Белорусский Государственный Университет, Минск
Физический факультет
SS 2011/2012
Я.М. Шнир

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

Задачи и упражнения 16

1. Релятивистский электрон имеет энергию $\varepsilon = c\sqrt{\vec{p}^2 + m^2c^2}$. Определим переменную θ, заданную соотношением $|\vec{p}| = mc\sinh\theta$. Вычислить средние значения следующих величин, выраженные как интегралы от некоторых функций этой переменной:
   (i) Полного числа частиц N;
   (ii) Полной энергии релятивистского фермионного газа E;
   (iii) Давления релятивистского фермионного газа P.
2. Предполагая что релятивистский электронный газ полностью вырожден, записать соответствующее уравнение состояния в ультрарелятивистском и нерелятивистском пределах.
3. Белый карлик. Рассмотрим газовое облако гелия ^{4}He массой $M = 10^{33}$ грамм при плотности $\rho = 10^7\ g/cm^3$ и температуре $T = 10^7\ K^\circ$. Поскольку соответствующая энергия много больше энергии ионизации, можно полагать что все атомы ионизированы. Показать, что такой электронный газ является релятивистским и определить зависимость радиуса белого карлика от его массы.
4. Рассмотрим образец металла, содержащий N атомов. Химический потенциал системы равен μ а энергетическая зона, содержащая $2N$ электронных уровней ε_i занята $2N - N'$ электронами. Показать, что эти электроны дают такой же вклад в термодинамические характеристики, как и электронный газ с энергетическими уровнями $-\varepsilon_i$ и химическим потенциалом $-\mu$.

Решения

1. Поскольку $p = mc \sinh\theta$, то с учетом вырождения по спину, можно записать выражение для плотности числа состояний в виде:

$$d\omega = 2\frac{4\pi V}{h^3}p^2 dp = \frac{8\pi V}{h^3}(mc)^3 \sinh^2\theta \cosh\theta d\theta$$

Энергия релятивистского электрона выражается через переменную θ как $\varepsilon = c\sqrt{p^2 + m^2c^2} = mc^2\cosh\theta$. Следовательно, среднее число частиц релятивистского квантового ферми-газа определяется соотношением

$$N = \sum_i \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_i - \mu)} + 1} = 8\pi V\left(\frac{mc}{h}\right)^3 \int\limits_0^\infty \frac{\sinh^2\theta\cosh\theta d\theta}{\exp\left[\beta(mc^2\cosh\theta - \mu)\right] + 1}$$

Аналогично, средняя энергия релятивистского квантового ферми-газа равна

$$E = \sum_i \frac{\varepsilon}{e^{\beta(\varepsilon_i - \mu)} + 1} = 8\pi V\frac{m^4c^5}{h^3} \int\limits_0^\infty \frac{\sinh^2\theta\cosh^2\theta d\theta}{\exp\left[\beta(mc^2\cosh\theta - \mu)\right] + 1}$$

Выражение для давления релятивистского ферми-газа проще всего получить из определения большого термодинамического потенциала

$$-\Phi = PV = k_BT\sum_i \ln\left[1 + e^{-\beta(\varepsilon_i - \mu)}\right]$$

Переходя в последнем выражении к интегрированию по энергии (переменной θ), получим

$$\begin{aligned} P =& 8\pi\left(\frac{mc}{h}\right)^3 \int\limits_0^\infty \frac{1}{\beta}\sinh^2\theta\cosh\theta d\theta \ln\left[1 + \exp\left[-\beta(mc^2\cosh\theta - \mu)\right]\right] \\ =& \frac{8\pi}{3}\frac{m^4c^5}{h^3}\int\limits_0^\infty \frac{\sinh^4\theta d\theta}{\exp\left[\beta(mc^2\cosh\theta - \mu)\right] + 1} \end{aligned} \tag{1}$$

где мы воспользовались формулой интегрирования по частям:

$$\int\limits_0^\infty \frac{d(\sinh^3\theta)}{3\beta}\ln\left[1 + e^{-\beta(mc^2\cosh\theta - \mu)}\right] = \int\limits_0^\infty \frac{\sinh^3\theta}{3\beta} d\left\{\ln\left[1 + e^{-\beta(mc^2\cosh\theta - \mu)}\right]\right\}$$

Для полностью вырожденного ферми-газа ($T = 0$) отсюда следует что $\varepsilon_F = mc^2 \cosh\theta_0$ и

$$N = 8\pi V \frac{m^3c^3}{h^3} \int\limits_0^{\theta_0} \sinh^2\theta \cosh\theta d\theta = \frac{8\pi V}{3} \frac{m^3c^3}{h^3} \sinh^3\theta_0$$

Аналогично

$$E = 8\pi V \frac{m^4c^5}{h^3} \int\limits_0^{\theta_0} \sinh^2\theta \cosh^2\theta d\theta = \frac{\pi V}{4} \frac{m^4c^5}{h^3} \left(\sinh(4\theta_0) - 4\theta_0\right)$$

При этом давление вырожденного релятивистского электронного газа определяется соотношением

$$P = \frac{8\pi}{3} \frac{m^4c^5}{h^3} \int\limits_0^{\theta_0} \sinh^4\theta = \frac{\pi}{3} \frac{m^4c^5}{h^3} \left(\frac{1}{4}\sinh(4\theta_0) - 2\sinh(\theta_0) + 3\theta_0\right) \tag{2}$$

Если определить предельный импульс Ферми $p_F = mc\sinh\theta_0$, которому соответствует энергия равная химпотенциалу при $T = 0$, то из выражения для среднего числа частиц немедленно получаем соотношение

$$N = \frac{8\pi V}{3} \frac{p_F^3}{h^3}$$

что полностью определяет химический потенциал релятивистского газа Ферми.

2. Так как для полностью вырожденного газа Ферми $p_F = mc\sinh\theta_0$ и

$$\sinh\theta_0 = \frac{h}{mc}\left(\frac{3n}{8\pi}\right)^{1/3}$$

то нерелятивистский предел $p \ll mc$ соответствует $\sinh\theta \ll 1$ а ультрарелятивистский предел $p \gg mc$ соответствует $\sinh\theta \gg 1$. В нерелятивистском пределе энергия электрона равна $\varepsilon = mc^2 + p^2/2m$ а в ультрарелятивистском пределе можно использовать приближение $\varepsilon = cp$. В нерелятивистском пределе тогда можно воспользоваться разложениями для энергии

$$\sinh(4\theta_0) - 4\theta_0 \approx \frac{1}{3!}(4\theta_0)^3 + \frac{1}{5!}(4\theta_0)^5 + \dots \approx \frac{32}{3}\left(\frac{p_F}{mc}\right)^3 \left[1 + \frac{3}{10}\left(\frac{p_F}{mc}\right)^2 + \dots\right]$$

и для давления

$$\frac{1}{4}\sinh(4\theta_0) - 2\sinh(\theta_0) + 3\theta_0 \approx \frac{1}{4\cdot 5!}(4\theta_0)^5 - \frac{2}{5!}(2\theta_0)^5 + \dots \approx \frac{8}{5}\left(\frac{p_F}{mc}\right)^5$$

что приводит к соотношениям

$$E = \frac{8\pi V}{3}\frac{m^4c^5}{h^3}\left(\frac{p_F}{mc}\right)^3\left[1+\frac{3}{10}\left(\frac{p_F}{mc}\right)^2+\dots\right]$$

и

$$P = \frac{8\pi}{15}\frac{m^4c^5}{h^3}\left(\frac{p_F}{mc}\right)^5$$

то есть

$$E \approx N(mc^2+\frac{3}{5}\frac{p_F^2}{2m}); \qquad PV \approx \frac{2}{3}E$$

В ультрарелятивистском пределе $p_F \approx \frac{mc}{2}e^{\theta_0}$ и следовательно

$$\sinh(4\theta_0) - 4\theta_0 \approx \frac{1}{2}e^{4\theta_0} = 8\left(\frac{p_F}{mc}\right)^4$$

$$\frac{1}{4}\sinh(4\theta_0) - 2\sinh(\theta_0) + 3\theta_0 \approx \frac{1}{8}e^{4\theta_0} = 2\left(\frac{p_F}{mc}\right)^4$$

Таким образом,

$$E = 2\pi V\frac{m^4c^5}{h^3}\left(\frac{p_F}{mc}\right)^4; \qquad P = \frac{2\pi}{3}\frac{m^4c^5}{h^3}\left(\frac{p_F}{mc}\right)^4$$

то есть $PV = \frac{E}{3}$.

3. Положим что число электронов в полностью ионизированной системе равно N. Тогда число α-частиц (ядер атомов гелия ^{4}He) равно $N/2$, масса каждой α-частицы равна $4m_p$, причем масса звезды почти полностью определяется суммарной массой α-частиц, вклад в нее электронных масс пренебрежимо мал. Электронная плотность тогда может быть оценена как

$$n = \frac{N}{V} = \frac{2M}{4m_pV} = \frac{\rho}{2m_p} \approx 10^{30}cm^{-3}$$

где мы учли что $M = N\cdot m_e + \frac{1}{2}N\cdot 4m_p \approx \frac{1}{2}N\cdot 4m_p$. Следовательно, импульс Ферми равен

$$p_F = h\left(\frac{3n}{8\pi}\right)^{1/3} \approx 2\cdot 10^{-17} g\cdot cm/s$$

Поскольку $n = \frac{M}{2\pi V}$, то

$$p_F = h\left(\frac{9M}{64\pi^2 m_p R^3}\right)^{1/3}$$

что полностью определяет параметр θ_0.

С другой стороны, величина $mc \approx 9.1\cdot 10^{-28}\times 3\cdot 10^{-10} \approx 2.7\cdot -17 \;\; g\cdot cm/s$, то есть электроны являются релятивистскими. При этом температура Ферми равна

$T_F \sim mc^2 \sim 10^6\text{eV} \ \sim 10^{12}$ K°. Если $T \ll T_F$, то газ можно рассматривать как сильно вырожденный и в вычислениях оправданно положить $T = 0$.

Условие стабильности белого карлика заключается в балансе его внутренней энергии и гравитационного взаимодействия, то есть изменение внутренней энергии релятивистского вырожденного ферми-газа

$$dE = -PdV = P(R) \cdot 4\pi R^2 dR$$

должно быть сбалансировано гравитацией:

$$dE = \gamma \frac{GM^2}{R^2} dR$$

где γ-некоторый коэффициент, учитывающий радиальную зависимость распределения массы белого карлика. Таким образом, условие равновесия означает что

$$P(R) = \frac{\pi}{3} \frac{m^4 c^5}{h^3} \left(\frac{1}{4} \sinh(4\theta_0) - 2\sinh(\theta_0) + 3\theta_0 \right) = \frac{\gamma}{4\pi} \frac{GM^2}{R^4}$$

где мы воспользовались выражением (2) для давления вырожденного релятивистского электронного газа.

Заметим, что в предельных случаях $\theta_0 \to 0$ и $\theta_0 \to \infty$ выполняются соотношения

$$\frac{1}{4} \sinh(4\theta_0) - 2\sinh(\theta_0) + 3\theta_0 = \begin{cases} \frac{24}{15}\theta_0^5, & \theta_0 \to 0 \\ \frac{1}{8} e^{4\theta_0} & \theta_0 \to \infty \end{cases}$$

Учитывая что $p_F = mc\sinh\theta_0 = h\left(\frac{9M}{64\pi^2 m_p R^3}\right)^{1/3}$, получим оценку в этих предельных случаях

$$P(R) = \frac{\gamma}{4\pi} \frac{GM^2}{R^4} = \begin{cases} \frac{4h^2}{15m} \left(\frac{9M}{64\pi^2 m_p R^3}\right)^{5/3}, & \theta_0 \to 0 \\ \frac{hc}{6\pi} \left(\frac{9M}{64\pi^2 m_p R^3}\right)^{4/3} & \theta_0 \to \infty \end{cases}$$

Следовательно, при $\theta_0 \to 0$ $R \propto M^{-1/3}$ а при $\theta_0 \to \infty$ масса стремится к пределу Чандрасекара:

$$M = M_0 = \left(\frac{3}{2} \frac{hc}{\gamma G}\right)^{3/2} \left(\frac{9}{64\pi^2 m_p}\right)^2$$

определяющему минимальный размер белого карлика.

4. Свободная энергия свободного электронного газа состоящего из $2N - N'$ электронов, определяется как

$$F = (2N - N')\mu - k_B T \sum_i \ln\left[1 + e^{\beta(\mu - \varepsilon_i)}\right]$$

Заметим, что число электронов в энергетической зоне определяется как

$$2N - N' \equiv \sum_i \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_i-\mu)}+1} = k_B T \frac{\partial}{\partial \mu}\left\{\sum_i \ln\left[1+e^{\beta(\mu-\varepsilon_i)}\right]\right\}$$

Преобразование свободной энергии приводит к выражению (здесь мы воспользуемся тем что $\ln(1+e^x) = \ln(e^x(1+e^{-x})) = x + \ln(1+e^{-x})$)

$$\begin{aligned} F &= (2N-N')\mu - k_B T \sum_i \ln\left[1+e^{\beta(\varepsilon_i-\mu)}\right] - \sum_i(\mu-\varepsilon_i) \\ &= \sum_i \varepsilon_i - N'\mu - k_B T \sum_i \ln\left[1+e^{\beta(-\mu-(-\varepsilon_i))}\right] \end{aligned} \tag{3}$$

Поскольку величина $\sum \varepsilon_i = \ const$, ее можно отбросить изменив начало отсчета энергии. Очевидно, что тогда выражение (3) совпадает со свободной энергией системы электронов с энергией $-\varepsilon$ и химпотенциалом $-\mu$. С другой стороны,

$$2N - N' = \sum_i \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_i-\mu)}+1} = \sum_i \left\{1 - \frac{1}{1+e^{\beta(\mu-\varepsilon_i)}}\right\} = 2N - \sum_i \frac{1}{1+e^{\beta(\mu-\varepsilon_i)}}$$

то есть

$$N' = \sum_i \frac{1}{1+e^{\beta(\mu-\varepsilon_i)}} = \sum_i \frac{1}{1+e^{\beta(-\varepsilon_i-(-\mu))}}$$

что согласуется с вышеуказанной интерпретацией (ферми-газ положительно заряженных дырок).