Белорусский Государственный Университет, Минск
Физический факультет

WS 2011/2012

Я.М. Шнир

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

Задачи и упражнения 10

1. В теории Большого Взрыва радиационная энергия первоначально заключена в малом объеме, который затем адиабатически расширяется сохраняя сферическую форму. Температура Вселенной при этом уменьшается. Вывести соотношение между температурой Вселенной и ее радиусом, используя термодинамические соотношения. Вычислить полную энтропию фотонного газа как функцию температуры, объема и констант $k, \hbar, c$.

2. Космическое микроволновое излучение заполняет Вселенную, оно соответствует излучению абсолютно черного тела при температуре около $3°K$. Несколько упрощая ситуацию, можно сказать что это излучение было порождено во время Большого Взрыва облаком горячих фотонов которое затем адиабатически расширялось. Объясните, почему такой процесс является именно адиабатическим, а не, например, изотермическим? Если за следующие 10^{10} лет объем Вселенной увеличился вдвое, то чему будет равна температура этого реликтового излучения? Запишите выражение, показывающее энергию реликтового излучения на 1 m^3. Оцените эту величину в обычных единицах Джоуль/m^3.

3. Вычислить температуру следующих систем:

   (i) $6 \cdot 10^{22}$ атомов гелия в объеме 2 литра при атмосферном давлении.

   (ii) Система частиц, уровни энергии которых распределены в соответствии со статистикой Максвелла-Больцмана, в контакте с термостатом при температуре T. Распределение частиц по уровням энергии задано как

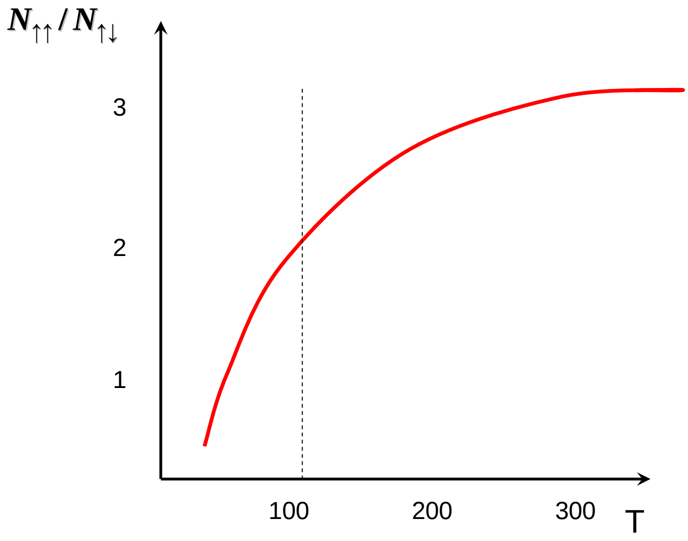
E(eV)	$30.1 \cdot 10^{-3}$	$21.5 \cdot 10^{-3}$	$12.9 \cdot 10^{-3}$	$4.3 \cdot 10^{-3}$
P	3.1%	8.5%	23%	63%

   где P- относительная вероятность обнаружить частицу на соответствующем уровне.

   (iii) В экспериментальной установке количество теплоты q, передаваемое образцу в единицу времени равно 0.01 ватт. Энтропия образца растет со временем следующим образом:

t(sec)	100	200	300	400	500	600	700
S (J/K)	2.30	2.65	2.85	3.00	3.11	3.20	3.28

   Чему равна температура образца при $t = 500$ s?



4. Показать, что число фотонов в тепловом равновесии с полостью объемом V при температуре T пропорционально $V \cdot \left(\frac{k_B T}{\hbar c}\right)^3$. Используя это выражение, оцените теплоемкость фотонного газа в постоянном объеме.

5. На рисунке показано отношение числа молекул ортоводорода (состояния двухатомной молекулы с параллельными спинами протонов) к числу молекул параводорода (состояния с антипараллельными спинами) как функция температуры. Объясните это поведение. Вычислите это отношение при $T = 100°K$. Расстояние между протонами в молекуле водорода $d = 0.7415 \cdot 10^{-9}\ cm$.

6. Молекула идеального газа состоит из 2 атомов массы m расстояние между которыми d фиксировано. Атомы имеют противоположный по знаку и равный по величине заряд $\pm q$. Газ находится во внешнем электрическом поле $\mathcal{E}$. Полагая что квантовые эффекты пренебрежимо малы, найдите среднее значение поляризации молекулы и теплоемкость в расчете на одну молекулу. При каких условиях это допущение справедливо?

Решения

1. (i) Рассмотрим расширение Вселенной как квазистатический процесс. При этом

$$dE = TdS - PdV$$

Условие адиабатичности означает что $dS = 0$. С другой стороны, давление фотонного газа равно $P = E/3V$ то есть

$$\frac{dE}{E} = -\frac{dV}{3V}; \qquad E \propto V^{-1/3}$$

Используя закон Стефана-Больцмана для плотности энергии фотонного газа

$$u = \frac{E}{V} = \sigma T^4; \qquad \sigma = \frac{\pi^2 k_B^4}{15\hbar^3 c^3}$$

получим

$$T^4 \propto V^{-4/3} \propto R^{-4}$$

то есть окончательно $T \propto R^{-1}$ или же $RT = \ const$

(ii) Используя термодинамическое соотношение, получим

$$dS = \frac{dE}{T} + \frac{PdV}{T} = \frac{V}{T}du + \frac{4}{3}\frac{u}{T}dV = d\left(\frac{4}{3}\sigma T^3 V\right)$$

где мы воспользовались законом Стефана-Больцмана. Следовательно,

$$S = \frac{4}{3}\sigma T^3 V = \frac{4\pi^2 k_B^4}{45\hbar^3 c^3} T^3 V$$

2. (i) Уравнение состояния идеального газа дает

$$T = \frac{PV}{Nk_B} = 241\ K$$

(ii) Относительная вероятность обнаружить частицу на каком-то уровне определяется распределением Больцмана как

$$P\frac{N_2}{N_1} = \exp\left(\frac{E_1 - E_2}{k_B T}\right)$$

Следовательно,

$$T = \frac{E_1 - E_2}{k_B}\frac{1}{\ln\left(\frac{N_2}{N_1}\right)}$$

Используя данные таблицы для всех 6 возможных комбинаций, получим

$$T = \{99,2; \quad 99,5; \quad 99,0; \quad 99,5; \quad 100,2; \quad 98,8\}$$

причем средняя температура $T = 99,4°K$.

(iii) Скорость передачи теплоты определяется как

$$q = \frac{dQ}{dt} = T\frac{dS}{dt}$$

что дает

$$T = \frac{q}{\left(\frac{dS}{dt}\right)}$$

Данные таблицы позволяют оценить производную при $t = 500\ s$ как

$$\frac{dS}{dt} = \left(\frac{3.20 - 3.00}{600 - 400}\right) = 10^{-3}\ J/sK$$

то есть $T = 10°K$

3. Плотность состояний фотонного газа равна

$$g(\varepsilon)d\varepsilon = \frac{V}{\pi^2\hbar^3c^3}\varepsilon^2 d\varepsilon$$

то есть

$$N = \int\limits_0^\infty \frac{V}{\pi^2\hbar^3c^3}\varepsilon^2 frac1e^{\beta\varepsilon} - 1d\varepsilon = \frac{V}{\pi^2}\cdot\left(\frac{k_BT}{\hbar c}\right)^2\int\limits_0^\infty \frac{x^2dx}{e^x - 1}$$

Заметим что

$$\int\limits_0^\infty \frac{x^2dx}{e^x-1} = \Gamma(3)\zeta(3) = 2.40411$$

Плотность энергии можно оценить по аналогии:

$$E = \int\limits_0^\infty \frac{V}{\pi^2}\frac{\varepsilon^2}{(\hbar c)^3}\frac{\varepsilon d\varepsilon}{e^{\beta\varepsilon}-1} = \frac{8\pi V}{(hc)^3}\int\limits_0^\infty \frac{\varepsilon^3}{e^{\beta\varepsilon}-1}d\varepsilon = \frac{8\pi V}{(hc)^3}(k_BT)^4\int\limits_0^\infty \frac{x^3}{e^x-1}dx$$

Возникающий здесь интеграл равен

$$\int\limits_0^\infty \frac{x^3dx}{e^x-1} = \Gamma(4)\zeta(4) = \frac{\pi^4}{15}$$

При этом

$$C_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V = \frac{4\pi^2 V}{15(\hbar c)^3}k_B^4T^3$$

4. Поскольку облако фотонного газа является замкнутой системой, то ее расширение представляет собой адиабатический процесс.

   Плотность энергии излучения фотонного газа определяется формулой $\frac{E}{V} = \sigma T^4$, то есть $E = \sigma V T^4$. Из первого начала термодинамики $TdS = E + pdV$ следует тогда

   $$T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V \propto VT^3$$

   и следовательно $S = const \cdot VT^3$. Рассматриваемый процесс является обратимым и адиабатическим, то есть энтропия постоянна. Тогда увеличение объема в 2 раза связано с уменьшением температуры

   $$T \to T' = \frac{1}{2^{1/3}} T$$

   Энергия излучения фотонного газа равна

   $$\frac{E}{V} = \sigma T^4 = \frac{\pi^2 k_B^4}{15(\hbar c)^3} T^4$$

   что при рассматриваемых значениях объема и температуры дает оценку $E \approx 10^{-14}\ J/m^3$

5. Двухатомная молекула водорода представляет собой систему фермионов, волновая функция электрона в основном состоянии должна быть симметричной. Если полный спин ядер (протонов) равен нулю то собственные значения оператора углового момента системы должны быть четными (параводород). Если же полный ядерный спин равен единице, то собственные значения оператора углового момента системы должны быть нечетными (ортоводород). Поскольку спиновый момент системы I может иметь $2I + 1$ ориентации, число состояний ортоводорода в 3 раза больше числа состояний параводорода.

   Момент инерции молекулы водорода равен

   $$I = \frac{md^2}{2}$$

   и ее энергия вращательного движения равна

   $$E_{rot} = \frac{\mathbf{L}^2}{2I} = \frac{l(l+1)\hbar^2}{2I}$$

   с кратностью вырождения каждого состояния $2l + 1$. Для ортоводорода $l = 1, 3, 5 \ldots$, для параводорода $l = 0.2, 4 \ldots$ Следовательно, отношение числа молекул ортоводорода к числу молекул параводорода равно

   $$\frac{N_{\uparrow\uparrow}}{N_{\uparrow\downarrow}} = \frac{3 \sum\limits_{l=1,3,5\ldots} (2l+1) e^{-l(l+1)\lambda}}{\sum\limits_{l=0,2,4\ldots} (2l+1) e^{-l(l+1)\lambda}}; \qquad \lambda = \frac{\hbar^2}{md^2 k_B T}$$

Если $T = 100°K$, то оценка дает $\lambda = 0.88$ и сумма по собственным значения l достаточно быстро убывает, то есть достаточно ограничиться первыми двумя членами:

$$\frac{N_{\uparrow\uparrow}}{N_{\uparrow\downarrow}} = 3\frac{3e^{-2\lambda} + 7e^{-12\lambda}}{1 + 5e^{-6\lambda}} = 1.52$$

6. Молекула представляет собой электрический диполь во внешнем поле, ее энергия взаимодействия зависит от ориентации θ как

$$E = -E_0 \cos\theta; \qquad E_0 = qd\mathcal{E}$$

Тогда среднее значение ориентации молекулы по всем возможным направлениям определяется как ($\langle E\rangle = -\langle P\rangle\mathcal{E}$)

$$\langle P\rangle = \frac{\int qd\cos\theta e^{E_0\cos\theta/k_BT} d\Omega}{\int e^{E_0\cos\theta/k_BT} d\Omega} = gd\frac{\int\limits_0^\pi \cos\theta e^{E_0\cos\theta/k_BT}\sin\theta d\theta}{\int\limits_0^\pi e^{E_0\cos\theta/k_BT}\sin\theta d\theta} = gd\left[\coth\left(\frac{E_0}{k_BT}\right) - \frac{k_BT}{E_0}\right]$$

Поляризуемость во внешнем поле можно найти как

$$\chi = \frac{\partial\langle P\rangle}{\partial\mathcal{E}} = \frac{gd}{\mathcal{E}}\frac{k_BT}{E_0}\left[1 - \frac{\left(\frac{E_0}{k_BT}\right)^2}{\sinh^2\left(\frac{E_0}{k_BT}\right)}\right]$$

а теплоемкость в расчете на одну молекулу равна

$$C_V = \frac{\partial\langle E\rangle}{\partial T} = k_B\left[1 - \frac{\left(\frac{E_0}{k_BT}\right)^2}{\sinh^2\left(\frac{E_0}{k_BT}\right)}\right]$$

Условие применимости классического приближения сводится к пренебрежению квантованностью вращательного спектра, то есть

$$k_BT \gg \frac{\hbar^2}{md^2}.$$