Белорусский Государственный Университет, Минск
Физический факультет
WS 2011/2012
Я.М. Шнир

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

Задачи и упражнения 7

1. Термодинамика кондиционера. Предположим что домашний кондиционер работает по циклу Карно. Температура внутри помещения T_2 меньше температуры T_1 снаружи и энергопотребление при непрерывной работе равно P Дж/с.
   (i) За одну секунду кондиционер поглощает из помещения количество теплоты Q_2 и выделяет наружу количество теплоты Q_1. Записать формулу для к.п.д. кондиционера $\eta = Q_2/P$ через T_1 и T_2.
   (ii) Поток тепла, уходящий из помещения следует закону $Q = a(T_1 - T_2)$. Выразить T_2 через T_1, P и a при постоянных параметрах процесса.
   (iii) Кондиционер управляется обычным выключателем на термоэлементах. Если температура установлена на отметке $20°C$, при наружной температуре $30°C$, то он работает 30% времени. Определить наивысшую наружную температуру, при которой кондиционер все еще сможет поддерживать установленную внутри температуру.

   (iv) Зимой кондиционер работает в обратном режиме обогревателя, поглощая тепло снаружи и отдавая его внутри. Определить наинизшую наружную температуру, при которой кондиционер все еще сможет поддерживать установленную внутри температуру $20°C$.

2. Килограмм воды при температуре $0°C$ в контакте с тепловым резервуаром нагревается до $100°C$. Каково изменение энтропии воды при этом процессе? Как изменится энтропия Вселенной? Как нагреть воду до температуры $100°C$ чтобы энтропия Вселенной не изменилась?

3. Проводящая тепло однородная пластинка длины L имеет сечение A, плотность ρ и теплоемкость при постоянном давлении C. Один конец пластинки приведен в тепловой контакт с нагревателем при температуре T_h а другой ее конец помещен в охладитель при температуре T_c. Затем пластинку извлекают из резервуаров, поддерживая постоянное давление и термоизолировав ее от окружения. Показать, при этом по всей длине пластинки установится одинаковая температура $T_f = \frac{T_h+T_c}{2}$ и что изменение энтропии пластинки равно

$$\Delta S = C\left(1 + \ln T_f + \frac{T_c}{T_h - T_c}\ln T_c - \frac{T_h}{T_h - T_c}\ln T_h\right)$$

   где $C = C_P \rho A L$.

4. В теории Большого Взрыва энергия излучения первоначально была ограничена малым объемом который адиабатически расширялся сохраняя сферическую симметрию.

С расширением температура реликтового излучения уменьшалась. Радиационное давление фотонов в объеме V определяется соотношением $E = 3PV$ и плотность энергии излучения черного тела определяется законом Стефана-Больцмана $J = \frac{E}{V} = \sigma T^4$ где $\sigma = \frac{\pi^2 k_B^4}{15(\hbar c)^3}$
(i) Найти соотношение между температурой и радиусом Вселенной.
(ii) Вычислить полную энтропию фотонного газа как функцию его температуры T, объема V и фундаментальных констант $k_B, \hbar, c$.

5. Уравнение состояния новой формы материи имеет вид

$$PV = aT^3, \qquad a = \text{ const}$$

Внутренняя энергия этого вещества есть

$$E = bT^n \ln \frac{V}{V_0} + f(T)$$

где b, n, V_0 некоторые константы, а $f(T)$ – функция температуры. Определить b и n.

Решения

1. (i) Из первого и второго законов термодинамики следует

$$Q_1 = P + Q_2; \qquad \frac{Q_2}{T_2} = \frac{Q_1}{T_1}$$

Следовательно,

$$\frac{Q_2}{P} = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$$

(ii) При стационарном процессе теплопередачи количество теплоты Q_1, уходящее из помещения равно количеству теплоты Q_1, приходящему внутрь. Следовательно, $Q_2 = a(T_1 - T_2)$. Из решения предыдущей задачи следует

$$\frac{PT_2}{T_1 - T_2} = a(T_1 - T_2)$$

то есть

$$T_2 = T_1 + \frac{1}{2}\left[\frac{P}{a} \pm \sqrt{\left(\frac{P}{a}\right)^2 + 4T_1\frac{P}{a}}\right]$$

Поскольку $T_2 < T_1$, то единственным решением является

$$T_2 = T_1 + \frac{1}{2}\left[\frac{P}{a} - \sqrt{\left(\frac{P}{a}\right)^2 + 4T_1\frac{P}{a}}\right]$$

(iii) Из первой формулы в решении предыдущей задачи известно что при 30%-ой эффективности работы кондиционера

$$P_{30\%} = a\frac{(T_1 - T_2)^2}{T_2} = a\frac{100}{293}$$

Следовательно его полная мощность равна

$$P = P_{30\%}\frac{100}{30} \approx 1,138a$$

При температуре $T_2 = 20°C$

$$T_1 = T_2 + \sqrt{\frac{PT_2}{a}} = 38.26°C$$

(iv) Зимой цикл обращен и $Q_2 = P + Q_1$, $\frac{Q_2}{T_2} = \frac{Q_1}{T_1}$. При стационарной теплопередаче $Q_2 = a(T_2 - T_1)$ и следовательно

$$T_2 - T_1 = \sqrt{\frac{T_2 P}{a}}$$

Тогда

$$T_1 = T_2 - \sqrt{\frac{T_2 P}{a}} = 2°C$$

2. Рассматриваемый процесс является необратимым. Чтобы определить изменение энтропии воды и всей системы рассмотрим обратимый процесс с теми же начальным и конечным состоянием. При постоянном давлении

$$\Delta S_{H_2O} = \int\limits_{T_1}^{T_2} mC_P \frac{dT}{T} = mC_P \ln(373/273) = [C_P = 4,18\ J/g] = 1305\ J/K$$

Изменение энтропии нагревателя равно

$$\Delta S_h = -\frac{|Q|}{T_2}; \qquad |Q| = mC_P \Delta T; \Longrightarrow \Delta S_h = -1121\ J/K$$

и полное изменение энтропии системы есть

$$\Delta S = \Delta S_{H_2O} + \Delta S_h = 184\ J/K$$

Чтобы энтропия Вселенной в ходе нагрева воды не изменилась, представим идеализированную систему, состоящую из набора бесконечно большого числа нагревателей, температура каждого из которых последовательно возрастает на инфинитезимальную величину δT от $0°C$ до $100°C$. Последовательно приходя в тепловой контакт с этими нагревателями в ходе этого обратимого *"Gedanken-experiment"*, вода нагреется до конечной температуры без изменения энтропии всей системы.

3. Поскольку градиент температуры в пластинке есть $(T_h - T_c)/L$, то температура поперечного слоя удаленного на расстояние x от холодного конца может быть записана как

$$T(x) = T_c + (T_h - T_c)\frac{x}{L}$$

Если пластинка извлечена из резервуаров адиабатически, то $\delta Q = 0$ и после установления одинаковой температуры T_f по всей длине пластинки

$$\int\limits_0^L dx\ \rho C_P \left(T(x) - T_f\right) = 0$$

Отсюда следует что $T_f = \frac{T_h - T_c}{2}$.
Поскольку $C_P = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P$, то изменение энтропии определяется как

$$\Delta S = C_P \rho A \int\limits_0^L dx \int\limits_{T(x)}^{T_f} \frac{dT}{T} = C_P \rho A L \left(1 + \ln T_f + \frac{T_c}{T_h - T_c}\ln T_c - \frac{T_h}{T_h - T_c}\ln T_h\right)$$

4. Расширение Вселенной на этой стадии можно рассматривать как квазистатический процесс для которого справедливо соотношение

$$dE = TdS - PdV$$

и выполняется условие адиабатичности: $dS = 0$. Из соотношения для радиационного давления фотонов в объеме V следует что

$$\frac{dE}{E} = -\frac{dV}{3V}$$

то есть $E \propto V^{-1/3}$. Далее, плотность энергии излучения черного тела определяется законом Стефана-Больцмана $J = \frac{E}{V} = \sigma T^4$, то есть $T^4 \propto V^{-4/3} \propto R^{-4}$ и окончательно

$$T \propto \frac{1}{R}; \qquad RT = \text{ const}$$

Поскольку

$$dS = \frac{dE}{T} + \frac{P}{T}dV = \frac{V}{T}dJ + \frac{4}{3}\frac{J}{T}dV = d\left(\frac{4}{3}\sigma T^3 V\right)$$

то есть $S = \frac{4}{3}\sigma T^3 V$ где $\sigma = \frac{\pi^2 k_B^4}{15(\hbar c)^3}$

5. Применяя к данной системе первый закон термодинамики, получим

$$dS = \frac{dE}{T} + \frac{PdV}{T} = \left[\frac{1}{T}\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T + \frac{P}{T}\right] dV + \frac{1}{T}\left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V dT$$

Подстановка уравнения состояния и формулы для внутренней энергии дает

$$dS = \frac{bT^{n-1} + aT^2}{V} dV + \left[\frac{f'(T)}{T} + nbT^{n-2}\ln\frac{V}{V_0}\right] dT$$

Поскольку данный дифференциал должен быть полным, то должно выполнятся равенство

$$\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{bT^{n-1} + aT^2}{V}\right) = \frac{\partial}{\partial}\left(\frac{f'(T)}{T} + nbT^{n-2}\ln\frac{V}{V_0}\right)$$

означающее что должно выполнятся алгебраическое соотношение

$$2aT - bT^{n-2} = 0$$

то есть $n = 3, b = 2a$.