Белорусский Государственный Университет, Минск
Физический факультет WS 2011/2012
Я.М. Шнир

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

Задачи и упражнения 6

1. Показать, что работа, затрачиваемая на адиабатическое сжатие идеального газа определяется соотношениями

$$A_{1\to 2} = P_1 V_1^\gamma \frac{1}{\gamma - 1}\left(\frac{1}{V_2^{\gamma-1}} - \frac{1}{V_1^{\gamma-1}}\right) = \frac{P_1V_1 - P_2V_2}{\gamma - 1}$$
$$= \frac{1}{\gamma - 1} P_1 V_1 \left[\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right]$$

2. 10 литров одноатомного газа при атмосферном давлении сжимаются изотермически до объема 1 литр. После этого газ адиабатически расширяется до первоначального объема 10 литров.

   (i) Изобразить диаграмму процесса в осях $P - V$.

   (ii) Изобразить диаграмму этого же процесса для двухатомного газа.

   (iii) Вычислить работу, совершаемую системой или же над ней.

   (iv) Будет ли это работа больше или же меньше в случае двухатомного газа?

3. Цикл Карно. Рассмотрим циклический процесс, состоящий из двух изотерм и двух адиабат. При каких процессах работа совершается над системой и при каких процессах работу совершает система? Вывести формулу для полной работы, совершенной двигателем, работающим по циклу Карно. Если температура нагревателя равна $T_2 = 450^\circ\ K$ и двигатель работает при комнатной температуре, то каков его к.п.д.?

4. Два одинаковых кирпича имеют внутреннюю энергию определяемую формулой $E = mC_VT$, их теплоемкости и массы одинаковы, но первоначально их температуры различны, $T_2 > T_1$. Кирпичи можно использовать в цикле Карно в качестве нагревателя и холодильника, однако они не являются термостатами и их температура постепенно выравнивается и становится равной T.

   (i) Определить эту температуру.

   (ii) Какую полную работу совершит система?

5. Ракета на водяном двигателе. Рассмотрим изолированный цилиндр, с одного конца которого втекают два постоянных потока холодной и горячей воды при температуре T_1 и T_2 соответственно, а с другого конца вытекает с высокой скоростью поток воды имеющей температуру T. Предположим что теплоемкость

воды не зависит от температуры и что кинетической энергией втекающих потоков можно пренебречь.

(i) Какую скорость имеет вытекающая струя?

(ii) Какую максимальную скорость она может иметь?

6. (i)* Термодинамика реальных тепловых машин. Рассмотрим работу теплового двигателя - газовой турбины. В начале циклического процесса, в точке 1 рабочее тело (газ) находится при температуре $T_1 = 25^\circ\ C$ и давлении $P_1 = 10^5\ Pa$. С помощью насоса газ переносится в компрессор (точка 2) со скоростью $\dot{m}$ равной $2\ kg/s$. В компрессоре давление возрастает до $P_2 = 6 \cdot 10^5\ Pa$. После этого газ нагревается до температуры $T_3 = 700^\circ\ C$ (точка 3) и возвращается обратно, проходя через турбину и, совершая работу, остывает до температуры $T_1 = 25^\circ\ C$ завершая цикл.

   Мы полагаем что

   - Газ является идеальным, $C_P = 1004\ J/kgK$, показатель адиабаты $\gamma = 1.4$;
   - Изэнтропная эффективность работы компрессора (к.п.д) равна 0.88;
   - Политропная эффективность работы турбины (к.п.д) равна 0.85.

   (i) Нарисовать диаграмму процесса в осях $T - S$;
   (ii) Определить суммарную мощность теплового двигателя;
   (iii) Определить количество теплоты, полученное газом от нагревателя;
   (iv) Определить к.п.д.теплового двигателя;
   (v) Определить к.п.д. цикла двигателя Карно, работающего при тех же параметрах;
   (vi) Проверить выполнение первого начала термодинамики.

   Изэнтропная эффективность (к.п.д) компрессора определяется как отношение работы, произведенной идеальным изэнтропным компрессором к работе, произведенной компрессором в реальном процессе:

$$\eta_s = \frac{A_s}{A}$$

   При политропическом процессе $PV^k = \ const$, k - индекс политропы. Поскольку процесс сжатия можно разбить на большое число инфинитезимальных шагов, в ходе каждого из которых изэнтропная эффективность не меняется, эта величина совпадает с политропической эффективностью:

$$\eta_{poly} = \frac{k-1}{k}\frac{\gamma}{\gamma - 1}$$

Решения

1.

$$A_{1\to 2} = -\int\limits_{V_1}^{V_2} P(V,T)dV = -\int\limits_{V_1}^{V_2} \frac{P_1 V_1^\gamma}{V^\gamma} dV = -P_1 V_1^\gamma \frac{V^{1-\gamma}}{1-\gamma}\bigg|_{V_1}^{V_2} = P_1 V_1^\gamma \frac{1}{\gamma-1}\left(\frac{1}{V_2^{\gamma-1}} - \frac{1}{V_1^{\gamma-1}}\right)$$

2. При изотермическом процессе $PV =$ const, то есть

$$P_1 V_1 = P_2 V_2; \qquad P_2 = P_1 \frac{V_1}{V_2} = 10 \cdot 10^5 \ Pa$$

Кривые, описывающие этот переход в осях $P - V$ одинаковы для одноатомного и двухатомного газов.

Процесс $2 \to 3$ является адиабатическим, то есть

$$P_2 V_2^\gamma = P_3 V_3^\gamma; \qquad P_3 = P_2 \left(\frac{V_2}{V_3}\right)^\gamma = 10^{1-\gamma} \cdot 10^5 \ Pa$$

Для одноатомного газа $\gamma = 5/3$ и $P_3 = 0.215 \cdot 10^5 \ Pa$, для двухатомного газа $\gamma = 7/5$и $P_3 = 0.398 \cdot 10^5 \ Pa$, кривая описывающие переход $2 \to 3$ в осях $P - V$ для одноатомного несколько ниже соответствующей адиабаты для двухатомного газа.

Работа при изотермическом процессе определяется как

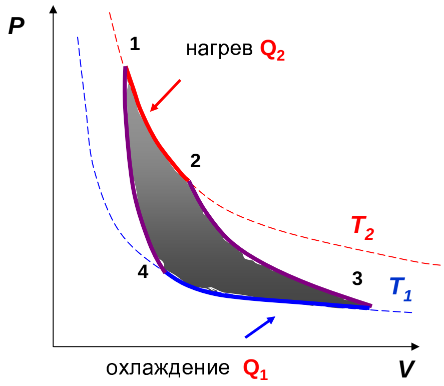
$$A_{1\to 2} = -\int\limits_{V_1}^{V_2} P(V,T)dV = -\int\limits_{V_1}^{V_2} \frac{P_1 V_1}{V} dV = P_1 V_1 \ln \frac{V_1}{V_2}$$

а при адиабатическом как

$$A_{2\to 3} = \frac{1}{\gamma - 1} P_1 V_1 \left[\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right]$$

Заметим, что кривая соответствующая изотермическому сжатию $1 \to 2$ в осях $P{-}V$ расположена выше, чем кривая соответствующая адиабатическому расширению $2 \to 3$, то есть работа совершается над системой. Для одноатомного газа эта работа больше.

3.



При изотермическом расширении $1 \to 2$ при постоянной температуре T_2 газ получает от нагревателя количество теплоты Q_2, поскольку в ходе изотермического процесса $\Delta E = 0$, то $Q = |A_{1\to 2}|$ и работа, совершаемая газом положительна:

$$A_{1\to 2} = Nk_B T_2 \ln \frac{V_2}{V_1}; \qquad Q_2 = Nk_B T_2 \ln \frac{V_2}{V_1}$$

При адиабатическом расширении $2 \to 3$ система термоизолирована и $Q = 0$. Совершаемая газом работа положительна и равна изменению внутренней энергии:

$$A_{2\to 3} = C_V (T_2 - T_1)$$

При изотермическом сжатии $3 \to 4$ работа совершается над газом:

$$A_{3\to 4} = -Nk_B T_1 \ln \frac{V_4}{V_3}; \qquad Q_1 = Nk_B T_1 \ln \frac{V_3}{V_4}$$

Наконец, при адиабатическом сжатии $4 \to 1$ система термоизолирована $(Q = 0)$ и работа совершается над газом:

$$A_{4\to 1} = C_V (T_1 - T_2)$$

Суммарная работа газа равна $A = Q_2 - Q - 1$. Заметим, что при адиабатическом процессе $TV^{\gamma-1} = \text{ const}$, то есть

$$T_2 V_2^{\gamma-1} = T_1 V_3^{\gamma-1}; \qquad T_1 V_4^{\gamma-1} = T_2 V_1^{\gamma-1}$$

и следовательно $\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}$. Тогда суммарная работа, совершаемая за цикл Карно есть

$$A = Nk_B (T_2 - T_1) \ln \frac{V_3}{V_4}$$

К.П.Д. цикла Карно определяется как

$$\eta = \frac{A}{Q_2} = \frac{T_2 - T_1}{T_2} = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

4. (i) Для рассматриваемой системы $\delta Q_1 = mC_V dT_1; \quad \delta Q_2 = mC_V dT_2$. Поскольку в цикле Карно энтропия не возрастает,

$$\frac{\delta Q_1}{T_1} = -\frac{\delta Q_2}{T_2}$$

или

$$\frac{dT_1}{T_1} = -\frac{dT_2}{T_2}; \quad \int_{T_1}^{T} \frac{dT_1}{T_1} = \int_{T_1}^{T} \frac{dT_2}{T_2}; \Longrightarrow \ln\frac{T}{T_1} = -\ln\frac{T}{T_2}$$

Следовательно $T = \sqrt{T_1 T_2}$.

(ii) Закон сохранения энергии означает что

$$A = (E_1 - E) - (E - E_2) = E_1 + E_2 - 2E = mC_V(T_1 + T_2 - 2T)$$

5. (i) Изобразим сначала две изобары при $P_2 = 6 \cdot 10^5\ Pa$ и $P_1 = 10^5\ Pa$. Точка 1 находится на нижней изобаре (см. рисунок) при наименьшей температуре T_1. Поскольку процесс $1 \to 2$ не является изэнтропийным, энтропия при этом переходе слегка возрастает. Далее, нагрев до температуры T_1 происходит изобарически при $P_2 = P_3 = 6 \cdot 10^5\ Pa$ и продолжается до достижения температуры $T_3 = 973^\circ\ K$. Турбина не является изэнтропийным устройством, поэтому понижение давления газа при совершении работы также связано с ростом энтропии (переход $3 \to 4$). Наконец, возвращение газа в начальное состояние происходит изобарически при $P_4 = P_1 = 10^5\ Pa$.

(ii) Вычислим температуру во всех точках цикла. Воспользуемся определением коэффициента *изоэнтропная эффективности* как отношения работы произведенной идеальным изэнтропным компрессором к работе произведенной компрессором в реальном процессе:

$$\eta_s = \frac{A_s}{A}$$

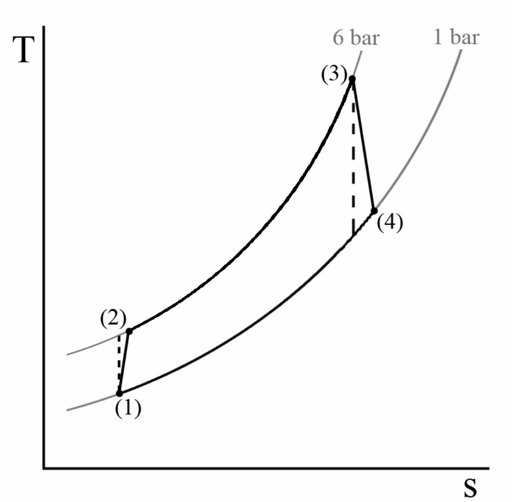
Для идеального газа с постоянной теплоемкостью

$$A_s = mC_P(T_{2,s} - T_1); \qquad A = mC_P(T_2 - T_1); \Longrightarrow \eta_s = \frac{T_{2,s} - T_1}{T_2 - T_1}$$

где $T_{2,s}$- температура, которую бы имел газ в точке 2 если бы процесс происходил изэнтропийно. Но если бы это действительно происходило с постоянной энтропией, то мы могли бы воспользоваться соотношением

$$\frac{P^{\gamma-1}}{T^{\gamma}} = \text{const}; \qquad TP^{(1-\gamma)/\gamma} = \text{const}; \qquad \frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{T_{2,s}}{T_1}\right)^{\gamma/(\gamma-1)}$$

Поскольку $P_2/P_1 = 6$, то $T_{2,s} = 497,2^\circ\ K$. Используя данное в условии значение $\eta_s = 0.88$, получим $T_2 = 524,4^\circ\ K$.



Нам известно что $T_3 = 973° \ K$. Для определения температуры газа T_4 воспользуемся тем, что в турбине давление уменьшается *политропно*, то есть в ходе процесса $PV^k = \ const$, k - индекс политропы. Из выражения для политропической эффективности:

$$\eta_{poly} = \frac{k-1}{k} \frac{\gamma}{\gamma - 1}$$

можно определить индекс политропы:

$$k = \frac{\gamma}{\gamma - (\gamma - 1)\eta_{poly}} = 1.321$$

и, воспользовавшись уравнением политропы в виде

$$\frac{P_3}{P_4} = \left(\frac{T_3}{T_4}\right)^{k/(k-1)}$$

вычислим $T_4 = 629,7° \ K$

В соответствии с первым началом термодинамики должно выполнятся условие $\Delta Q + A = 0$, то есть $A = -\Delta Q = -C_P m \Delta T$, где m- масса газа. Мощность компрессора, совершающего над газом эту работу, определяется скоростью переноса газа:

$$W = \dot{m}\Delta Q = \dot{m}C_P\Delta T$$

то есть мощность компрессора есть

$$W_{comp} = \dot{m}C_P(T_2 - T_1) = 455\ JK/s$$

Мощность турбины определяется аналогично

$$W_{turb} = \dot{m}C_P(T_3 - T_4) = 689\ JK/s$$

и суммарная мощность двигателя есть

$$W = W_{turb} - W_{comp} = 234,8\ JK/s$$

(iii) Количество теплоты, полученное от нагревателя в единицу времени определяется как

$$Q_{in} = \dot{m}C_P(T_3 - T_2) = 900.8\ JK/s$$

(iv) К.П.Д.теплового двигателя определяется отношением

$$\eta = \frac{W}{Q_{in}} = 26\%$$

(v) К.П.Д. двигателя Карно определяется отношением

$$\eta_{Carno} = 1 - \frac{T_1}{T_3} = 69,4\%$$

(vi) Закон сохранения энергии:

$$Q_{in} - W - Q_{out} = Q_{in} - W - \dot{m}C_P(T_4 - T_1) = 900,8 - 234,8 - 666 = 0$$