Белорусский Государственный Университет, Минск
Физический факультет
WS 2011/2012
Я.М. Шнир

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

Задачи и упражнения 1

1. (5 pt) Формула Стирлинга. Рассмотрим выражение

$$N! = \Gamma(N+1) = \int\limits_0^\infty e^{-x} x^N dx \equiv \int\limits_0^\infty e^{-F(x)} dx \,.$$

   где гамма-функция определена как $\Gamma(N+1) = N\Gamma(N)$. Пусть функция $F(x)$ имеет минимум при $x = x_0$. Используя разложение в ряд Тейлора показать что

$$N! \approx \sqrt{2\pi N} N^N e^{-N}$$

   Обычно $N \sim 10^{23}$. Оценить корректность приближения Стирлинга при $N = 5$.

2. (5 pt) Давление атмосферного столба (барометрическая формула). Рассмотрим тонкий слой воздуха толщиной dz. Если слой покоится, то давление на него снизу должно быть уравновешено давлением сверху + вес слоя. Используя это условие и полагая что температура воздуха не зависит от высоты, определить зависимость атмосферного давления от высоты, выраженную через плотность воздуха.

3. (10 pt) Теорема Лиувилля для одномерного осциллятора. Показать, что фазовый объем классической системы описываемой Гамильтонианом

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2$$

   сохраняется.

4. (5 pt) Биметаллическая пластинка толщиной x не искривлена при температуре T. Чему равен радиус кривизны пластинки R при ее нагреве до температуры $T + \Delta T$? Коэффициенты линейного расширения металлов α_1, α_2 причем $\alpha_2 > \alpha_1$. Предположить что толщина каждого слоя $x/2$ и $x <\ll R$.

5. (10 pt) Найти число квантовых состояний частицы, заключенной в кубическом сосуде с ребром L и сравнить его с объемом классического фазового пространства.

Решения

1. Разложение в ряд Тейлора:

$$F(x) \approx F(x_0) + \frac{1}{2}F''(x_0)(x-x_0)^2 + \dots$$

В рассматриваемом случае $F(x) = x - N\ln x$. Условие экстремума в точке x_0 означает что $F'(x_0) = 1 - \frac{N}{x_0} = 0$, то есть $x_0 = N$ и $F(x_0) = N - N\ln N$. Далее,

$$F''(x_0) = \frac{N}{x_0^2} = \frac{1}{N}$$

и, вычисляяя гауссов интеграл

$$N! = \int\limits_0^\infty e^{-F(x)}dx \approx \int\limits_0^\infty e^{-F(x_0)-\frac{1}{2}F''(x_0)(x-x_0)^2+\dots}\ dx = \sqrt{\frac{2\pi}{F''(x_0)}}e^{-F(x_0)}$$

окончательно получим

$$N! \approx \sqrt{2\pi N}e^{N\ln N - N} = \sqrt{2\pi N}N^N e^{-N}$$

Если $N = 5$, то $N! = 120$. Формула Стирлинга дает $N! \approx 118.019$ что согласуется с точным ответом с ошибкой в 1.65%.

2. Условие равновесия записывается как

$$P(z+dz)\cdot S + Mg = P(z)\cdot S$$

где S - площадь слоя и M - его масса. Тогда

$$P(z+dz) - P(z) = -\frac{Mg}{S}$$

Поскольку $M = \rho S dz$, то

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g$$

Плотность воздуха

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{Nm}{V} = \left[N = \frac{PV}{k_BT}\right] = \frac{Pm}{k_BT}$$

и, следовательно

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{mg}{k_BT}P \quad \Longrightarrow \quad \frac{dP}{P} = -\frac{mg}{k_BT}dz; \qquad P(z) = P(0)e^{-\frac{mg}{kT}}$$

3. Элемент фазового объема системы определен как

$$d\lambda = \prod_{i=1}^{n} dp_i dq_i; \qquad d\lambda' = J(t,t')d\lambda$$

где якобиан динамической эволюции системы

$$J(t,t') = \begin{vmatrix} \frac{\partial p_1'}{\partial p_1} & \frac{\partial q_1'}{\partial p_1} & \frac{\partial p_2'}{\partial p_1} & \frac{\partial q_2'}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial q_n'}{\partial p_1} \\ \frac{\partial p_1'}{\partial q_1} & \frac{\partial q_1'}{\partial q_1} & \frac{\partial p_2'}{\partial q_1} & \frac{\partial q_2'}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial q_n'}{\partial q_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial p_1'}{\partial p_n} & \frac{\partial q_1'}{\partial p_n} & \frac{\partial p_2'}{\partial p_n} & \frac{\partial q_2'}{\partial p_n} & \dots & \frac{\partial q_n'}{\partial p_n} \\ \frac{\partial p_1'}{\partial q_n} & \frac{\partial q_1'}{\partial q_n} & \frac{\partial p_2'}{\partial q_n} & \frac{\partial q_2'}{\partial q_n} & \dots & \frac{\partial q_n'}{\partial q_n} \end{vmatrix}$$

Гамильтоновы уравнения движения

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}; \qquad \dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}$$

означают что для инфинитезимальных смещений в фазовом пространстве $t \to t' = t + dt$,

$$p_k' = p_k + \frac{\partial p_k}{\partial t}dt = p_k - \frac{\partial H}{\partial q_k}dt;$$

$$q_k' = q_k + \frac{\partial q_k}{\partial t}dt = q_k + \frac{\partial H}{\partial p_k}dt$$

В случае одномерного осциллятора

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2$$

и

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -m\omega^2 q; \qquad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial q} = \frac{p}{m}$$

Тогда

$$\frac{d}{dt}\left(p + im\omega q\right) = \dot{p} + im\omega\dot{q} = -m\omega^2 q + i\omega p = i\omega(p + im\omega q)$$

Интегрируя последнее соотношение, получим

$$(p' + im\omega q') = (p + im\omega)e^{i\omega(t'-t)}$$

Действительная и мнимая части этого соотношения определяют эволюцию системы в фазовом пространстве:

$$p' = p\cos\alpha - m\omega q \sin\alpha;$$

$$q' = \frac{p}{m\omega}\sin\alpha + q\cos\alpha$$

где $\alpha = \omega(t' - t)$. Окончательно тогда получим якобиан динамической эволюции системы

$$J(t,t') = \begin{vmatrix} \frac{\partial p'}{\partial p} & \frac{\partial q'}{\partial p} \\ \frac{\partial p'}{\partial q} & \frac{\partial q'}{\partial q} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \frac{\sin\alpha}{m\omega} \\ -m\omega\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

4. Предположим что начальная длина пластинки l_0. Тогда после подогрева

$$l_1 = l_0(1 + \alpha_1 \Delta T); \qquad l_2 = l_0(1 + \alpha_2 \Delta T)$$

С другой стороны, простая геометрия приводит к

$$l_2 = \left(R + \frac{x}{4}\right)\theta; \qquad l_1 = \left(R - \frac{x}{4}\right)\theta$$

где θ - угол искривления пластинки. Тогда

$$l_2 - l_1 = \frac{x\theta}{2} = \frac{x}{2}\frac{l_1 + l_2}{2R} = \frac{xl_0}{4R}\left(2 + (\alpha_1 + \alpha_2)\Delta T\right)$$

и следовательно,

$$\frac{xl_0}{4R}\left(2 + (\alpha_1 + \alpha_2)\Delta T\right) = l_0(\alpha_2 - \alpha_1)\Delta T$$

Окончательно тогда получим

$$R = \frac{x}{4}\frac{(\alpha_1 + \alpha_2)\Delta T + 2}{(\alpha_2 - \alpha_1)\Delta T}$$

5. Рассмотрим уравнение Шредингера описывающее частицу в прямоугольном ящике:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Psi(x,y,z) = E \quad (x,y,z)$$

Разделение переменных $\Psi(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z)$ в данном случае приводит к

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = E$$

или

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2X}{dx^2} = E_1 X; \quad -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2Y}{dy^2} = E_2 Y; \quad -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2Z}{dz^2} = E_3 Z; \quad E = E_1 + E_2 + E_3$$

Решая, например первое уравнение, мы приходим к общему решению

$$X(x) = A\sin\left(\sqrt{2mE_1}\frac{x}{\hbar}\right) + B\cos\left(\sqrt{2mE_1}\frac{x}{\hbar}\right)$$

Граничные условия $X(0) = X(L) = 0$ означают что $B = 0$ и $\sqrt{2mE_1}\frac{L}{\hbar} = \pi n_1, \quad n_1 = 1, 2\ldots$ то есть

$$E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2 n_1^2}{2mL^2}$$

и т.д. Следовательно,

$$E = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}\left(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2\right); \qquad \Psi(x,y,z) = A\sin\left(\frac{n_1\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{n_2\pi y}{L}\right)\sin\left(\frac{n_3\pi z}{L}\right).$$

и число состояний определяется условием

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 \leq \frac{2mL^2}{\pi^2\hbar^2}E$$

Это уравнение определяет сферу радиуса $\sqrt{2mE}\frac{L}{\pi\hbar}$, поскольку целые числа n_1, n_2, n_3 положительны, число состояний равняется 1/8 объема этой сферы $(2\pi\hbar = h)$:

$$\Omega_0(E) = \frac{1}{8}\cdot\frac{4\pi}{3}\left(\frac{2mEL^2}{\pi^2\hbar^2}\right)^{3/2} = \frac{4\pi}{3}\frac{V}{h^3}(2mE)^{3/2}$$

где $V = L^3$. Плотность состояний есть

$$\frac{d\Omega_0}{dE} = 2\pi\frac{V}{h^3}(2m)^{3/2}E^{1/2}$$

В случае классического фазового пространства

$$\Gamma(E) = \int\limits_{p^2\leq 2mE} dpdq = V\int dp = V\frac{4\pi}{3}(2mE)^{3/2}$$