Калибровочная симметрия: Абелева электродинамика

- **Лагранжиан:** $$\boxed{L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = E_k^2 - B_k^2}$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad E_k = F_{0k}, \; B_k = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}F_{jk}$$

- **Уравнения поля:** $$\partial_\mu\left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}\right) = \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \partial_i E_i = 0 \\ \partial_0 E_i = \varepsilon_{ijk}\partial_j B_k \end{cases}$$

- **Тождество Бьянки:** $$\partial_\mu \widetilde{F}^{\mu\nu} \equiv 0; \quad \widetilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\rho\sigma} \Rightarrow \begin{cases} \partial_i B_i = 0 \\ \partial_0 B_i = -\varepsilon_{ijk}\partial_j E_k \end{cases}$$

Замечание: ***лагранжиан электродинамики не содержит зависимости от*** $\partial_0 A_0$ ***. Полевое уравнение для временной компоненты потенциала не является динамическим (закон Гаусса):***

$$\boxed{\nabla\cdot\vec{E} = 0 \Rightarrow \Delta A_0 + \nabla\cdot(\partial_0\vec{A}) = 0}$$

Решение: $$A_0(x) = \int d^3x' \frac{\nabla\cdot(\partial_0\vec{A}(x'))}{4\pi|x - x'|}$$

- **Уравнения для потенциала:** $$\boxed{[\eta_{\mu\nu}(\partial_\rho\partial^\rho) - \partial_\mu\partial_\nu]A^\nu = 0}$$

Калибровочные теории содержат нефизические степени свободы – что делать?

- Объявить их просто равными нулю
  → радикальное изменение динамики
  с непростыми и неясными следствиями ☹
- Переформулировать теорию так, чтобы она содержала только физические переменные
  → можно, но сложно ☹
- Зафиксировать соответствующие переменные (фиксация калибровки)
  → практично и относительно просто ☺

Электродинамика – это теория со связями

- **Динамические переменные:** **компоненты 4-потенциала** A_μ

$$L = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \pi^0 = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{A}_0} = 0 \\ \pi^i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{A}_i} = -F^{0i} \equiv E^i \end{cases}$$

$$H = \int d^3x \, \left\{ \pi^i \dot{A}_i - L \right\} = \int d^3x \, \left\{ (\partial_0 A_i - \partial_i A_0)(\partial_0 A_i) - \frac{1}{2}E_i^2 + \frac{1}{2}B_i^2 \right\} =$$

$$\int d^3x \, \left\{ E_i^2 + (\partial_i A_0)(\partial_0 A_i) - (\partial_i A_0)^2 - \frac{1}{2}E_i^2 + \frac{1}{2}B_i^2 \right\} =$$

$$\int d^3x \, \left\{ (\partial_i A_0)[\partial_0 A_i - \partial_i A_0] + \frac{1}{2}E_i^2 + \frac{1}{2}B_i^2 \right\} =$$

$$\int d^3x \, \left\{ (\partial_i A_0)E_i + \frac{1}{2}E_i^2 + \frac{1}{2}B_i^2 \right\} = \int d^3x \, \left\{ \frac{1}{2}E_i^2 + \frac{1}{2}B_i^2 - \overbrace{A_0}^{\text{Множитель Лагранжа}} \underbrace{(\partial_i E_i)}_{\text{Закон Гаусса}} \right\}$$

3 варианта:

- **Положить** $A_0 = 0 \Rightarrow A_{\parallel} = 0$
- **Выразить действие через физические переменные** $A_\perp$
- **Зафиксировать калибровку**

Системы со связями (Гамильтоновая механика)

- ***Связь первого рода*: соотношение между координатами и обобщенными импульсами, которое выполняется безотносительно к уравнениям движения**

Пример из классической механики:

$$\boxed{L(x,y,\dot{x},\dot{y}) = \frac{1}{2}\dot{x}^2}$$

- $p_x = \dot{x}, \quad \boxed{p_y = 0} \Rightarrow H = \frac{1}{2}p_x^2$

Связь 1[го] рода: $C=p_y$

«калибровочная» симметрия: $y \to y + \epsilon(t)$

- ***Дополнительное условие*: связь первого рода не меняется в ходе временной эволюции системы:**

$$\{F,G\} = \frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial G}{\partial \pi_i} - \frac{\partial F}{\partial \pi_i}\frac{\partial G}{\partial q_i}$$

- $$\boxed{\{H,C\} = \frac{\partial C}{\partial t} = 0}$$

- ***Множитель Лагранжа* - способ записать полное действие системы со связями в фазовом пространстве в явном виде:**

$$S(x,y,p_x,p_y) = \int dt \left(p_x\dot{x} + p_y\dot{y} - \frac{1}{2}p_x^2 - \lambda p_y\right)$$

- **«фиксиция калибровки» -** $y \to y' = 0$

Системы со связями (еще один пример)

Действие релятивистской массивной частицы с нулевым спином:

$$S[x_\mu(\tau)] = -m \int d\tau \sqrt{-\dot{x}_\mu \dot{x}^\mu}, \quad \dot{x}_\mu = \frac{\partial x_\mu}{\partial \tau}$$

- ***Канонический импульс:*** $\boxed{p_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = \frac{m \dot{x}_\mu}{\sqrt{-\dot{x}^2}}}$

$\Rightarrow$ **Связь 1го рода:** $C = p_\mu p^\mu + m^2 = 0$

- ***Классический гамильтониан:*** $H = \frac{1}{2}\left(p_\mu p^\mu + m^2\right) \equiv 0$

Связь 2го рода: $\{C, H\} = 0$

Множитель Лагранжа

Полное действие системы со связями в фазовом пространстве:

$$S[x_\mu(\tau), p_\mu(\tau); \lambda(\tau)] = \int d\tau \left\{ p_\mu \dot{x}^\mu - \frac{\lambda}{2}\left(p_\mu p^\mu + m^2\right) \right\}$$

«Калибровочная» симметрия:
$$\begin{cases} x_\mu \to x_\mu + \delta x_\mu, & \delta x_\mu = \{x_\mu, \alpha H\} = \alpha p_\mu \\ p_\mu \to p_\mu + \delta p_\mu, & \delta p_\mu = \{p_\mu, \alpha H\} = 0 \\ \lambda \to \lambda + \delta\lambda, & \delta\lambda = \dot{\alpha} \end{cases}$$

Каноническое квантование систем со связями

- ***Классическая система с N степенями свободы:***

$$L(q_i, \dot{q}_i; t), \quad v_i = \dot{q}_i, \quad \dot{v}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2 \ldots N$$

Замечание:* *система динамических уравнений может быть сингулярной:

$$\boxed{\det \left| \frac{\partial^2 L}{\partial v_i \partial v_j} \right| = 0}$$

Динамические переменные разделяются на 2 группы:

- $x_i = q_i, \quad v_i = \dot{x}_i, \quad \pi_i = \dfrac{\partial L}{\partial v_i}, \quad \det \left| \dfrac{\partial^2 L}{\partial v_i \partial v_j} \right| \neq 0, \quad i, j = 1, 2 \ldots n < N$

- $\kappa_\alpha = q_{n+\alpha}, \quad \lambda_\alpha = \dot{\kappa}_\alpha, \quad \pi_\alpha = \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_\alpha}, \quad \det \left| \dfrac{\partial^2 L}{\partial \lambda_\alpha \partial \lambda_\beta} \right| = 0, \quad \alpha = 1, 2 \ldots N - n = m$

Без ограничения общности можно представить что относительно второй группы переменных лагранжиан линеен по λ_α: $L \to L_(q_i, \pi_i) + f(\pi_\alpha)\lambda_\alpha$

$$H = p\dot{q} - L = H_1(q_i, \pi_i) + \lambda_\alpha \Phi_\alpha^{(1)}, \quad \boxed{\Phi_\alpha^{(1)} = \pi_\alpha - f(\pi_\alpha)}$$

связи

- **Уравнения движения:** $\dot{q}_i = \{q_i,\, H\}, \quad \dot{\pi}_i = \{\pi_i,\, H\}, \quad \Phi^{(1)}_\alpha = 0$

Скобка Пуассона: $\{F, G\} = \frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial G}{\partial \pi_i} - \frac{\partial F}{\partial \pi_i}\frac{\partial G}{\partial q_i}$

$$\Rightarrow \quad \{F(x), G(y)\} = \int d^4 z \left(\frac{\delta F(x)}{\delta q(z)} \frac{\delta G(y)}{\delta \pi(z)} - \frac{\delta F(x)}{\delta \pi(z)} \frac{\delta G(y)}{\delta q(z)} \right)$$

- **Уравнение эволюции произвольной функции динамических переменных $f(q, \pi; t)$:**

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f,\, H_1\} + \lambda_\alpha \{f,\, \Phi^{(1)}_\alpha\}$$

Замечание: **связи не должны зависеть от времени:**

$$\frac{d\Phi^{(1)}_\alpha}{dt} = \{\Phi^{(1)}_\alpha,\, H\} + \lambda_\beta \Omega_{\alpha\beta}\} = 0, \qquad \Omega_{\alpha\beta} = \{\Phi^{(1)}_\alpha,\, \Phi^{(1)}_\beta\}$$

$\det \Omega_{\alpha\beta} = 0 \Rightarrow$ **Все множители Лагранжа λ_α могут быть найдены явно**

$\det \Omega_{\alpha\beta} \neq 0 \Rightarrow$ **Набор линейных уравнений** $\Omega_{\alpha\beta} u_\beta = 0$
имеет *m* независимых решений $u^k_\alpha(q, \pi), \quad k = 1, 2 \ldots m$

$$\boxed{\Phi^{(2)}_k = u^k_\alpha \{\Phi^{(1)},\, H\} = 0} \leftarrow \textbf{Вторичные связи}$$

Пример 1: Массивное векторное поле Прока $L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2}A_\mu A^\mu$

Лагранжиан не содержит зависимости от $\lambda = \partial_0 A_0$ ⟹ связь $\Phi^{(1)} = \pi_0$

Обычные динамические переменные: $\dot{q}_i \equiv \partial_0 A_i, \quad \pi_i = F_{0i} = E_i$

Динамические уравнения: $\{\partial_0 A_i(x), \pi_j(y)\} = \delta_{ij}\delta(x-y)$

Гамильтониан: $$H = \frac{1}{2}\pi_i^2 + \pi_i \partial_i A_0 + \frac{1}{4}F_{ij}F^{ij} + m^2 A_\mu A^\mu + \lambda\pi_0$$

Условие сохранения связи: $\dot{\Phi}^{(1)} = \{\Phi^{(1)}, H\} = \partial_i \pi_i - m^2 A_0 = \Phi^{(2)}$

Условие сохранения вторичной связи:

$$\boxed{\dot{\Phi}^{(2)} = \{\Phi^{(2)}, H\} = m^2(\partial_i A_i - \lambda) = 0, \quad \Longrightarrow \quad \lambda = \nabla \cdot \vec{A}}$$

Замечание: $\{\Phi^{(1)}, \Phi^{(2)}\} = m^2$ ⟹ $\det \Omega_{\alpha\beta} \neq 0$

Теория Прока не сингулярна, динамика связей и физических степеней свободы полностью отделены друг от друга

Пример 2: **Свободное электромагнитное поле:** $L = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$

Лагранжиан не содержит зависимости от $\lambda = \partial_0 A_0$ $\Rightarrow$ **связь** $\Phi^{(1)} = \pi_0$

Условие сохранения связи: $\dot{\Phi}^{(1)} = \{\Phi^{(1)}, H\} = \partial_i \pi_i = \nabla \cdot \vec{E} = \Phi^{(2)}$

Гамильтониан: $H = \frac{1}{2}\pi_i^2 + \pi_i \partial_i A_0 + \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} + \lambda \pi_0$

***Замечание**: в отличие от теории Прока* $\{\Phi^{(1)}, \Phi^{(2)}\} = 0$ $\Rightarrow$ $\det \Omega_{\alpha\beta} = 0$

Вопрос: **Какая переменная является канонически сопряженной $\Phi^{(2)}$?**

$$\{f(x), \partial_i \pi_i(y)\} = \int d^4 z \left(\frac{\delta f(x)}{\delta A_k} \frac{\delta[\partial_i \pi_i(y)]}{\delta \pi_k(z)} - \cancel{\frac{\delta[\partial_i \pi_i(x)]}{\delta A_k}} \frac{\delta[\partial_i f(y)]}{\delta \pi_k(z)} \right)$$

$$= \int d^4 z \frac{\delta f(x)}{\delta A_k} \frac{\delta[\partial_i \pi_i(y)]}{\delta \pi_k(z)} = \delta(x-y) \quad \Rightarrow \quad \partial_i \frac{\delta f(x)}{\delta A_i(y)} = -\delta(x-y)$$

$\Rightarrow$ $f(x) = -\Delta^{-1} \partial_i A_i(x)$

Решение возможно, если оператор Лапласа Δ несингулярен

- **Общее решение свободных уравнений** $[\eta_{\mu\nu}(\partial_\rho\partial^\rho) - \partial_\mu\partial_\nu]A^\nu = 0$

Преобразование Фурье: $A_\mu = \int d^4k\,\left[a_\mu(k)e^{ikx} + a^*_\mu(k)e^{-ikx}\right]$

$kx = k_\mu x^\mu = -k_0x_0 + \vec{k}\cdot\vec{x}$

$\Rightarrow$ $\boxed{k^\mu k_\mu a_\nu - k^\mu k_\nu a_\mu = k^2 a_\nu - k_\nu(ka) = 0}$

- $k^2 \neq 0$ $\Rightarrow$ **общее решение:** $a_\nu(k) = k_\nu f(k)$

- $k^2 = 0$ $\Rightarrow$ $k^\mu a_\mu = 0$ $\Rightarrow$ **общее решение:** $a_\nu(k) = k_\nu f(k) + e^{(a)}_\mu g(k)$

Вектора поляризации: $e^{(a)}_0 = 0,\quad e^{(a)}_i k_i = 0,\quad e^{(a)}_i e^{(b)}_i = \delta^{ab}$

- **Потенциал свободной электродинамики:** $A_\mu(x) = A^\perp_\mu(x) + A^\parallel_\mu(x),\quad A^\parallel_\mu(x) = \partial_\mu\alpha(x)$

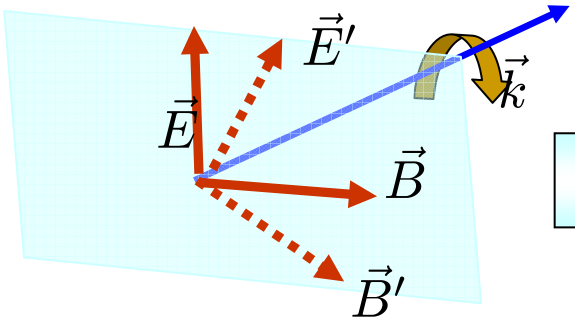
- ***Дуальная инвариантность:*** $E_i \to E_i\cos\theta - B_i\sin\theta;\quad B_i \to E_i\sin\theta + B_i\cos\theta$

- ***Калибровочная инвариантность:*** $A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu\alpha(x)$

$$F_{\mu\nu} \to F'_{\mu\nu} = \partial_\mu(A_\nu + \partial_\nu\alpha) - \partial_\nu(A_\mu + \partial_\mu\alpha) = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = F_{\mu\nu}$$

- **Вопрос: Есть ли законы сохранения, соответствующие этим симметриям?**

Дуальная инвариантность: $A_\mu(x) = e^{ikx} e_\mu^{(1)} f(x)$ (Плоская волна)



$\Rightarrow \vec{k} \times \vec{E} = \vec{B}$

Вектор Пойнтинга $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{B}; \quad \vec{S} \cdot \vec{k} = \text{ const}$

$$F_{\mu\nu} \to \widetilde{F}_{\mu\nu}, \quad \widetilde{F}_{\mu\nu} \to -F_{\mu\nu}$$

Дуальный тензор поля: $\widetilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma}; \quad \partial_\mu \widetilde{F}^{\mu\nu} \equiv 0$

θ - член:

$$L_\theta = \frac{\theta}{16\pi^2} \widetilde{F}_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = -\frac{\theta}{4\pi^2} (\vec{E} \cdot \vec{B})$$

$$\Rightarrow \quad S_\theta = \int d^4x L_\theta = \frac{\theta}{8\pi^2} \int d^4x \; \partial_\mu (\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} A_\nu \partial_\rho A_\sigma)$$

- θ - член является *топологическим*, он зависит только от граничных условий

Аксионная электродинамика:

$$S = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{e^2 \theta(x)}{16\pi^2} \widetilde{F}_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right)$$

- **Уравнения поля:** ?

Классическая электродинамика: (безмассовое векторное поле)

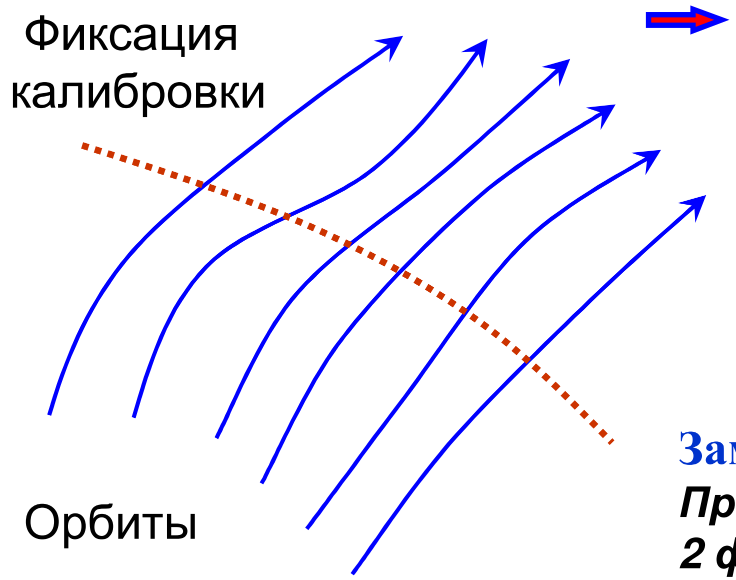
$$L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

Уравнения поля: $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \Rightarrow [\eta_{\mu\nu}(\partial_\rho\partial^\rho) - \partial_\mu\partial_\nu]A^\nu = 0$

Калибровочная инвариантность: не симметрия а физическое отождествление всех конфигураций типа

$$A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu\alpha(x)$$

Калибровка Лоренца: $\partial_\mu A^\mu = 0$



Уравнения поля: $\Box A_\mu = 0, \quad \Box = \partial_\mu\partial^\mu = \partial^2$

Замечание: *Калибровка Лоренца оставляет остаточные преобразования с произвольной функцией* $\omega(x)$, $\Box\omega(x) = 0$

Кулоновская калибровка: $\nabla \cdot \vec{A} = 0$

Замечание: *В кулоновской калибровке* $A_0 = 0$
При этом кулоновская калибровка явно выделяет 2 физические степени свободы поля $A^\perp$

Действие свободного электромагнитного поля

$$\boxed{S = -\frac{1}{4}\int d^4x F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\int d^4x\ A_\mu\{\eta_{\mu\nu}\,\Box - \partial_\mu\partial_\nu\}A_\nu}$$

- **Уравнение для функции Грина:** $(\eta_{\mu\nu}\,\Box - \partial_\mu\partial_\nu)G_{\nu\rho}(x-y) = i\delta_{\mu\rho}\delta(x-y)$

$$G_{\nu\rho}(x) = \int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}G_{\nu\rho}(k)e^{ik_\mu x_\mu} \Rightarrow (-k^2\eta_{\mu\nu} + k_\mu k_\nu)G_{\nu\rho}(k) = i\delta_{\mu\rho}$$

Проблема: ***оператор*** $-k^2\delta_{\mu\nu} + k_\mu k_\nu$ ***сингулярен, он тождественен нулю для любой функции*** $\sim \partial_\mu\alpha(x)$ ***(чистая калибровка) – функция Грина?***

Производящий функционал

$$\boxed{Z[J_\mu] = \int\mathcal{D}[A_\mu(x)]e^{-\int d^4x\left[-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - J^\mu A_\mu\right]}}$$

?

Замечание : ***интегрирование по калибровочным орбитам приводит к бесконечному учету вклада одной и той же конфигурации.***

- **Фиксация калибровки:** **наложено условие** $G(A) = 0$

$$A_\mu^\alpha = A_\mu + \frac{1}{\varepsilon}\partial_\mu \alpha(x) \quad \Longleftrightarrow \quad L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \to L + L_G = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\varepsilon}\left(\partial^\mu A_\mu\right)^2$$

Член, фиксирующий калибровку

$$\Rightarrow \quad S = -\frac{1}{2}\int d^4x\ A_\mu\{\eta_{\mu\nu}\,\Box + \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)\partial_\mu\partial_\nu\}A_\nu$$

- **Уравнение для функции Грина:** $(\eta_{\mu\nu}\,\Box + \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)\partial_\mu\partial_\nu)G_{\nu\rho}(x-y) = \delta_{\mu\rho}\delta(x-y)$

$$G_{\nu\rho}(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}G_{\nu\rho}(k)e^{ik_\mu x_\mu} \quad \Rightarrow \quad \left[-k^2\eta_{\mu\nu} - \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)k_\mu k_\nu\right]G_{\nu\rho}(k) = \delta_{\mu\rho}$$

$\Rightarrow$ **Фотонный пропагатор:** $G^{-1}_{\mu\nu}(k) = -\frac{1}{k^2}\left[\eta_{\mu\nu} + (\varepsilon - 1)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right]$

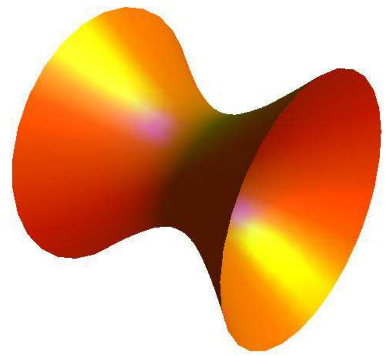
Задача: ***проверьте,что*** $G^{-1}_{\mu\nu}(k)G^{\nu\rho}(k) = \delta_\mu^\rho$

- **Калибровка Феймана:** $\varepsilon = 1, \quad \Longrightarrow \quad G^{-1}_{\mu\nu}(k) = -\frac{\eta_{\mu\nu}}{k^2}$

- **Калибровка Ландау:** $\varepsilon = 0, \quad \Longrightarrow \quad G^{-1}_{\mu\nu}(k) = -\frac{\eta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}}{k^2}$

- **Простой пример из обычного интегрирования:**

$$\int_0^\infty dxdydz\ F(x^2-y^2-z^2) = \underbrace{\boxed{\int d\Sigma}}_{\to\infty} \int_0^\infty dr\ r^2 F(r^2)$$



Функция $F(r^2)$ - инвариант *SO(2,1)* преобразований

$$(x,y,z) = (r\cosh\gamma,\ r\cos\phi\sinh\gamma,\ r\sin\phi\sinh\gamma)$$

- **Ограничение интегрирования: вставка в интеграл δ–функции**

$\int_{-\infty}^{\infty} df\ \delta(f) = 1,\quad f$ **– условие, ограничивающее область интегрирования**

например, $f(a) \Rightarrow x^2-y^2-z^2=a^2$

$$\vec{f}(\vec{a}) \Rightarrow 1 = \int d\vec{f}\ \delta^{(n)}(\vec{f})$$

- **Замена переменной интегрирования:**

$$1 = \left(\prod_n \int da_n\right)\delta^{(n)}[f(\vec{a})]\ \det\left(\frac{\partial f_n}{\partial a_m}\right)$$

- **Ограничение функционального интегрирования условием $G(A^\alpha)=0$:**

$$\boxed{1 = \int \mathcal{D}\alpha(x)\ \delta(G(A^\alpha))\ \det\left(\frac{\delta G(A^\alpha)}{\delta\alpha}\right)}$$

$$A^\alpha_\mu = A_\mu + \frac{1}{\varepsilon}\partial_\mu\alpha(x)$$

Калибровка Лоренца: $G(A^\alpha) = \partial^\mu A^\alpha_\mu = \partial^\mu A_\mu + \frac{1}{\varepsilon}\Box\alpha = 0$

$\Rightarrow$ $\det\left(\frac{\delta G(A^\alpha)}{\delta\alpha}\right) = \frac{1}{\varepsilon}\Box$ - **детерминант не зависит от A_μ**

Трюк Фаддева-Попова: вставка единицы в производящий функционал

$$1 = \int \mathcal{D}\alpha(x)\, \delta(G(A^\alpha)) \det\left(\frac{\delta G(A^\alpha)}{\delta\alpha}\right) \Rightarrow \int \mathcal{D}[A_\mu(x)] e^{-\int d^4x\left[-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right]}$$

Напомним: ***Калибровка Лоренца оставляет остаточные преобразования с произвольной функцией*** $\omega(x)$ $\Rightarrow$ $G(A) = \partial_\mu A^\mu - \omega(x)$

Производящий функционал с *полностью фиксированной* калибровкой:

$$Z = \det\left(\frac{1}{\varepsilon}\Box\right) \int \mathcal{D}\alpha \int \mathcal{D}[A] e^{-S[A]} \delta(\partial_\mu A^\mu - \omega(x))$$

Замечание 1: α ***– параметр локального U(1) калибровочного преобразования***

$$A_\mu \to A'_\mu = A_\mu + \frac{i}{e} U \partial_\mu U^{-1}, \quad U = e^{ie\alpha(x)} \in U(1)$$

Замечание 2: ***сдвиг калибровки не меняет δ-функции:*** $\delta(\partial_\mu A_\mu) = \delta(\partial_\mu A_\mu - \omega(x))$

$$Z = \det\left(\frac{1}{\varepsilon}\Box\right)\left(\int \mathcal{D}\alpha\right)\int \mathcal{D}[A]e^{-S[A]}\delta(\partial_\mu A^\mu - \omega(x))$$

- **Усреднение по дополнительной переменной интегрирования ω (гауссов интеграл формально подавляет расходимость):**

$$Z[A,\omega] \to Z[A] = \int \mathcal{D}\omega e^{-\int d^4x\ \frac{\omega^2}{2\varepsilon}}\ Z[A,\omega]$$

$$= \det\left(\frac{1}{\varepsilon}\Box\right)\left(\int \mathcal{D}\alpha\right)\int \mathcal{D}[A]e^{-S[A]-\int d^4x \frac{1}{2\varepsilon}(\partial_\mu A^\mu)^2}$$

Замечание : ***детерминант*** $\det\frac{1}{\varepsilon}\Box$ ***может быть записан в виде функционального интеграла по новому набору вспомогательных <u>антикоммутирующих</u> полей*** $c, \bar{c}$ ***(духи):***

$$\det\left(\frac{1}{\varepsilon}\Box\right) = \int \mathcal{D}c\mathcal{D}\bar{c}\ e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int d^4x\ \bar{c}(-\Box)c}, \quad \{\bar{c}, c\} = \bar{c}c + c\bar{c} = 0$$

- **Эффективный лагранжиан:**

$$L = -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2 + \frac{1}{2\varepsilon}(\partial_\mu A^\mu)^2 + \bar{c}\ (-\Box)\ c$$

Поля духов не являются динамическими. В абелевой электродинамике их вклад в производящий функционал отщепляется

BRST симметрия

- **Эффективный лагранжиан:**

$$L = -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2 + \frac{1}{2\varepsilon}(\partial_\mu A^\mu)^2 + \bar{c}\,(-\Box)\,c$$

- **Калибровочная инвариантность кажется потеряна ?**

$$L \to L[A,B,c,\bar{c}] = -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2 - \frac{1}{2\varepsilon}B^2 + B(\partial_\mu A^\mu) + \bar{c}\,(-\Box)\,c,$$

B – еще одно вспомогательное поле, $\int \mathcal{D}A\mathcal{D}c\mathcal{D}\bar{c} \to \int \mathcal{D}B \int \mathcal{D}A\mathcal{D}c\mathcal{D}\bar{c}$

Проверка:

$$Z \to Z \int \mathcal{D}B e^{i\int d^4x\left[\frac{\epsilon}{2}(B^a)^2 + B^a(\partial^\mu A^a_\mu)\right]}$$

сдвиг переменной: $B^a \to B^a - \frac{1}{\epsilon}\partial^\mu A^a_\mu$

$$= Z\,N e^{-i\int d^4x\,\frac{1}{2\epsilon}(\partial^\mu A^a_\mu)^2}$$

Бекки-Руэ-Стора-Тютин (BRST) симметрия:

$$\begin{cases} A_\mu \to A_\mu + \delta A_\mu, \quad \delta A_\mu = \eta\,\partial_\mu c \\ \bar{c} \to \bar{c} + \delta\bar{c}, \quad \delta\bar{c} = \eta B \\ c \to c + \delta c, \quad \delta c = 0 \\ B \to B + \delta B, \quad \delta B = 0 \end{cases}$$

η - нильпотентный параметр BRST преобразований, $\eta^2 = 0$

Электродинамика с источниками

$$L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - ej_\mu A^\mu; \Rightarrow \begin{cases} \partial_\mu F^{\mu\nu} = ej^\nu, \quad \partial_\mu j^\mu \equiv 0 \\ \partial_\mu \widetilde{F}^{\mu\nu} \equiv 0 \end{cases}$$

- **Кулоновское поле точечного заряда:** $j^0 = 4\pi\delta(r) \Rightarrow \nabla \cdot \vec{E} = \Delta A_0 = 4\pi e\delta(r)$

Решение: $A_0(r) = 4\pi e \int d^3r' \frac{\delta(r')}{4\pi|r-r'|} = \frac{e}{r}, \qquad E_r = -\frac{e}{r^2}$

Замечание : ***дуальная инвариантность свободной электродинамики потеряна, магнитных источников нет. Или?***

$$\vec{B} = g\frac{\vec{r}}{r^3}, \quad \vec{E} = e\frac{\vec{r}}{r^3} \qquad ?$$

Наивный ответ: $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}, \Rightarrow \nabla \cdot \vec{B} = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$

- **Потенциал Дирака:**

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r}) = \frac{g}{r}\,\frac{\vec{r}\times\vec{n}}{r-(\vec{r}\cdot\vec{n})}, \qquad \vec{n} = (0,0,1)}$$

Задача: ***вычислите компоненты*** $\vec{A}(\vec{r}) = (A_x, A_y, A_z)$

Замечание: ***потенциал Дирака можно записать в виде***

$$\vec{A} = A(\theta)(\nabla \vec{e}_\varphi)\,, \qquad A(\theta) = -g(1+\cos\theta) \quad \vec{e}_\varphi = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)$$

➡ ***Радиальное поле:*** $\vec{r}\cdot\vec{A} = 0$

$$\boxed{\vec{A} = \left(g\frac{1+\cos\theta}{r\sin\theta}\sin\varphi,\ \ -g\frac{1+\cos\theta}{r\sin\theta}\cos\varphi,\ 0\right)}$$

$\vec{B} = \nabla\times\vec{A}$ ➡ ***Наивный ответ:*** $B_x = -\partial_z A_y = g\ \partial_z\left(\frac{x}{r(r-z)}\right) = g\frac{x}{r^3}\,,\quad \mathrm{etc}$

- **Кулоновское поле магнитного заряда? Монополь?**
- **Проблема с математикой -** $\mathrm{div\,rot} \neq 0$ **!**

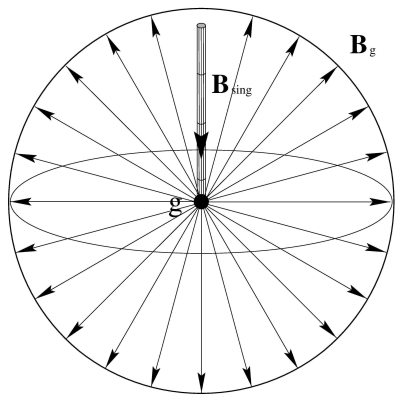
Потенциал Дирака сингулярен вдоль направления $\theta = 0$

➡ **Наивное выражение для магнитного поля** $\vec{B}$ **неверно вдоль полуоси** $z \geq 0$

$$\boxed{\vec{B} = g\frac{\vec{r}}{r^3} - 4g\pi\theta(z)\delta(x)\delta(y)}$$

Задача: ***показать, что полный поток***

$$\Phi = \int_{S^2} d\vec{S}\cdot\vec{B} = 0$$



Условие квантования Дирака

$$\vec{B} = g\frac{\vec{r}}{r^3} - 4g\pi\theta(z)\delta(x)\delta(y) = \vec{B}_g + \vec{B}_{sing} \Rightarrow$$ Наблюдаема ли струна Дирака?

- **Калибровочная инвариантность взаимодействия:** $D_k\phi(\vec{r}) = [\partial_k - ieA_k(\vec{r})]\phi(\vec{r})$

$$\phi(\vec{r}) \to U\phi(\vec{r}); \quad A_\mu \to A_\mu + \frac{i}{e}U\partial_\mu U^{-1}, \quad U = e^{ie\alpha(x)} \in U(1)$$

- **Лагранжиан точечной частицы с зарядом e во внешнем поле:**

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}_k^2 + \underbrace{e(\dot{x}_k \cdot A_k)}_{L_{int}} \to L + e\dot{x}_k\partial_k\alpha(x) = L + \frac{d}{dt}(e\alpha(x))$$

- **Изменение действия:** $S = \int\limits_0^T dt\ L \to S + e\alpha(x)\Big|_0^T \Rightarrow e\alpha(x) = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$

$$S_{int} = e\int\limits_0^T dt\ (\dot{x}_k \cdot A_k) = e\oint dx_k \cdot A_k = 4\pi eg \equiv 2\pi n \Rightarrow \boxed{eg = \frac{n}{2}}$$

Вклад сингулярного потока: $e\Phi_{str} = -e\int d\vec{S}\cdot\vec{B}_{sing} = -4\pi eg$

$$\boxed{\Phi = \Phi_B + \Phi_{srt} = 4\pi eg - 4\pi eg = 0}$$

Замечание : ***Положение струны Дирака определено с точностью до (сингулярного) калибровочного преобразования, например*** $\vec{A} \to \vec{A} + \frac{i}{e} U \nabla U^{-1}, \quad U = e^{2ieg\varphi}$

$$\frac{i}{e} U \nabla U^{-1} = \frac{2g}{r \sin\theta} \vec{e}_\varphi \quad \Rightarrow \quad \vec{A}' = -\frac{g}{r} \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} \vec{e}_\varphi + \frac{2g}{r\sin\theta} \vec{e}_\varphi = \frac{g}{r} \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} \vec{e}_\varphi$$

Задача: ***к какой форме преобразуется потенциал Дирака после калибровочного преобразования*** $U = e^{ieg\varphi}$ ***?***

Потенциал $\vec{A} = -\frac{g}{r} \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} \vec{e}_\varphi$ сингулярен на полуоси $\theta=0$ $\Rightarrow$ A^S

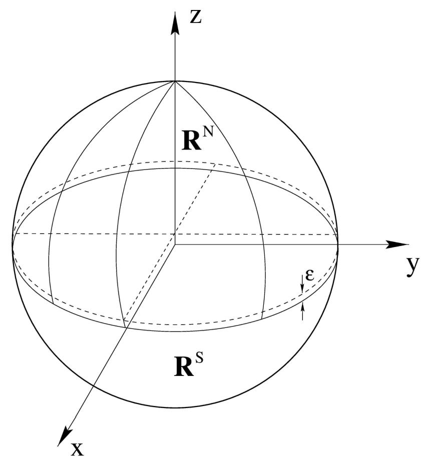
Регулярен в южной полусфере

Потенциал $\vec{A} = \frac{g}{r} \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} \vec{e}_\varphi$ сингулярен на полуоси $\theta=\pi$ $\Rightarrow$ A^N

Регулярен в северной полусфере

Потенциал Ву-Янга:

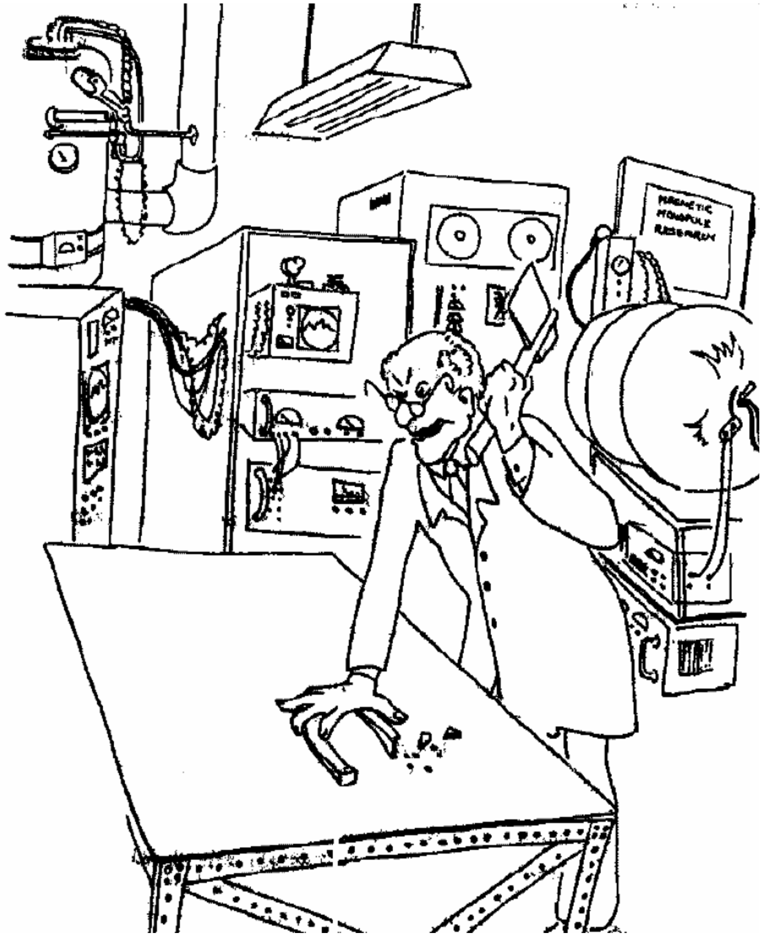
$$\begin{cases} \mathbf{A}^N = g\dfrac{1-\cos\theta}{r\sin\theta}\hat{\mathbf{e}} \implies 0 \le \theta < \frac{\pi}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \quad : R^N \\ \mathbf{A}^S = -g\dfrac{1+\cos\theta}{r\sin\theta}\hat{\mathbf{e}} \implies \frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2} < \theta \le \pi \quad : R^S \end{cases} \Rightarrow \boxed{\vec{B} = g\frac{\vec{r}}{r^3}}$$



Нет сингулярного вклада струны!

Экспериментальный поиск монополей

- На ускорителях
  (Fermilab, CERN, DESY…)
- Сверхпроводящие детекторы
- Астрофизика и космология
  (предел Паркера, нейтронные звезды…)
- Катализ распада протона
  (Berkeley, Stanford, IBM…)
- Монополи в космических лучах
  (Сцинтилляторы, ионизационные детекторы)



No monopole detected yet!