

Спектры вторичных частиц в $K_{\ell 3}$ распадах

В. А. Наумов, Т. С. Синеговская, С. И. Синеговский

Иркутский государственный университет, 664003, Иркутск, бульвар Гагарина 20

Аннотация

В работе получены точные формулы для энергетических спектров вторичных частиц (нейтрино, электронов, мюонов и пионов), образующихся в трехчастичных полулептонных распадах нейтральных и заряженных каонов. Учтена линейная по q^2 зависимость $K_{\ell 3}$ форм-факторов.

1 Введение

Атмосферные нейтрино (АН) являются сегодня основным инструментом для исследования нейтринных осцилляций, поэтому уточнение энергетических спектров АН и их флейворного состава необходимо для ведущихся и планируемых экспериментов на подземных и глубоководных нейтринных телескопах. Как известно, АН рождаются в разветвленных цепочках распадов мезонов (см., например, [1]) и, в частности, в распадах каонов ($K \rightarrow \mu \nu_\mu$, $K \rightarrow \pi e \nu_e$, $K \rightarrow \pi \mu \nu_\mu$), а также пионов (генерируемых как непосредственно при столкновениях космических лучей с ядрами атмосферы, так и в результате распадов $K_S^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$, $K_L^0 \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$, $K_L^0 \rightarrow \pi^\pm \ell^\mp \nu_\ell$) и мюонов от π - и K -распадов. Учет всех этих цепочек необходим для прецизионного расчета спектров мюонных и (особенно) электронных нейтрино. Для такого расчета требуется, помимо прочего, точное знание спектров вторичных частиц от трехчастичных полулептонных распадов каонов – $K_{\ell 3}^0$ и $K_{\ell 3}^\pm$.

В работах [2, 3] были рассчитаны спектры АН высоких энергий ($\gtrsim 1$ ТэВ) с учетом зависимости $K_{\ell 3}$ форм-факторов от квадрата 4-импульса уносимого лептонной парой. Влияние эффекта форм-факторов на абсолютные потоки АН невелико ($\lesssim 4\%$) и он практически совсем не сказывается на величине потока мюонов космических лучей у поверхности Земли [4], который обычно используется для нормировки расчетных спектров АН при энергиях выше нескольких ГэВ. Однако, флейворное отношение $R_\nu = (\nu_\mu + \bar{\nu}_\mu)/(\nu_e + \bar{\nu}_e)$ – важная характеристика, с большой точностью измеряемая в экспериментах по нейтринным осцилляциям, – оказывается чувствительной к эффекту [2, 3].

В данной работе представлены точные формулы для энергетических спектров всех вторичных частиц (π , μ , e , ν), генерируемых в $K_{\ell 3}$ распадах. Формулы, полученные в линейном по q^2 приближении для $K_{\ell 3}$ форм-факторов с учетом последних экспериментальных данных о полулептонных распадах каонов, справедливы для любых энергий каонов и вторичных частиц. Мы надеемся, что аналитические и численные результаты данной работы окажутся полезными тем, кто занимается исследованиями нейтринных осцилляций в потоке атмосферных нейтрино, а также в экспериментах с пучками нейтрино от ускорителей. Формулы для спектров электронов и нейтральных пионов могут быть использованы в расчетах электромагнитной составляющей адронных каскадов, для анализа

результатов баллонных измерений потоков вторичных космических лучей и в ряде других приложений.

2 Ширины распадов

В стандартной теории слабого взаимодействия матричный элемент $K_{\ell 3}$ распада имеет вид (см., например, [5]):

$$M = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \sin \theta_C [f_+(q^2) (p_K + p_\pi)^\mu + f_-(q^2) (p_K - p_\pi)^\mu] \bar{\ell} \gamma_\mu (1 + \gamma_5) \nu_\ell. \quad (1)$$

Здесь G_F и θ_C – константа Ферми и угол Кабиббо, p_K и p_π – 4-импульсы каона и пиона, $f_\pm(q^2)$ – форм-факторы, зависящие от $q^2 = (p_K - p_\pi)^2$, квадрата 4-импульса, передаваемого лептонной паре и $\ell = e, \mu$. Мы используем общепринятую линейную параметризацию

$$f_\pm(q^2) = f_\pm(0) \left(1 + \lambda_\pm \frac{q^2}{m_\pi^2} \right).$$

В пределе точной $SU(3)$ симметрии

$$f_+(0) = \begin{cases} 1 & \text{для } K_{\ell 3}^0, \\ 1/\sqrt{2} & \text{для } K_{\ell 3}^\pm, \end{cases}$$

тогда как $f_-(0)$ обращается в нуль. В соответствии с теоремой Адемолло-Гатто можно ожидать, что при нарушенной $SU(3)$ симметрии отношение $\xi = f_-(0)/f_+(0)$ будет мало по абсолютной величине для K_{e3} -распада [5]. В случае $K_{\mu 3}$ -распада теорема Адемолло-Гатто не работает, так что здесь допустимо $|\xi| \sim 1$. Реальная ситуация до сих пор не вполне ясна, т.к. разброс значений ξ , измеренных в различных экспериментах, очень велик (см. [6]). В расчетах мы будем использовать наилучший фит, полученный в [6] из анализа всех имеющихся экспериментальных данных (см. ниже).

Дифференциальная вероятность распада в произвольной системе отсчета имеет вид

$$d\Gamma = \frac{|M|^2}{2(2\pi)^5 E_K} \delta^4(p_K - p_\pi - p_\ell - p_\nu) \frac{d^3 p_\pi}{2E_\pi} \frac{d^3 p_\ell}{2E_\ell} \frac{d^3 p_\nu}{2E_\nu}.$$

Используя стандартные методы вычисления квадрата матричного элемента, находим

$$|M|^2 = 16G_F^2 \sin^2 \theta_C \left\{ f_+(q^2) [2(p_K p_\ell)(p_K p_\nu) - m_K^2(p_\nu p_\ell)] - m_\ell^2 f_+(q^2) [f_+(q^2) - f_-(q^2)] (p_K p_\nu) + \frac{m_\ell^2}{4} [f_+(q^2) - f_-(q^2)]^2 (p_\nu p_\ell) \right\}. \quad (2)$$

Нетрудно видеть, что расчет дифференциальных спектров продуктов $K_{\ell 3}$ распада сводится к вычислению следующих трех интегралов:

$$\int \frac{d^3 p_\pi}{2E_\pi} \frac{d^3 p_\ell}{2E_\ell} \delta^4(q_\nu - p_\pi - p_\ell) |M|^2, \quad (3)$$

$$\int \frac{d^3 p_\pi}{2E_\pi} \frac{d^3 p_\nu}{2E_\nu} \delta^4(q_\ell - p_\pi - p_\nu) |M|^2, \quad (4)$$

$$\int \frac{d^3 p_\ell}{2E_\ell} \frac{d^3 p_\nu}{2E_\nu} \delta^4(q_\pi - p_\ell - p_\nu) |M|^2, \quad (5)$$

где $q_i = (p_K - p_i)$, $i = \pi, \ell, \nu$. При этом, физическая область задается неравенствами

$$\begin{aligned} m_\pi + m_\ell &\leq q_\nu \leq m_K, \\ m_\pi &\leq q_\ell \leq m_K - m_\ell, \\ m_\ell &\leq q_\pi \leq m_K - m_\pi. \end{aligned}$$

Для расчета мы использовали метод ковариантного интегрирования [7]. Выбирая систему координат $\mathbf{q}_\nu = \mathbf{0}$, $\mathbf{q}_\ell = \mathbf{0}$ и $\mathbf{q}_\pi = \mathbf{0}$ для интегралов (3), (4) и (5), соответственно, интегрируя по импульсу нейтрино (лептона) и переходя к полярным координатам, получаем выражения:

$$\begin{aligned} &\frac{\pi}{2q_\nu^0} |\mathbf{p}_\pi| \int_{-1}^1 d \cos \vartheta_1 |M|^2, \\ &\frac{\pi}{2q_\ell^0} |\mathbf{p}_\pi| \int_{-1}^1 d \cos \vartheta_1 |M|^2, \\ &\frac{\pi}{2q_\pi^0} |\mathbf{p}_\nu| \int_{-1}^1 d \cos \vartheta_2 |M|^2. \end{aligned}$$

Используя определения кинематических инвариантов

$$q_\pi^2 = m_K^2 + m_\pi^2 - 2E_K E_\pi + 2|\mathbf{p}_K||\mathbf{p}_\pi| \cos \vartheta_1, \quad q_\nu^2 = m_K^2 - 2E_K E_\nu + 2|\mathbf{p}_K| E_\nu \cos \vartheta_2,$$

после новой замены переменных $\cos \vartheta_1 \rightarrow q_\pi^2$ и $\cos \vartheta_2 \rightarrow q_\nu^2$, интегралы (3), (4) и (5) можно записать в следующей форме:

$$\begin{aligned} &\frac{\pi}{4\sqrt{(\bar{p}_K^0 \bar{q}_\nu^0)^2 - (m_K \bar{q}_\nu^0)^2}} \int_{\bar{\alpha}_\nu - \bar{\beta}_\nu}^{\bar{\alpha}_\nu + \bar{\beta}_\nu} d\bar{q}_\pi^2 |M|^2, \\ &\frac{\pi}{4\sqrt{(\bar{p}_K^0 \bar{q}_\ell^0)^2 - (m_K \bar{q}_\ell^0)^2}} \int_{\bar{\alpha}_\ell - \bar{\beta}_\ell}^{\bar{\alpha}_\ell + \bar{\beta}_\ell} d\bar{q}_\pi^2 |M|^2, \\ &\frac{\pi}{4\sqrt{(\bar{p}_K^0 \bar{q}_\ell^0)^2 - (m_K \bar{q}_\ell^0)^2}} \int_{\bar{\alpha}_\pi - \bar{\beta}_\pi}^{\bar{\alpha}_\pi + \bar{\beta}_\pi} d\bar{q}_\nu^2 |M|^2. \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь черточкой мы помечаем величины, записанные в системе $\mathbf{q}_i = \mathbf{0}$ ($i = \nu, \ell, \pi$). Поскольку величины α_i и β_i являются релятивистскими инвариантами, можно записать их явный вид в произвольной системе отсчета:

$$\begin{aligned} \alpha_\nu &= m_K^2 + m_\pi^2 - \frac{1}{2q_\nu^2} (q_\nu^2 + m_K^2)(q_\nu^2 + m_\pi^2 - m_\ell^2), \\ \alpha_\ell &= m_K^2 + m_\pi^2 - \frac{1}{2q_\ell^2} (q_\ell^2 + m_\pi^2)(q_\ell^2 + m_K^2 - m_\ell^2), \\ \alpha_\pi &= m_K^2 - \frac{1}{2q_\pi^2} (q_\pi^2 - m_\ell^2)(q_\pi^2 + m_K^2 - m_\pi^2), \\ \beta_\nu &= \frac{1}{2q_\nu^2} (q_\nu^2 - m_K^2) \sqrt{(q_\nu^2 + m_\pi^2 - m_\ell^2)^2 - 4m_\pi^2 q_\nu^2}, \\ \beta_\ell &= \frac{1}{2q_\ell^2} (q_\ell^2 - m_\pi^2) \sqrt{(q_\ell^2 + m_K^2 - m_\ell^2)^2 - 4m_K^2 q_\ell^2}, \\ \beta_\pi &= \frac{1}{2q_\pi^2} (q_\pi^2 - m_\ell^2) \sqrt{(q_\pi^2 + m_K^2 - m_\pi^2)^2 - 4m_K^2 q_\pi^2}. \end{aligned}$$

Переходя в выражениях (6) к лабораторной системе, получаем

$$\begin{aligned} & \frac{\pi}{4\sqrt{(p_K q_\nu)^2 - m_K^2 q_\nu^2}} \int_{\alpha_\nu - \beta_\nu}^{\alpha_\nu + \beta_\nu} dq_\pi^2 |M|^2, \\ & \frac{\pi}{4\sqrt{(p_K q_\ell)^2 - m_K^2 q_\ell^2}} \int_{\alpha_\ell - \beta_\ell}^{\alpha_\ell + \beta_\ell} dq_\pi^2 |M|^2, \\ & \frac{\pi}{4\sqrt{(p_K q_\pi)^2 - m_K^2 q_\pi^2}} \int_{\alpha_\pi - \beta_\pi}^{\alpha_\pi + \beta_\pi} dq_\nu^2 |M|^2. \end{aligned}$$

Опуская довольно громоздкие промежуточные выкладки, представим выражения для дифференциальных ширин распадов в следующем виде:

$$\begin{aligned} E_\nu \frac{d^3 \Gamma_\nu}{d^3 p_\nu} &= \frac{G_F^2 \sin^2 \theta_C f_+^2(0)}{768\pi^4 E_K \sqrt{(p_K q_\nu)^2 - m_K^2 q_\nu^2}} \left\{ -q_\nu^2 I_2(1, \lambda_1, 1, \lambda_1; \alpha_\nu, \beta_\nu) \right. \\ &\quad - [m_K^2 (m_\pi^2 - m_\ell^2) + (q_\pi^2)^2 - (m_K^2 + m_\pi^2) q_\pi^2] I_1(1, \lambda_1, 1, \lambda_1; \alpha_\nu, \beta_\nu) \\ &\quad - 2m_\ell^2 (m_K^2 - q_\nu^2) I_1(1, \lambda_1, c, \lambda_2; \alpha_\nu, \beta_\nu) + m_\ell^2 I_2(c, \lambda_2, c, \lambda_2; \alpha_\nu, \beta_\nu) \\ &\quad \left. - m_\ell^4 I_1(c, \lambda_2, c, \lambda_2; \alpha_\nu, \beta_\nu) \right\}, \\ E_\ell \frac{d^3 \Gamma_\ell}{d^3 p_\ell} &= \frac{G_F^2 \sin^2 \theta_C f_+^2(0)}{768\pi^4 E_K \sqrt{(p_K q_\ell)^2 - m_K^2 q_\ell^2}} \left\{ (m_\ell^2 - q_\ell^2) I_2(1, \lambda_1, 1, \lambda_1; \alpha_\ell, \beta_\ell) \right. \\ &\quad - [(q_\ell^2)^2 - (m_K^2 + m_\pi^2 + 2m_\ell^2) q_\ell^2 + m_\ell^2 (m_\pi^2 + m_\ell^2) \\ &\quad + m_K^2 m_\pi^2] I_1(1, \lambda_1, 1, \lambda_1; \alpha_\ell, \beta_\ell) + m_\ell^2 I_2(c, \lambda_2, c, \lambda_2; \alpha_\ell, \beta_\ell) \\ &\quad + 2m_\ell^2 (m_\pi^2 + m_\ell^2 - q_\ell^2) I_1(1, \lambda_1, c, \lambda_2; \alpha_\ell, \beta_\ell) - m_\ell^4 I_1(c, \lambda_2, c, \lambda_2; \alpha_\ell, \beta_\ell) \left. \right\}, \\ E_\pi \frac{d^3 \Gamma_\pi}{d^3 p_\pi} &= \frac{G_F^2 \sin^2 \theta_C f_+^2(0)}{768\pi^4 E_K \sqrt{(p_K q_\pi)^2 - m_K^2 q_\pi^2}} \left\{ (1 + \lambda_1 q_\pi^2)^2 [I_2(m_K^2 + m_\pi^2, -1, 1, 0; \alpha_\pi, \beta_\pi) \right. \\ &\quad - q_\pi^2 I_2(1, 0, 1, 0; \alpha_\pi, \beta_\pi) - I_1(m_K^2 (m_\pi^2 - m_\ell^2), 0, 1, 0; \alpha_\pi, \beta_\pi)] \\ &\quad - 2m_\ell^2 (1 + \lambda_1 q_\pi^2) (c + \lambda_2 q_\pi^2) I_1(m_K^2, -1, 1, 0; \alpha_\pi, \beta_\pi) \\ &\quad \left. + m_\ell^2 (q_\pi^2 - m_\ell^2) (c + \lambda_2 q_\pi^2)^2 I_1(1, 0, 1, 0; \alpha_\pi, \beta_\pi) \right\}, \end{aligned} \tag{7}$$

где введены обозначения для элементарных интегралов:

$$\begin{aligned} I_1(x, y, v, u; \alpha, \beta) &= \int_{\alpha - \beta}^{\alpha + \beta} dt (x + yt)(v + ut) \\ &= 2\beta \left[xv + (xu + yv)\alpha + yu \left(\alpha^2 + \frac{\beta^2}{3} \right) \right], \\ I_2(x, y, v, u; \alpha, \beta) &= \int_{\alpha - \beta}^{\alpha + \beta} dt t (x + yt)(v + ut) \\ &= 2\beta \left[xv\alpha + (xu + yv) \left(\alpha^2 + \frac{\beta^2}{3} \right) + yu\alpha (\alpha^2 + \beta^2) \right], \\ \lambda_1 &= \frac{\lambda_+}{m_\pi^2}, \quad \lambda_2 = \frac{\lambda_+ - \xi \lambda_-}{2m_\pi^2}, \quad c = \frac{1 - \xi}{2}. \end{aligned}$$

Как нетрудно видеть, выражения в фигурных скобках в формулах (7) являются полиномами по q_i^2 ($i = \nu, \ell, \pi$). Это позволяет переписать дифференциальные ширины распадов

в более компактной форме:

$$\begin{aligned}
E_\nu \frac{d^3\Gamma_\nu}{d^3p_\nu} &= \frac{G_F^2 \sin^2 \theta_C m_K^2}{768\pi^4 E_K} f_+^2(0) \sqrt{(q_\nu^2)^2 - 2\mu_+ q_\nu^2 + \mu_-^2} \sum_{n=-4}^3 c_n^\nu \left(\frac{q_\nu^2}{m_K^2} \right)^n, \\
E_\ell \frac{d^3\Gamma_\ell}{d^3p_\ell} &= \frac{G_F^2 \sin^2 \theta_C m_K^2}{768\pi^4 E_K} f_+^2(0) (q_\ell^2 - m_\pi^2) \sum_{n=-4}^3 c_n^\ell \left(\frac{q_\ell^2}{m_K^2} \right)^n \\
E_\pi \frac{d^3\Gamma_\pi}{d^3p_\pi} &= \frac{G_F^2 \sin^2 \theta_C m_K^2}{768\pi^4 E_K} f_+^2(0) (q_\pi^2 - m_\ell^2) \sum_{n=-3}^3 c_n^\pi \left(\frac{q_\pi^2}{m_K^2} \right)^n,
\end{aligned}$$

где $\mu_\pm = m_\pi^2 \pm m_\ell^2$. Фигурирующие здесь коэффициенты c_n^i зависят от масс частиц и параметров форм-факторов. Соответствующие точные формулы и численные значения приведены в Приложении. После интегрирования по всем угловым переменным и перехода к безразмерным величинам $y = q_i/m_K^2$ для энергетических спектров вторичных частиц имеем

$$\begin{aligned}
\frac{d\Gamma_\nu}{dE_\nu} &= \frac{G_F^2 \sin^2 \theta_C m_K^6}{768\pi^3 E_K P_K} f_+^2(0) \sum_{n=-4}^3 c_n^\nu \int_{y_1^\nu}^{y_2^\nu} dy y^n \sqrt{(y - y_+^\nu)(y - y_-^\nu)}, \\
\frac{d\Gamma_\ell}{dE_\ell} &= \frac{G_F^2 \sin^2 \theta_C m_K^6}{768\pi^3 E_K P_K} f_+^2(0) \sum_{n=-4}^3 c_n^\ell \int_{y_1^\ell}^{y_2^\ell} dy y^n (y - r_\pi), \\
\frac{d\Gamma_\pi}{dE_\pi} &= \frac{G_F^2 \sin^2 \theta_C m_K^6}{768\pi^3 E_K P_K} f_+^2(0) \sum_{n=-3}^3 c_n^\pi \int_{y_1^\pi}^{y_2^\pi} dy y^n (y - r_\ell).
\end{aligned}$$

Пределы интегрирования определяются массами и энергиями (импульсами) первичной и вторичной частиц (ниже мы используем обозначения $r_\pi = m_\pi^2/m_K^2$, $r_\ell = m_\ell^2/m_K^2$, $P_i = |\mathbf{p}_i|$, а звездочкой помечаем величины относящиеся к системе покоя каона):

$$\begin{aligned}
y_1^\nu &= \begin{cases} 1 - 2E_\nu (E_K + P_K) / m_K^2, & E_\nu < E_-^\nu, \\ y_+^\nu, & E_-^\nu \leq E_\nu \leq E_+^\nu, \end{cases} \\
y_2^\nu &= 1 - 2E_\nu / (E_K + P_K); \\
y_\pm^\nu &= \frac{(m_\pi \pm m_\ell)^2}{m_K^2}, \quad E_\pm^\nu = \frac{(1 - y_\pm^\nu) (E_K \pm P_K)}{2}; \\
y_1^\ell &= \begin{cases} 1 + r_\ell - 2(E_\ell E_K + P_\ell P_K) / m_K^2, & E_\ell < E_-^\ell, \\ r_\pi, & E_-^\ell \leq E_\ell \leq E_+^\ell, \end{cases} \\
y_2^\ell &= 1 + r_\ell - 2(E_\ell E_K - P_\ell P_K) / m_K^2; \\
y_\pm^\ell &= \frac{(m_K \pm m_\ell)^2}{m_K^2}, \quad E_\pm^\ell = \frac{(E_K E_\ell^* \pm P_K P_\ell^*)}{2m_K}, \quad E_\ell^* = \frac{m_K^2 + m_\ell^2 - m_\pi^2}{m_K}, \\
y_1^\pi &= \begin{cases} 1 + r_\pi - 2(E_\pi E_K + P_\pi P_K) / m_K^2, & E_\pi < E_-^\pi, \\ r_\ell, & E_-^\pi \leq E_\pi \leq E_+^\pi, \end{cases} \\
y_2^\pi &= 1 + r_\pi - 2(E_\pi E_K - P_\pi P_K) / m_K^2;
\end{aligned}$$

$$y_{\pm}^{\pi} = \frac{(m_K \pm m_{\pi})^2}{m_K^2}, \quad E_{\pm}^{\pi} = \frac{(E_K E_{\pi}^* \pm P_K P_{\pi}^*)}{2m_K}, \quad E_{\pi}^* = \frac{m_K^2 + m_{\pi}^2 - m_{\ell}^2}{m_K},$$

Переходя в систему покоя каона, где $(q_i^*)^2 = m_K^2 + m_i^2 - 2m_K E_i^*$ ($i = \nu, \ell, \pi$), получаем три эквивалентные формулы для полной ширины распада:

$$\begin{aligned} \Gamma_{(\nu)}^* &= \frac{G_F^2 \sin^2 \theta_C m_K^5}{768\pi^3} f_+^2(0) \sum_{n=-4}^3 c_n^{\nu} \int_1^{y_+^{\nu}} dy (1-y) y^n \sqrt{(y-y_+^{\nu})(y-y_-^{\nu})}, \\ \Gamma_{(\ell)}^* &= \frac{G_F^2 \sin^2 \theta_C m_K^5}{768\pi^3} f_+^2(0) \sum_{n=-4}^3 c_n^{\ell} \int_{r_{\pi}}^{y_-^{\ell}} dy (r_{\pi}-y) y^n \sqrt{(y-y_+^{\ell})(y-y_-^{\ell})}, \\ \Gamma_{(\pi)}^* &= \frac{G_F^2 \sin^2 \theta_C m_K^5}{768\pi^3} f_+^2(0) \sum_{n=-3}^3 c_n^{\pi} \int_{r_{\ell}}^{y_-^{\pi}} dy (r_{\ell}-y) y^n \sqrt{(y-y_+^{\pi})(y-y_-^{\pi})}. \end{aligned}$$

Для произвольной системы имеем, разумеется, $\Gamma = (m_K/E_K)\Gamma^*$.

3 Спектральные функции

Для расчетов потоков вторичных космических лучей полезно ввести т.н. "спектральные функции"

$$F_i(E_i, E_K) = \frac{P_K}{\Gamma} \frac{d\Gamma(E_i, E_K)}{dE_i} \quad (i = \nu, \ell, \pi).$$

Они могут быть представлены в следующей форме:

$$\begin{aligned} F_{\nu}(E_{\nu}, E_K) &= \frac{1}{Z_{\nu}} \sum_{n=-4}^3 c_n^{\nu} J_n(y_1^{\nu}, y_2^{\nu}), & Z_{\nu} &= \sum_{n=-4}^3 c_n^{\nu} [J_{n+1}(y_+^{\nu}, 1) - J_n(y_+^{\nu}, 1)], \\ F_{\ell}(E_{\ell}, E_K) &= \frac{1}{Z_{\ell}} \sum_{n=-4}^3 c_n^{\ell} I_n^{\ell}(y_1^{\ell}, y_2^{\ell}), & Z_{\ell} &= \sum_{n=-4}^3 c_n^{\ell} [r_{\pi} J_n(r_{\pi}, y_-^{\ell}) - J_{n+1}(r_{\pi}, y_-^{\ell})], \\ F_{\pi}(E_{\pi}, E_K) &= \frac{1}{Z_{\pi}} \sum_{n=-3}^3 c_n^{\pi} I_n^{\pi}(y_1^{\pi}, y_2^{\pi}), & Z_{\pi} &= \sum_{n=-3}^3 c_n^{\pi} [r_{\ell} J_n(r_{\ell}, y_-^{\pi}) - J_{n+1}(r_{\ell}, y_-^{\pi})]. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь введены обозначения

$$J_n(y_1, y_2) = \int_{y_1}^{y_2} dy y^n \sqrt{(y-y_+)(y-y_-)}, \quad (9)$$

$$I_n^{\ell}(y_1, y_2) = \int_{y_1}^{y_2} dy y^n (y - r_{\pi}), \quad I_n^{\pi}(y_1, y_2) = \int_{y_1}^{y_2} dy y^n (y - r_{\ell}). \quad (10)$$

Спектральные функции для заряженных лептонов и пионов можно переписать в более

$$\begin{aligned}
Z_\ell F_\ell(E_\ell, E_K) &= \left(\frac{1}{y_1^\ell} - \frac{1}{y_2^\ell} \right) \left[c_{-3}^\ell - r_\pi c_{-2}^\ell - \frac{r_\pi c_{-3}^\ell - c_{-4}^\ell}{2} \left(\frac{1}{y_1^\ell} + \frac{1}{y_2^\ell} \right) \right] \\
&\quad - r_\pi c_{-4}^\ell \left[\frac{1}{(y_1^\ell)^3} - \frac{1}{(y_2^\ell)^3} \right] + c_{-1}^\ell (y_2^\ell - y_1^\ell) + (c_{-2}^\ell - r_\pi c_{-1}^\ell) \ln \frac{y_2^\ell}{y_1^\ell} \\
&\quad + \sum_{n=0}^3 c_n^\ell \left[\frac{(y_2^\ell)^{n+2} - (y_1^\ell)^{n+2}}{n+2} - r_\pi \frac{(y_2^\ell)^{n+1} - (y_1^\ell)^{n+1}}{n+1} \right], \\
Z_\pi F_\pi(E_\pi, E_K) &= \left(\frac{1}{y_1^\pi} - \frac{1}{y_2^\pi} \right) \left[c_{-3}^\pi - r_\ell c_{-2}^\pi - \frac{r_\ell c_{-3}^\pi}{2} \left(\frac{1}{y_1^\pi} + \frac{1}{y_2^\pi} \right) \right] \\
&\quad + c_{-1}^\pi (y_2^\pi - y_1^\pi) + (c_{-2}^\pi - r_\ell c_{-1}^\pi) \ln \frac{y_2^\pi}{y_1^\pi} \\
&\quad + \sum_{n=0}^3 c_n^\pi \left[\frac{(y_2^\pi)^{n+2} - (y_1^\pi)^{n+2}}{n+2} - r_\ell \frac{(y_2^\pi)^{n+1} - (y_1^\pi)^{n+1}}{n+1} \right].
\end{aligned}$$

Аналогичные формулы для нейтрино в общем случае оказываются значительно более сложными. Однако, в случае K_{e3} распада их можно существенно упростить, если пренебречь массой электрона. Таким образом, для электронного нейтрино получаем

$$\begin{aligned}
Z_{\nu_e} F_{\nu_e}(E_{\nu_e}, E_K) &= \left(\frac{1}{y_1^\nu} - \frac{1}{y_2^\nu} \right) \left[c_{-3}^\nu - r_\pi c_{-2}^\nu - \frac{r_\pi c_{-3}^\nu}{2} \left(\frac{1}{y_1^\nu} + \frac{1}{y_2^\nu} \right) \right] \\
&\quad + c_{-1}^\nu (y_2^\nu - y_1^\nu) + (c_{-2}^\nu - r_\pi c_{-1}^\nu) \ln \frac{y_2^\nu}{y_1^\nu} \\
&\quad + \sum_{n=0}^3 c_n^\nu \left[\frac{(y_2^\nu)^{n+2} - (y_1^\nu)^{n+2}}{n+2} - r_\pi \frac{(y_2^\nu)^{n+1} - (y_1^\nu)^{n+1}}{n+1} \right].
\end{aligned}$$

При расчете функции $Z_{\nu_\mu} F_{\nu_\mu}(E_{\nu_\mu}, E_K)$ необходимо использовать точные выражения (8) и (9).

Для дальнейшего удобно ввести следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
f_i &= y_i - \frac{y_+ + y_-}{2}, \quad s_i = \sqrt{(y_i - y_+)(y_i - y_-)}, \\
g_i &= \frac{y_+ + s_i \sqrt{y_+ y_-} + y_-}{y_i} - \frac{y_+ + y_-}{2} \quad (i = 1, 2).
\end{aligned}$$

Тогда интегралы $J_n(y_1, y_2)$ с $n \neq 0$ и -1 могут быть вычислены по следующим рекуррентным формулам:

$$(n+2)J_n = y_2^{n-1}s_2^3 - y_1^{n-1}s_1^3 + \left(n + \frac{1}{2}\right)(y_+ + y_-)J_{n-1} - (n-1)y_+y_-J_{n-2} \quad \text{для } n > 0,$$

$$(n+1)y_+y_-J_n = y_2^{n+1}s_2^3 - y_1^{n+1}s_1^3 + \left(n + \frac{5}{2}\right)(y_+ + y_-)J_{n+1} - (n+4)J_{n+2} \quad \text{для } n < -1,$$

а для J_0 и J_{-1} получаем

$$J_0 = \frac{f_2 s_2 - f_1 s_1}{2} - \frac{(y_+ - y_-)^2}{8} \ln \left| \frac{f_2 + s_2}{f_1 + s_1} \right|,$$

$$J_{-1} = s_2 - s_1 - \frac{y_+ + y_-}{2} \ln \left| \frac{f_2 + s_2}{f_1 + s_1} \right| - \sqrt{y_+ y_-} \ln \left| \frac{g_2}{g_1} \right|.$$

Полные ширины $K_{\ell 3}$ распадов в системе покоя каона можно записать в виде

$$\Gamma^*(K_{\ell 3}) = \frac{G_F^2 \sin^2 \theta_C m_K^5}{768 \pi^3} f_+^2(0) Z(K_{\ell 3}).$$

Здесь $Z(K_{\ell 3})$ обозначает соответствующий нормировочный фактор, который может быть вычислен по любой из вышеприведенных формул для Z_ν , Z_ℓ или Z_π .

Выражения для нормированных дифференциальных ширин распадов в системе покоя каона можно получить из общих формул переходя к пределу при $P_K/m_K \rightarrow 0$:

$$\frac{1}{\Gamma^*} \frac{d\Gamma^*(E_i^*)}{dE_i^*} = \frac{4P_i}{m_K^2} F_i^*(x_i^*),$$

где $x_i^* = 2E_i^*/m_K$ ($i = \nu, \ell, \pi$) и

$$\begin{aligned} F_\nu^*(x_\nu^*) &= \frac{1}{Z_\nu} \sqrt{(1 - x_\nu^* - y_+^\nu)(1 - x_\nu^* - y_-^\nu)} \sum_{n=-4}^3 c_n^\nu (1 - x_\nu^*)^n, \\ F_\ell^*(x_\ell^*) &= \frac{1}{Z_\ell} (1 - r_\pi + r_\ell - x_\ell^*) \sum_{n=-4}^3 c_n^\ell (1 + r_\ell - x_\ell^*)^n, \\ F_\pi^*(x_\pi^*) &= \frac{1}{Z_\pi} (1 + r_\pi - r_\ell - x_\pi^*) \sum_{n=-3}^3 c_n^\pi (1 + r_\pi - x_\pi^*)^n. \end{aligned}$$

Из кинематики процессов следует, что безразмерные величины x_i^* изменяются в следующих пределах:

$$0 \leq x_\nu^* \leq 1 - r_\pi - r_\ell - \sqrt{r_\pi r_\ell}, \quad 2\sqrt{r_\ell} \leq x_\ell^* \leq 1 - r_\pi + r_\ell, \quad 2\sqrt{r_\pi} \leq x_\pi^* \leq 1 + r_\pi - r_\ell.$$

4 Обсуждение результатов

Для расчетов использовались параметры форм-факторов λ_+ и ξ из [6] (см. табл. 1). Современные экспериментальные данные о λ_- весьма неопределенны. Они, однако, не противоречат простейшему предположению $\lambda_- = 0$, которое мы и будем использовать ниже. Результаты расчета спектров нейтрино, электронов, мюонов, заряженных и нейтральных пионов представлены в таблице 2 и на рисунках 1 и 2.

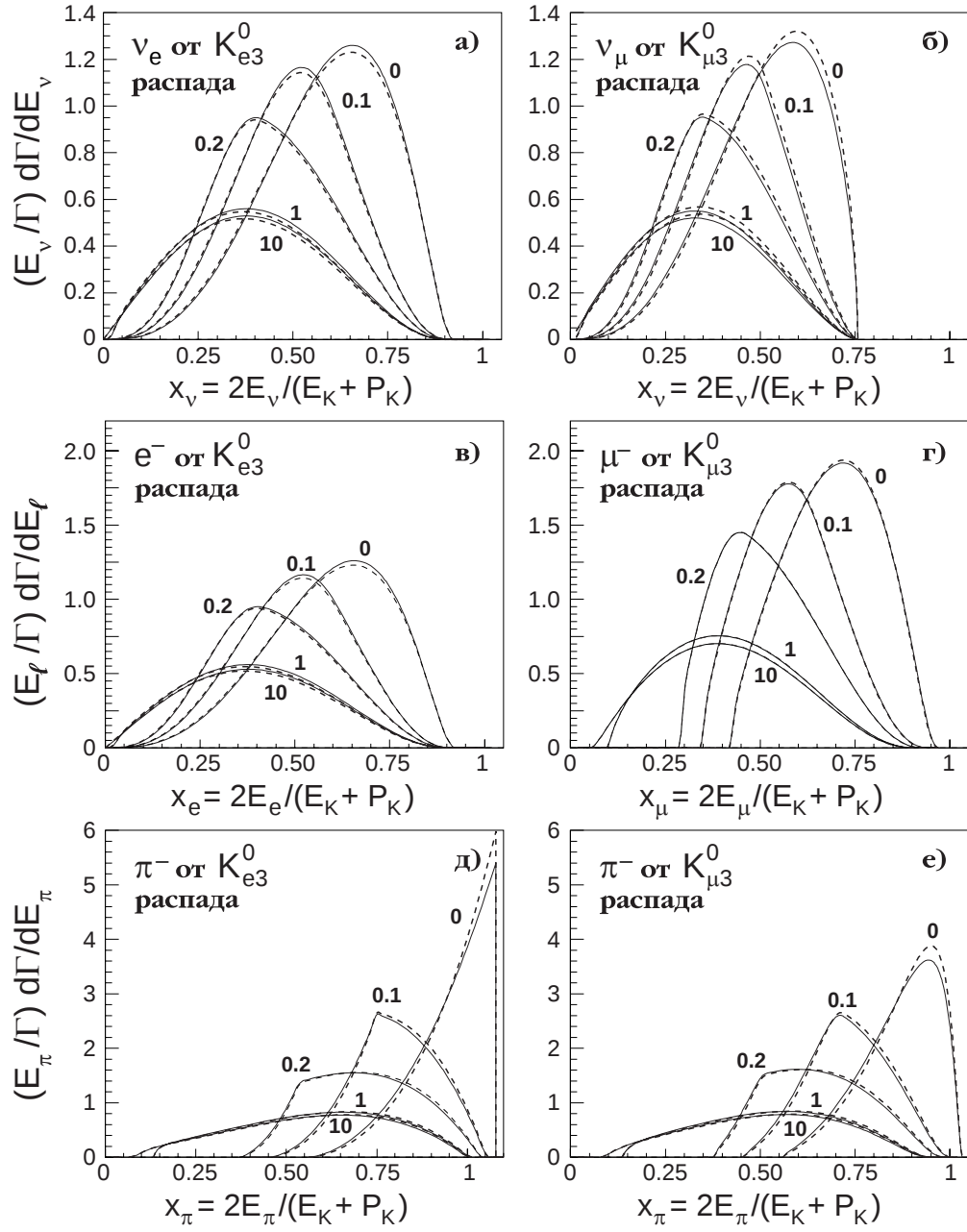


Рис. 1: Нормированные спектры вторичных частиц от $K_{\ell 3}^0$ распадов с учетом (сплошные кривые) и без учета (штриховые кривые) форм-факторов. Числа у кривых обозначают импульс каона в ГэВ/с.

Таблица 1: Параметры форм-факторов для $K_{\ell 3}$ распадов.

	K_{e3}^0	$K_{\mu 3}^0$	$K_{e3}^{\pm}$	$K_{\mu 3}^{\pm}$
λ_+	0.0300 ± 0.0016	0.034 ± 0.005	0.0286 ± 0.0022	0.032 ± 0.008
ξ	-0.11 ± 0.09		-0.33 ± 0.15	

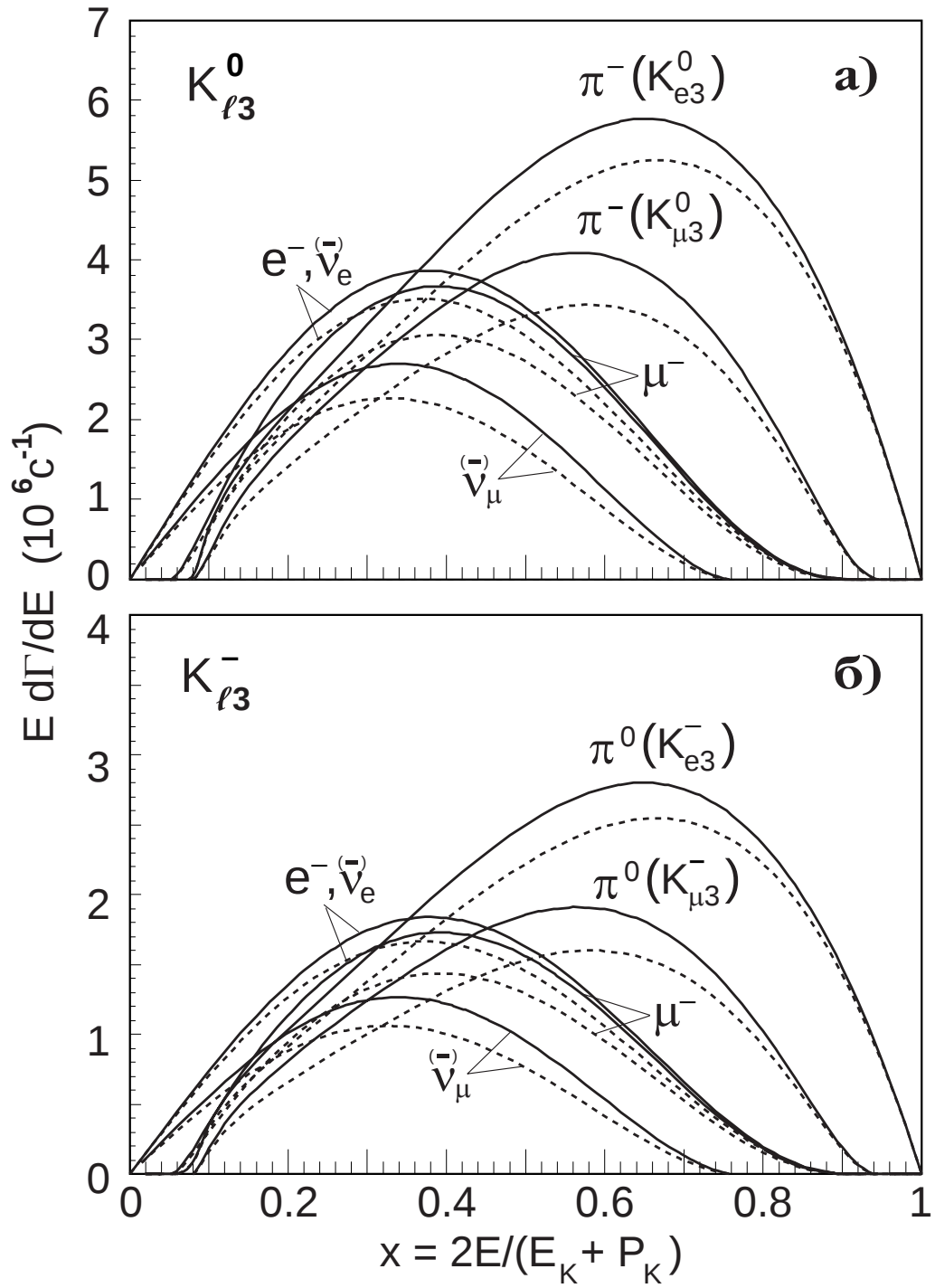


Рис. 2: Абсолютные спектры вторичных частиц от $K_{\ell 3}$ распадов при $P_K > 10$ ГэВ/с с учетом (сплошные кривые) и без учета (штриховые кривые) форм-факторов. Здесь E – энергия вторичной частицы.

На рис. 1 показаны нормированные на полную ширину дифференциальные спектры вторичных частиц, возникающих в $K_{\ell 3}^0$ -распадах (в зависимости от безразмерной переменной $x_i = 2P_i/(E_K + P_K)$) для нескольких значений импульса каона при $f_{\pm} = f_{\pm}(0)$ и с учетом q^2 -зависимости форм-факторов. Спектры вторичных частиц для $K_{\ell 3}^{\pm}$ -распадов мы не приводим, поскольку они лишь очень незначительно отличаются от спектров для $K_{\ell 3}^0$ (эти отличия обусловлены разницей масс и параметров форм-факторов). Важно, что эффект q^2 -зависимости форм-факторов по разному сказывается на нормированных спектрах электронных и мюонных нейтрино, приводя к уменьшению флейворного отношения $R_{\nu} = (\nu_{\mu} + \bar{\nu}_{\mu})/(\nu_e + \bar{\nu}_e)$ в потоке атмосферных нейтрино (по сравнению с традиционным подходом, в котором $K_{\ell 3}$ форм-факторы игнорируются, но полные ширины берутся из эксперимента). Нормированные спектры электронов и мюонов практически не чувствительны к эффекту. Спектры заряженных пионов слегка уменьшаются при учете q^2 -зависимости, что также должно приводить к уменьшению R_{ν} .

При $P_K \gtrsim 10$ ГэВ и не слишком малых значениях переменной x_i спектральные функции практически перестают зависеть от P_K . На рис. 2 показаны абсолютные дифференциальные спектры вторичных частиц "в асимптотике", т.е. при достаточно большом значении импульса каона в лабораторной системе. Как видно из рисунка, учет q^2 -зависимости форм-факторов приводит к возрастанию абсолютных дифференциальных спектров всех вторичных частиц.

Таблица 2: Ширины $K_{\ell 3}$ распадов.

Мода распада	Расчет с $f_{\pm} = f_{\pm}(0)$ [10^6 c^{-1}]	Расчет с учетом $f_{\pm} = f_{\pm}(q^2)$ [10^6 c^{-1}]	Экспериментальный фит [6] [10^6 c^{-1}]
K_{e3}^0	6.76	7.49	7.50 ± 0.08
$K_{\mu 3}^0$	4.38	5.25	5.25 ± 0.07
$K_{e3}^{\pm}$	3.34	3.70	3.89 ± 0.05
$K_{\mu 3}^{\pm}$	2.07	2.49	2.57 ± 0.06

В табл. 2 приведены расчетные значения полных ширин $K_{\ell 3}$ -распадов, Γ^* , рассчитанные с учетом q^2 -зависимости форм-факторов и без нее ($f_{\pm} = f_{\pm}(0)$), вместе с наилучшими фитами экспериментальных данных полученными в [6]. Из таблицы видно, что q^2 -зависимость форм-факторов приводит к заметному росту полных ширин: примерно на 11% для K_{e3} - и на 20% для $K_{\mu 3}$ -распадов. Ширины, вычисленные с учетом q^2 -зависимости форм-факторов очень хорошо согласуются с экспериментальными фитами для $K_{\ell 3}^0$ -распадов и хуже для $K_{\ell 3}^{\pm}$. Последнее обстоятельство, скорее всего, связано с большим разбросом в данных разных экспериментов по измерению ширины и форм-факторов $K_{\ell 3}^{\pm}$ распадов, который значительно превышает приведенную в [6] ошибку наилучшего фита. Прояснению ситуации могли-бы способствовать новые, более точные измерения.

В ближайшем будущем мы предполагаем использовать полученные результаты для уточнения энергетических спектров и пространственно-угловых распределений атмосферных нейтрино в широком диапазоне энергий.

Работа выполнена при поддержке Министерства общего и профессионального образования РФ в рамках программы "Университеты России – Фундаментальные Исследования", грант № 728.

Приложение

Здесь мы приводим точные аналитические выражения для коэффициентов c_n^i ($i = \nu, \ell, \pi$), фигурирующих в формулах основного текста. Ниже используются следующие обозначения:

$$r_\pi = \frac{m_\pi^2}{m_K^2}, \quad r_\ell = \frac{m_\ell^2}{m_K^2}, \quad u = 1 - \xi, \quad v = 1 - \xi \frac{\lambda_-}{\lambda_+}, \quad \lambda = \frac{\lambda_+}{2r_\pi}.$$

Численные значения коэффициентов, рассчитанные с учетом и без учета форм-факторов, представлены в таблицах 3–8.

Коэффициенты c_n^ν

$$\begin{aligned} c_{-4}^\nu &= -6r_\ell(r_\pi - r_\ell)^3 v^2 \lambda^2, \\ c_{-3}^\nu &= 8r_\ell(r_\pi - r_\ell)^2 uv \lambda - 2(r_\pi - r_\ell) \{4(r_\pi - r_\ell)[r_\pi - r_\ell(1 - 4v)] \\ &\quad - r_\ell[3r_\pi(1 + 3r_\pi) - r_\ell(9 + 10r_\pi - r_\ell)]v^2\} \lambda^2, \\ c_{-2}^\nu &= -3r_\ell(r_\pi - r_\ell)u^2 + 4\{2(r_\pi - r_\ell)[2(r_\pi - r_\ell) + 3r_\ell(u + v)] \\ &\quad - r_\ell[r + r_\ell + (r_\pi - r_\ell)(3 + 4r_\pi - r_\ell)]uv\} \lambda + 8(r_\pi - r_\ell)[(r_\pi - r_\ell)(4 + 3r_\pi + r_\ell) \\ &\quad - (r_\pi + r_\ell)] \lambda^2 + 16r_\ell[r_\pi + r_\ell + 3(r_\pi - r_\ell)(1 + 2r_\pi)]v \lambda^2 \\ &\quad - 2r_\ell\{(r_\pi - r_\ell)[3(2 + 8r_\pi + 3r_\pi^2) - r_\ell(2r_\pi + r_\ell)] + (r_\pi + r_\ell)(3 + 3r_\pi + r_\ell)\}v^2 \lambda^2, \\ c_{-1}^\nu &= -3\{4r_\pi - r_\ell[4(1 - 2u) + (1 + r_\pi - r_\ell)u^2]\} - 4\{8r_\pi(1 + r_\pi) - 4r_\ell(4 + r_\pi + r_\ell) \\ &\quad + r_\ell[2(1 + 4r_\pi + r_\pi^2) - r_\ell(1 + r_\pi + r_\ell)]uv - 6r_\ell(1 + 2r_\pi(u + v))\} \lambda \\ &\quad - 8\{3r_\pi(1 + 3r_\pi + r_\pi^2) - r_\ell[5 + 16r_\pi + r_\pi^2 + r_\ell(1 + r_\pi + r_\ell)] \\ &\quad + 2r_\ell(5 + 15r_\pi + 6r_\pi^2 + 3r_\ell)v\} \lambda^2 + 2r_\ell\{3(1 + 10r_\pi + 10r_\pi^2 + r_\pi^3) \\ &\quad + r_\ell[3 + 4r_\pi + r_\pi^2 + r_\ell(4 + r_\pi + r_\ell)]\}v^2 \lambda^2, \\ c_0^\nu &= 3\{4(1 + r_\pi) - r_\ell[4 + (u - 8)u]\} + 4\{4(1 + 4r_\pi + r_\pi^2) - r_\ell[4(5 - r_\pi + 2r_\ell) \\ &\quad - 6(2 + r_\pi + r_\ell)(u + v) + (4 + 4r_\pi + r_\ell)uv]\} \lambda + 8\{1 + 9r_\pi + 9r_\pi^2 + r_\pi^3 \\ &\quad - r_\ell[3 - 4r_\pi - r_\pi^2 + r_\ell(3 - r_\pi + 3r_\ell)]\} \lambda^2 + 2r_\ell\{16[3 + 6r_\pi + r_\pi^2 + r_\ell(3 + r_\pi + r_\ell)] \\ &\quad - [9(1 + 3r_\pi + r_\pi^2) + r_\ell(7 + 4r_\pi + r_\ell)]v\}v \lambda^2, \\ c_1^\nu &= -12 - 8\{4(1 + r_\pi) - r_\ell[2 - 3(u + v) - uv]\} \lambda \\ &\quad - 2\{12(1 + 3r_\pi + r_\pi^2) - r_\ell[4(7 + 5r_\ell) - 32(3 + 2r_\pi + 2r_\ell)v + (9 + 9r_\pi + 5r_\ell)v^2]\} \lambda^2, \\ c_2^\nu &= 16\lambda + 2\{12(1 + r_\pi) - r_\ell[4 - (16 - 3v)v]\} \lambda^2, \\ c_3^\nu &= -8\lambda^2. \end{aligned}$$

Коэффициенты c_n^ℓ

$$\begin{aligned}
c_{-4}^\ell &= -6r_\pi^3 r_\ell (1 - r_\ell)^3 (2 - v)^2 \lambda^2, \\
c_{-3}^\ell &= 2r_\pi^2 (1 - r_\ell) \{4r_\ell (1 - r_\ell) (4 + uv - 2(u + v)) \lambda - 4(1 - r_\ell) [r(1 + 7r_\ell) + r_\ell^2 (4 + v^2) \\
&\quad - 4r_\ell (r_\pi + r_\ell) v] \lambda^2 + 3r_\ell [r_\pi (1 + r_\ell) + (1 - r_\ell) (3 + 2r_\pi + r_\ell) (2 - v)^2 \lambda], \\
c_{-2}^\ell &= -3r_\pi r_\ell (1 - r_\ell) (2 - u)^2 + 4r_\pi \{4[r_\pi - 4r_\ell + r_\ell^2 (5 - 3r_\pi - r_\ell)] \\
&\quad + 2r_\ell (u + v) [r_\pi + 4 - r_\ell (5 - r_\pi - r_\ell)] - r_\ell uv [4(1 + r_\pi) - r_\ell (5 + 2r_\pi - r_\ell)]\} \lambda \\
&\quad + 8r_\pi \{3r_\pi (1 + r_\pi) + r_\pi r_\ell (19 + 8r_\pi - 15r_\ell) - 3r_\pi r_\ell^2 (r_\pi + r_\ell) + 4r_\ell^2 (2 - r_\ell - r_\ell^2)\} \lambda^2 \\
&\quad - 8r_\pi r_\ell v \{4r_\pi (1 - r_\ell)^2 + (4r_\pi + r_\ell (4 - v)) [2(1 + r_\pi) - r_\ell (1 + r_\pi + r_\ell)]\} \lambda^2 \\
&\quad - 6r_\pi r_\ell (2 - v)^2 \{3(1 + 3r_\pi + r_\pi^2) - r_\ell (1 + 4r_\pi + r_\pi^2) - r_\ell^2 (1 + r_\pi + r_\ell)\} \lambda^2, \\
c_{-1}^\ell &= 3\{r_\ell [(1 + r_\pi + r_\ell) (2 - u)^2 + 2(4(r_\pi + r_\ell) - r_\ell u) u] - 4[r_\pi + r_\ell (3r_\pi + 2r_\ell)]\} \\
&\quad + 2\{4[2r_\ell (2 - r_\ell - r_\ell^2) - 4r_\pi (1 + r_\pi) - 3r_\pi r_\ell (3 + r_\pi + r_\ell)] \\
&\quad + 4r_\ell (u + v) [r_\ell (1 + r_\pi + r_\ell) - 2 - 2r_\pi + r_\pi^2] + 2uv r_\ell [2(1 + 4r_\pi + r_\pi^2) \\
&\quad - r_\ell (1 + r_\pi + r_\ell)]\} \lambda - 8\{3r_\pi (1 + 3r_\pi + r_\pi^2) + 4r_\ell^2 (1 + r_\ell + r_\ell^2) \\
&\quad + r_\pi r_\ell (26 + 32r_\pi + 15r_\ell + 3(r_\pi^2 + r_\pi r_\ell + r_\ell^2))\} \lambda^2 + r_\ell \{8[r_\ell (1 + 4r_\pi + r_\pi^2) \\
&\quad + r_\ell (1 + r_\pi + r_\ell) (4 - v) + 4r_\pi (3 + 6r_\pi + r_\pi^2)] v \\
&\quad + 6(2 - v)^2 [1 + 9r_\pi + 9r_\pi^2 + r_\pi^3 + r_\ell (1 + 4r_\pi + r_\pi^2) + r_\ell^2 (1 + r_\pi + r_\ell)]\} \lambda^2, \\
c_0^\ell &= 3[4(1 + r_\pi + 3r_\ell) - r_\ell (8u + (2 - u)^2)] + 2\{8(1 + 4r_\pi + r_\pi^2 + 3r_\ell (1 + r_\pi + r_\ell)) \\
&\quad + 4r_\ell [(1 - 2r_\pi - 2r_\ell) (u + v) - (4 + 4r_\pi + r_\ell) uv]\} \lambda \\
&\quad + 8\{1 + 9r_\pi + 9r_\pi^2 + r_\pi^3 + r_\ell (9 + 17r_\ell + 13r_\ell) + r_\pi r_\ell (40 + 13r_\pi + 21r_\ell)\} \lambda^2 \\
&\quad + r_\ell \{16v [r_\ell (1 + r_\pi + r_\ell) v - (2 + 12r_\pi + 6r_\pi^2 + r_\ell (5 + 11r_\pi + 6r_\ell))] \\
&\quad - 6(2 - v)^2 [3(1 + 3r_\pi + r_\pi^2) + r_\ell (4 + 5r_\pi + 3r_\ell)]\} \lambda^2, \\
c_1^\ell &= -12 + 8[r_\ell (u + uv + v) - 4 - 4r_\pi - 6r_\ell] \lambda - 4[6(1 + 3r_\pi + r_\pi^2) \\
&\quad + 2r_\ell (16 + 17r_\pi + 15r_\ell)] \lambda^2 + 2r_\ell [9(1 + r_\pi + r_\ell) (2 - v)^2 \\
&\quad + 4v (8 + 12(r_\pi + r_\ell) - r_\ell v)] \lambda^2, \\
c_2^\ell &= 16\lambda + 2[4(3 + 3r_\pi + 4r_\ell) - r_\ell (3v + 4)v] \lambda, \\
c_3^\ell &= -8\lambda^2.
\end{aligned}$$

Коэффициенты c_n^π

$$\begin{aligned}
c_{-3}^\pi &= -4r_\ell^2 (1 - r_\pi)^2, \\
c_{-2}^\pi &= 3r_\ell^2 (1 - r_\pi) u^2 + 2r_\ell [(1 - r_\pi)^2 - 2r_\ell (1 - 2r_\pi)] - 16r_\ell^2 (1 - r_\pi)^2 \lambda \\
c_{-1}^\pi &= 3r_\ell [2 - 2r_\pi - r_\ell (2 - u)] u + 2\{1 - 2r_\pi + r_\pi^2 + 2r_\ell (2 - r_\pi - r_\ell)\} \\
&\quad + 4r_\ell \{2(1 - r_\pi)^2 - 4r_\ell (1 - 2r_\pi) + 3r_\ell (1 - r_\pi) (u + v)\} \lambda \\
&\quad - 16r_\ell^2 (1 - r_\pi)^2 \lambda^2, \\
c_0^\pi &= 3r_\ell (u - 2) u - 2(2 + 2r_\pi - r_\ell) + 8[1 - 2r_\pi + r_\pi^2 + 2r_\ell (2 - r_\pi - r_\ell) \lambda \\
&\quad - 12r_\ell \{(1 - r_\pi - r_\ell) (u + v) + r_\ell uv\} \lambda \\
&\quad + 4r_\ell \{2r_\ell (1 + r_\pi) + 2(1 - r_\pi) (1 - r_\pi - 3r_\ell) + 3r_\ell (1 - r_\pi) v\} \lambda^2, \\
c_1^\pi &= 2 + 4[3r_\ell (uv - (u + v)) - 4 - 4r_\pi + 2r_\ell] \lambda \\
&\quad + 4\{2[1 - 2r_\pi + r_\pi^2 + 2r_\ell (2 - r_\pi - r_\ell)] - 3r_\ell [3 + r_\pi + r_\ell (1 - v)] v\} \lambda^2, \\
c_2^\pi &= 8\lambda - 4[4 + 4r_\pi - 2r_\ell + 3r_\ell (1 - v) v] \lambda^2, \\
c_3^\pi &= 8\lambda^2.
\end{aligned}$$

Таблица 3: Значения c_n^ν для $K_{\ell 3}^0$ распадов ($\lambda_- = 0$, $\xi = -0.11$).

c_n^ν	$K_L^0 \rightarrow \pi^\pm e^\mp \bar{\nu}_e (\nu_e)$		$K_L^0 \rightarrow \pi^\pm \mu^\mp \bar{\nu}_\mu (\nu_\mu)$	
	$\lambda_+ = 0$	$\lambda_+ = 0.030$	$\lambda_+ = 0$	$\lambda_+ = 0.034$
c_{-4}^ν	0	-2.900×10^{-17}	0	-4.785×10^{-7}
c_{-3}^ν	0	-1.416×10^{-4}	0	9.066×10^{-5}
c_{-2}^ν	-7.798×10^{-14}	2.470×10^{-2}	-5.494×10^{-3}	1.040×10^{-2}
c_{-1}^ν	-9.438×10^{-1}	-1.547×10^0	-1.424×10^0	-1.906×10^0
c_0^ν	1.294×10^1	1.749×10^1	1.343×10^1	1.872×10^1
c_1^ν	-1.200×10^1	-1.967×10^1	-1.200×10^1	-2.116×10^1
c_2^ν	0	3.993×10^0	0	4.706×10^0
c_3^ν	0	-2.910×10^{-1}	0	-3.738×10^{-1}

Таблица 4: Значения c_n^ν для $K_{\ell 3}^\pm$ распадов ($\lambda_- = 0$, $\xi = -0.33$).

c_n^ν	$K^\pm \rightarrow \pi^0 e^\pm \bar{\nu}_e (\bar{\nu}_e)$		$K^\pm \rightarrow \pi^0 \mu^\pm \bar{\nu}_\mu (\bar{\nu}_\mu)$	
	$\lambda_+ = 0$	$\lambda_+ = 0.0286$	$\lambda_+ = 0$	$\lambda_+ = 0.0320$
c_{-4}^ν	0	-2.546×10^{-17}	0	-3.056×10^{-7}
c_{-3}^ν	0	-1.223×10^{-4}	0	8.952×10^{-5}
c_{-2}^ν	-1.101×10^{-13}	2.238×10^{-2}	-7.038×10^{-3}	5.330×10^{-3}
c_{-1}^ν	-8.970×10^{-1}	-1.470×10^0	-1.559×10^0	-2.033×10^0
c_0^ν	1.290×10^1	1.739×10^1	1.357×10^1	1.881×10^1
c_1^ν	-1.200×10^1	-1.966×10^1	-1.200×10^1	-2.105×10^1
c_2^ν	0	4.005×10^0	0	4.643×10^0
c_3^ν	0	-2.928×10^{-1}	0	-3.664×10^{-1}

Таблица 5: Значения c_n^ℓ для $K_{\ell 3}^0$ распадов ($\lambda_- = 0$, $\xi = -0.11$).

c_n^ℓ	$K_L^0 \rightarrow \pi^\pm e^\mp \bar{\nu}_e (\nu_e)$		$K_L^0 \rightarrow \pi^\pm \mu^\mp \bar{\nu}_\mu (\nu_\mu)$	
	$\lambda_+ = 0$	$\lambda_+ = 0.030$	$\lambda_+ = 0$	$\lambda_+ = 0.034$
c_{-4}^ℓ	0	-1.115×10^{-10}	0	-5.353×10^{-6}
c_{-3}^ℓ	0	-1.416×10^{-4}	0	4.375×10^{-4}
c_{-2}^ℓ	-2.007×10^{-7}	2.470×10^{-2}	-8.226×10^{-3}	7.284×10^{-3}
c_{-1}^ℓ	-9.438×10^{-1}	-1.547×10^0	-8.646×10^{-1}	-1.519×10^0
c_0^ℓ	1.294×10^1	1.749×10^1	1.327×10^1	1.902×10^1
c_1^ℓ	-1.200×10^1	-1.967×10^1	-1.200×10^1	-2.117×10^1
c_2^ℓ	0	3.993×10^0	0	4.706×10^0
c_3^ℓ	0	-2.910×10^{-1}	0	-3.738×10^{-1}

Таблица 6: Значения c_n^ℓ для $K_{\ell 3}^\pm$ распадов ($\lambda_- = 0$, $\xi = -0.33$).

c_n^ℓ	$K^\pm \rightarrow \pi^0 e^\pm \nu_e (\bar{\nu}_e)$		$K^\pm \rightarrow \pi^0 \mu^\pm \nu_\mu (\bar{\nu}_\mu)$	
	$\lambda_+ = 0$	$\lambda_+ = 0.0286$	$\lambda_+ = 0$	$\lambda_+ = 0.0320$
c_{-4}^ℓ	0	-9.788×10^{-11}	0	-4.569×10^{-6}
c_{-3}^ℓ	0	-1.223×10^{-4}	0	3.149×10^{-4}
c_{-2}^ℓ	-1.074×10^{-7}	2.238×10^{-2}	-4.400×10^{-3}	1.105×10^{-2}
c_{-1}^ℓ	-8.970×10^{-1}	-1.470×10^0	-8.475×10^{-1}	-1.470×10^0
c_0^ℓ	1.290×10^1	1.739×10^1	1.300×10^1	1.862×10^1
c_1^ℓ	-1.200×10^1	-1.966×10^1	-1.200×10^1	-2.100×10^1
c_2^ℓ	0	4.005×10^0	0	4.644×10^0
c_3^ℓ	0	-2.928×10^{-1}	0	-3.665×10^{-1}

Таблица 7: Значения c_n^π для $K_{\ell 3}^0$ распадов ($\lambda_- = 0$, $\xi = -0.11$).

c_n^π	$K_L^0 \rightarrow \pi^\pm e^\mp \bar{\nu}_e (\nu_e)$		$K_L^0 \rightarrow \pi^\pm \mu^\mp \bar{\nu}_\mu (\nu_\mu)$	
	$\lambda_+ = 0$	$\lambda_+ = 0.030$	$\lambda_+ = 0$	$\lambda_+ = 0.034$
c_{-3}^π	-3.745×10^{-12}	-3.745×10^{-12}	-6.896×10^{-3}	-6.896×10^{-3}
c_{-2}^π	1.783×10^{-6}	1.783×10^{-6}	8.202×10^{-2}	7.605×10^{-2}
c_{-1}^π	1.698×10^0	1.698×10^0	1.768×10^0	1.837×10^0
c_0^π	-4.315×10^0	-3.019×10^0	-4.358×10^0	-2.805×10^0
c_1^π	2.000×10^0	-1.044×10^0	2.000×10^0	-1.463×10^0
c_2^π	0	8.980×10^{-1}	0	9.397×10^{-1}
c_3^π	0	2.910×10^{-1}	0	3.738×10^{-1}

Таблица 8: Значения c_n^π для $K_{\ell 3}^\pm$ распадов ($\lambda_- = 0$, $\xi = -0.33$).

c_n^π	$K^\pm \rightarrow \pi^0 e^\pm \nu_e (\bar{\nu}_e)$		$K^\pm \rightarrow \pi^0 \mu^\pm \nu_\mu (\bar{\nu}_\mu)$	
	$\lambda_+ = 0$	$\lambda_+ = 0.0286$	$\lambda_+ = 0$	$\lambda_+ = 0.0320$
c_{-3}^π	-3.900×10^{-12}	-3.900×10^{-12}	-7.183×10^{-3}	-7.183×10^{-3}
c_{-2}^π	1.827×10^{-6}	1.827×10^{-6}	8.677×10^{-2}	8.062×10^{-2}
c_{-1}^π	1.712×10^0	1.712×10^0	1.724×10^0	1.795×10^0
c_0^π	-4.299×10^0	-2.989×10^0	-4.330×10^0	-2.803×10^0
c_1^π	2.000×10^0	-1.039×10^0	2.000×10^0	-1.417×10^0
c_2^π	0	9.011×10^{-1}	0	9.413×10^{-1}
c_3^π	0	2.928×10^{-1}	0	3.665×10^{-1}

Литература

- [1] T. K. Gaisser, *Cosmic rays and particle physics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [2] V. A. Naumov, T. S. Sinegovskaya, and S. I. Sinegovsky, *Nuovo Cimento A*, **111** (1998) 129; Università degli Studi di Firenze, preprint DFF 253/06/1996, 1996; hep-ph/9802410.
- [3] A. Misaki, V. A. Naumov, T. S. Sinegovskaya, and S. I. Sinegovsky, in *Proc. of the 25th Int. Cosmic Ray Conf.*, Durban, South Africa, July 30 – August 6, 1997, edited by M. S. Potgieter, B. C. Raubenheimer, and D. J. van der Walt (Wesprint, Potchefstroom, Space Research Unit, 1997) Vol. **7**, p. 129.
- [4] E. V. Bugaev, A. Misaki, V. A. Naumov, T. S. Sinegovskaya, S. I. Sinegovsky, and N. Takahashi, *Phys. Rev. D* **58** (1998) 054001 (hep-ph/9803488).
- [5] Л. Б. Окунь, *Лептоны и Кварки*, М.: Наука, 1990. См. также *The DAΦNE Physics Handbook*, edited by L. Maiani (INFN, Laboratori Nazionali di Frascati) 1992, Vol. I, p. 115.
- [6] Particle Data Group (C. Caso *et al.*), *Europ. Phys. J.*, **C 3** (1998) 1.
- [7] N. Brene, L. Egardt, and B. Qvist, *Nucl. Phys.*, **22** (1961) 553.