

Взаимодействующие поля: скалярная электродинамика

$$L_A = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x)$$

Локальная U(1) инвариантность

$$L_\phi = (\partial_\mu\phi)^*(\partial^\mu\phi) - m^2\phi^*\phi$$

$$\phi(x) \rightarrow e^{ie\alpha}\phi(x), \quad \phi^*(x) \rightarrow e^{-ie\alpha}\phi^*(x)$$

Глобальная U(1) инвариантность

- Концепция калибровочной инвариантности: перейти от обычной производной скалярного поля $\partial_\mu\phi$ к ковариантной производной

$$D_\mu\phi \equiv \partial_\mu\phi - ieA_\mu\phi \rightarrow e^{ie\alpha(x)}D_\mu\phi$$

- Калибровочно-инвариантный лагранжиан:

$$L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + (D_\mu\phi)^*(D^\mu\phi) - m^2\phi^*\phi$$

- Уравнения поля:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial^\mu F_{\mu\nu} = ej^\nu, \quad j^\nu = -i[\phi^*D^\nu\phi - (D^\nu\phi)^*\phi] \\ D_\mu D^\nu\phi + m^2\phi = 0 \end{array} \right.$$

- **Задача:** проверить, что ток j_μ сохраняется

● **Задача:** показать, что $[D_\mu, D_\nu]\phi \equiv (D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu)\phi = ieF_{\mu\nu}\phi$

● **Сохраняющийся нетеровский заряд:**

$$Q = \int d^3x j_0 = i \int d^3x \{(\partial_0\phi^*)\phi - \phi^*(\partial_0\phi) + 2ieA_0\phi^*\phi\}$$

● **Действие скалярной электродинамики в калибровке Лоренца (Евклид):**

$$S[A, \phi, \phi^*] = \int d^4x \frac{1}{2} \left\{ A^\mu \left[\delta_{\mu\nu} \square + \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) \partial_\mu \partial_\nu \right] A^\nu + \phi^* (\square + m^2) \phi \right\}$$

$$+ \int d^4x \{ ieA^\mu (\phi^* (\partial_\mu \phi) - (\partial_\mu \phi^*) \phi) + e^2 A_\mu^2 |\phi|^2 \} \leftarrow L_{int}$$

● **Уравнения поля (калибровка Феймана):** $(-\partial_\mu^2 + m^2) \phi(x) = J_s(x); \quad \square A_\mu(x) = J_\mu^{em}(x)$

● **Флуктуации полей над вакуумом:** $\phi = \phi^{(0)} + \delta\phi, A_\mu = A_\mu^{(0)} + \delta a_\mu \quad \phi^{(0)} = A_\mu^{(0)} = \text{const}$

● **Свободный производящий функционал :**

$$Z_0[J_s^*, J_s, J_\mu^{em}] = \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\phi^* \mathcal{D}\phi e^{-S[A, \phi^*, \phi] + J_s^* \phi + \phi^* J_s + J_\mu^{em} A^\mu} =$$

$$N e^{\int d^4x d^4x' J_s^*(x') G(x-x') J_s(x) + \frac{1}{2} J_\mu^{em} G_{\mu\nu}(x-x') J_\nu^{em}} = N e^{J_s^* \star G \star J_s + J_\mu^{em} \star G_{\mu\nu} \star J_\nu^{em}}$$

● **Полный производящий функционал :**

$$Z[J_s^*, J_s, J_\mu^{em}] = \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\phi^* \mathcal{D}\phi Z_0 \left[e^{-\int d^4x \{ieA_\mu(\phi^*(\partial_\mu\phi) - (\partial_\mu\phi^*)\phi) + e^2 A_\mu^2 |\phi|^2\}} \right]$$

Метод: пертурбативное разложение по калибровочной константе связи e :

$$\begin{aligned} & \exp \left\{ \int d^4x ieA^\mu [(\phi^*(\partial_\mu\phi) - (\partial_\mu\phi^*)\phi)] \right\} \times \exp \left\{ -e^2 A_\mu^2 |\phi|^2 \right\} = \\ & \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ie)^n}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n A_\mu(x_1) [\phi^*(x_1)(\partial_\mu\phi(x_1)) - (\partial_\mu\phi^*(x_1))\phi(x_1)] \dots \right. \\ & \quad \left. \dots A_\mu(x_n) [\phi^*(x_n)(\partial_\mu\phi(x_n)) - (\partial_\mu\phi^*(x_n))\phi(x_n)] \right) \\ & \times \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{2n}}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n A_\mu^2(x_1) \phi^*(x_1)\phi(x_1) \dots A_\mu^2(x_n) \phi^*(x_n)\phi(x_n) \right) \approx \end{aligned}$$

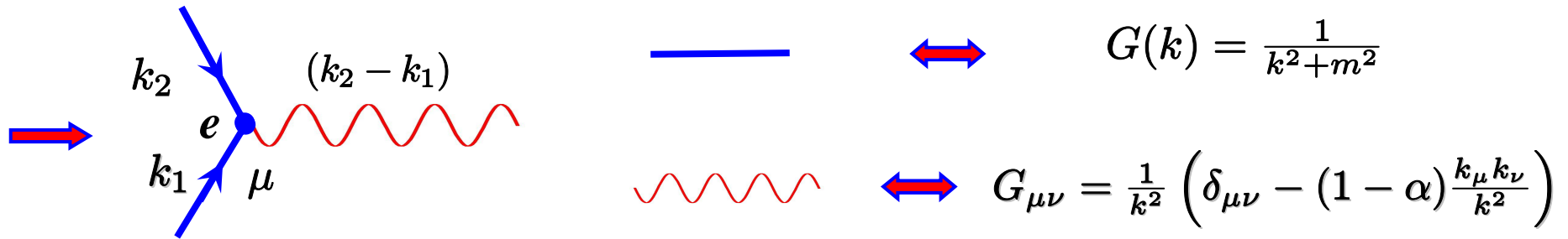
$$\approx \left(1 + ie \int d^4x \{A_\mu(x) [\phi^*(x)(\partial_\mu\phi(x)) - (\partial_\mu\phi^*(x))\phi(x)] + \dots\} \right) \left(1 + e^2 \int d^4x A_\mu^2(x) |\phi(x)|^2 + \dots \right)$$

Замечание: в первом порядка по e :

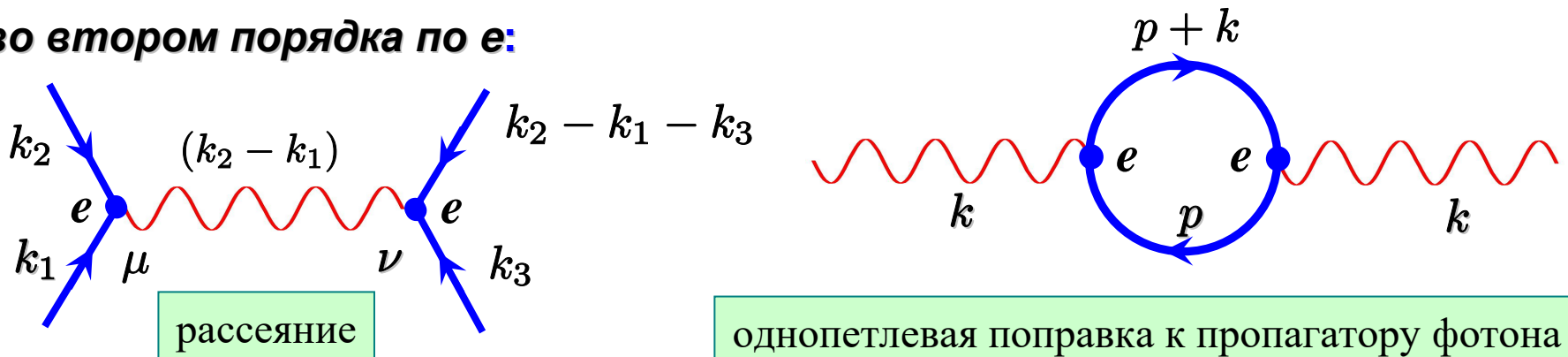
$$e^{-\int d^4x \{ieA_\mu(\phi^*(\partial_\mu\phi) - (\partial_\mu\phi^*)\phi) + e^2 A_\mu^2 |\phi|^2\}} \approx 1 + ie \int d^4x \{A_\mu(x) [\phi^*(x)(\partial_\mu\phi(x)) - (\partial_\mu\phi^*(x))\phi(x)] + \dots\}$$

• **Преобразование Фурье:**

$$\begin{aligned}
 & ie \int d^4x \{ A_\mu(x) [\phi^*(x) (\partial_\mu \phi(x)) - (\partial_\mu \phi^*(x)) \phi(x)] = \\
 & = -e \int d^4x \int \frac{d^4k}{2\pi^4} \int \frac{d^4k_1}{2\pi^4} \int \frac{d^4k_2}{2\pi^4} A_\mu(k) \phi^*(k_1) \phi(k_2) (k_2^\mu - k_1^\mu) e^{ix(k+k_2-k_1)} = \\
 & = -e \int \frac{d^4k}{2\pi^4} \int \frac{d^4k_1}{2\pi^4} \int \frac{d^4k_2}{2\pi^4} A_\mu(k) \phi^*(k_1) \phi(k_2) (k_2^\mu - k_1^\mu) \delta(k+k_2-k_1) = \\
 & = -e \int \frac{d^4k_1}{2\pi^4} \int \frac{d^4k_2}{2\pi^4} A_\mu(k_1 - k_2) \phi^*(k_1) \phi(k_2) (k_2^\mu - k_1^\mu)
 \end{aligned}$$

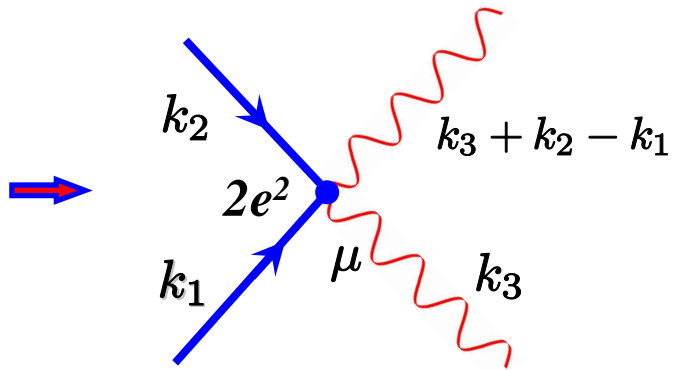


• **во втором порядке по e :**

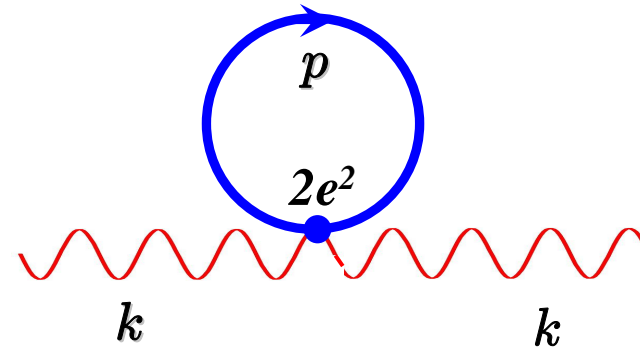


• во втором порядке по e :

$$A_\mu^2(x)\phi^*(x)\phi(x) = \frac{\delta}{\delta J_\mu^{em}(x)} \frac{\delta}{J_\mu^{em}(x)} \frac{\delta}{\delta J_s(x)} \frac{\delta}{\delta J_s^*(x)} \left(e \int d^4x' A_\mu(x') J_\mu(x') + \phi^*(x') J_s(x') + J_s^*(x') \phi(x') \right) \Big|_{J=0}$$



аннигиляция в 2 фотона



однопетлевая поправка к пропагатору фотона

Задача: вычислите вклад «рыбы» и «головастика» в фотонный пропагатор (поляризация вакуума):

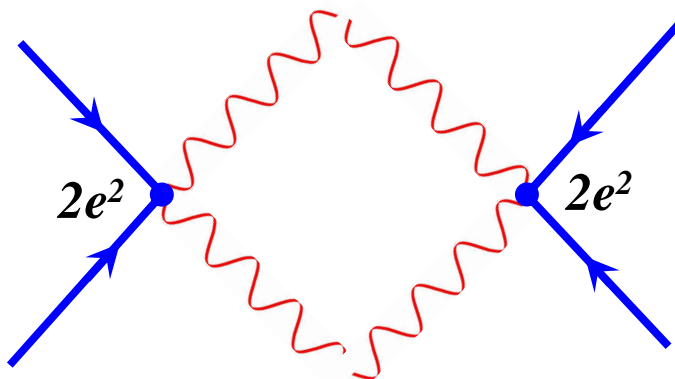
$$G_{\mu\nu}(k) = \text{diagram 1} + \text{diagram 2} + \text{diagram 3}$$

The equation shows the photon propagator $G_{\mu\nu}(k)$ as a sum of three diagrams. The first is a simple photon propagator with indices μ and ν and momentum k . The second is a 'fish' diagram with a fermion loop between two vertices on the photon line. The third is a 'tadpole' diagram with a fermion loop attached to a single vertex on the photon line.

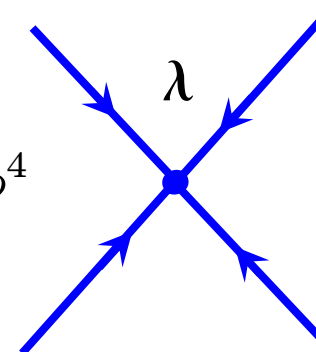
• **Подсказка:** вклад «рыбы» - $e^2 \int \frac{d^4p}{2\pi^4} \frac{2p_\mu + k_\mu}{p^2 + m^2} \frac{2p_\nu + k_\nu}{(p+k)^2 + m^2}$

вклад «головастика» - $2e^2 \int \frac{d^4p}{2\pi^4} \frac{\delta_{\mu\nu}}{p^2 + m^2}$

• ...и еще одна диаграмма высшего порядка:



поправка к вершине $\lambda\phi^4$



• Эффективный потенциал теории $\lambda\phi^4$ включает поправки $\sim e^4$

• Действие (Евклид):

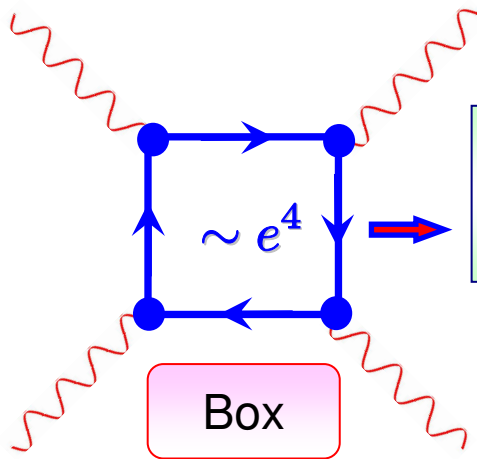
$$S = \int d^4x \left\{ \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + (D_\mu\phi)^*(D_\mu\phi) + m^2(\phi^*\phi) + \frac{\lambda}{3!}(\phi^*\phi)^2 \right\}$$

$$D_\mu\phi = \partial_\mu\phi - ieA_\mu\phi$$

• Производящий функционал:

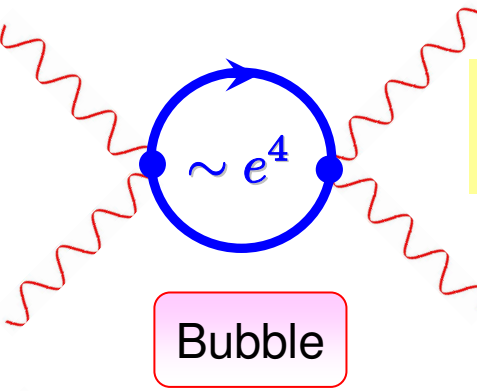
$$Z = \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\phi^* \mathcal{D}\phi \delta[\partial_\mu A_\mu] \det(-\square) e^{-S[A, \phi^*, \phi]}$$

• ...и еще три диаграммы высшего порядка для фотонов:



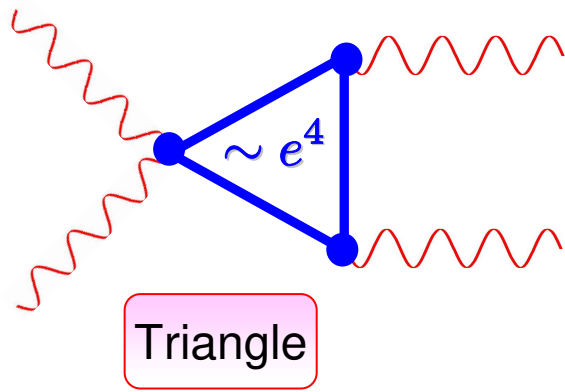
Рассеяние света на свете
H. Euler & W. Heisenberg
 1936

$$\sum_i k_i = 0, \quad k_i^2 = 0$$



• **Эффективный лагранжиан скалярной электродинамики включает нелинейные поправки:**

$$L_{eff} = \frac{1}{2}(E^2 - B^2) + \frac{2e^4}{45m^4} [(E^2 - B^2)^2 + 7(E \cdot B)^2] + \dots$$



Фолгерунген аус дер Диракскен Theorie дес Позитронс.

Von W. Heisenberg und H. Euler in Leipzig.

Mit 2 Abbildungen. (Eingegangen am 22. Dezember 1935.)

Aus der Diracschen Theorie des Positrons folgt, da jedes elektromagnetische Feld zur Paarerzeugung neigt, eine Abänderung der Maxwell'schen Gleichungen des Vakuums. Diese Abänderungen werden für den speziellen Fall berechnet, in dem keine wirklichen Elektronen und Positronen vorhanden sind, und in dem sich das Feld aus Strahlen der Compton-Wellenlänge nur wenig ändert. Es ergibt sich für das Feld eine Lagrange-Funktion:

$$L = \frac{1}{8} (E^2 - B^2) + \frac{e^2}{4\pi} \int \frac{d^3k}{k} \left(i \gamma^4 (\mathcal{E} \mathcal{B}) - \frac{\cos \left(\frac{e}{|\mathcal{E}_k|} \sqrt{E^2 - B^2 + 2i(\mathcal{E} \mathcal{B})} \right) + \cos \left(\frac{e}{|\mathcal{E}_k|} \sqrt{E^2 - B^2 + 2i(\mathcal{E} \mathcal{B})} \right) - \cos \left(\frac{e}{|\mathcal{E}_k|} \sqrt{E^2 - B^2 + 2i(\mathcal{E} \mathcal{B})} \right) - \cos \left(\frac{e}{|\mathcal{E}_k|} \sqrt{E^2 - B^2 + 2i(\mathcal{E} \mathcal{B})} \right)}{+ |\mathcal{E}_k|^2 + \frac{e^2}{8} (E^2 - B^2)} \right)$$

(\mathcal{E}, \mathcal{B} Kraft auf das Elektron.
 $|\mathcal{E}_k| = \frac{m^2 c^2}{e R} = \frac{1}{137} \frac{m c^2}{|e| \hbar / m c R} = \text{„Kritische Feldstärke“}$)

Diese Entwicklungsglieder für (gegen $|\mathcal{E}_k|$) kleine Felder beschreiben Prozesse der Streuung von Licht an Licht, deren einfachstes bereits aus einer Störungsrechnung bekannt ist. Für große Felder sind die hier abgeleiteten Feldgleichungen von den Maxwell'schen sehr verschieden. Sie werden mit den von Born vorgeschlagenen verglichen.

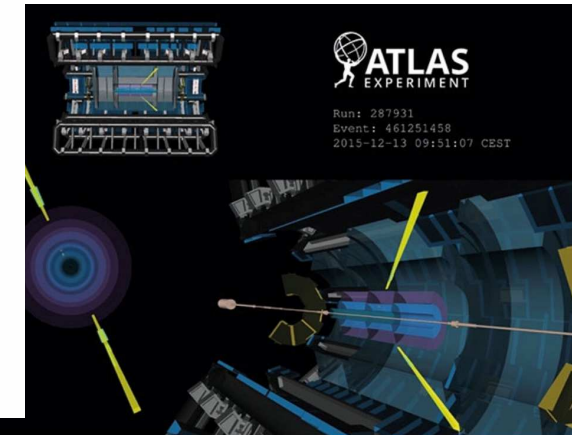
ARTICLES
 PUBLISHED ONLINE 14 AUGUST 2017 | DOI: 10.1038/NPHYS4208
 nature physics
 OPEN

Evidence for light-by-light scattering in heavy-ion collisions with the ATLAS detector at the LHC

ATLAS Collaboration[†]

Light-by-light scattering ($\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma$) is a quantum-mechanical process that is forbidden in the classical theory of electrodynamics. This reaction is accessible at the Large Hadron Collider thanks to the large electromagnetic field strengths generated by ultra-relativistic colliding lead ions. Using $480 \mu\text{b}^{-1}$ of lead-lead collision data recorded at a centre-of-mass energy per nucleon pair of 5.02 TeV by the ATLAS detector, here we report evidence for light-by-light scattering. A total of 13 candidate events were observed with an expected background of 2.6 ± 0.7 events. After background subtraction and analysis corrections, the fiducial cross-section of the process $\text{Pb} + \text{Pb} (\gamma\gamma) \rightarrow \text{Pb}^{2+} + \text{Pb}^{2+} \gamma\gamma$, for photon transverse energy $E_T > 3$ GeV, photon absolute pseudorapidity $|\eta| < 2.4$, diphoton invariant mass greater than 6 GeV, diphoton transverse momentum lower than 2 GeV and diphoton acoplanarity below 0.01, is measured to be 70 ± 24 (stat.) ± 17 (syst.) nb, which is in agreement with the standard model predictions.

One of the key features of Maxwell's equations is their linearity in both the sources and the fields, from which follows the superposition principle. This forbids effects such as light-by-light (LbL) scattering, $\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma$, which is a purely quantum-mechanical process. It was realized in the early history of quantum electrodynamics (QED) that LbL scattering is related to relativistic charged particles can be described by the equivalent photon approximation (EPA)^{1,2}, which is schematically shown in Fig. 1b. The EM fields produced by the colliding Pb nuclei can be treated as a beam of quasi-real photons with a small virtuality of $Q^2 < 1/R^2$, where R is the radius of the charge distribution and so $Q^2 < 10^{-3} \text{ GeV}^2$. Then, the cross-section for the reaction



Тождества Уорда-Такахаша

• Производящий функционал скалярной теории:

$$S[\phi, \phi^*] = \int d^4x [(\partial_\mu \phi)^*(\partial^\mu \phi) + m^2 \phi^* \phi]$$

$$Z[J, J^*] = N \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\phi^* e^{-S[\phi, \phi^*] + J^* \phi + J \phi^*}$$

Глобальная U(1) инвариантность действия: $\phi(x) \rightarrow e^{ie\alpha} \phi(x)$, $\phi^*(x) \rightarrow e^{-ie\alpha} \phi^*(x)$

$$\delta_\epsilon S[\phi, \phi^*] + \delta_\epsilon \left(\int d^4x (J^* \phi + J \phi^*) \right) = \int d^4x (J^* \delta_\epsilon \phi + J \delta_\epsilon \phi^*) = -ie \int d^4x (J^* \phi - J \phi^*)$$

$$\Rightarrow \delta_\epsilon Z[J, J^*] = N \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\phi^* \left[-ie \int d^4x (J^* \phi - J \phi^*) \right] e^{-S[\phi, \phi^*] + J^* \phi + J \phi^*} = 0$$

Напомним:

$$\begin{cases} \frac{\delta Z[J, J^*]}{\delta J(x)} = N \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\phi^* \phi^*(x) e^{-S[\phi, \phi^*] + J^* \phi + J \phi^*} \\ \frac{\delta Z[J, J^*]}{\delta J^*(x)} = N \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\phi^* \phi(x) e^{-S[\phi, \phi^*] + J^* \phi + J \phi^*} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int d^4x \left(J^*(x) \frac{\delta}{\delta J^*(x)} - J(x) \frac{\delta}{\delta J(x)} \right) Z[J, J^*] = \int d^4x \left(J^*(x) \frac{\delta W}{\delta J^*(x)} - J(x) \frac{\delta W}{\delta J(x)} \right) = 0$$

$$\left. \begin{aligned} \langle \phi(x) \rangle &= \frac{\delta W}{\delta J^*(x)}, & \langle \phi^*(x) \rangle &= \frac{\delta W}{\delta J(x)} \\ \Gamma[\langle \varphi \rangle] &= J \star \langle \varphi \rangle + W[J] \end{aligned} \right\}$$



$$\langle \phi \rangle \star \frac{\delta \Gamma}{\delta \langle \phi \rangle} - \langle \phi^* \rangle \star \frac{\delta \Gamma}{\delta \langle \phi^* \rangle} = 0$$

Скалярная КЭД: Эффект Коулмена-Вайнберга

Унитарная калибровка: $\phi \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\rho(x)e^{i\theta(x)}$, $A_\mu(x) \rightarrow \tilde{A}_\mu = A_\mu(x) + \frac{1}{e}\partial_\mu\theta(x)$

$$Z \rightarrow Z = \int \mathcal{D}\tilde{A}_\rho \mathcal{D}\theta \rho \delta[\partial_\mu \tilde{A}_\mu - \frac{1}{e}\square\theta] \underline{\det(-\square)} e^{-S[\tilde{A}, \rho]}$$

Замечание 1: скалярное поле $\rho(x)$ - действительное

$$\Rightarrow S = \int d^4x \left\{ \frac{1}{4}\tilde{F}_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\rho)^2 + \frac{1}{2}m^2\rho^2 + \frac{1}{2}e^2\phi^2\tilde{A}_\mu^2 + \frac{\lambda}{4!}\rho^4 \right\}$$

Замечание 2: действие не зависит от переменной $\theta(x)$ – соответствующая калибровочная степень свободы в мере интеграла Z может быть отинтегрирована

Напомним:
Вставка единицы $1 = \int \mathcal{D}\theta \delta(G(\tilde{A})) \det\left(\frac{\delta G(\tilde{A})}{\delta\theta}\right) \Rightarrow \int \mathcal{D}\theta \delta[\partial_\mu \tilde{A}_\mu - \frac{1}{e}\square\theta] = \underline{\frac{e}{\det(-\square)}}$

Вклад духов сокращается

Замечание 3: векторное поле $\tilde{A}(x)$ - массивное поле Прока (3 степени свободы)

$$L_{\tilde{A}} = \frac{1}{4}\tilde{F}_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2}e^2\rho^2\tilde{A}_\mu^2 \Rightarrow S = \frac{1}{2} \int d^4x A_\mu \{ (-\delta_{\mu\nu} \square + e^2\rho^2) - \partial_\mu\partial_\nu \} A_\nu$$

• **Пропагатор поля $\tilde{A}(x)$:** $\text{Tr } G_{\mu\nu} = \int d^4x \left[3 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 + e^2 \langle \rho \rangle^2} \right] + \frac{\delta(0)}{e^2 \langle \rho \rangle^2}$

• **Интегрирование по калибровочному полю:**

$$Z = \int \mathcal{D}\rho(e\rho) \left(\int \mathcal{D}\tilde{A} e^{-\int d^4x \frac{1}{2} \{ \tilde{A}^\mu [\delta_{\mu\nu}(-\square + e^2 \rho^2) + \partial_\mu \partial_\nu] \tilde{A}^\nu \}} \right) e^{-\int d^4x \{ \rho(-\square + m^2)\rho + \frac{\lambda}{4!} \rho^4 \}}$$

$$= \int \mathcal{D}\rho(e\rho) \det^{-1/2} [\delta_{\mu\nu}(-\square + e^2 \rho^2) + \partial_\mu \partial_\nu] e^{-\int d^4x \{ \rho(-\square + m^2)\rho + \frac{\lambda}{4!} \rho^4 \}} = \int \mathcal{D}\rho e^{-S_{eff}},$$

$$S_{eff} = \frac{1}{2} \ln \det [\delta_{\mu\nu}(-\square + e^2 \rho^2) + \partial_\mu \partial_\nu] - \frac{1}{2} \delta(0) \int d^4x \ln e^2 \rho^2 + \int d^4x \left\{ \rho(-\square + m^2)\rho + \frac{\lambda}{4!} \rho^4 \right\}$$

• **Вакуум:** $\rho = \phi_0 = \text{const}$

Минимум нетривиален, если $\lambda \sim e^4$

Эффективный потенциал
скалярной электродинамики
($m=0$)

$$U_{eff} = \frac{\lambda}{4!} \rho^4 + \frac{1}{2^8 \pi^2} \left(\frac{5}{18} \lambda^2 + 3e^4 \right) \rho^4 \left(\ln \frac{\rho^2}{M^2} - \frac{25}{6} \right)$$

• **Минимум потенциала:**

$$U'_{eff} = \rho^3 \left[\frac{\lambda}{6} + \frac{e^4}{16\pi^2} \left(3 \ln \frac{\rho^2}{M^2} - 11 \right) \right] = 0$$

→ На масштабе $M = \langle \rho \rangle$, $\lambda = \frac{33e^4}{8\pi^2}$

$$U_{eff} = \frac{3e^4}{64\pi^2} \rho^4 \left(\ln \frac{\rho^2}{\langle \rho \rangle^2} - \frac{1}{2} \right)$$

Скалярная КЭД: Вихри Абрикосова-Нильсена-Олесена

● Абелева модель Хиггса:

$$L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(D_\mu\phi)^*(D^\mu\phi) - V(|\phi|)$$

$$D_\mu\phi \equiv \partial_\mu\phi - ieA_\mu\phi, \quad \phi = \phi_1 + i\phi_2$$

$$V(|\phi|) = \lambda(|\phi|^2 - a^2)^2$$

● Уравнения поля:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial^\mu F_{\mu\nu} = ej^\nu, \\ D_\mu D^\nu \phi = -\frac{\delta V}{\delta \phi^*} \end{array} \right. \quad j^\nu = -i[\phi^* D^\nu \phi - (D^\nu \phi)^* \phi]$$

● Тривиальный вакуум: $|\phi| = a \quad A_i = 0$

● Сингулярное решение (флюксон): $\phi = ae^{in\varphi}, \quad A_i = n\partial_i\varphi, \quad n \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow \varepsilon_{ij}F_{ij} = 4\pi n\delta^{(2)}(r), \quad \Rightarrow \frac{1}{4\pi} \oint \varepsilon_{ij}F_{ij} = n$$

● **Замечание:** сингулярное решение генерируется из вакуума калибровочным преобразованием $U = e^{in\varphi}, \quad A_k = iU\partial_k U^{-1}$

$$D_\mu D^\mu \phi = -\frac{\delta V}{\delta \phi^*}$$

Чистая калибровка

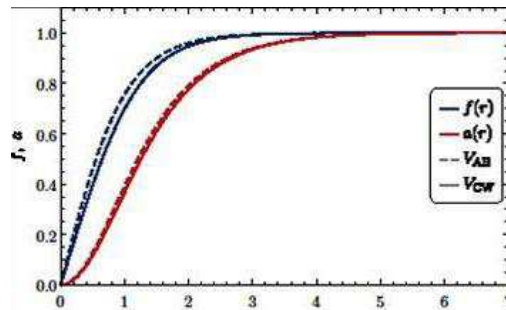
● Нетривиальное решение Нильсена-Олесена:

$$\phi = f(r)e^{in\varphi}, \quad A_i = -ig(r)e^{-in\varphi}\partial_i e^{in\varphi}$$

Регулярность

Вакуум

$$f(0) = g(0) = 0, \quad f(\infty) = a, \quad g(\infty) = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4\pi} \oint \varepsilon_{ij} F_{ij} = n$$



Задача: получить эти решения численно и найти пространственные распределения магнитного поля и полной энергии системы

Подсказка: уравнения поля при подстановке анзаца сводятся к системе 2 уравнений ($n=1$)

$$f'' + \frac{f'}{r} - \frac{fg^2}{r^2} + 2\lambda a^2 f (f^2 - 1) = 0; \quad g'' - \frac{g'}{r} + \frac{e^2 a^2}{2\lambda} f^2 g = 0$$

Асимптотическое поведение:

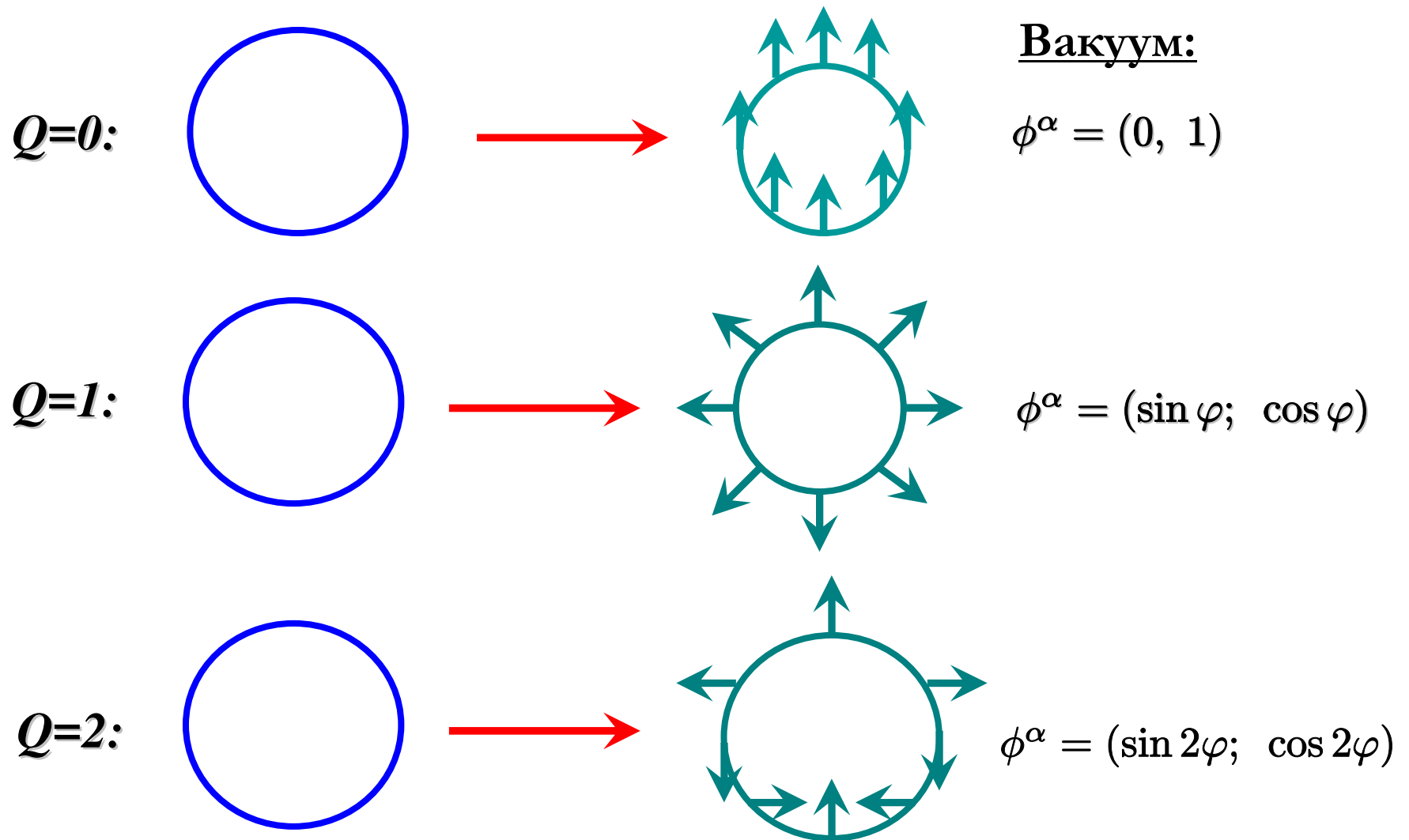
$$r \rightarrow 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} f \sim r \\ g \sim O(r^2) \end{array} \right.$$

$$r \rightarrow \infty \quad \left\{ \begin{array}{l} f \sim a + O(e^{-m_s r}) \\ g \sim 1 + r e^{-m_v r} \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} m_s = 2a\sqrt{2\lambda} \\ m_v = ea \end{array}$$

Вихрь – топологический солитон ($S^1 \rightarrow S^1$)

Топологический заряд (индекс отображения окружности на окружность):



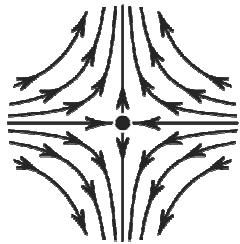
Индекс векторных полей

Рассмотрим векторное поле V на пространств \mathbb{R}^2

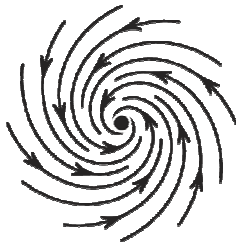
$$V = v_1(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + v_2(x, y) \frac{\partial}{\partial y}$$

Особая точка векторного поля: $V(x_0) = 0$

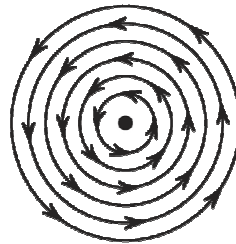
Типы особых точек:



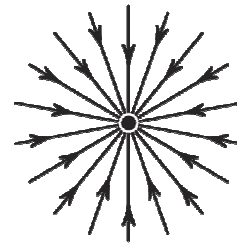
saddle



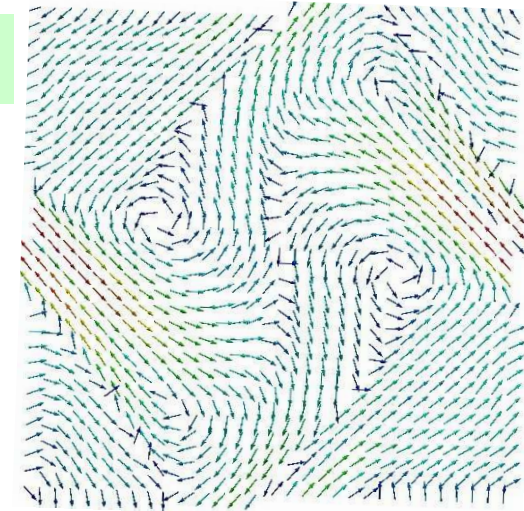
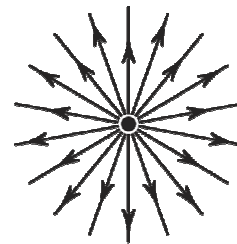
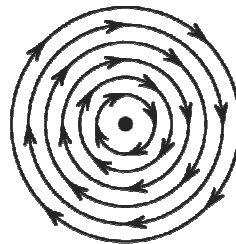
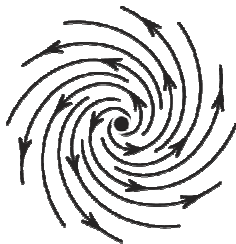
focus



center



node



• **Индекс векторного поля:**


$$f = \frac{V}{|V|}, \quad f : S^1 \mapsto S^1$$

$$i_{x_0} = \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} d\alpha \frac{v_1 d_\alpha v_2 - v_2 d_\alpha v_1}{v_1^2 + v_2^2}$$

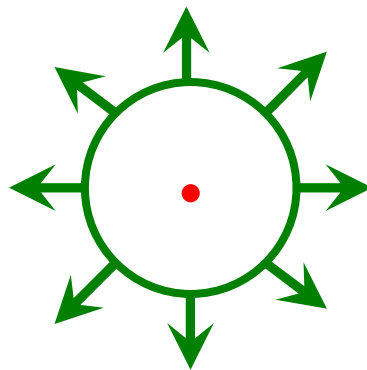
Домашнее задание: определить, каким векторным полям соответствуют эти особые точки

$$i_{x_0} = \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} d\alpha \frac{v_1 d_\alpha v_2 - v_2 d_\alpha v_1}{v_1^2 + v_2^2}$$

Индекс векторного поля – это число намотки при обходе вокруг особой точки

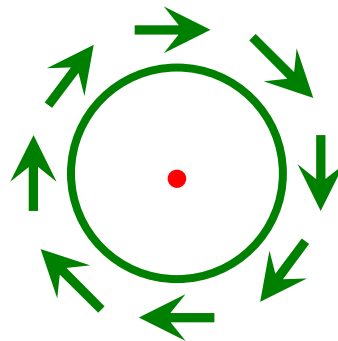
 $i(x_0) = 1$

$$f = (\cos \alpha, \sin \alpha)$$



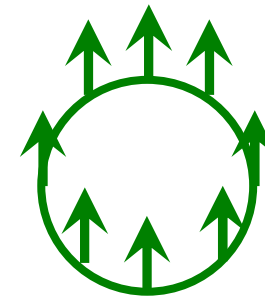
 $i(x_0) = 1$

$$f = (\sin \alpha, -\cos \alpha)$$



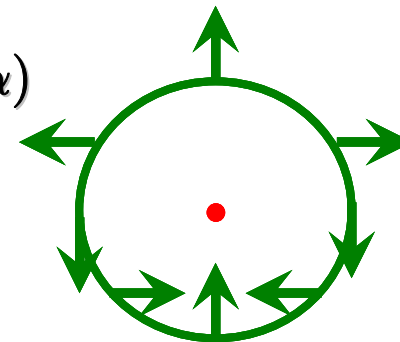
 $i(x_0) = 0$


$$f = (0, 1)$$



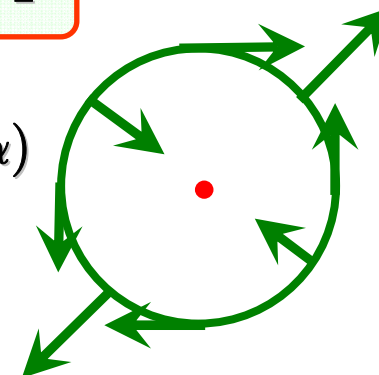
 $i(x_0) = 2$

$$f = (\cos 2\alpha, \sin 2\alpha)$$



 $i(x_0) = -1$

$$f = (\sin \alpha, \cos \alpha)$$



Вакуум: $D_\mu \phi = \partial_\mu \phi - ieA_\mu \phi = 0 \quad \rightarrow \quad A_\mu \xrightarrow{r \rightarrow \infty} -\frac{i}{e} \frac{\partial_\mu \phi}{\phi_\infty}, \quad \phi \xrightarrow{r \rightarrow \infty} e^{in\varphi}$

● Поле вихря задает топологическое отображение окружности на окружность

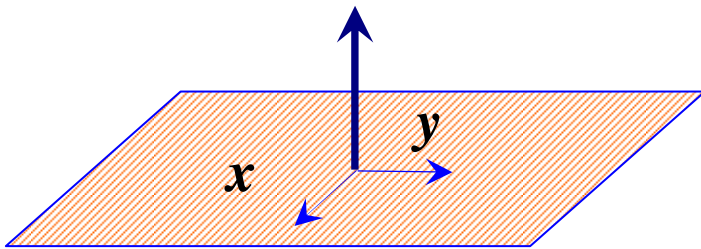
● **Топологический ток:** $j_\mu = \frac{1}{2\pi i} \varepsilon_{\mu\nu\rho} \partial^\nu \hat{\phi}^* \partial^\rho \hat{\phi}, \quad \partial^\mu j_\mu \equiv 0, \quad \hat{\phi} = \phi/|\phi|$

$$j_0 = \frac{1}{2\pi i} \varepsilon_{nm} \partial_n \hat{\phi}^* \partial_m \hat{\phi} = \frac{1}{2\pi} \varepsilon_{nm} \varepsilon^{ab} (\partial_n \hat{\phi}^a) (\partial_m \hat{\phi}^b), \quad \phi^a = (\phi_1, \phi_2)$$

Топологический заряд (индекс отображения):

$$\begin{aligned} Q &= \int_{R^2} d^2x j_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{R^2} d^2x \varepsilon_{nm} \varepsilon^{ab} (\partial_n \hat{\phi}^a) (\partial_m \hat{\phi}^b) = \frac{1}{2\pi} \int_{R^2} d^2x \varepsilon_{nm} \varepsilon^{ab} \partial_n (\hat{\phi}^a \partial_m \hat{\phi}^b) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \varepsilon_{ab} \frac{d\hat{\phi}^a}{d\varphi} \hat{\phi}^b = \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{1}{\phi_\infty} \frac{d\phi_\infty}{d\varphi} = n = \frac{e}{2\pi} \oint_{S^1} A_k dx^k = \frac{e}{2\pi} \int_{R^2} d^2x B_k \cdot S_k = \frac{e}{2\pi} \Phi \end{aligned}$$

$$B_k = (0, 0, B(x, y))$$



Поток магнитного поля квантован

● **Энергия вихря:**

$$E = \int_{R^2} d^2x \left\{ \frac{1}{2} B^2 + \frac{1}{2} |D_k \phi|^2 + \lambda (|\phi|^2 - a^2)^2 \right\}$$

Масштабные преобразования: $\phi \rightarrow a\phi, \quad A_k \rightarrow aA_k, \quad x \rightarrow x/ea$

Действительные компоненты: $\phi = \phi^1 + i\phi^2, \phi^a = (\phi^1, \phi^2), \quad D_i^{ab} = \delta^{ab}\partial_i + \varepsilon^{ab}A_i$

$$\begin{aligned}
 E \rightarrow E' &= a^2 \int_{R^2} d^2x' \left\{ \frac{1}{4} F_{ij}^2 + \frac{1}{2} (D_k \phi^a)(D_k \phi^a) + \frac{\lambda}{e^2} (\phi^a \phi^a - 1)^2 \right\} = \\
 &= a^2 \int_{R^2} d^2x' \left\{ \frac{1}{4} \left(F_{ij} \pm \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} (\phi^a \phi^a - 1)^2 \right)^2 + \frac{1}{4} (D_i \phi^a \mp \varepsilon^{ab} \varepsilon_{ij} D_j \phi^b)^2 \right\} + \\
 &+ a^2 \int_{R^2} d^2x' \left\{ \left(\frac{\lambda}{e^2} - \frac{1}{8} \right) (\phi^a \phi^a - 1)^2 \pm \frac{1}{4} \left(\varepsilon_{ij} F_{ij} \mp \frac{1}{2} \varepsilon^{ab} \varepsilon_{ij} \partial_i (\phi^a D_j \phi^b) \right) \right\} \\
 &\hspace{15em} (D_i \phi^b = 0 \text{ at } S_1) \\
 &= a^2 \int_{R^2} d^2x' \left\{ \frac{1}{4} \left(F_{ij} \pm \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} (\phi^a \phi^a - 1)^2 \right)^2 + \frac{1}{4} (D_i \phi^a \mp \varepsilon^{ab} \varepsilon_{ij} D_j \phi^b)^2 + \left(\frac{\lambda}{e^2} - \frac{1}{8} \right) (\phi^a \phi^a - 1)^2 \right\}
 \end{aligned}$$

$\pm a^2 \pi Q \rightarrow$

Граница Богомольного: $E \geq a^2 \pi |Q|$

Энергия минимальна, если

$$\begin{cases} F_{ij} = \mp \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} (\phi^a \phi^a - 1)^2 \\ D_i \phi^a = \pm \varepsilon^{ab} \varepsilon_{ij} D_j \phi^b \end{cases}$$

+

$$\frac{8\lambda}{e^2} = \frac{m_s^2}{m_v^2} = 1$$

$$\frac{8\lambda}{e^2} = \frac{m_s^2}{m_v^2} = 1$$



Критическое условие, вихри не взаимодействуют

$$m_v > m_s, \quad \frac{8\lambda}{e^2} < 1, \quad E < 0$$



Вихри притягиваются - сверхпроводник первого рода

$$m_v < m_s, \quad \frac{8\lambda}{e^2} > 1, \quad E > 0$$

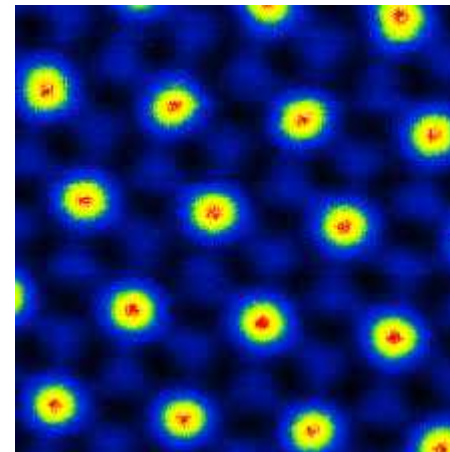
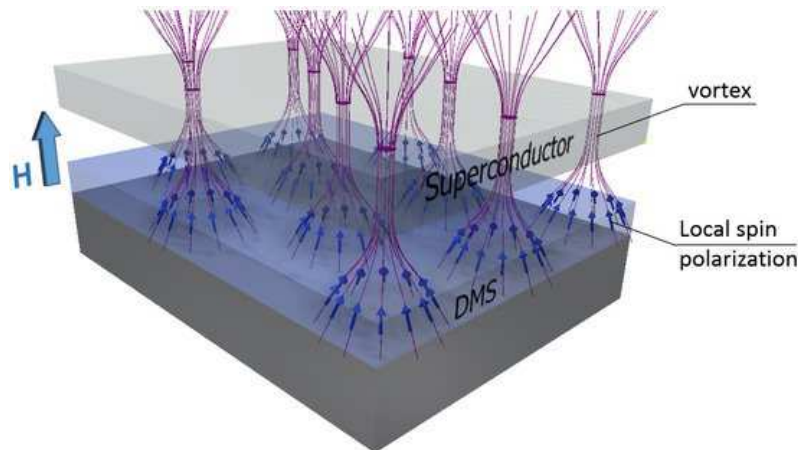


Вихри отталкиваются - сверхпроводник второго рода

Характерные параметры сверхпроводника:

$L = 1/m_v$ - лондоновская глубина проникновения

$\xi = 1/m_s$ - длина когерентности



Вихри в электродинамике Черна-Саймонса

- Лагранжиан с членом Черна-Саймонса:

$$d = 2 + 1 \quad \mu - \text{топологическая масса}$$

$$L = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{\mu}{4} \varepsilon_{\mu\nu\rho} F^{\mu\nu} A^\rho$$

- Уравнения поля:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + \mu \tilde{F}_\nu = 0, \quad \tilde{F}_\nu = \frac{1}{2} \varepsilon_{\nu\mu\rho} F^{\mu\rho}$$



$$\square \tilde{F}_\nu + \mu \tilde{F}_\nu = 0$$

Поле \tilde{F}_ν массивно

Замечание: уравнения поля инвариантны относительно калибровочных преобразований $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \alpha$ но лагранжиан – не инвариантен:

$$L \rightarrow L + \frac{\mu}{2} \partial_\nu (\tilde{F}^\nu \alpha) \quad \leftarrow \text{полная производная}$$

- Скалярная электродинамика Черна-Саймонса:

$$L = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{\mu}{4} \varepsilon_{\mu\nu\rho} F^{\mu\nu} A^\rho + (D_\mu \phi)^* (D^\mu \phi) - V(|\phi|)$$

- Уравнения поля:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_\mu F^{\mu\nu} + \mu \tilde{F}_\nu = j_\nu; \\ D_\mu D^\mu \phi = \frac{\delta V}{\delta \phi^*} \end{array} \right. \quad j^\nu = -i[\phi^* D^\nu \phi - (D^\nu \phi)^* \phi]$$

● **Закон Гаусса:** $\partial_i F_{i0} + \mu \varepsilon_{ij} F_{ij} = j_0 \Rightarrow \mu \int d^2x \varepsilon_{ij} F_{ij} = \int d^2x j_0$

$$\mu\Phi = Q$$

Электрический заряд пропорционален магнитному потоку

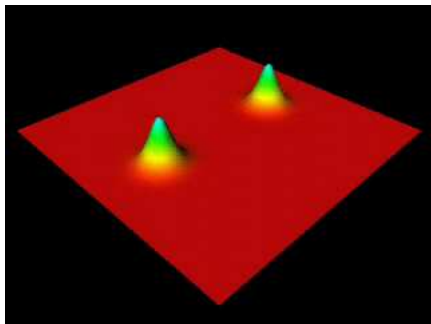
$\Phi = \frac{2\pi n}{e}, \quad Q = \mu \frac{2\pi n}{e} \Rightarrow$ Электрический заряд и магнитный поток *квантованы*

● **Обобщенный вихрь:**

$$\phi = f(r)e^{in\varphi}, \quad A_i = ng(r)\partial_i\varphi, \quad A_0 = a(r)$$

Масса возбуждений скалярного и векторного поля:

$$m_s = 2a\sqrt{2\lambda}; \quad m_v = \sqrt{\frac{\mu^2}{4} + e^2 a^2} \pm \frac{\mu}{2}$$



Динамика вихрей может быть очень непростой!

Модель ϕ^4 в 1+1 измерениях: Кинк

$$L = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \lambda(\phi^2 - a^2)^2, \quad E = \int dx \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} \right)^2 + \lambda(\phi^2 - a^2)^2 \right\}$$

Условие минимальной энергии:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \pm\sqrt{2\lambda}(\phi^2 - a^2) \Rightarrow x - x_0 = \pm\frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \int \frac{d\phi}{\phi^2 - a^2} = \pm\frac{2}{m} \operatorname{arctanh} \frac{\phi}{a}$$

$$m^2 = 8\lambda a^2$$

Кинк (антикинк):

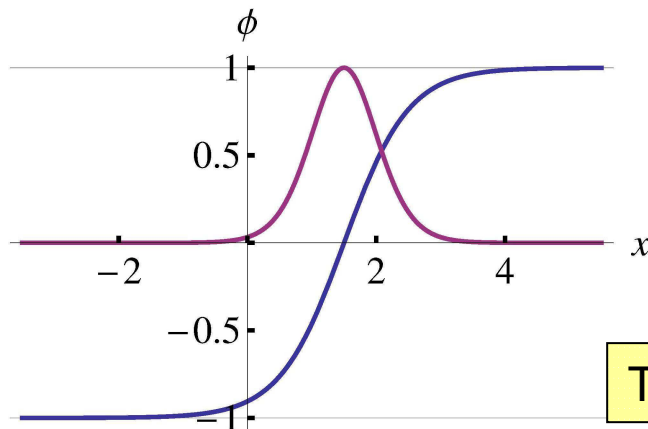
$$\phi_K = a \tanh \frac{1}{2} m(x - x_0); \quad \phi_{\bar{K}} = -a \tanh \frac{1}{2} m(x - x_0)$$

Плотность энергии:

$$\mathcal{E} = \frac{m^4}{32\lambda} \frac{1}{\cosh^4[\frac{1}{2}m(x-x_0)]}$$

Масса кинка:

$$M = \int \mathcal{E} dx = \frac{m^3}{12\lambda}$$



Топологический заряд:

$$Q = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{1}{2} [\phi(\infty) - \phi(-\infty)]$$

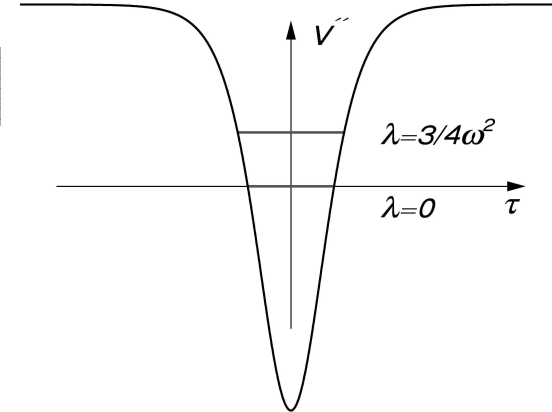
Топологический ток:

$$J_\mu = \frac{1}{2\pi} \varepsilon_{\mu\nu} \partial^\nu \phi, \quad \partial^\mu J_\mu \equiv 0$$

Возбуждения на фоне ϕ^4 кинка

$$\phi(x, t) = \phi_k(x) + \xi(x)e^{i\omega t}$$

Пешль-Теллер, again



$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + 4m^2 - \frac{6m^2}{\cosh^2 \frac{x}{2}} \right) \xi = \omega^2 \xi$$

нулевая мода, $\omega_0=0$:

$$\xi_0^{(n)}(x) = \frac{1}{\cosh^2 \left(\frac{m(x-x_0)}{2} \right)}$$

локализованная мода, $\omega_1 = \frac{\sqrt{3}m}{2}$

$$\xi_1 = \frac{\sinh \left(\frac{mx}{2} \right)}{\cosh^2 \left(\frac{mx}{2} \right)}$$

непрерывный спектр: $\omega_n = \sqrt{k_n^2 + m^2}$

$$\xi_k = e^{ikx} \left\{ \frac{3m^2}{2} \tanh^2 \frac{mx}{2} - \frac{m^2}{2} - 2k^2 - 3imk \tanh \frac{mx}{2} \right\}$$

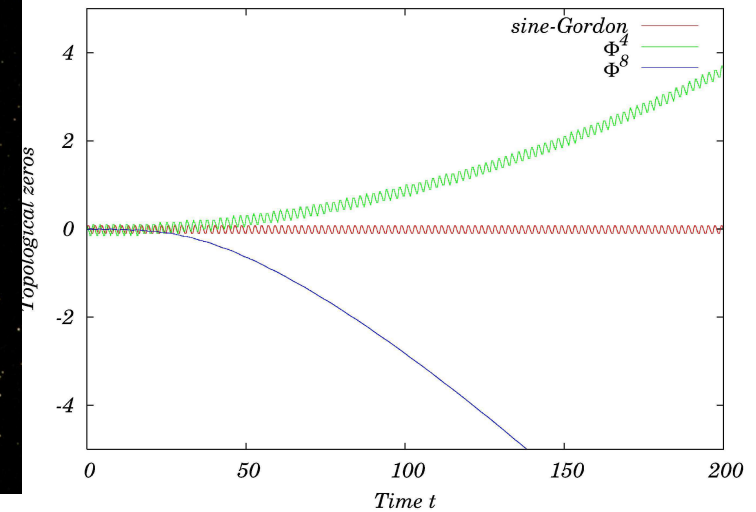
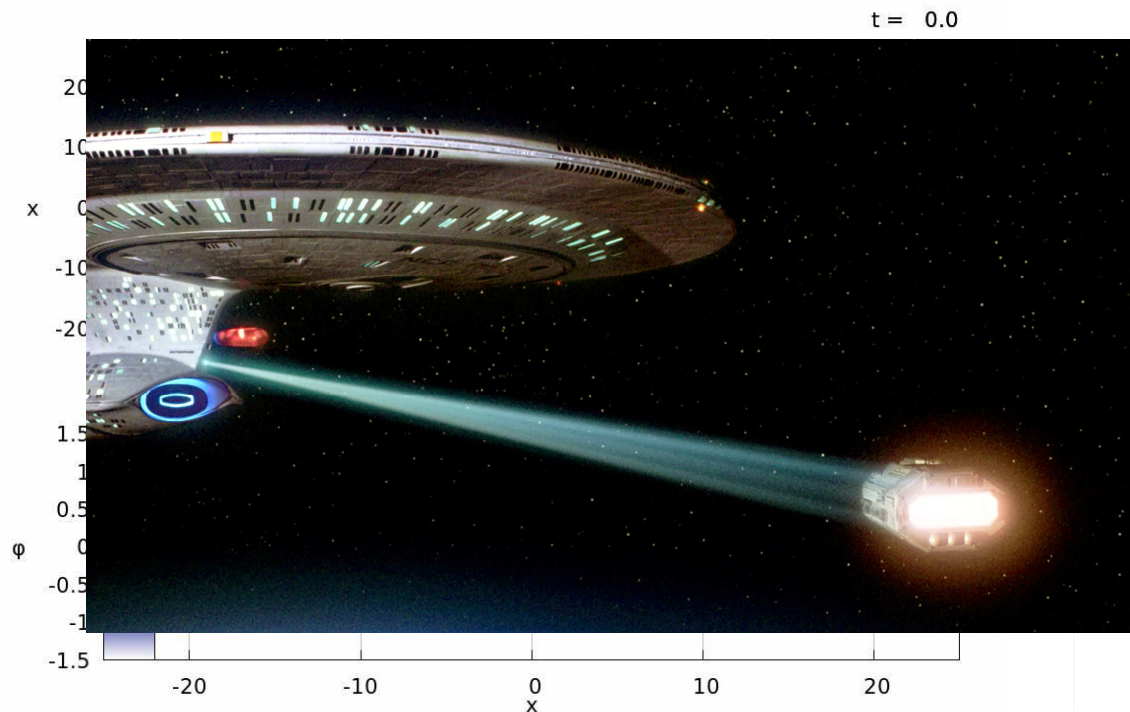
ϕ^4 КИНК: ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ

$$\omega^2 = k^2 + 4$$

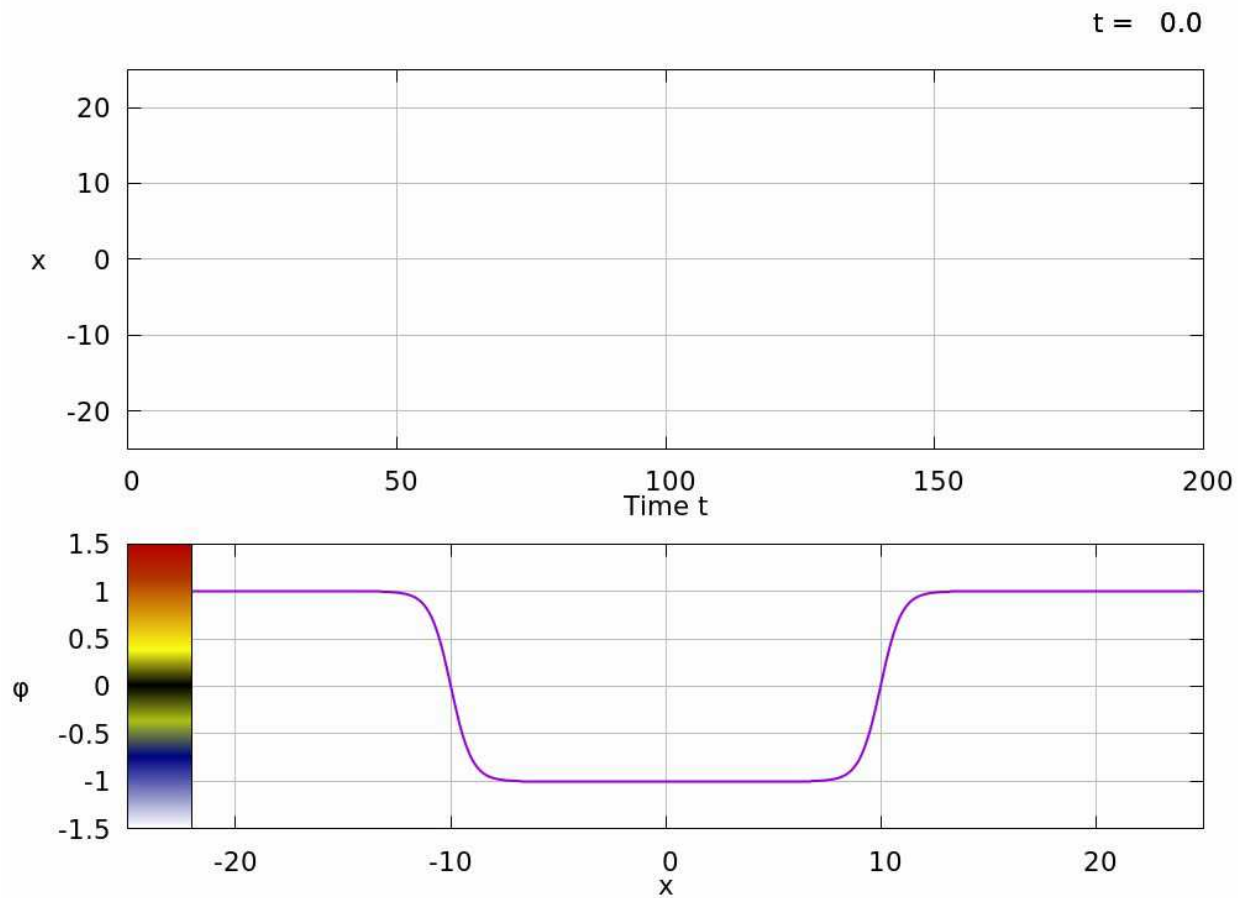
$$\xi_k = e^{ikx} (3 \tanh^2 x - 3ik \tanh x - 1 - k^2)$$

Интеграл перекрытия $\int dx \eta_k \eta_0$

Эффект отрицательного радиационного давления:
 ϕ^4 кинк ускоряется в направлении источника падающего на него излучения
(Star Wars Tractor Beam)



Bounce



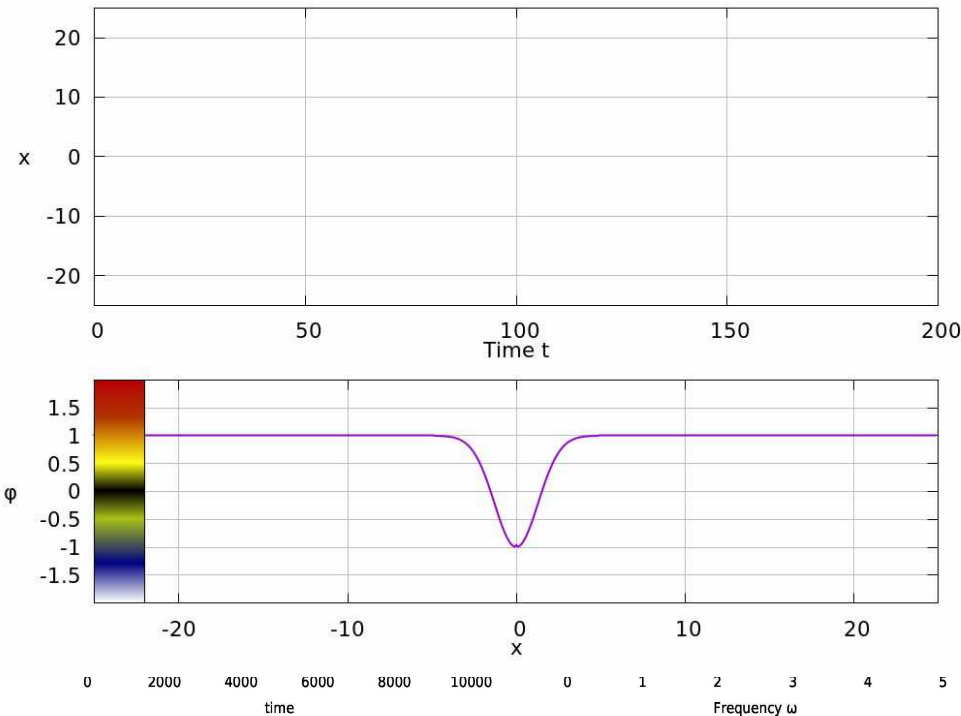
$$K\bar{K} \rightarrow K\bar{K}$$
$$v_{in} = 0.24385$$

Резонансы в столкновениях кинков

ϕ^4 ОСЦИЛЛОН

(I. L. Bogolubsky and V. G. Makhankov (*JETP Lett.* 24, 12 (1976)))

Исключительно стабильное и почти не
излучающее квазипериодическое
локализованное решение теории ϕ^4
(at least 10 million oscillations!!) t = 0.0



Гауссово приближение:

$$\phi(x, 0) = 1 - 0.7e^{-0.205x^2}$$

Амплитуда как коллективная
Координата осциллона:

$$\phi(x, t) = 1 - A(t)e^{-\left(\frac{x}{x_0}\right)^2}$$

Ангармонический осциллятор

с частотой $\Omega_0 = \sqrt{4 + \frac{1}{3x_0^2}}$

$$L/x_0 = (\dot{A})^2 - \frac{2}{3}A^4 - \pi A^3 - \left(4 + \frac{1}{3x_0^2}\right) A^2$$

Квантовые поправки к массе ϕ^4 кинка

„There is nothing as classical field theory in Nature“ E. Weinberg

Тривиальный вакуум:

$$\phi \approx a + \delta\phi, \quad V \approx 4\lambda a^2 (\delta\phi)^2, \quad [\partial^\mu \partial_\mu + m^2] \delta\phi = 0, \quad m^2 = V'' = 8\lambda a^2$$

Возбуждения вакуума: $\omega^{vacuum} = m$

Квантовые поправки на фоне кинка: $\omega_0 = 0, \quad \omega_1 = \frac{\sqrt{3}m}{2}, \quad \omega_n = \sqrt{k_n^2 + m^2}$

$$E = M_{cl} + \left(\frac{1}{2} \sum \omega_i^{kinck} - \frac{1}{2} \sum \omega_i^{vacuum} \right) = \frac{m^3}{12\lambda} + \frac{1}{2} (0 - m) + \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{3}m}{2} - m \right) +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \left[\underbrace{\sqrt{k_n^2 + m^2}}_{\text{КИНК}} - \underbrace{\sqrt{(k_n^{(0)})^2 + m^2}}_{\text{ВАКУУМ}} \right]$$

Моды континуума: $\xi_k = e^{ikx} \left\{ \frac{3m^2}{2} \tanh^2 \frac{mx}{2} - \frac{m^2}{2} - 2k^2 - 3imk \tanh \frac{mx}{2} \right\}$

$$\xi(-\infty) = e^{ikx} (m^2 - 2k^2 - 3imk) = e^{ikx} (m - ik)(m - 2ik) \quad \left. \vphantom{\xi(-\infty)} \right\} \quad \xi(-\infty) = e^{i\delta_k} \xi(\infty)$$

$$\xi(\infty) = e^{ikx} (m^2 - 2k^2 + 3imk) = e^{ikx} (m + ik)(m + 2ik)$$

$$e^{i\delta_k} = \frac{(ik + m)(ik + 2m)}{(ik - m)(ik - 2m)}$$

$$e^{i\delta_k} = \frac{(ik + m)(ik + 2m)}{(ik - m)(ik - 2m)}$$

Замечание: $\operatorname{arctg} x = \frac{i}{2} \ln \left(\frac{i + x}{i - x} \right)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 2 \operatorname{arctg} \frac{k}{m} + 2 \operatorname{arctg} \frac{k}{2m} &= i \ln \left(\frac{i + \frac{k}{m}}{i - \frac{k}{m}} \right) + i \ln \left(\frac{i + \frac{k}{2m}}{i - \frac{k}{2m}} \right) = \\ &= i \ln \left(\frac{(im + k)(2im + k)}{(im - k)(2im - k)} \right) = -i \ln \left(\frac{(ik + m)(ik + 2m)}{(ik - m)(ik - 2m)} \right) = -i \ln(e^{i\delta_k}) = \delta_k \end{aligned}$$

Дискретизация: $x \in [-L, L]$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \rightarrow L; & \chi_k \rightarrow \sin(kL + \delta_k) \\ x \rightarrow -L; & \chi_k^{\text{vacuum}} \rightarrow \sin(kL) \end{cases}$$

$$k_n L + \delta_k = \pi n, \quad k_n = \frac{\pi n}{L} - \frac{\delta_k}{L} = k_n^{(0)} - \frac{\delta_k}{L}$$

Вакуумные моды

$$L \gg 1$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} \left[\sqrt{k_n^2 + m^2} - \sqrt{\left(k_n^{(0)}\right)^2 + m^2} \right] &= \frac{1}{L} \sum \sqrt{k_0^2 + m^2} \left(\frac{-k_n^{(0)} \delta_k}{k_n^2 + m^2} \right) + O(1/L^2) \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} dk \frac{k \delta_k}{\sqrt{k^2 + m^2}} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} dk \left[\frac{d}{dk} \left(\sqrt{k^2 + m^2} \delta_k \right) - \sqrt{k^2 + m^2} \frac{d\delta_k}{dk} \right] = \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \sqrt{k^2 + m^2} \delta_k \Big|_0^\infty - \frac{m}{2\pi} \int_0^\Lambda dk \sqrt{k^2 + m^2} \left[\frac{2}{k^2 + m^2} + \frac{1}{k^2 + \frac{m^2}{4}} \right]$$

$$\delta_k = 2 \operatorname{arctg} \frac{k}{m} + 2 \operatorname{arctg} \frac{k}{2m} = 2 \operatorname{arctg} \frac{3km}{2m^2 - k^2}$$

для функции $\operatorname{arctg} x$ выбираем ветви, для которых $\delta_{0+} = 2\pi$, $\delta_\infty = 0$

$$\Rightarrow \delta(k \rightarrow \infty) \sim \frac{6m}{k}, \quad \delta_k = -\delta_{-k} \quad \text{скачок в 0!}$$

$$E = M_{cl} + \left(\frac{1}{2} \sum \omega_i^{kink} - \frac{1}{2} \sum \omega_i^{vacuum} \right) = \frac{m^3}{12\lambda} + \frac{1}{2} (0 - m) + \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{3}m}{2} - m \right) +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{n=2}^\infty \left[\sqrt{k_n^2 + m^2} - \sqrt{(k_n^{(0)})^2 + m^2} \right] = \frac{m^3}{12\lambda} + \frac{\sqrt{3}m}{4} - m +$$

$$+ m - \frac{3m}{2\pi} - \frac{m}{4\pi} \int_0^\Lambda dk \sqrt{k^2 + m^2} \left[\frac{2}{k^2 + m^2} + \frac{1}{k^2 + \frac{m^2}{4}} \right] =$$

$$= M_{cl} + \frac{\sqrt{3}m}{4} - \frac{3m}{2\pi} + \text{log divergent terms}$$

$$\Delta M = m \left(\frac{\sqrt{3}}{12} - \frac{3}{8\pi} \right)$$

+ перенормировка,
+ вычисление диаграмм
= квантовая поправка

Нетривиальный классический вакуум: Q-ball

$$L = |\partial_\mu \phi|^2 - U(|\phi|)$$

Нелинейный потенциал:

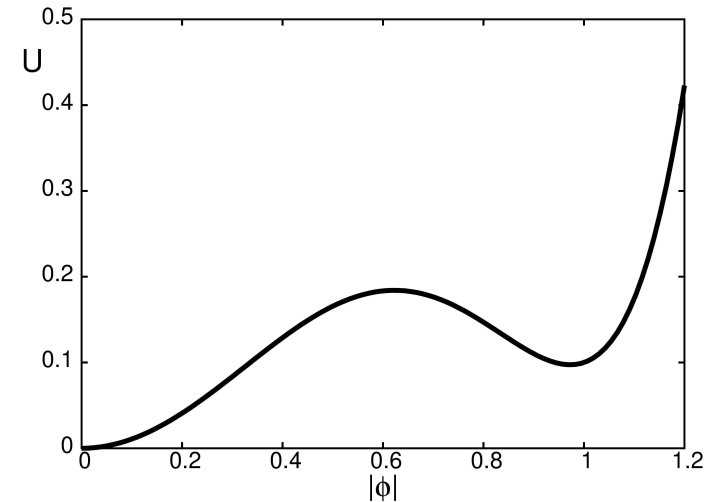
$$U = a|\phi|^2 - b|\phi|^4 + |\phi|^6$$

Глобальная U(1) инвариантность:

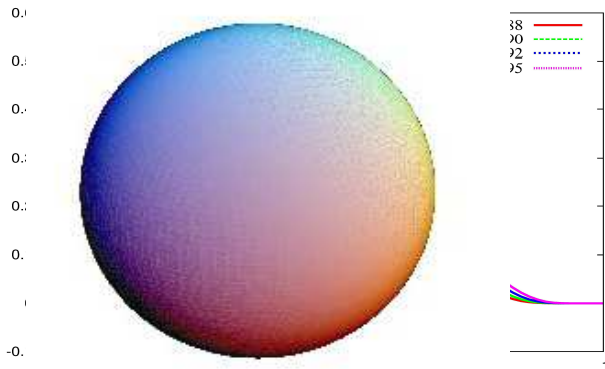
$$\phi(x) \rightarrow e^{ie\omega} \phi(x), \quad \phi^*(x) \rightarrow e^{-ie\omega} \phi^*(x)$$

$$\partial^\mu j_\mu = 0, \quad j^\mu = -i[\phi^* \partial^\mu \phi - (\partial^\mu \phi)^* \phi]$$

$$\begin{aligned} \rightarrow Q &= i \int d^3x (\phi \partial_t \phi^* - \phi^* \partial_t \phi) = \\ &= 2\omega \int d^3x |\phi|^2 = 2\omega N \end{aligned}$$



Сферически симметричный Q-ball: $\phi = f(r)e^{i\omega t} \Rightarrow Q = 8\pi\omega \int_0^\infty dr r^2 f^2$



Уравнения поля:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{2}{r} \frac{df}{dr} + \omega^2 f = \frac{1}{2} \frac{dV}{df}$$

$$f \sim \frac{1}{r} e^{-\sqrt{m^2 - \omega^2} r}$$

Аксиально-симметричные Q-balls

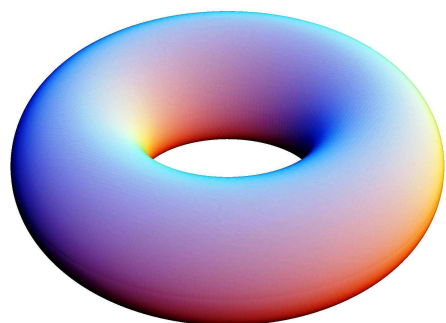
$$\phi = f(r, \theta) e^{i(\omega t + n\varphi)}, \quad n \in \mathbb{Z}$$



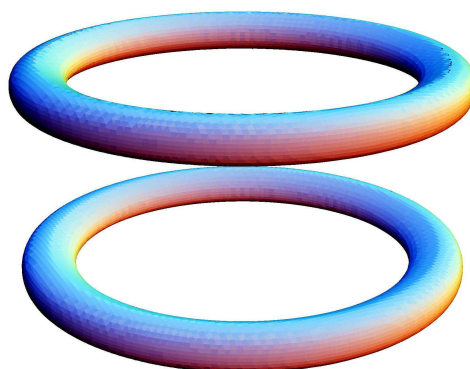
$$J = \int d^3x T_{\varphi}^0 = 2n\omega N = nQ$$

$$\phi(r, \theta, \varphi) \propto \frac{1}{\sqrt{r}} J_{l+1/2}(\omega r) Y_l^n(\theta, \varphi)$$

Нетопологическое квантование
углового момента



$n=1 \quad P_+$



$n=1 \quad P_-$

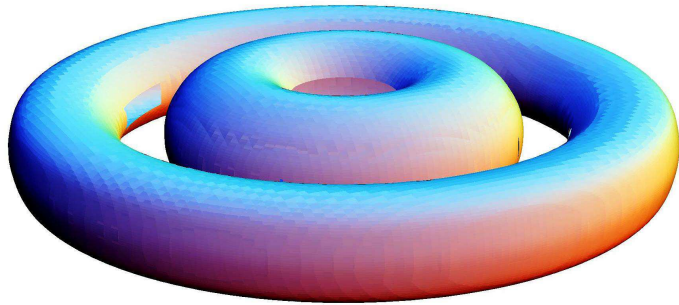
● *Parity-even solutions:*

$$f(r, \theta) = f(r, \pi - \theta)$$

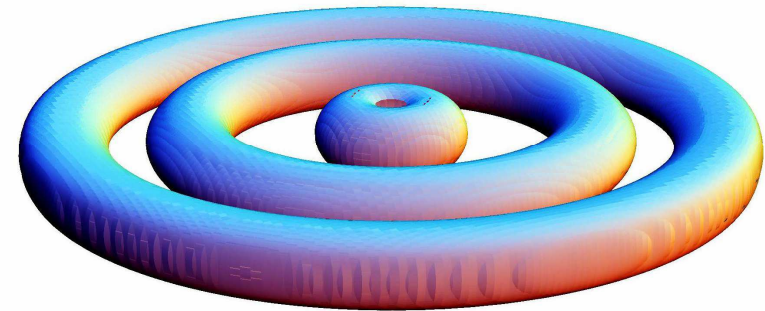
● *Parity-odd solutions:*

$$f(r, \theta) = -f(r, \pi - \theta)$$

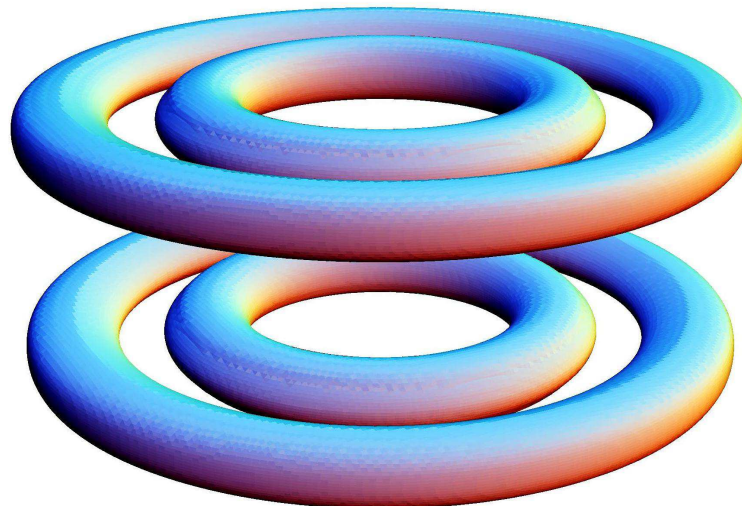
Аксиально-симметричные Q-balls



$n=1, k=1$ *P-even*



$n=1, k=2$ *P-even*



$n=1, k=2$ *P-odd*

