Производящий функционал и корреляторы

- **Производящий функционал:**

$$\boxed{Z(J) = \int D\varphi e^{-S[\varphi]+J\star\varphi}} \qquad J\star\varphi \equiv \int d^4x\; J(x)\varphi(x)$$

- **Вакуумное среднее поля $\varphi(x)$:**

$$\langle\varphi(x)\rangle = \frac{1}{Z(J)}\int D\varphi\;\varphi\; e^{-S[\varphi]+J\star\varphi} = \frac{1}{Z(J)}\frac{\delta}{\delta J(x)}Z[J]$$

- **Двухточечная корреляционная функция:**

$$\langle\varphi(y)\varphi(x)\rangle = \frac{1}{Z[J]}\frac{\delta}{\delta J(y)}\frac{\delta}{\delta J(x)}Z[J]$$

Физический смысл – определение вероятности наблюдения поля в точках x и y

- **Трехточечная корреляционная функция:**

$$\langle\varphi(z)\varphi(y)\varphi(x)\rangle = \frac{1}{Z[J]}\frac{\delta}{\delta J(z)}\frac{\delta}{\delta J(y)}\frac{\delta}{\delta J(x)}Z[J]$$

И так далее…

- **n-точечная корреляционная функция:**

$$\langle \varphi(x_n)\dots\varphi(x_2)\varphi(x_1)\rangle = \frac{1}{Z[J]}\frac{\delta}{\delta J(x_n)}\dots\frac{\delta}{\delta J(x_2)}\frac{\delta}{\delta J(x_1)}Z[J]$$

Знание всех корреляционных функций квантовой теории дает полную информацию о ней и эквивалентно заданию производящего функционала

- **Аналогия со статфизикой:**

$$Z_{stat} = \int \mathcal{D}[\varphi] e^{-\frac{H[\varphi]}{k_B T}} \equiv e^{-\frac{F}{k_B T}} \Rightarrow Z(J) = \int D\varphi e^{-S[\varphi]+J\star\varphi} = e^{-W[J]}$$

$W[J]$ **- Производящий функционал *связных* функций Грина**

$$\langle \varphi(x)\rangle = \frac{1}{Z[J]}\frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)} = \frac{\delta}{\delta J(x)}\ln Z[J] = -\frac{\delta W[J]}{\delta J(x)}$$

Пропагатор:

$$\mathcal{G}(x,y) \equiv \frac{\delta}{\delta J(y)}\langle\varphi(x)\rangle = -\frac{\delta}{\delta J(y)}\frac{\delta}{\delta J(x)}W[J]$$

Замечание:

$$\langle\varphi(x)\rangle = \frac{1}{Z(J)}\frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)} \Rightarrow \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)} = Z[J]\,\langle\varphi(x)\rangle$$

$$\langle\varphi(y)\varphi(x)\rangle = \frac{1}{Z[J]}\frac{\delta}{\delta J(y)}\frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)} = \frac{1}{Z[J]}\frac{\delta}{\delta J(y)}\left(Z[J]\,\langle\varphi(x)\rangle\right) = \langle\varphi(y)\rangle\langle\varphi(x)\rangle + \mathcal{G}(x,y)$$

Пропагатор – это величина, описывающая взаимное влияние полей в точках x и y:

$$\mathcal{G}(x,y) = \langle\varphi(x)\varphi(y)\rangle - \langle\varphi(x)\rangle\langle\varphi(y)\rangle$$

Если поля статистически независимы, то $\langle\varphi(x)\varphi(y)\rangle = \langle\varphi(x)\rangle\langle\varphi(y)\rangle$ (тривиализация) и $\mathcal{G}(x,y) = 0$

Теория называется тривиальной, если для всех n-точечных функций

$$\langle\varphi(x_n)\varphi(x_{n-1})\dots\varphi(x_2)\varphi(x_1)\rangle = \langle\varphi(x_n)\rangle\langle\varphi(x_{n-1})\rangle\dots\langle\varphi(x_2)\rangle\langle\varphi(x_1)\rangle$$

Корреляцонные функции свободной теории

$$S = \frac{1}{2}\int d^4x\,((\partial_\mu\varphi)^2 + m^2\varphi^2)$$

Действие

Производящий функционал

$$Z[J] = \int \mathcal{D}[\varphi(x)]e^{-\int d^4x\left[\frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2+\frac{1}{2}m^2\varphi^2-J(x)\varphi(x)\right]}$$

- ***Уравнения поля (Евклид):*** $\left(-\partial_\mu^2 + m^2\right)\varphi(x) = J(x)$
- ***Флуктуации полей над вакуумом:*** $\varphi = \phi_0 + \delta\varphi\,, \quad \phi_0 = \mathrm{const}$
- **Производящий функционал флуктуаций:**

$$\boxed{Z[J] = e^{\int d^4x\;\; J(x)\varphi_0(x)}\int\mathcal{D}[\chi(x)]e^{-\frac{1}{2}\int d^4x\;\;\chi(x)(-\partial_\nu^2+m^2)\chi(x)}}$$

Гауссово интегрирование:

$$Z[J] = N\left[\det(-\partial_\nu^2 + m^2)\right]^{-1/2} e^{\int d^4x\;\; J(x)\varphi_0(x)} = \boxed{N' e^{\int d^4x\;\; J(x)\varphi_0(x)}}$$

Функция Грина свободной теории

- **Функция Грина уравнения Клейна-Гордона:**

$$\left(-\partial_\nu^2 + m^2\right) G(x-y) = \delta(x-y)$$

$$\begin{cases} G(x) = \displaystyle\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} G(p) e^{ip_\mu x_\mu} \\ \delta(x) = \displaystyle\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{ip_\mu x_\mu} \end{cases}$$

$$(p^2+m^2)G(p) = 1, \qquad G(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{ip_\mu x_\mu}}{p^2+m^2}$$

Замечание: ***В отличие от функции Грина в пространстве Миньковского подинтегральное выражение не имеет полюсов.***

$$p_4 = -ip_0; \quad \Rightarrow \quad G_M(x) = -\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{ip_\mu x^\mu}}{p_0^2 - \vec{p}^2 - m^2}$$

- **Формальное решение уравнения Клейна-Гордона:**

$$\varphi_0(x) = \int d^4y\, G(x-y) J(y) \equiv G \star J$$

- **Производящий функционал** $Z[J] = N' e^{\int d^4x d^4x' J(x') G(x-x') J(x)} \equiv N' e^{J\star G\star J}$

$$W[J] = -\int d^4x d^4x' J(x) G(x-x') J(x') \equiv -J\star G\star J$$

Свойства функция Грина

- ***Обратная функция Грина:***

$$G^{-1}(x,y) = \delta(x-y)(-\partial_\mu^2 + m^2)$$

Проверка:

$$G^{-1} \star G = \int d^4y\; G^{-1}(x,y)G(y,z) = \int d^4y\; \delta(x-y)(-\partial_\mu^2 + m^2)G(y,z)$$

$$= \int d^4y\; \delta(x-y)\delta(y-z) = \delta(x-z)$$

- ***Действие:***

$$S[\varphi_0(x)] = \frac{1}{2}\int d^4x\, \varphi(x)(-\partial_\mu^2 + m^2)\varphi(x) = \frac{1}{2}\int d^4x d^4y\; \varphi(y)\delta(x-y)(-\partial_\mu^2 + m^2)\varphi(x)$$

$$= \frac{1}{2}\int d^4x d^4y\; \varphi(y)G^{-1}(x-y)\varphi(x) \equiv$$

Раздвижка точек

- ***Вакуумное среднее:***

$$\langle\varphi(x)\rangle = \frac{1}{Z[J]}\frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)} = \int d^4y\; G(x-y)J(y) = G \star J$$

- ***Коррелятор:***

$$\langle\varphi(x)\varphi(y)\rangle = \frac{1}{Z[J]}\frac{\delta}{\delta J(x)}\frac{\delta}{\delta J(y)}Z[J] = e^{-J\star G\star J}\frac{\delta}{\delta J(x)}\left(G(y,y')\star J(y')e^{J\star G\star J}\right)$$

$$= G(x,y) + \left(G(x,x')\star J(x')\right)\left(G(y,y')\star J(y')\right)$$

3-х точечная функция: $\langle\varphi(x)\varphi(y)\varphi(z)\rangle = \dfrac{1}{Z[J]}\dfrac{\delta}{\delta J(x)}\dfrac{\delta}{\delta J(y)}\dfrac{\delta}{\delta J(z)}Z[J]$?

$$= \Big(G(x,x')\star J(x')\Big)\Big(G(y,y')\star J(y')\Big)\Big(G(z,z')\star J(z')\Big)$$

$$+G(x,y)\Big(G(z,z')\star J(z')\Big)+G(x,z)\Big(G(y,y')\star J(y')\Big)+G(y,z)\Big(G(x,x')\star J(x')\Big)$$

Диаграммная техника:

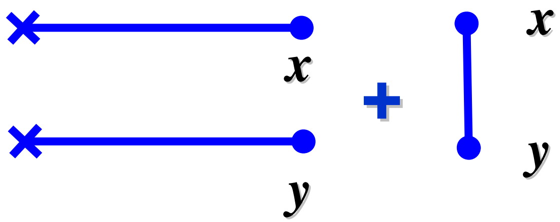
$\Longleftrightarrow$ $$G(x-y) = -\frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x)\delta J(y)}$$

$\Longleftrightarrow$ $$\int d^4x'\ G(x-x')J(x') = -\frac{\delta W[J]}{\delta J[x]}$$

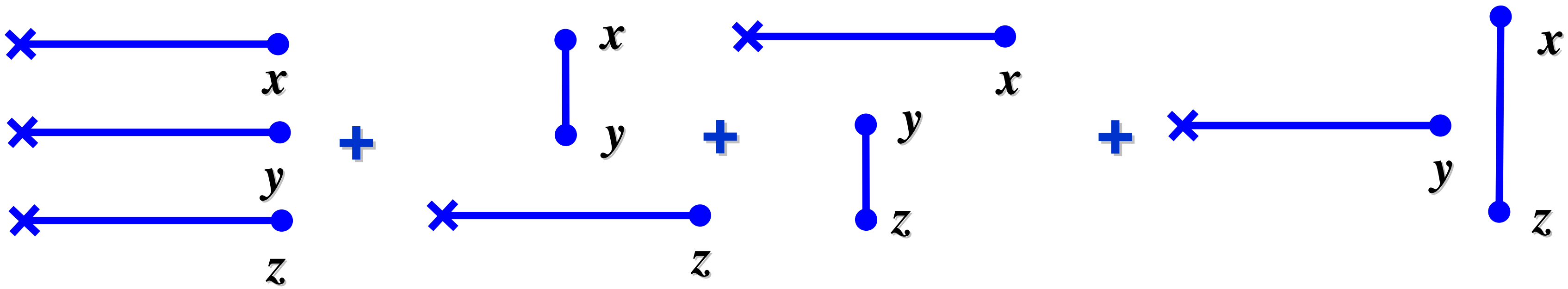
$\Longleftrightarrow$ $$\int d^4x' d^4x''\ J(x')G(x'-x'')J(x'') = -W[J]$$

***Замечание:* Диаграмма для вакуумного среднего**

$\Longleftrightarrow$ $\langle\varphi(x)\rangle$



$$\langle\varphi(x)\varphi(y)\rangle = G(x,y) + \Big(G(x,x')\star J(x')\Big)\Big(G(y,y')\star J(y')\Big)$$

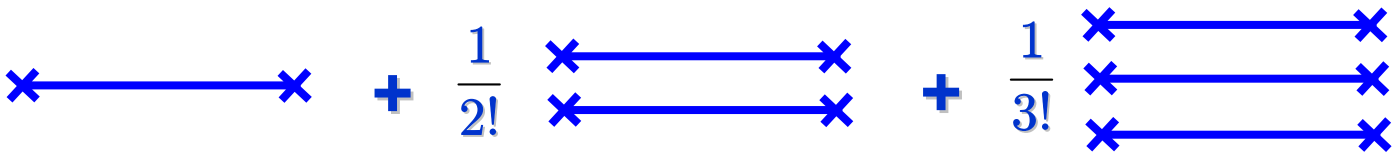


$$\langle\varphi(x)\varphi(y)\varphi(z)\rangle = \Big(G(x,x')\star J(x')\Big)\Big(G(y,y')\star J(y')\Big)\Big(G(z,z')\star J(z')\Big)$$

$$+G(x,y)\Big(G(z,z')\star J(z')\Big) + G(x,z)\Big(G(y,y')\star J(y')\Big) + G(y,z)\Big(G(x,x')\star J(x')\Big)$$

- **Разложение производящего функционала:**

$$Z[J] = 1 + \langle\varphi(x)\rangle\Big|_{J=0} \star J(x) + \frac{1}{2!}\langle\varphi(x)\varphi(y)\rangle\Big|_{J=0} \star J(x)\star J(y) + \ldots$$

$Z[J] =$ 

Производящий функционал теории φ^4

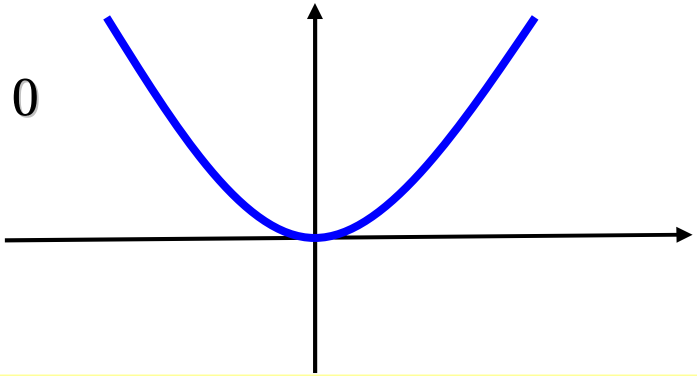
Действие:

$$S = \frac{1}{2}\int d^4x \left[(\partial_\mu\varphi)^2 + U(\varphi)\right]$$

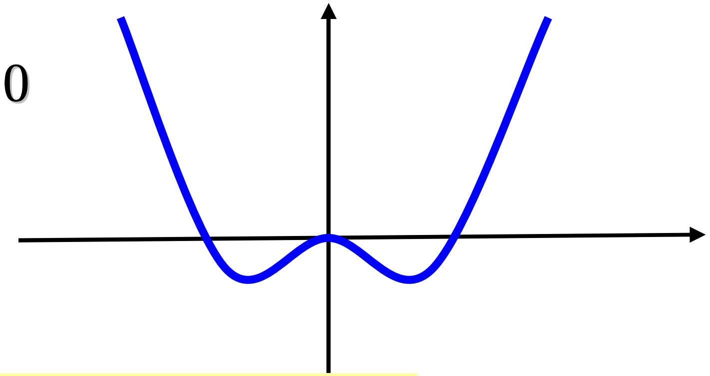
Потенциал:

$$U(\varphi) = \frac{1}{2}m^2\varphi^2 + \frac{\lambda}{4!}\varphi^4 \equiv \frac{1}{2}m^2\varphi^2 + U_{int}(\varphi)$$

$m^2 > 0$



$m^2 < 0$



- ***Модель без спонтанного нарушения симметрии:*** $m^2 > 0$

Задача: **вычислить производящий функционал**

$$Z[J] = \int \mathcal{D}[\varphi(x)]e^{-\int d^4x\,\left[\frac{1}{2}(\partial_\nu\varphi)^2 + \frac{1}{2}\cancel{m^2}\varphi^2 + \frac{\lambda}{4!}\varphi^4 - J(x)\varphi(x)\right]}$$

- ***Рассмотрим сначала безмассовую модель:*** $m = 0$

Метод: **пертурбативное разложение по константе связи** λ

$$\exp\left\{-\frac{\lambda}{4!}\int d^4x\varphi^4\right\} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-\lambda}{4!}\right)^n\frac{1}{n!}\int d^4x_1\dots d^4x_n\varphi^4(x_1)\dots\varphi^4(x_n)$$

$$Z[J] = \sum_n\left(\frac{-\lambda}{4!}\right)^n\frac{1}{n!}\int d^4x_1\dots d^4x_n\int\mathcal{D}[\varphi(x)]\varphi^4(x_1)\dots\varphi^4(x_n) \times e^{-\int d^4x\left[\frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2+\frac{1}{2}m^2\varphi^2-J(x)\varphi(x)\right]}$$

Замечание: $\varphi(x_1)\varphi(x_2)\dots\varphi(x_n) = \frac{\delta^n}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)\dots\delta J(x_n)}\left(e^{\int d^4x\ \varphi(x)J(x)}\right)\Big|_{J=0}$

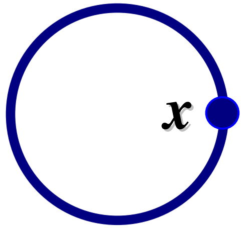
$$Z[J] = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-\lambda}{4!}\right)^n\frac{1}{n!}\int d^4x_1\dots d^4x_n\left(\frac{\delta}{\delta J(x_1)}\right)^4\dots\left(\frac{\delta}{\delta J(x_n)}\right)^4 \times\int\mathcal{D}[\varphi(x)]e^{-\int d^4x\ \left[\frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2+\frac{1}{2}m^2\varphi^2-J(x)\varphi(x)\right]}$$

$$= e^{-\int d^4x\ U_{int}\left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)}\int\mathcal{D}[\varphi(x)]e^{-S_0[\varphi(x)]+\int d^4x\ J(x)\varphi(x)} = e^{-\int d^4x\ U_{int}\left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)}\ e^{\frac{1}{2}J\star G\star J}$$

- **В первом порядка по λ:** $$Z[J] \approx \int d^4x \left[1 - \frac{\lambda}{4!}\left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^4\right] e^{\frac{1}{2} J\star G\star J}$$

Задача: последовательно вычислить четвертую вариационную производную:

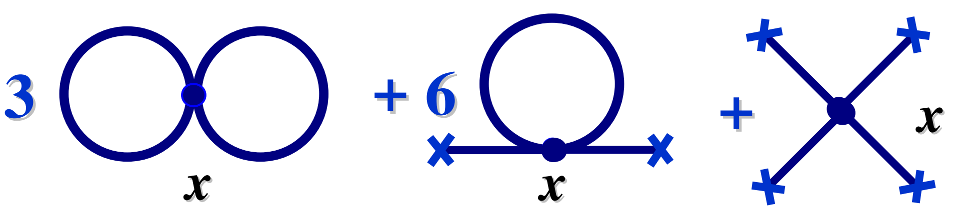
- $$\frac{\delta}{\delta J(x)}\left(e^{\frac{1}{2}\int d^4y d^4z \; J(y)G(y-z)J(z)}\right) = \left[\int d^4y \; G(x-y)J(y)\right] e^{\frac{1}{2} J\star G\star J}$$
- $$\frac{\delta^2}{\delta J^2(x)}\left(e^{\frac{1}{2} J\star G\star J}\right) = \left[G(x-x) + \left(\int d^4y \; G(x-y)J(y)\right)^2\right] e^{\frac{1}{2} J\star G\star J}$$



$$\Leftrightarrow \; G(x-x) = G(0)$$

- $$\frac{\delta^3}{\delta J^3(x)}\left(e^{\frac{1}{2} J\star G\star J}\right) =$$
$$\left[3G(x-x)\left(\int d^4y \; G(x-y)J(y)\right) + \left(\int d^4y \; G(x-y)J(y)\right)^3\right] e^{\frac{1}{2} J\star G\star J}$$
- $$\frac{\delta^4}{\delta J^4(x)}\left(e^{\frac{1}{2} J\star G\star J}\right) =$$
$$\boxed{\left[3G^2(0) + 6G(0)\left(\int d^4y \; G(x-y)J(y)\right)^2 + \left(\int d^4y \; G(x-y)J(y)\right)^4\right] e^{\frac{1}{2} J\star G\star J}}$$

$$\frac{\delta^4}{\delta J^4(x)}\left(e^{\frac{1}{2}J\star G\star J}\right)=\Big\{\ 3\ \cdots\ +6\ \cdots\ +\ \cdots\ \Big\}\,e^{\frac{1}{2}J\star G\star J}$$



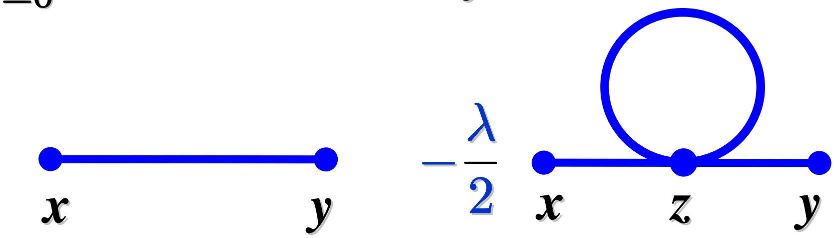
$$Z[J]=\left\{1-\frac{\lambda}{4!}\int d^4x\left[3G(0)^2+6G(0)\left(\int d^4y\,G(x-y)J(y)\right)^2+\left(\int d^4y\,G(x-y)J(y)\right)^4\right]\right\}e^{\frac{1}{2}J\star G\star J}$$

$$W[J]=-\frac{1}{2}J\star G\star J+\frac{\lambda}{4!}\int d^4x\left[3G(0)^2+6G(0)\Big(G\star J\Big)^2+\Big(G\star J\Big)^4\right]$$

- ***Двухточечная функция:***

$$\langle\varphi(x)\varphi(y)\rangle\Big|_{J=0}=\frac{1}{Z[J]}\frac{\delta}{\delta J(x)}\frac{\delta}{\delta J(y)}Z[J]\Big|_{J=0}=G(x-y)-\frac{\lambda}{2}G(0)\int d^4z\,G(x-y)G(z-y)$$

- **Первая поправка к классическому пропагатору:**



Замечание: ***Любой вершине λ соответствует 4 «ноги». Пертурбативное разложение по константе связи предполагается в режиме слабой связи***

Петлевое разложение производящего функционала

Действие: $$S = \frac{1}{2}\int d^4x\left[(\partial_\mu\varphi)^2 + U(\varphi)\right]$$

Потенциал: $$U(\varphi) = \frac{1}{2}m^2\varphi^2 + \frac{\lambda}{4!}\varphi^4 \equiv \frac{1}{2}m^2\varphi^2 + U_{int}(\varphi)$$

- ***Массивная модель без спонтанного нарушения симметрии:*** $m^2 > 0$

Задача: **вычислить производящий функционал**

$$\boxed{Z[J] = \int \mathcal{D}[\varphi(x)]e^{-\int d^4x\,\left[\frac{1}{2}(\partial_\nu\varphi)^2 + \frac{1}{2}m^2\varphi^2 + \frac{\lambda}{4!}\varphi^4 - J(x)\varphi(x)\right]}}$$

- ***Уравнения поля (Евклид):*** $\partial_\mu^2\varphi(x) = U' - J(x),$ $\qquad U' = \dfrac{\delta U}{\delta\varphi}$
- ***Флуктуации полей над вакуумом:*** $\varphi(x) = \phi_0(x) + \delta\varphi(x)$
- ***Разложение действия по флуктуациям поля:***

$$\boxed{S[\varphi] - J\star\varphi = S[\varphi_0] - J\star\varphi_0 + \delta S - J\star\delta\phi + \frac{1}{2!}\delta^2 S + \frac{1}{3!}\delta^3 S + \dots}$$

- **Первая вариация действия:**

$$\delta S - J\star\delta\phi = \int d^4x\,\left[-\partial_\mu^2\varphi_0 + U'(\varphi_0) - J(x)\right]\delta\phi$$

Уравнения поля

- **Вторая вариация действия:**

$$\delta^2 S = \int d^4x\;\delta\phi\left[-\partial_\mu^2 + U''(\varphi_0)\right]\delta\phi$$

Функциональный детерминант

- **Третья вариация действия:**

$$\delta^3 S = \int d^4x\; U'''(\varphi_0)\delta\phi^3$$

- **Четвертая вариация действия:**

$$\delta^4 S = \int d^4x\; U^{(\mathrm{IV})}(\varphi_0)\delta\phi^4$$

Замечание 1: *в теории φ^4 все высшие вариации действия равны 0*

Замечание 2: *в теории имеется 2 типа разложения действия:*
по константе связи («ноги», $\lambda \ll 1$) и по δS («петли», $\hbar \ll 1$)

- **Проблема:** **Действие S зависит от поля φ_0 а не от $\langle\varphi(x)\rangle$:**

?

$$Z[J] = e^{-S[\varphi_0]+J\star\varphi_0}\int \mathcal{D}[\delta\phi]\,e^{\frac{1}{2!}\delta\phi\star\frac{\delta^2 S[\varphi_0]}{\delta\varphi^2}\star\delta\phi+\frac{1}{3!}\frac{\delta^3 S[\varphi_0]}{\delta\varphi^3}\star\delta^3\phi++\frac{1}{4!}\frac{\delta^4 S[\varphi_0]}{\delta\varphi^4}\star\delta^4\phi\ldots}$$

Преобразование Лежандра

- **Простой пример преобразования обычной действительной функции:**

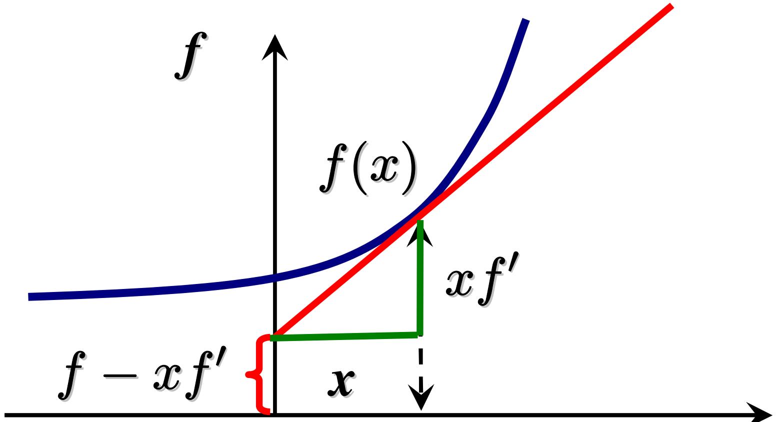
$$f(x); \qquad df(x) = f'(x)dx$$
$$d(xf') = f'dx + xdf'$$

$$\Rightarrow \quad d(xf' - f) = xdf'$$

- **Определим новую функцию** F **и переменную** y **:** $\quad (f, x) \Longrightarrow (F, y)$

$$F = xf' - f; \qquad y = f'(x)$$

$$\Rightarrow \quad dF(y) = F'(y)dy; \qquad x = F'(y)$$



Переменная q не затрагивается

- **Преобразование Лежандра: от лагранжевой к гамильтоновой механике**

$$f \Rightarrow L(q, \dot{q}); \qquad x \Rightarrow \dot{q}$$
$$H = \dot{q}p - L; \qquad p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$$

$$\frac{\partial H(p,q)}{\partial p} = \dot{q}; \qquad \frac{\partial H(p,q)}{\partial q} = -\dot{p}$$

Функциональное преобразование Лежандра

- ***Задача:*** ***убрать зависимость от источников*** $J(x)$ ***в функционале*** $W[J]$ **:**

$$\langle\varphi(x)\rangle = -\frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} \quad \Longleftrightarrow \quad p = \frac{\partial L(q,\dot q)}{\partial \dot q}$$

$$\left\{\begin{array}{c} \dot q \\ p \\ L(q,\dot q) \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} J(x); \\ \langle\varphi(x)\rangle \\ W[J] \end{array}\right\}$$

- **Эффективное действие:**

$$H = p\dot q - L \quad \Longleftrightarrow \quad \Gamma[\langle\varphi\rangle] = J\star\langle\varphi\rangle + W[J]$$

- **Замечание 1:** **Эффективное действие** $\Gamma[\langle\varphi\rangle]$ ***зависит*** **от** $\langle\varphi(x)\rangle$ **а не от** φ **:**

- **Уравнения движения:** $\dfrac{\delta\Gamma}{\delta\langle\varphi(x)\rangle} = J \quad \Longleftrightarrow \quad \left.\dfrac{\delta S}{\delta\varphi}\right|_{\varphi=\varphi_0} = J$

- **Замечание 2:** **Эффективное действие** $\Gamma[\langle\varphi\rangle]$ ***не зависит*** **от** J **:**

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta J} = \langle\varphi(x)\rangle + \frac{\delta W}{\delta J} = 0$$

Замечание 3: $$\frac{\delta\Gamma}{\delta\langle\varphi(x)\rangle} = J \Rightarrow \boxed{\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\langle\varphi(x)\rangle\delta\langle\varphi(y)\rangle} = \frac{\delta J(x)}{\delta\langle\varphi(y)\rangle} = G^{-1}(x,y)}$$

Проверка:

$$G(x,y) = \frac{\delta\langle\varphi(x)\rangle}{\delta J(y)} \Rightarrow G^{-1}(x,y)\star G(y,z) = \int dy \frac{\delta J(x)}{\delta\langle\varphi(y)\rangle} G(y,z)$$

$$= \int dy \frac{\delta J(x)}{\delta\langle\varphi(y)\rangle}\frac{\delta\langle\varphi(y)\rangle}{\delta J(z)} = \frac{\delta\langle J(x)\rangle}{\delta J(z)} = \delta(x-z)$$

Напомним:

$$W[J] = S[\varphi_0] - J\star\varphi_0 + \frac{\hbar}{2}\ln\det\left[-\partial_\mu^2 + U''(\varphi_0)\right]$$

$$\Gamma[\langle\varphi\rangle] = S[\varphi_0] + J\star(\langle\varphi(x)\rangle - \varphi_0) + \frac{\hbar}{2}\ln\det\left[-\partial_\mu^2 + U''(\varphi_0)\right]$$

$$\boxed{J = \left.\frac{\delta S}{\delta\varphi}\right|_{\varphi=\varphi_0}}$$

$$= S[\langle\varphi\rangle] + \frac{\hbar}{2}\ln\det\left[-\partial_\mu^2 + U''(\langle\varphi\rangle)\right] + O(\hbar^2)$$

- ***В пределе $\hbar\to 0$ эффективное действие Γ переходит в обычное действие S, а вакуумное среднее $\langle\varphi\rangle$ - в классическое поле φ***
- ***Эффективное действие Γ описывает эволюцию вакуумного среднего поля $\langle\varphi\rangle$ так же, как обычное действие S описывает эволюцию поля φ***

Разложение функционального детерминанта

Проблема: Как вычислить функциональный детерминант?

Решение возможно для слабо меняющихся или постоянных полей в вакууме

(Квазиклассическое приближение)

Флуктуации полей над вакуумом: $\varphi(x) = a + \chi(x)$

Потенциал:

$$U(\varphi) = \frac{\lambda}{4!}(\varphi^2 - a^2)^2; \qquad \varphi_0 = \pm a$$

$$U''(\varphi(x)) = U''(a) + U'''(a)\chi(x) + \frac{1}{2}U^{iv}(a)\chi(x)^2 \equiv U''(a) + U_{int}(\chi(x))$$

$$U''(a) = \frac{\lambda a^2}{3}; \qquad \underbrace{U'''(a) = \lambda a; \qquad U^{iv}(a) = \lambda}$$

Массовый член m^2

Потенциал взаимодействия: $U_{int} = \lambda a \cdot \chi + \frac{\lambda}{2} \cdot \chi^2$

Разложение функционального детерминанта: $\ln\det = \mathrm{Tr}\,\ln$

$$\frac{\hbar}{2}\ln\det\left[-\partial_\mu^2 + m^2 + U_{int}\right] = \frac{\hbar}{2}\mathrm{Tr}\,\ln\left[G^{-1} + U_{int}\right] = \frac{\hbar}{2}\mathrm{Tr}\,\ln G^{-1} + \frac{\hbar}{2}\mathrm{Tr}\,\ln\left[1 + G\star U_{int}\right]$$

Замечание: след Tr не матричный, а ***функциональный!***

$$\frac{\hbar}{2}\ln\det\left[-\partial_\mu^2+m^2+U_{int}\right]=\frac{\hbar}{2}\mathrm{Tr}\ \ln G^{-1}+\frac{\hbar}{2}\mathrm{Tr}\ \ln\left[1+G\star U_{int}\right]$$

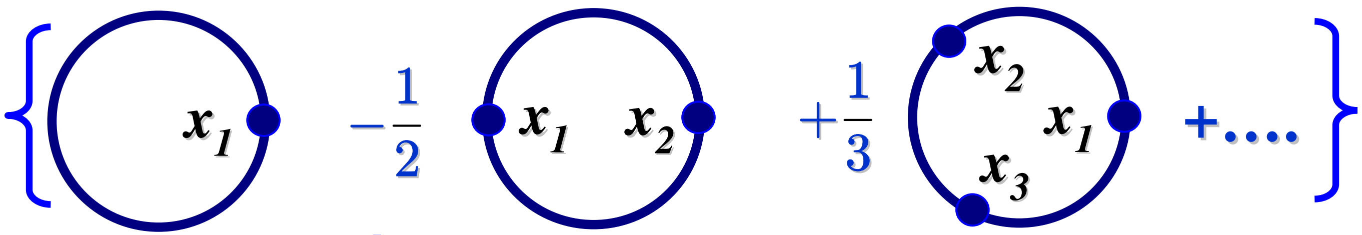
$$\ln(1+x)=x-\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{3}x^3+\ldots$$

$$\boxed{\mathrm{Tr}\ln\left[1+G\star U_{int}\right]=\mathrm{Tr}\ G\star U_{int}-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\ G\star U_{int}\star G\star U_{int}+\frac{1}{3}\ \mathrm{Tr}\ G\star U_{int}\star G\star U_{int}\star G\star U_{int}-\ldots}$$

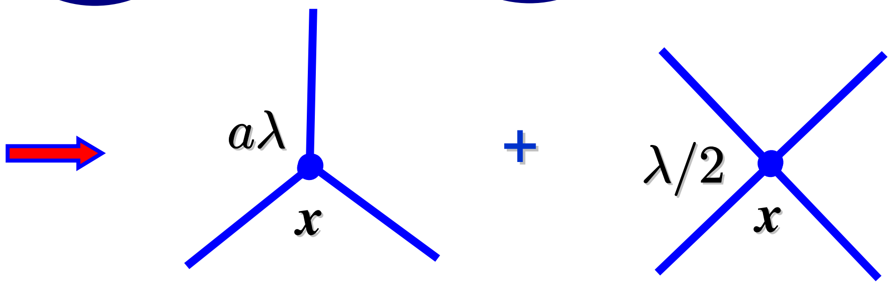
Напомним: $\frac{1}{3}\mathbf{Tr}\ G\star U_{int}\star G\star U_{int}\star G\star U_{int}=$

$$=\frac{1}{3}\int dx_1dx_2dx_3G(x_1-x_2)U_{int}(x_1)G(x_2-x_3)U_{int}(x_2)G(x_3-x_1)U_{int}(x_3)$$

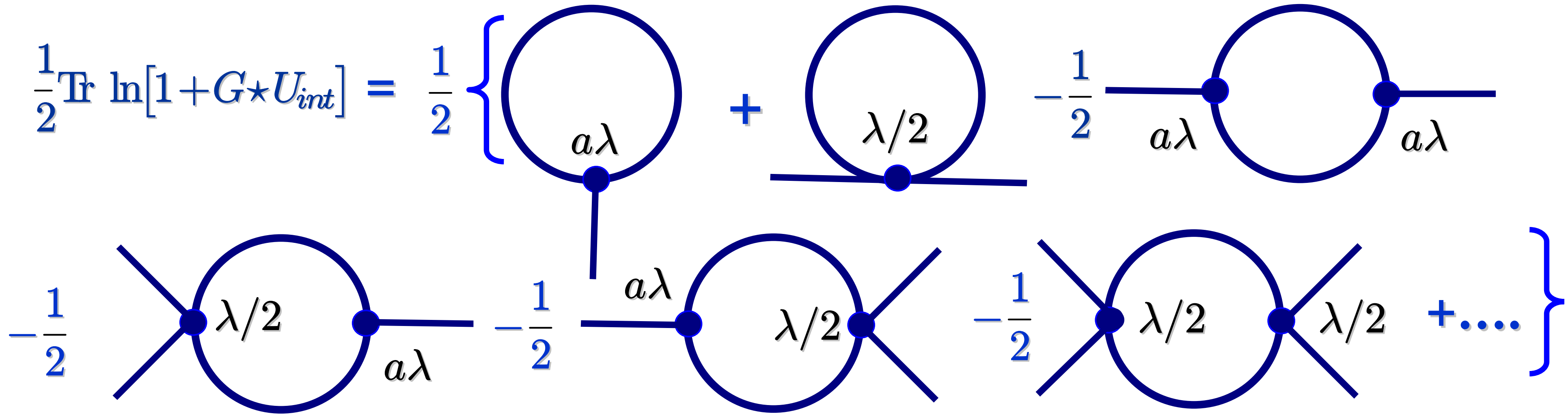
$\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\ \ln[1+G\star U_{int}]=\frac{1}{2}$



$$\boxed{U_{int}=a\lambda\cdot\chi+\frac{\lambda}{2}\cdot\chi^2}$$



$$\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\ \ln[1+G\star U_{int}] =$$



Разложение эффективного действия:

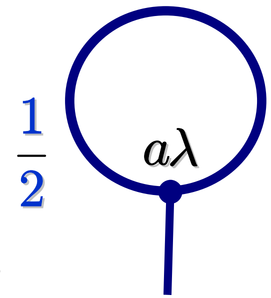
$$\Gamma[\phi_0+\chi(x)] = VT\,U_{eff}(\phi_0)+\Gamma^{(1)}[\phi_0]\star\chi+\frac{1}{2!}\Gamma^{(2)}[\phi_0]\star\chi\star\chi+\frac{1}{3!}\Gamma^{(3)}[\phi_0]\star\chi\star\chi\star\chi+\ldots$$

$$U_{eff} = S\left[\langle\varphi_0\rangle\right] + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\ \ln\left[-\partial_\mu^2 + U''\right]$$

Вершина:

$$\Gamma^{(1)} = \frac{a\lambda}{2}G(0)\int d^4x\ \chi(x)$$

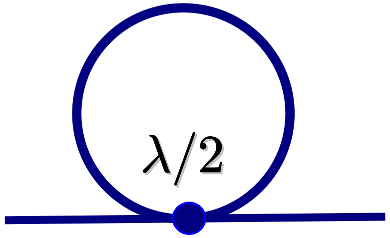
$$\frac{1}{2}\Gamma^{(2)}\star\chi\star\chi = \frac{1}{2}\int d^4x\ \chi[+\partial_\mu^2 + u'']\chi + \frac{1}{2}\lambda G(0)\int d^4x\ \chi^2$$
$$-\frac{1}{4}(a\lambda)^2\int d^4x d^4y\ \chi(x)G(x-y)\chi(y)G(y-x) + \ldots$$



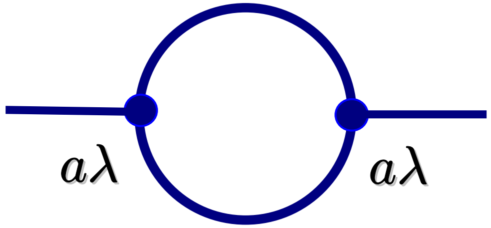
Вычисление эффективного действия

Задача: вычислить диаграммы, вносящие вклад в эффективное действие

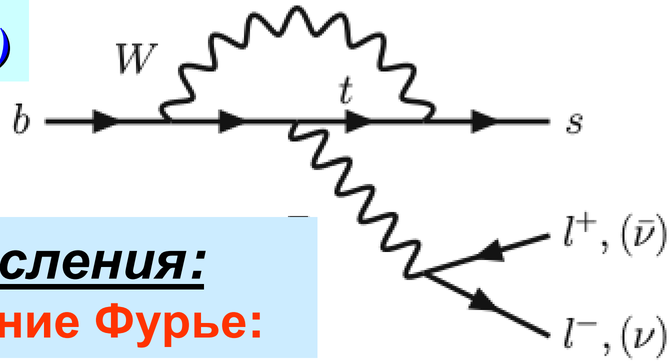
- **Tadpole:**

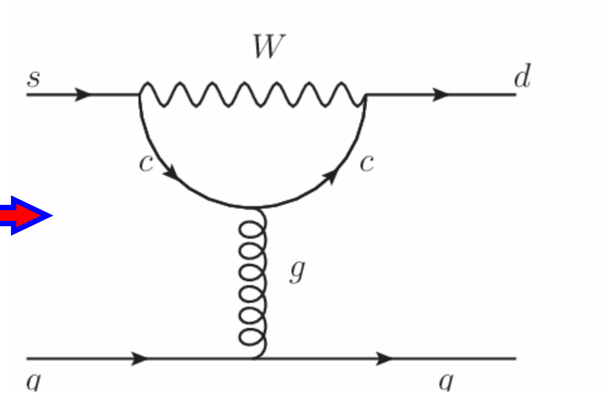


- **Fish:**



Penquin:
(не очень похож?)





Техника вычисления:

1. Преобразование Фурье:

$$\chi(k) = \int d^4x\, \chi(x)\, e^{-ikx}; \qquad \chi(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, \chi(k)\, e^{ikx}$$

- **Напомним:**

$$G(k,k') = \frac{\delta(k+k')}{k^2+m^2}, \qquad G^{-1}(k,k') = (2\pi)^4 \delta(k+k')(k^2+m^2)$$

Вторая вариация действия:

$$\delta^2 S = \frac{1}{2}\int d^4x\,\chi(x)(-\partial^2+m^2)\chi(x) = \frac{1}{2}\int d^4x \frac{d^4k'}{(2\pi)^4}\frac{d^4k}{(2\pi)^4}(k^2+m^2)\chi(k')\chi(k)e^{i(k+k')x}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4}\frac{d^4k}{(2\pi)^4}(2\pi)^4\delta(k+k')(k^2+m^2)\chi(k')\chi(k)) = \frac{1}{2}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}(k^2+m^2)|\chi(k)|^2$$

Третья вариация действия:

$$\delta^3 S = \frac{1}{3!}\int d^4x\; U'''\chi(x)^3 = \frac{a\lambda}{3!}\int d^4x\chi(x)^3$$

$$= \frac{a\lambda}{3!}\int d^4x \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4}\frac{d^4k_2}{(2\pi)^4}\frac{d^4k_3}{(2\pi)^4}\chi(k_1)\chi(k_2)\chi(k_3)\, e^{i(k_1+k_2+k_3)x}$$

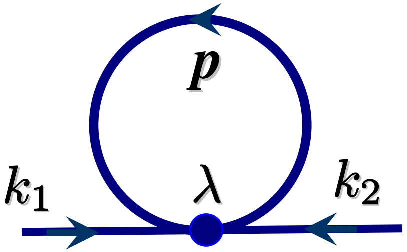
$$= \frac{a\lambda}{3!}\int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4}\frac{d^4k_2}{(2\pi)^4}\frac{d^4k_3}{(2\pi)^4}(2\pi)^4\delta(k_1+k_2+k_3)\chi(k_1)\chi(k_2)\chi(k_3)$$

Четвертая вариация действия:

$$\delta^4 S = \frac{1}{4!}\int d^4x\; U^{(\mathrm{iv})}\chi(x)^4 = \frac{\lambda}{4!}\int d^4x\;\chi(x)^4$$

$$= \frac{\lambda}{4!}\int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4}\dots\frac{d^4k_4}{(2\pi)^4}(2\pi)^4\delta(k_1+k_2+k_3+k_4)\chi(k_1)\chi(k_2)\chi(k_3)\chi(k_4)$$

- **Tadpole:**



$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{1}{2}\cdot\frac{\lambda}{2}\int d^4x\; G(x-x)\chi^2(x)}$$

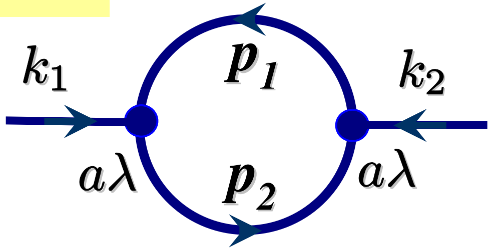
- **Преобразование Фурье:**

$$= \frac{\lambda}{4}\int d^4x \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4}\frac{d^4k_2}{(2\pi)^4}\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{1}{p^2+m^2}\chi(k_1)\chi(k_2)e^{ik_1x}e^{ik_2x}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4}\frac{d^4k_2}{(2\pi)^4}(2\pi)^4\delta(k_1+k_2)\,\Sigma^{(1)}\,\chi(k_1)\chi(k_2)$$

$$\boxed{\Sigma^{(1)} = \frac{\lambda}{2}\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{1}{p^2+m^2}}$$

- **Fish:**



$$\Rightarrow \quad \boxed{-\frac{a^2\lambda^2}{4}\int d^4x\; d^4y\;\chi(x)G(x-y)\chi(y)G(y-x)}$$

$$= -\frac{a^2\lambda^2}{4}\int d^4x d^4y\,\frac{d^4k_1}{(2\pi)^4}\frac{d^4k_2}{(2\pi)^4}\frac{d^4p_1}{(2\pi)^4}\frac{d^4p_2}{(2\pi)^4}\frac{e^{ip_1(x-y)}}{p_1^2+m^2}\frac{e^{ip_2(y-x)}}{p_2^2+m^2}\chi(k_1)\chi(k_2)e^{ik_1x+ik_2y}$$

$$= -\frac{a^2\lambda^2}{4}\int\frac{d^4k_1}{(2\pi)^4}\frac{d^4k_2}{(2\pi)^4}\frac{d^4p_1}{(2\pi)^4}\frac{d^4p_2}{(2\pi)^4}(2\pi)^4\delta(p_1-p_2+k_1)(2\pi)^4\delta(p_2-p_1+k_2)$$

$$\times\frac{1}{p_1^2+m^2}\frac{1}{p_2^2+m^2}\chi(k_1)\chi(k_2)$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4}\frac{d^4k_2}{(2\pi)^4}(2\pi)^4\delta(k_1+k_2)\Sigma^{(2)}(k_1)\chi(k_1)\chi(k_2)$$

$$\Sigma^{(2)}(k) = -\frac{a^2\lambda^2}{2}\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{1}{p^2+m^2}\frac{1}{(p+k)^2+m^2}$$

- **Напомним:**

$$\Gamma[\phi_0+\chi(x)] = VT\,U_{eff}(\phi_0)+\Gamma^{(1)}[\phi_0]\star\chi+\frac{1}{2!}\Gamma^{(2)}[\phi_0]\star\chi\star\chi+\frac{1}{3!}\Gamma^{(3)}[\phi_0]\star\chi\star\chi\star\chi+\ldots$$

$$\Gamma^{(2)}[\phi_0] = G^{-1}(k)+\Sigma^{(1)}+\Sigma^{(2)}+\cdots = k^2+m^2+\frac{\lambda}{2}A^{(1)}-\frac{a^2\lambda^2}{2}A^{(2)}(k)+\ldots$$

Интеграл Фейнмана:

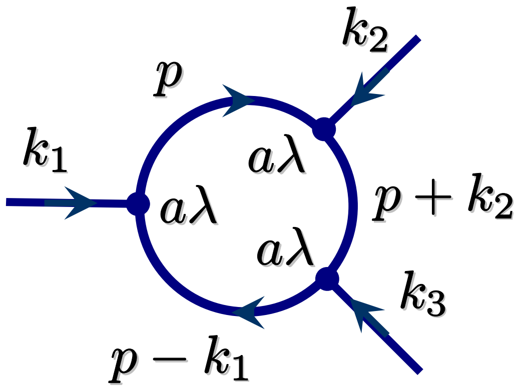
$$A^{(n)}(k_1,k_2\ldots k_n) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{1}{p^2+m^2}\frac{1}{(p+k_1)^2+m^2}\cdots\frac{1}{(p+k_1+\ldots k_{n-1})^2+m^2}$$

- **Собственная энергетическая часть:**

$$\Sigma = \Sigma^{(1)}+\Sigma^{(2)}$$

- **Замечание:** вклад петлевых поправок в Σ сдвигает полюс пропагатора

Вершина:



Задача: покажите, что

$$\boxed{\Gamma^{(3)}(k_1,k_2,k_3) = a\lambda - 3A^{(2)}(k_1+k_2,k_3) + (a\lambda)^3 A^{(3)}(k_1,k_2,k_3) + \ldots}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\Gamma^{(4)}(k_1,k_2,k_3,k_4) &= \lambda - 6A^{(2)}(k_1,k_2) + \\ &+12\lambda(a\lambda)^2 A^{(3)}(k_1,k_2,k_3+k_4) - 3A^{(4)}(k_1,k_2,k_3,k_4) + \ldots\end{aligned}}$$

Замечание: Расходятся только 2 интеграла:

$$\Sigma^{(1)} = \frac{\lambda}{2}\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{1}{p^2+m^2}$$

$$\Sigma^{(2)}(k) = -\frac{a^2\lambda^2}{2}\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{1}{p^2+m^2}\frac{1}{(p+k)^2+m^2}$$

Собирая все поправки в эффективное действие, получим:

$$\Gamma[\phi_0+\chi(x)] = VT\,U_{eff}(\phi_0)+\Gamma^{(1)}[\phi_0]\star\chi+\frac{1}{2!}\Gamma^{(2)}[\phi_0]\star\chi\star\chi+\frac{1}{3!}\Gamma^{(3)}[\phi_0]\star\chi\star\chi\star\chi+\dots$$

$$= VT\,U_{eff}(\phi_0)+\frac{1}{2!}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left[k^2+m^2+\frac{1}{2}\lambda A^{(1)}-\frac{1}{2}(a\lambda)^2A^{(2)}\right]\chi(k)\chi(-k)$$

$$+\frac{1}{3!}\left(a\lambda-\frac{3}{2}a\lambda^2A^{(2)}\right)\int\frac{d^4k_1}{(2\pi)^4}\frac{d^4k_2}{(2\pi)^4}\frac{d^4k_3}{(2\pi)^4}(2\pi)^4\delta(k_1+k_2+k_3)\chi(k_1)\chi(k_2)\chi(k_3)$$

$$+\frac{1}{4!}\left(\lambda-\frac{3}{2}\lambda^2A^{(2)}\right)\int\frac{d^4k_1}{(2\pi)^4}\dots\frac{d^4k_4}{(2\pi)^4}(2\pi)^4\delta(k_1+\dots+k_4)\chi(k_1)\dots\chi(k_4)$$

$$= VT\,U_{eff}+\int d^4x\left\{\frac{1}{2}\chi(x)\left[-\partial^2+\boxed{m^2+\frac{1}{2}\lambda A^{(1)}-\frac{1}{2}(a\lambda)^2A^{(2)}}\right]\chi(x)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{3!}\boxed{\left[\lambda-\frac{3}{2}\lambda^2A^{(2)}\right]}a\chi(x)^3+\frac{1}{4!}\boxed{\left[\lambda-\frac{3}{2}\lambda^2A^{(2)}\right]}\chi(x)^4\right\}$$

- **Физическая масса:** $m^2_{phys}=m^2+\frac{1}{2}\lambda A^{(1)}-\frac{1}{2}(a\lambda)^2A^{(2)}$

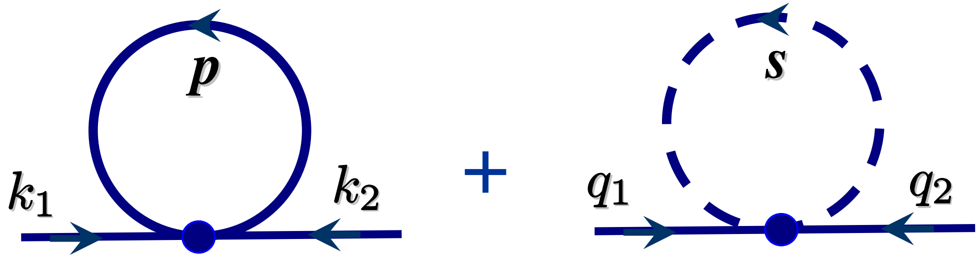
- **Физическая константа связи:** $\lambda_{phys}=\lambda-\frac{3}{2}\lambda^2A^{(2)}$

Регуляризация Паули-Вилларса

- ***Задача:*** ***смягчить или убрать расходимость***

Вклад полей регуляторов

$$S[\varphi] \to S[\varphi(x)] + S_R[\Phi]$$



$$= \int d^4x \left(\frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)^2 + U(\varphi) \right) + \frac{1}{2} \int d^4x \left((\partial_\mu \Phi)^2 + U''(\varphi)\Phi^2 + M^2\Phi^2 \right)$$

- **Вторая вариация действия:**

$$\Phi_0 = 0\,, \quad M^2 \gg m^2 = U''(\varphi)$$

$$\delta^2 S = \frac{1}{2} \int d^4x\; \delta\varphi \left(-\partial_\mu^2 + m^2\right) \delta\varphi + \frac{1}{2} \int d^4x\; \delta\Phi \left(-\partial_\mu^2 + m^2 + M^2\right) \delta\Phi$$

Предположение: **поле Φ обладает *аномальными* свойствами, из-за которых его функциональный детерминант дает вклад с противоположным знаком:**

$$\Gamma[\varphi] = S[\varphi] + S_R[\Phi] + \frac{1}{2} \ln \det \left[-\partial_\mu^2 + m^2\right] - \frac{1}{2} \ln \det \left[-\partial_\mu^2 + m^2 + M^2\right]$$

$$\Sigma^{(1)} = \frac{\lambda}{2}\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\left(\frac{1}{p^2+m^2} - \frac{1}{p^2+m^2+M^2}\right) = \frac{\lambda}{2}\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\left(\frac{M^2}{(p^2+m^2)(p^2+m^2+M^2)}\right)$$

! $\boxed{\sim \ln p, \qquad p \to \infty}$

Задача: покажите, что такая регуляризация делает конечной диаграмму «рыба»

- ***Несколько полей-регуляторов:*** $\Sigma^{(1)} = \frac{\lambda}{2}\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\left(\frac{1}{p^2+m^2} - \sum_i \frac{C_i}{p^2+m^2+M_i^2}\right)$

Разложение по обратным большим импульсам:

$$\frac{1}{p^2\left(1+m^2/p^2\right)} - \sum_i \frac{C_i}{p^2\left(1+m^2/p^2+M_i^2/p^2\right)} \approx \frac{1}{p^2} - \frac{m^2}{p^4} - \sum_i C_i\left(\frac{1}{p^2} - \frac{m^2}{p^4} - \frac{M_i^2}{p^4}\right)$$

$$\approx \frac{1}{p^2} - \frac{\sum_i C_i}{p^2} - \frac{m^2}{p^4} + \frac{m^2}{p^4}\sum_i C_i + \frac{\sum_i C_i M_i^2}{p^4} + \ldots$$

- **Расходимости сокращаюся, если:** $\sum_i C_i = 1\,, \quad \sum_i C_i M_i^2 = 0\,,$

Например: $C_1 = C_2 = 1, \quad C_3 = -1; \qquad M_1 = M_2 = M\,, \quad M_3 = \sqrt{2}M$

Вычисление интегралов

- **Регуляризованный интеграл:**

Tadpole: $z = 1$

Fish: $z = 2$

$$I_z(m^2) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p^2+m^2)^z}$$

$$t = p^2/m^2$$

$$I_z(m^2) = \frac{2\pi^2}{(2\pi)^4}\int dp\, p^3 \frac{1}{m^{2z}\,(1+p^2/m^2)^z} = \frac{m^{-2z}}{16\pi^2}\int dp^2\; p^2 \frac{1}{(1+p^2/m^2)^z}$$

$$= \frac{(m^2)^{2-z}}{16\pi^2}\int_0^\infty \frac{dt\; t}{(1+t)^z}$$

- **β-функция (математическая):**

$$\beta(a,b) \equiv \int_0^1 dt\, t^{a-1}(1-t)^{b-1} = \int_0^\infty \frac{dt\, t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}} = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

- **Γ-функция (математическая):** $\Gamma(a) = \int_0^\infty dt\, e^{-t} t^{a-1}$

$$I_z(m^2) = \frac{(m^2)^{2-z}}{16\pi^2}\beta(2, z-2) = \frac{(m^2)^{2-z}}{16\pi^2}\frac{\Gamma(2)\Gamma(z-2)}{\Gamma(z)} = \frac{(m^2)^{2-z}}{16\pi^2}\frac{\Gamma(z-2)}{\Gamma(z)}$$

Рассмотрим $z = 1 + \varepsilon\,, \quad \varepsilon \ll 1$

$$I_z(m^2) = \frac{(m^2)^{2-z}}{16\pi^2}\frac{\Gamma(z-2)}{\Gamma(z)}$$

- $$\frac{\Gamma(z-2)}{\Gamma(z)} = \frac{\Gamma(\varepsilon-1)}{\Gamma(\varepsilon+1)} = \frac{\Gamma(\varepsilon-1)}{\Gamma(\varepsilon-1)\varepsilon(\varepsilon-1)} = \frac{1}{\varepsilon(\varepsilon-1)} \approx -\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}$$

- $$(m^2)^{2-z} \to (m^2)^{1-\varepsilon} = e^{(1-\varepsilon)\ln(m^2)} \approx m^2(1-\varepsilon\ln m^2)$$

- **Регуляризованный интеграл:**

$$I_{1+\varepsilon}(m^2) \approx -\frac{m^2}{16\pi^2}\frac{1}{\varepsilon}(1-\varepsilon\ln m^2+\varepsilon)$$

- **Паули-Вилларс:**

$$I(m^2) \to I(m^2) - \sum_i C_i I(m^2+M_i^2)$$

$$\sum_i C_i = 1 \qquad \sum_i C_i M_i^2 = 0$$

$$-\frac{m^2}{16\pi^2}\frac{1}{\varepsilon}(1-\varepsilon\ln m^2+\varepsilon) + \frac{1}{16\pi^2}\sum_i \frac{C_i(m^2+M_i^2)}{\varepsilon}\left(1-\varepsilon\ln(m^2+M_i^2)+\varepsilon\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{m^2}{16\pi^2}\ln m^2 - \frac{m^2}{16\pi^2}\sum_i C_i \ln M_i^2 \equiv \frac{m^2}{16\pi^2}\ln m^2 - \frac{m^2}{16\pi^2}\ln\Lambda^2 = \boxed{\frac{m^2}{16\pi^2}\ln\frac{m^2}{\Lambda^2}}$$

- **Это выражение ничего не напоминает?**

Рассмотрим $z = 2 + \varepsilon\,, \quad \varepsilon \ll 1$

$$I_z(m^2) = \frac{(m^2)^{2-z}}{16\pi^2}\frac{\Gamma(z-2)}{\Gamma(z)}$$

- $$\frac{\Gamma(z-2)}{\Gamma(z)} = \frac{\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(2+\varepsilon)} = \frac{\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(\varepsilon)\varepsilon(1+\varepsilon)} = \frac{1}{\varepsilon(1+\varepsilon)} \approx \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$$

- $$(m^2)^{2-z} \to (m^2)^{-\varepsilon} = e^{-\varepsilon\ln(m^2)} \approx 1 - \varepsilon\ln m^2$$

- **Регуляризованный интеграл:**

$$I_{2+\varepsilon}(m^2) \approx \frac{1}{16\pi^2}\frac{1}{\varepsilon}(1-\varepsilon\ln m^2 - \varepsilon)$$

- **Паули-Вилларс:**

$$I(m^2) \to I(m^2) - \sum_i C_i I(m^2 + M_i^2)$$

$$\sum_i C_i = 1 \qquad \sum_i C_i M_i^2 = 0$$

$$\frac{1}{16\pi^2}\frac{1}{\varepsilon}(1-\varepsilon\ln m^2 - \varepsilon) - \frac{1}{16\pi^2}\sum_i \frac{C_i}{\varepsilon}\left(1-\varepsilon\ln(m^2+M_i^2) - \varepsilon\right)$$

$$-\frac{1}{16\pi^2}\ln m^2 + \frac{1}{16\pi^2}\sum_i C_i\ln(m^2+M_i^2) \approx -\frac{1}{16\pi^2}\ln m^2 + \frac{1}{16\pi^2}\sum_i C_i \ln M_i^2$$

$$\equiv -\frac{1}{16\pi^2}\ln m^2 + \frac{1}{16\pi^2}\ln\Lambda^2 = \boxed{-\frac{1}{16\pi^2}\ln\frac{m^2}{\Lambda^2}} \leftarrow I_2(m^2)$$

Вычисление интегралов

- **Параметризация Фейнмана:**

$$A^{(n)}(k_1, k_2 \dots k_n) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2+m^2} \frac{1}{(p+k_1)^2+m^2} \cdots \frac{1}{(p+k_1+\dots k_{n-1})^2+m^2}$$

$$A^{(2)}(k, -k) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{[p^2+m^2][(p+k)^2+m^2][(p-k)^2+m^2]}$$

Вспомогательный интеграл:

$$\frac{1}{a_1 a_2 \dots a_n} = (n-1)! \int_0^1 dx_1 dx_2 \dots dx_n \frac{\delta(x_1 + \dots x_n - 1)}{(a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots a_n x_n)^n}$$

В частности (n=2)

$$\frac{1}{a_1 a_2} = \int_0^1 \frac{dx}{[a_1 x + a_2(1-x)]^2}$$

$$A^{(2)}(k, -k) = \int_0^1 dx \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{[p^2+m^2+((k+p)^2+m^2-(p^2+m^2))x]^2}$$

$$\boxed{p' = p + kx}$$

$$= \int_0^1 dx \int \frac{d^4p'}{(2\pi)^4} \frac{1}{[p'^2+k^2x(1-x)+m^2]^2} = \int_0^1 dx\, I_2(k^2x(1-x)+m^2)$$

Регуляризованный интеграл:

$$A^{(2)}(k,-k) = -\frac{1}{16\pi^2}\int_0^1 dx \ln\frac{k^2 x(1-x)+m^2}{\Lambda^2} = -\frac{1}{16\pi^2}\int_0^1 dx \left\{\ln\frac{m^2}{\Lambda^2} + \ln\frac{k^2}{4m^2} + \ln\left[4x(1-x)+\frac{4m^2}{k^2}\right]\right\}$$

$$-\frac{1}{16\pi^2}\int_0^1 dx \left(\ln\frac{m^2}{\Lambda^2} + \ln\frac{k^2}{4m^2}\right) - \frac{1}{16\pi^2}\int_0^1 dx \ln\left[4x(1-x)+\frac{4m^2}{k^2}\right]$$

$$-\frac{1}{16\pi^2}\left(\ln\frac{m^2}{\Lambda^2} + \ln\frac{k^2}{4m^2}\right)$$

$$t = 2x-1; \quad \int_{-1}^{1} \to 2\int_0^1$$

$$\int_0^1 dt \ln(a^2-t^2) = -2 + \ln(a^2-1) + a\ln\frac{a+1}{a-1}$$

$$a^2 = 1 + 4m^2/k^2 > 0$$

$$-\frac{1}{16\pi^2}\left(-2 + \ln\frac{4m^2}{k^2} + \sqrt{1+\frac{4m^2}{k^2}}\ln\frac{\sqrt{1+\frac{4m^2}{k^2}}+1}{\sqrt{1+\frac{4m^2}{k^2}}-1}\right)$$

- **Вклад «рыбы»:**

$$\Sigma^{(2)} = \frac{\lambda^2 a^2}{32\pi^2}\left[\ln\frac{m^2}{\Lambda^2} - 2 + \sqrt{1+\frac{4m^2}{k^2}}\ln\frac{\sqrt{1+\frac{4m^2}{k^2}}+1}{\sqrt{1+\frac{4m^2}{k^2}}-1}\right]$$

- **Напомним:**

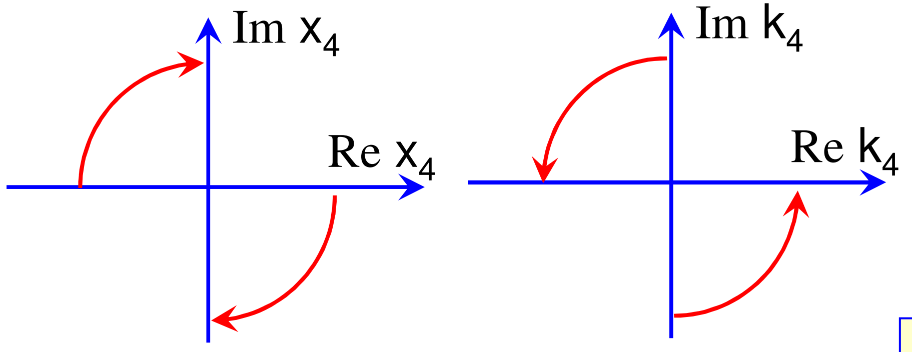
$$\Gamma^{(2)}[\phi_0] = G^{-1}(k) + \Sigma^{(1)} + \Sigma^{(2)} + \dots = k^2 + m_0^2 + \frac{\lambda}{2} A^{(1)} - \frac{a^2\lambda^2}{2} A^{(2)}(k) + \dots$$

- **Физическая регуляризованная масса (в Евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$):**

$$m_{phys}^2 = m_0^2 + \frac{\lambda m^2}{32\pi^2} \ln \frac{m^2}{\Lambda^2} + \frac{\lambda^2 a^2}{32\pi^2} \left[\ln \frac{m^2}{\Lambda^2} - 2 + \sqrt{1 + \frac{4m^2}{k^2}} \ln \frac{\sqrt{1+\frac{4m^2}{k^2}} + 1}{\sqrt{1+\frac{4m^2}{k^2}} - 1} \right]$$

- **Задача – перейти из $\mathbb{R}^4$ в $\mathbb{M}^4$:** $x_4 = it, \quad x_\mu x^\mu = -t^2 + x_i^2 \to x_4^2 + x_i^2$

- **Аналитическое продолжение:** $x_4 \to |x_4| e^{i\alpha}, \quad k_4 \to |k_4| e^{-i\alpha}$



$$d^4x \to i d^4x_E; \quad d^4k \to i d^4k_E$$

$$k_\mu = (k_4, \vec{k}); \quad k_4 = -ik_0$$

$$k_\mu k^\mu = -k_0^2 + \vec{k}^2 \to k_4^2 + \vec{k}^2$$

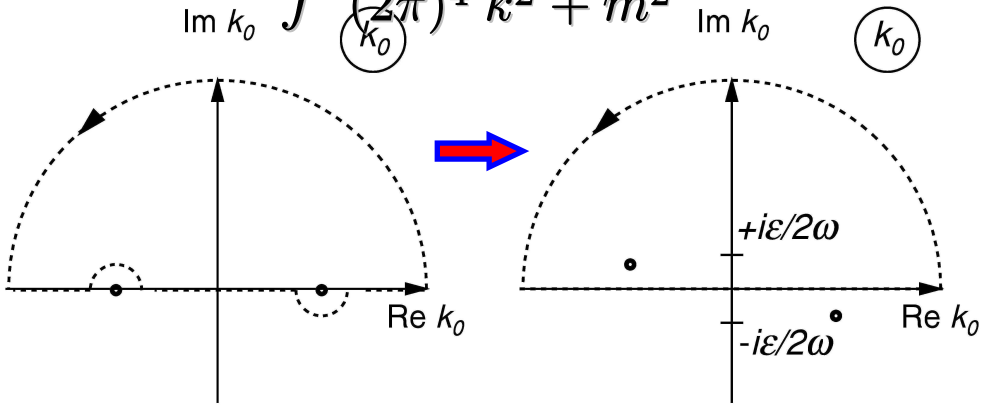
$$k_4 x_4 \to k_0 t; \quad e^{ik_\mu x^\mu} \to e^{ik_\mu x^\mu}$$

Замечание:
Преобразование Фурье инвариантно относительно поворота Вика

Евклидов пропагатор:

Пропагатор в $\mathbb{M}^4$:

$$G_E(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{e^{ik_\mu x^\mu}}{k^2+m^2} \Rightarrow -i\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{e^{ik_\mu x^\mu}}{-k_0^2+\vec{k}^2+m^2}$$



- **Pole at:** $k_0 = \pm\sqrt{\vec{k}^2+m^2}$

$$G(x) = -i\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{e^{ik_\mu x^\mu}}{k_0^2+\vec{k}^2+m^2-i\varepsilon}$$

При $t>0$ простой вычет в $k_0 \equiv \omega = \sqrt{\vec{k}^2+m^2}$ $\Rightarrow$

$$G(x) = -\frac{1}{2\omega(2\pi)^3}\int d^3\vec{k}\; e^{i(\vec{k}\vec{x}-\omega t)}$$

- **Однопетлевая поправка в $\mathbb{M}^4$:**

$$k^2 = |k^2|e^{-i\pi}$$

$$\alpha = \arctan\sqrt{\frac{4m^2}{|k^2|}-1}$$

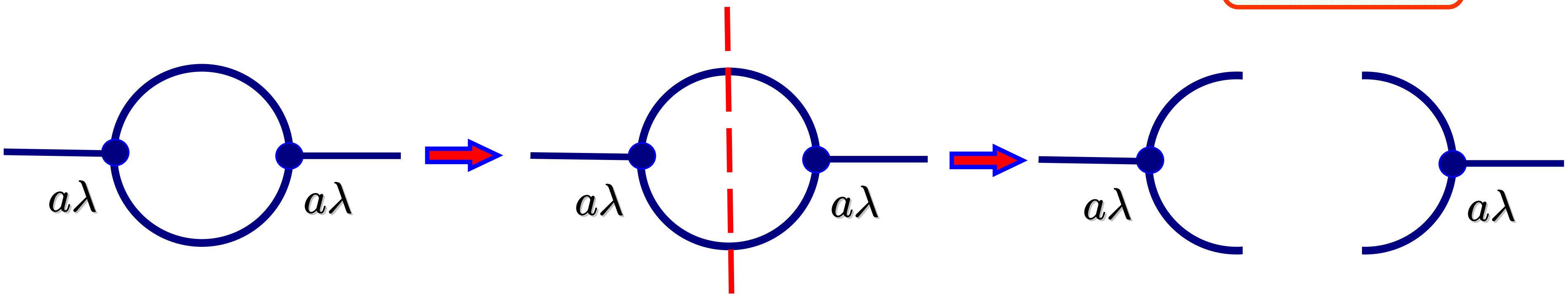
$$\ln\frac{\sqrt{1+\frac{4m^2}{k^2}}+1}{\sqrt{1+\frac{4m^2}{k^2}}-1} \Rightarrow \ln\frac{i\sqrt{\frac{4m^2}{|k^2|}-1}+1}{i\sqrt{\frac{4m^2}{|k^2|}-1}-1} = \ln(-e^{2i\alpha}) = -i\pi+2i\alpha$$

Физический регуляризованный пропагатор (в пространстве M^4):

$$\mathcal{G}^{-1}(k^2) = -|k^2| + m_0^2 + \frac{\lambda m^2}{32\pi^2}\ln\frac{m^2}{\Lambda^2} + \frac{\lambda^2 a^2}{32\pi^2}\left\{\ln\frac{m^2}{\Lambda^2} - 2 + \pi\sqrt{\frac{4m^2}{|k^2|}-1}\right.$$
$$\left. - 2\sqrt{\frac{4m^2}{|k^2|}-1}\ \arctan\sqrt{\frac{4m^2}{|k^2|}-1}\ \right\} = -|k^2| + m_0^2 + \Sigma^{(1)} + \Sigma^{(2)}(k^2)$$

Замечание:

- ***Пропагатор остается действительным при условии*** $|k^2| < 4m^2$



- **Порог рождения (аннигиляции):** $k = 2m$

Перенормировка

Замечание: Физическая масса соответствует полюсу пропагатора:

$$-m^2 + m_0^2 + \Sigma^{(1)} + \Sigma^{(2)}(-m^2) = 0 \quad \rightarrow \quad \mathcal{G}^{-1}(k^2) = k^2 + m_0^2 + \Sigma^{(1)} + \Sigma^{(2)}(k^2)$$

Перенормированный обратный пропагатор:

$$\mathcal{G}^{-1}(k^2) = k^2 + m^2 + \Sigma^{(2)}(k^2) - \Sigma^{(2)}(-m^2)$$

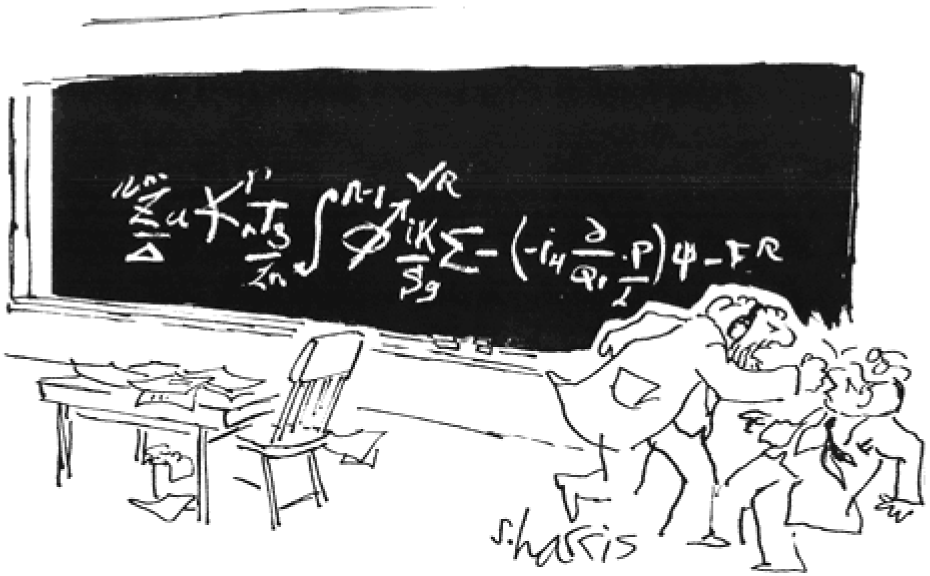
Конечная часть:

$$\Sigma(k^2) = \Sigma(-m^2) + \left.\frac{\partial\Sigma(k^2)}{\partial k^2}\right|_{k^2=-m^2}(k^2+m^2) + \ldots$$

$$\mathcal{G}^{-1}(k^2) = \left(1 + \left.\frac{\partial\Sigma(k^2)}{\partial k^2}\right|_{k^2=-m^2} + \ldots\right)(k^2+m^2) = Z(k^2+m^2)$$

Мультипликативная перенормировка: $(k^2+m^2) \longrightarrow Z(k^2+m^2)$

Надеюсь, все вам теперь стало все понятно? Объяснить еще раз?



"You want proof? I'll give you proof!"