Белорусский Государственный Университет, Минск
Физический факультет

SS 2011/2012
Я.М. Шнир

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

Задачи и упражнения 15

1. Гамильтониан, описывающий взаимодействие электрона с внешним магнитным полем B имеет вид $H = \frac{e}{mc}\vec{S}\cdot\vec{B}$ где вектор спина $\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\hat{z}$ и магнетон Бора $\mu_B = \frac{e\hbar}{2mc}$ определяет величину расщепления спектра. Определить парамагнитную восприимчивость вырожденного электронного газа.

2. Рассмотрим упрощенную модель электронного газа в металлах при температуре $T = 0^\circ K$. Используя уравнение состояния нерелятивистского газа Ферми

$$PV = \frac{2}{3}E$$

и считая заданными плотность газа $n = N/V$ и энергию Ферми ε_F, вычислить изотермическую сжимаемость электронного газа.

3. Вычислить парамагнитную восприимчивость достаточно сильно вырожденного электронного газа с точностью до членов второго порядка по T.

4. Термоэлектронная эмиссия. Рассмотрим электронный газ, потенциал ω которого больше энергии Ферми на величину ϕ. При конечных температурах электроны могут покинуть металл создавая термоэлектронный ток I. Показать что для тока через единицу поверхности выполняется соотношение $I \sim T^2 e^{-\phi/k_B T}$.

Решения

1. Полная энергия электрона в магнитном поле имеет вид

$$\varepsilon = \frac{p^2}{2m} \pm \mu_B B,$$

то есть кинетическая энергия $\frac{p^2}{2m}$ электрона с положительным спином принимает значения от 0 до $\varepsilon_F - \mu_B B$ а кинетическая энергия электрона с отрицательным спином - от 0 до $\varepsilon_F + \mu_B B$. Число электронов с положительным и отрицательным спином определяется как

$$N_\uparrow = \frac{4\pi V}{3h^3} p_\uparrow^3; \qquad \frac{p_\uparrow^2}{2m} = \mu_0 - \mu_B H;$$
$$N_\downarrow = \frac{4\pi V}{3h^3} p_\downarrow^3; \qquad \frac{p_\downarrow^2}{2m} = \mu_0 + \mu_B H$$

Полный магнитный момент равен

$$M = -\mu_B(N_\uparrow - N_\downarrow) = -\frac{4\pi V}{3h^3}\mu_B(p_\uparrow^3 - p_\downarrow^3) = \mu_B \frac{4\pi V (2m)^{3/2}}{3h^3}\left[(\mu_0 + \mu_B B)^{3/2} - (\mu_0 - \mu_B B)^{3/2}\right]$$
$$\approx 3B\mu_B^2 \frac{4\pi V}{3h^3}\frac{(2m\mu_0)^{3/2}}{\mu_0} + \dots = \frac{3BN}{2}\frac{\mu_B^2}{\mu_0} + \dots$$

где учтено что $N = 2 \cdot \frac{4\pi V (2m\mu_0)^{3/2}}{3h^2}$ и мы воспользовались условием $\mu_0 \gg \mu_B B$. Следовательно, парамагнитная восприимчивость равна

$$\chi = \frac{\partial M}{\partial B} = \frac{3N}{2}\frac{\mu_B^2}{\mu_0}$$

2. Поскольку давление вырожденного электронного газа связано с его внутренней энергией соотношением

$$P = -\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T$$

то используя уравнение состояния $PV = \frac{2}{3}E$ получим

$$P = -\frac{3}{2}\frac{\partial (PV)}{\partial V} = -\frac{3}{2}\left[V\left(\frac{\partial (P)}{\partial V}\right)_T + P\right]$$

то есть

$$V\left(\frac{\partial (P)}{\partial V}\right)_T = -\frac{5}{3}P$$

Таким образом, сжимаемость электронного газа

$$\kappa = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T = \frac{3}{5P}$$

Далее, учтем что при $T = 0^\circ K$ $E = \frac{3}{5}N\varepsilon_F$:

$$P = \frac{2}{3}\frac{E}{V} = -\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right) = -\frac{3}{5}N\left(\frac{\partial \varepsilon_F}{\partial V}\right) = -\frac{3}{5}N\left(-\frac{2}{3}\frac{\varepsilon_F}{V}\right) = \frac{2}{5}n\varepsilon_F$$

где $\varepsilon_F = \frac{h^2}{8m}\left(\frac{3N}{\pi V}\right)^{3/2}$. Таким образом, окончательно

$$\kappa = \frac{3}{2n\varepsilon_F}$$

3. Воспользуемся функцией распределения Ферми-Дирака для системы электронов во внешнем магнитном поле, учитывая что кинетическая энергия $\frac{p^2}{2m}$ электрона с положительным спином принимает значения от 0 до $\varepsilon_F - \mu_B B$ а кинетическая энергия электрона с отрицательным спином - от 0 до $\varepsilon_F + \mu_B B$:

$$f(\varepsilon \mp \mu_B B) = \frac{1}{\exp\left(\frac{\varepsilon \pm \mu_B B - \mu}{k_B T}\right) + 1}$$

При этом плотность электронных состояний равна

$$dw = 4\pi V \frac{(2m)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\varepsilon}d\varepsilon}{h^3}$$

и магнитный момент электронного газа может быть вычислен как

$$M = \mu_B \int_0^\infty [f(\varepsilon - \mu_B B) - f(\varepsilon + \mu_B B)]dw = \left[f(\varepsilon - \mu_B B) \approx f(\varepsilon) - \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}\mu_B B\right]$$

$$\approx -2\mu_B^2 B \int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}\frac{2\pi V(2m)^{\frac{3}{2}}}{h^3}\sqrt{\varepsilon}d\varepsilon = -\frac{4\pi V(2m)^{\frac{3}{2}}}{h^3}\mu_B^2 B \int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}\sqrt{\varepsilon}d\varepsilon$$

Напомним, что подобный интеграл принадлежит к семейству уже встречавшихся ранее интегралов:

$$I_n = \int_0^\infty \varepsilon^n f(\varepsilon)d\varepsilon = -\frac{1}{n+1}\int_0^\infty \varepsilon^{n+1}\frac{\partial f}{\partial \varepsilon}d\varepsilon \approx \frac{\mu^{n+1}}{n+1}\left[1 + \frac{\pi^2 n(n+1)}{6}\left(\frac{k_B T}{\mu_0}\right)^2\right]$$

В данном случае $n = 1/2$ и следовательно

$$I_{-1/2} = 2\mu^{\frac{1}{2}}\left[1 - \frac{\pi^2}{24}\left(\frac{k_B T}{\mu_0}\right)^2\right]$$

Тогда

$$\int_0^\infty \sqrt{\varepsilon}\frac{\partial f}{\partial \varepsilon}d\varepsilon = -\frac{1}{2}I_{-1/2} = -\mu^{\frac{1}{2}}\left[1-\frac{\pi^2}{24}\left(\frac{k_BT}{\mu_0}\right)^2\right] = -\mu_0^{\frac{1}{2}}\left[1-\frac{\pi^2}{12}\left(\frac{k_BT}{\mu_0}\right)^2\right]$$

где мы воспользовальсь тем, что

$$\mu = \mu_0\left[1-\frac{\pi^2}{12}\left(\frac{k_BT}{\mu_0}\right)^2\right]$$

Следовательно, среднее значение магнитного момента системы равно

$$M = -\frac{4\pi V(2m)^{\frac{3}{2}}}{h^3}\mu_B^2 B\int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}\sqrt{\varepsilon}d\varepsilon = \frac{4\pi V(2m)^{\frac{3}{2}}}{h^3}\mu_B^2 B\sqrt{\mu_0}\left[1-\frac{\pi^2}{12}\left(\frac{k_BT}{\mu_0}\right)^2\right]$$
$$= g(\varepsilon)\mu_B^2 B\left[1-\frac{\pi^2}{12}\left(\frac{k_BT}{\mu_0}\right)^2\right]$$

и магнитная восприимчивость сильно вырожденного электронного газа равна

$$\chi = \frac{\partial M}{\partial B} = \frac{3}{2}\frac{N\mu_B^2}{\mu_0}\left[1-\frac{\pi^2}{12}\left(\frac{k_BT}{\mu_0}\right)^2\right]$$

4. Условием вылета электронов из металла является то, что его кинетическая энергия должна быть больше потенциала ω. Следовательно, число электронов с энергией $\varepsilon = (p_x^2+p_y^2+p_z^2)/(2m)$, покидающих поверхность металла в единицу времени со скоростью $v_z = p_z/m$ равно

$$N = \int\limits_{p_z>\sqrt{2m\omega}} dp_z\frac{p_z}{m}\int_{-\infty}^\infty dp_y dp_x\frac{2}{h^3}\frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)}+1}$$

Следовательно, $(p_\perp^2 = p_x^2+p_y^2)$

$$N = \int\limits_{p_z>\sqrt{2m\omega}} dp_z\frac{p_z}{m}\int_0^\infty 2\pi p_\perp dp_\perp\frac{2}{h^3}\frac{1}{e^{\beta(\frac{p_z^2-p_\perp^2}{2m}-\mu)}+1}$$
$$= \frac{4\pi m k_BT}{h^3}\int\limits_{p_z>\sqrt{2m\omega}} dp_z\frac{p_z}{m}\ln\left[1+\exp\left(\frac{\mu-(p_z^2/2m)}{k_BT}\right)\right] = \frac{4\pi m k_BT}{h^3}\int_\omega^\infty d\varepsilon_z\ln\left[1+e^{\beta(\mu-\varepsilon_z)}\right]$$

Поскольку $\omega-\varepsilon_F = \phi \gg k_BT$ и мы полагает что $\mu=\mu_0=\varepsilon_F$, то разложение экспоненты в подинтегральном выражении в ряд дает

$$N \approx \frac{4\pi m(k_BT)^2}{h^3}\exp\left(\frac{\mu_0-\omega}{k_BT}\right) = \frac{4\pi m(k_BT)^2}{h^3}e^{-\phi/k_BT}$$

и ток термоэлектронной эмиссии равен $I = eN = \frac{4\pi em(k_BT)^2}{h^3}e^{-\phi/k_BT}$