Белорусский Государственный Университет, Минск
Физический факультет SS 2011/2012
Я.М. Шнир

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

Задачи и упражнения 12

1. Электромагнитное излучение, описываемое обычным распределением Планка, находится в полости объемом V. Максимум спектра издучения $u(\omega)$ первоначально приходится на частоту ω_0. Если объем полости адиабатически увеличивается вдвое, чему становится равной частота ω_1, соответствующая максимуму планковского спектра?

2. Гелий-неоновый лазер генерирует квазимонохроматический пучок электромагнитного излучения с длиной волны $\lambda = 6328$ Å, мощность излучения в пучке равна 10^{-3} ватт, угол расхождения пучка равен 10^{-4} радиан и спектральная ширина пучка равна 0.01 Å. Если бы этот пучок генерировался черным телом, площадь поверхности которого была бы равна 1cm^2, то какова была бы его температура?

3. Грубым приближением при описании космического микроволнового излучения служит модель сферической полости радиуса 10^{30}m с непроницаемыми стенками и температурой внутри 3 K°. Оцените полное число фотонов во Вселенной и их полную энергию.

4. (i) Энергия излучения черного тела в нашем мире зависит от температуры как $\sim T^4$. Как бы она зависела от температуры в d-мерном мире?

   (ii) Для одноатомного идеального газа отношение $\gamma = C_P/C_V = 5/3$. Чему оно равно в d-мерном мире?

Решения

1. Распределение Планка задано соотношением

$$u(\omega) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3 (e^{\hbar\omega\beta} - 1)}$$

где мы учли что плотность состояний фотонного газа имеет вид

$$g(\varepsilon) = V\frac{\omega^2 d\omega}{\pi^2 c^3}$$

Условие максимума спектра означает что

$$\omega_{max} \to \frac{du(\omega)}{d\omega} = 0 = \frac{3\omega^2}{e^{\hbar\omega\beta} - 1} - \frac{\omega^3 \hbar\beta e^{\hbar\omega\beta}}{(e^{\hbar\omega\beta} - 1)^2} = 3(e^x - 1) - xe^x$$

где мы определили переменную $x = \hbar\omega_{max}/k_B T$. Следовательно условие максимума выполняется при $\omega_{max} = \gamma T; \quad \gamma =$ const. С другой стороны, поскольку

$$dE = TdS - PdV$$

и уравнение состояния фотонного газа имеет вид $E = 3PV$, то при адиабатическом расширении $dS = 0$ и

$$3VdP + 4PdV = 0; \qquad 3\frac{dP}{P} + 4\frac{dV}{V} = 0 \Longrightarrow V^4 P^3 = \text{const}$$

Наконец, давление фотонного газа $P \sim E \propto T^4$, то есть $VT^3 = \text{const}$ и при адиабатическом расширении температура меняется как

$$T_1 = T_0 \left(\frac{V_0}{V_1}\right)^{1/3} = \frac{T_0}{\sqrt[3]{2}}$$

Следовательно,

$$\omega_1 = \frac{\omega_0}{\sqrt[3]{2}}$$

2. Из формулы для излучения черного тела можно записать число фотонов в единице объема в интервале $d\varepsilon d\Omega$

$$dn = \frac{2}{(ch)^3}\frac{\varepsilon^2 d\varepsilon d\Omega}{e^{\varepsilon/k_B T}}$$

С другой стороны, число фотонов в лазерном пучке определяется соотношением

$$dN = cSdn$$

где S - сечение пучка. Тогда мощность лазера $W = \varepsilon dN$. Поскольку для фотонов $\varepsilon = hc/\lambda$ и телесный угол раствора пучка равен $d\Omega = \pi(d\theta)^2$, то

$$W = W_0 \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_B T}\right) - 1}; \qquad W_0 = \frac{2\pi S h c^2 d\lambda (d\theta)^2}{\lambda^5}$$

Следовательно,

$$T = \frac{hc}{\lambda k_B} \frac{1}{\ln\left(\frac{W_0}{W}\right) + 1}$$

Подстановка данных задачи приводит к результату (оценка)

$$W_0 = 3.6 \cdot 10^{-9} \text{ Watt}; \qquad T = 6 \cdot 10^9 K^\circ$$

3. Число фотонов в интервале частот от ω до $\omega + d\omega$ определяется соотношением

$$dN = \frac{V}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^2 d\omega}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}$$

Тогда полное число фотонов

$$N = \frac{V}{\pi^2 c^3} \int\limits_0^\infty \frac{\omega^2 d\omega}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} = \frac{V}{\pi^2 c^3} \frac{1}{(\beta\hbar)^3} \int\limits_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^x - 1}$$

Поскольку данный интеграл относится к интегралам вида

$$I_n = \int\limits_0^\infty \frac{x^n dx}{e^x - 1} = \Gamma(n+1) \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^{n+1}}$$

то $I_2 = 2 \sum\limits_{k=1}^\infty \frac{1}{k^3}$ и следовательно

$$N = \frac{2V}{\pi^2} \left(\frac{k_B T}{\hbar c}\right)^3 \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^3} \approx 2.5 \cdot 10^{87}$$

Полная энергия фотонов реликтового излучения равна

$$E = \frac{V\hbar}{\pi^2 c^3} \int\limits_0^\infty \frac{\omega^3 d\omega}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} = \frac{V\pi^2 k_B^4}{15(\hbar c)^3} T^4 \approx 2.6 \cdot 10^{79} J$$

4. (i) Энергия излучения черного тела определется в d-мерном случае как

$$E = 2\int \frac{d^d p d^d q}{h^d} \frac{\hbar\omega}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} = 2V k_B T^{d+1} \left(\frac{k_B}{hc}\right)^d \int\limits_0^\infty \frac{x d^d x}{e^x - 1} \propto T^{d+1}$$

(ii) По теореме о равнораспределении энергии $C_V = \frac{f}{2} k_B$ где f - число степеней свободы. Для одноатомной молекулы в d-мерном пространстве $f = d$. Поскольку $C_P = C_V + k_B$, в d-мерном мире

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{d+2}{d}$$