этих формулах были получены авторами фитированием всех доступных ускорительных данных по взаимодействиям нуклонов с различными ядерными мишенями при $p_0 = 3 - 1500$ ГэВ/с и 0.45 ГэВ/с $\lesssim p \leq p_0$ (где p_0 – импульс налетающего нуклона в лабораторной системе).

На рис. 1 показаны нормированные дифференциальные сечения $(x/\sigma_0)d\sigma_{pp}(x, E)/dx$ и $(x/\sigma_0)d\sigma_{pn}(x, E)/dx$, рассчитанные в модели Кимеля-Мохова для нескольких значений кинетической энергии вторичных нуклонов E_{kin} . Расчеты сделаны для бериллиевой мишени. Однако, дифференциальные сечения слабо зависят от атомного номера мишени, поэтому результаты справедливы и для других легких ядер, в частности, – для ядер атомов воздуха. Как видно из рисунка, при $E_{\text{kin}} \gtrsim 100$ ГэВ дифференциальные сечения практически перестают зависеть от энергии всюду, за исключением узкой дифракционной области для реакции $pA \rightarrow pX$. Другими словами, при высоких энергиях модель Кимеля-Мохова приводит к Фейнмановскому скейлингу. Из-за падающего характера первичного спектра вклад, который дифракционная область вносит в Z -факторы, отнюдь не пренебрежим. Чтобы избежать нефизически быстрого возрастания $d\sigma_{pp}/dx$ в области $x \sim 1$ при сверхвысоких энергиях мы предположили, что при $E_0 > 10^6$ ГэВ сечение $d\sigma_{pp}/dx$ становится скейлинг-инвариантным во всей кинематической области. Из-за отсутствия экспериментальных данных при $E_0 \gtrsim 10^6$ ГэВ обосновать это предположение сегодня невозможно.

4.3 Результаты расчетов. Расчеты проводились для диапазонов $5 \text{ ГэВ} \leq E \leq 3 \times 10^{10} \text{ ГэВ}$ и $0 \leq h \leq 5 \times 10^3 \text{ г/см}^2$. Для многомерного численного интегрирования применялся адаптивный кубатурный алгоритм Гинца-Мэйлика [14], а для аппроксимации и интерполяции промежуточных функций одной и двух переменных использовались стандартные локальные В-сплайны второй степени на равномерной сетке. При всех значениях E и h итерационный процесс быстро сходится. Так, 5–6 итераций оказывается достаточно для достижения точности расчета Z -факторов не хуже $10^{-3} - 10^{-4}$. На небольших глубинах, $h \lesssim 300 \text{ г/см}^2$, уже первое приближение обеспечивает точность на уровне нескольких процентов, вполне достаточную для многих приложений теории, например, для расчета потоков атмосферных мюонов и нейтрино.

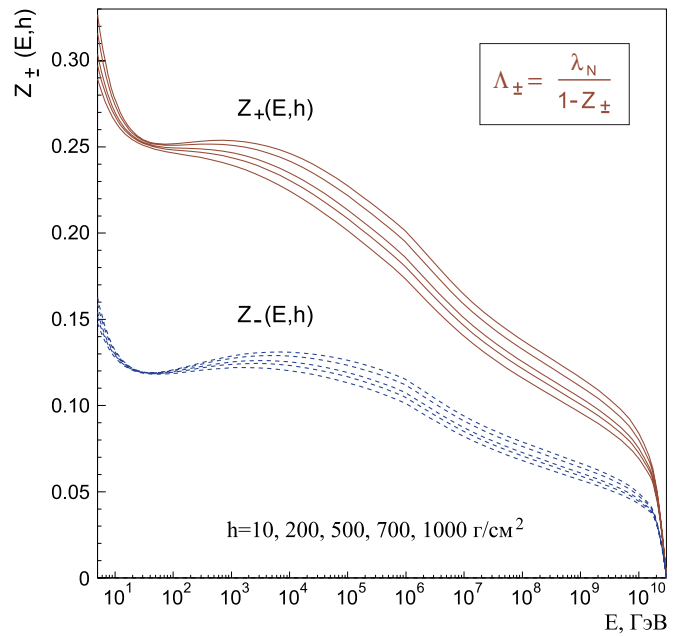
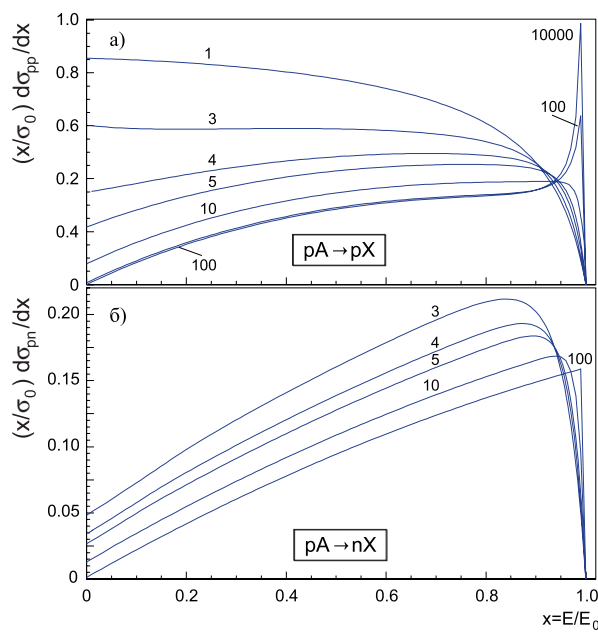


Рис. 1: Нормированные дифференциальные сечения, рассчитанные согласно модели Кимеля-Мохова [13]. Числа у кривых обозначают кинетическую энергию вторичного нуклона $E_{\text{kin}} = E - M$ в ГэВ.

Рис. 2: Зависимости $Z_{\pm}$ от энергии для глубин $h = 10, 200, 500, 700$ и 1000 г/см². Z -факторы уменьшаются с ростом h .

На рис. 2 представлены зависимости Z -факторов от энергии для $h = 10, 200, 500, 700$ и 1000 г/см². Наблюдаемая сильная зависимость $Z_{\pm}$ от E и h вызвана тремя эффектами:

- а) нестепенным поведением первичного спектра,
- б) зависимостью полного неупругого сечения от энергией и
- в) нарушением скейлинга.

Локальные минимумы, проявляющиеся при $E < E_* \simeq 45$ ГэВ, обусловлены началом роста $\sigma_{NA}^{\text{in}}(E)$ (см. (16)). Заметное изменение характера энергетической зависимости при $E \gtrsim 10^6$ ГэВ связано с искусственным "замораживанием" роста квазиупругого пика в реакции $pA \rightarrow pX$. Наконец, обращение Z -факторов в нуль при $E = E_c = 3 \times 10^{10}$ ГэВ является следствием обрыва первичного спектра при $E > E_c$.

На рис. 3 и 4 дано сравнение расчетных дифференциальных энергетических спектров нуклонов ($p + n$), протонов и нейтронов на разных глубинах атмосферы с имеющимися экспериментальными данными [15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25]. На рис. 4 приведены, кроме того, результаты расчета [21], выполненного методом Монте-Карло (для у.м.).

Данные по спектрам нуклонов с $E > 10^3$ ГэВ, относящиеся к глубинам $h \leq 530$ г/см² (рис. 3), получены из анализа спектра γ -квантов в широких атмосферных ливнях (см. [26]) и, поэтому, являются весьма модельно зависимыми. Тем не менее, наш расчет в целом не противоречит этой совокупности данных. Наибольшие разногласия наблюдаются с результатом работы [16]. По нашему мнению, оценка энергии нуклонов (по формуле $E_N \approx 3E_{\gamma}$), использованная в анализе [16], приводит к систематическому занижению ин-

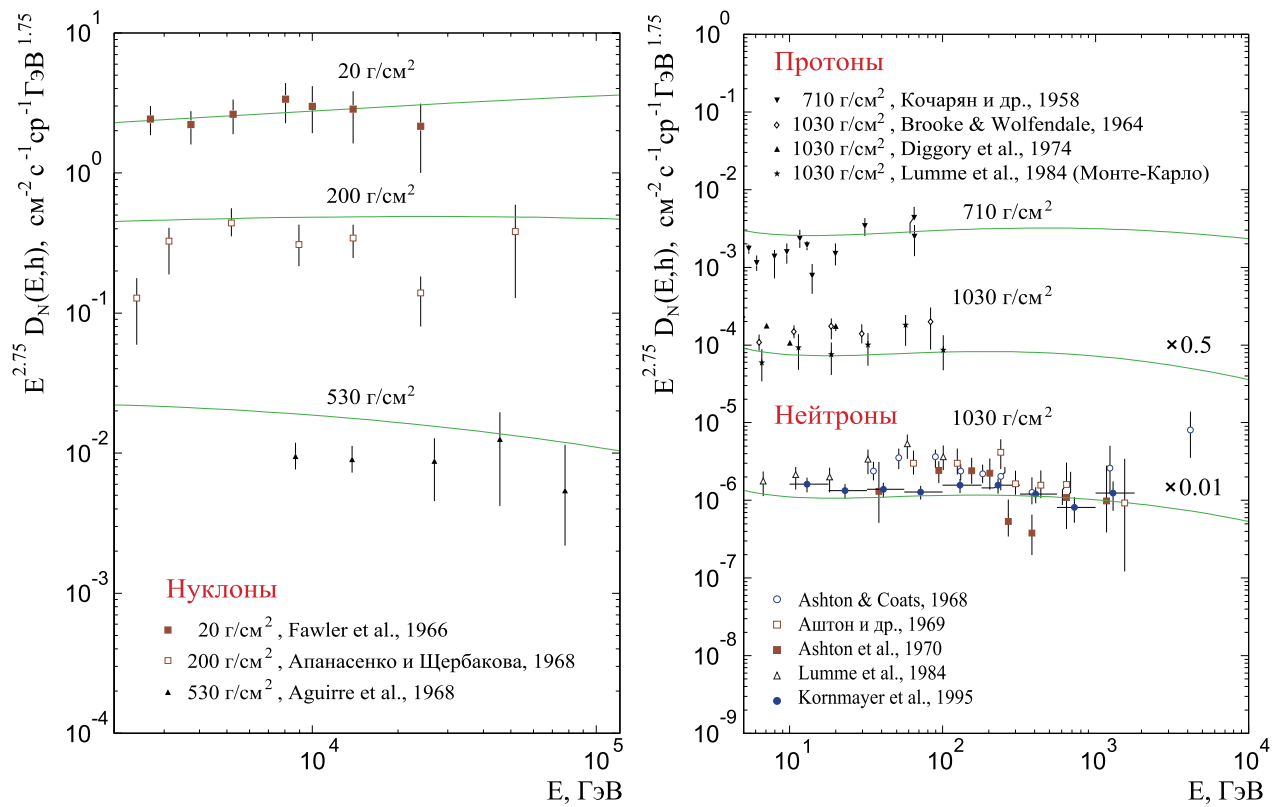


Рис. 3: Дифференциальные энергетические спектры нуклонов на глубинах $h = 20, 200$ и 530 г/см². Точки: ■ – [15], □ – [16], ▲ – [17], Кривые – расчет данной работы.

Рис. 4: Дифференциальные энергетические спектры протонов ($h = 710, 1030$ г/см²) и нейтронов ($h = 1030$ г/см²). Точки: ▼ – [18], ◇ – [19], ▲ – [20], ★ и △ – [21], ○ – [22], □ – [23], ■ – [24], ● – [25]. Кривые – расчет данной работы (расчет и данные на у.м. для протонов и нейтронов умножены на 0.5 и 0.01, соответственно).

тенсивности нуклонов. Прямые измерения спектров протонов на уровне гор и у.м. очень фрагментарны (рис. 4) и здесь можно говорить лишь о качественном согласии с расчетом. Экспериментальные данные по нейтронной компоненте на у.м., хотя и более представительны, но очень противоречивы. Наш расчет находится в неплохом согласии с недавними измерениями, выполненными на прототипе установки KASCADE в Карлсруэ [25].

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования РФ в рамках программы "Университеты России – фундаментальные исследования", грант 728. Мы благодарим С. И. Синеговского за полезные обсуждения.

Литература

- [1] Koshiha M. // Phys. Rep. 1992. V. **220**. P. 229. Gaisser T. K., Halzen F., Stanev T. // Phys. Rep. 1995. V. **258**. P. 173; Erratum *ibid.* 1996. V. **271**. P. 355. Наумов В. А. // В сб. "Астрофизика и физика микромира. Материалы Байкальской школы по фундаментальной физике". Под ред. В. А. Наумова, Ю. В. Парфенова и С. И. Синеговского.

- [2] Naumov V.A., Perrone L. // *Astropart. Phys.* 1999. V. **10**. С. 239.
- [3] Battistoni G., Ferrari A., Lipari P., *et al.* // hep-ph/9907408. Tserkovnyak Y., Komar R., Nally C., Waltham C. // hep-ph/9907450.
- [4] Наумов В. А. // Исслед. по геомагнетизму, аэронавигации и физике Солнца. М.: Наука, 1984. Вып. **69** (Теоретическая физика). С. 82. Бугаев Э. В., Наумов В. А. // ИЯИ АН СССР. Препринт П-0401. М., 1985. 32 с.
- [5] Валл А. Н., Наумов В. А., Синеговский С. И. // *ЯФ*. 1986. Т. **44**. С. 1240.
- [6] Зацепин Г. Т. "Проблемы физики космических лучей". М.: Изд-во ИЯИ АН СССР, 1978. С. 189.
- [7] Григоров Р. Л. // *ЯФ*. 1977. Т. **25**. С. 788. Волкова Л. В., Зацепин Г. Т., Кузьмичев Л. А. // *ЯФ*. 1979. Т. **29**. С. 1252. Иваненко И. П., Роганова Т. М. "Каскадные ливни вызываемые частицами сверхвысоких энергий". М.: Наука, 1983. Bellandi J., Mundim L. M., Dias de Deus J., Covolan R. M. J. // *J. Phys. G: Nucl. Phys.* 1992. V. **18**. P. 579.
- [8] Никольский С. И., Стаменов Й. И., Ушев С. З. // *ЖЭТФ*. 1984. Т. **87**. С. 18. Никольский С. И. // В сб. "Проблемы физики космических лучей". Под ред. А. Е. Чудакова и др. М.: Наука, 1987. С. 169.
- [9] Greisen K. // *Phys. Rev. Lett.* 1966. V. **16**. P. 748. Зацепин Г. Т., Кузьмин В. А. // *Письма в ЖЭТФ*. 1966. Т. **4**. С. 114.
- [10] Bugaev E. V., Naumov V. A., Sinegovsky S. I., *et al.* // *Proc. of the RIKEN International Workshop on Electromagnetic and Nuclear Cascade Phenomena in High and Extremely High Energies*. Ed. M. Ishihara and A. Misaki. Tokyo, RIKEN, 1994. P. 264.
- [11] Bugaev E. V., Misaki A., Naumov V. A., *et al.* // *Phys. Rev.* 1998. V. **D 58** 054001.
- [12] Mielke H. H., Föller M., Engler J., Knapp J. // *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* 1994. V. **20**. P. 637.
- [13] Кимель Л. Р., Мохов Н. В. // *Изв. ВУЗов, физика*. 1974. Вып. **10**. С. 17. Кимель Л. Р., Мохов Н. В. // В сб. "Вопросы дозиметрии и защиты от излучений". М.: Атомиздат, 1975. Вып. **14**. С. 41.
- [14] Genz A. C., Malik A. A. // *J. Comput. Appl. Math.* 1980. **6** 295.
- [15] Fowler P. *et al.* // *Nature*. 1966. V. **209**. P. 567.
- [16] Апанасенко А. В., Щербакова М. Н. // *Изв. АН СССР, сер. физ.* 1968. Т. **32**. С. 372, 374.
- [17] Aguirre C. *et al.* (Brazilian-Japanese Emulsion Group) // *Canadian J. of Phys.* 1968. V. **46**. P. 660.

- [18] Кочарян Н. М., Саакян Г. С., Киракосян З. А. // ЖЭТФ. 1958. Т. **35**. С. 1335.
- [19] Brooke G., Wolfendale A. W. // Proc. Phys. Soc. 1964. V. **84**. P. 843.
- [20] Diggory I. S., Hook J. R., Jenkins I. A., Turver K. E. // J. Phys. A: Math., Nucl., Gen. 1974. V. **7**. P. 741.
- [21] Lumme M., Nieminen M., Peltonen J., *et al.* // J. Phys. G: Nucl. Phys. 1984. V. **10** P. 683.
- [22] Ashton F., Coats R. R. // J. Phys. A: Gen. Phys. 1968. V. **1** P. 169.
- [23] Аштон Ф., Кинг Дж., Мамиджанян Э. А., Смитт Н. И. // Изв. АН СССР, сер. физ. 1969. Т. **33**. С. 1557.
- [24] Ashton F. Smith N. I., King J., Mamidzhanian E. A. // Acta Phys. Acad. Sci. Hung. 1970. V. **29** (Suppl. 3). P. 25.
- [25] Kornmayer H., Mielke H. H., Engler J., Knapp J. // J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. 1995. V. **21**. P. 439.
- [26] Григоров Н. Л., Рапопорт И. Д., Шестоперов В. Я., "Частицы высоких энергий в космических лучах". М.: Наука, 1973. 303 с.