Рецепт вычисления энергии основного состояния

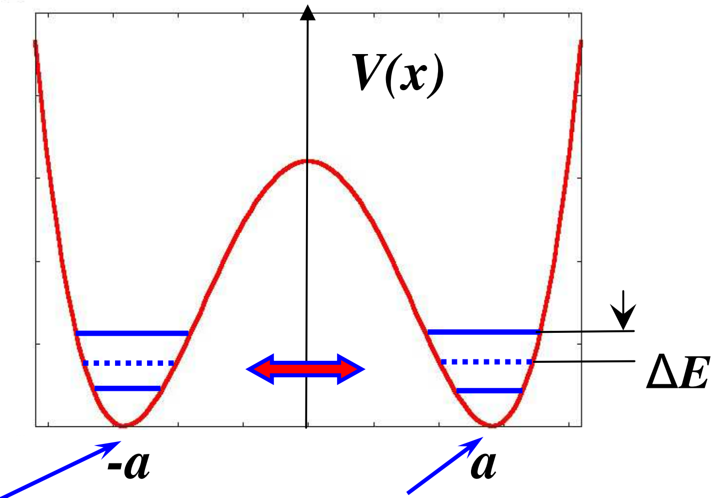
- Вычислить функцию Грина квантовой системы методом стационарной фазы с учетом квантовых поправок
- Перейти к евклидовому времени τ и рассмотреть предел $\tau \to \infty$
- Все, что является коэффициентом при τ в экспоненциальном множителе, интепретируется как энергия основного состояния (вакуума)
- Предэкпоненциальные множители интерпретируются как волновые функции основного состояния

Задача о двухямном потенциале

$$S[x(t)] = \int_0^T dt \left[\frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - V(x)\right]$$

***m*=1**

$$V(x) = \lambda(x^2 - a^2)^2 \qquad E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}$$



Пертурбативная квантовая механика: $\psi_L \approx \psi_0^{osc}(x+a); \quad \psi_R \approx \psi_0^{osc}(x-a)$

Непертурбативные поправки: $\psi_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_L + \psi_R)\,; \quad \psi_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_L - \psi_R)$

Расщепление спектра: $E_0 \Rightarrow E_0^{(+)} = \frac{\hbar\omega}{2} - \Delta, \quad E_0^{[-)} = \frac{\hbar\omega}{2} + \Delta$

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\psi_+ e^{-iE_0^{(+)}t} + \psi_- e^{-iE_0^{(-)}t}\right] = \psi_L \cos(\Delta \cdot t) + i\psi_R \sin(\Delta \cdot t)$$

Задача: найти величину Δ

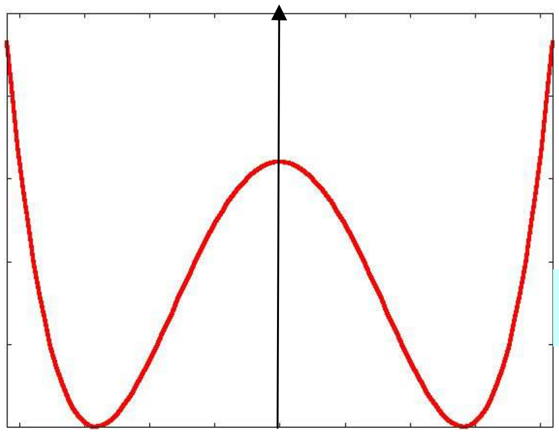
● ***Метод ВКБ:*** $\Delta = \frac{\omega}{2\sqrt{e\pi}} e^{-\frac{2}{\hbar}\int_{-a}^{a} dx\sqrt{2m(V(x)-E_0)}}$

Квантовомеханические инстантоны

$$S[x(t)] = \int_0^T dt \left[\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - \lambda(x^2-a^2)^2 \right]$$

$\tau = it$

$$S_E[x(\tau)] = \int_0^T d\tau \left[\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + \lambda(x^2-a^2)^2 \right]$$

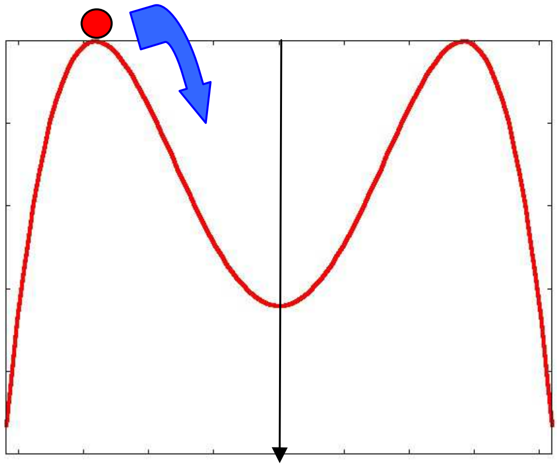


Уравнение движения

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = \frac{dV(x)}{dx}$$

Энергия псевдочастицы

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 - V(x) \equiv E$$



Туннельная траектория в евклидовом времени: $d\tau = \dfrac{dx}{\sqrt{2(E+V(x))}}$

Действие на туннельной траектории $(E=0)$:

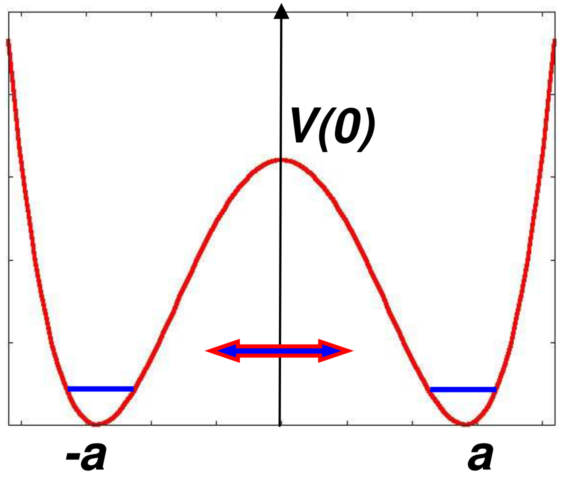
$$S_{inst} = \int_0^T d\tau \left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 = \int_0^T d\tau \frac{dx}{d\tau}\sqrt{2V(x)} = \int_{-a}^{a} dx\sqrt{2V(x)} = \int_{-a}^{a} dx\sqrt{2\lambda}(a^2-x^2) = \frac{4}{3}\sqrt{2\lambda}a^3$$

Квантовомеханические инстантоны

Замечание: *в окрестности каждого минимума*

$$V(x) \approx \frac{1}{2}V''(\pm a)(x \mp a)^2 \equiv \frac{1}{2}\omega^2(x \mp a)^2$$

Частота осцилляций: $\omega^2 = V''(a) = 8\lambda a^2$



- ***Высота барьера*** $V(0) = \lambda a^4 = \omega^4/64\lambda$ ***много больше*** $E_0 = \omega/2$ $\quad (\hbar = c = 1)$

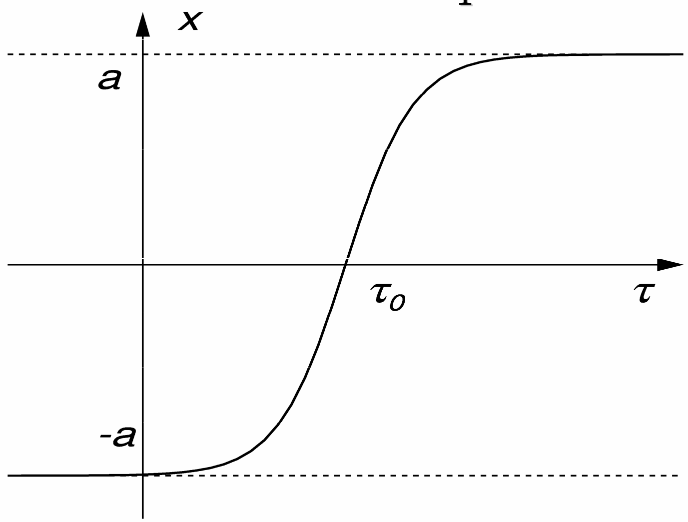
$\Rightarrow$ $\dfrac{\lambda}{\omega^3} \ll 1$

Подбарьерная траектория: $d\tau = \dfrac{dx}{\sqrt{2\lambda(x^2 - a^2)^2}}$ $\Rightarrow$ $\tau - \tau_0 = \sqrt{\dfrac{1}{2\lambda a^2}} \displaystyle\int_{-1}^{\overline{x}/a} \dfrac{d(x/a)}{1-(x/a)^2}$

- ***Квантовомеханический инстантон:***

$$\boxed{\overline{x}(\tau) = a \tanh \frac{\omega(\tau - \tau_0)}{2}}$$

(Кинк)

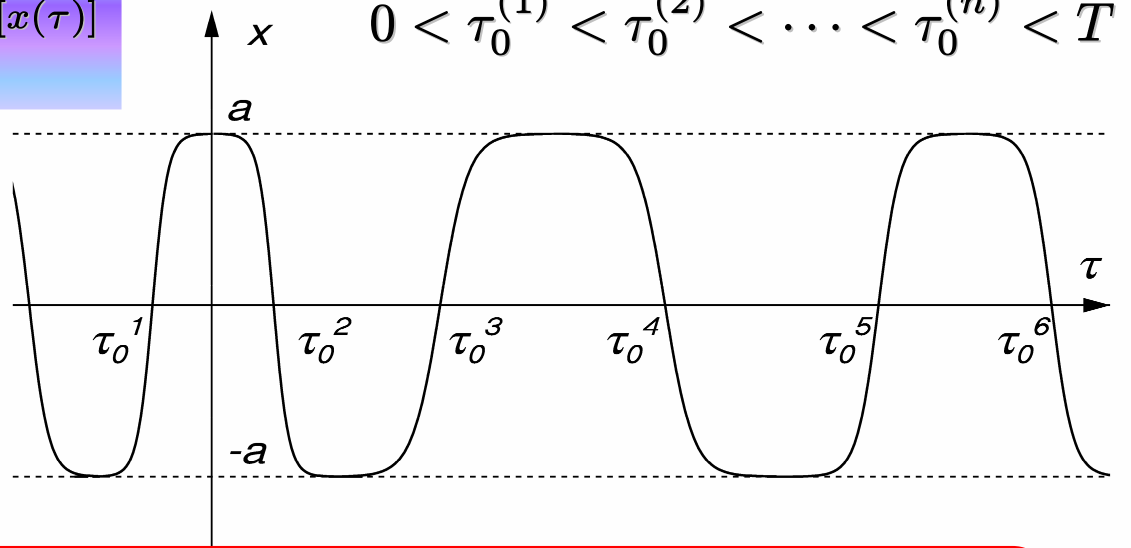


Задача: найти амплитуды перехода из $x(-\infty) = -a$ в $x(\infty) = \mp a$

Мультиинстантонные траектории

$$G(\pm a, -a, T) = \int \mathcal{D}x(\tau) e^{-S[x(\tau)]}$$

$$0 < \tau_0^{(1)} < \tau_0^{(2)} < \cdots < \tau_0^{(n)} < T$$



- **Приближение разреженного инстантонного газа:**

$$\boxed{S_n = nS}$$

- **Усреднение по центру инстантонов:**

$$\boxed{\int_0^T d\tau_0^{(1)} \int_0^{\tau_0^{(1)}} d\tau_0^{(2)} \int_0^{\tau_0^{(2)}} d\tau_0^{(3)} \cdots \int_0^{\tau_0^{(n-1)}} d\tau_0^{(n)} = \frac{1}{n!} \int_0^T d\tau_0^{(1)} \int_0^T d\tau_0^{(2)} \int_0^T d\tau_0^{(3)} \cdots \int_0^T d\tau_0^{(n)} = \frac{T^n}{n!}}$$

$$Z_n = \mathrm{Const} \frac{T^n}{n!} e^{-nS} = Z_0 K_n \frac{T^n}{n!} e^{-nS}$$

Квантовая поправка

$$\boxed{K_n = K^n}$$

Функция Грина гармонического осциллятора $Z_0 = \sqrt{\frac{\omega}{\pi}} e^{-\frac{\omega T}{2}}$

Мультиинстантонные траектории

Амплитуда перехода из $x(-\infty) = -a$ **в** $x(\infty) = -a$ **:** $(n = 2k)$

$$G(-a,-a,T) = Z_0 \sum_{k=0}^{\infty} e^{-2kS} K^{2k} \frac{T^{2k}}{(2k)!} = \sqrt{\frac{\omega}{\pi}} e^{-\frac{\omega T}{2}} \cosh\left[KTe^{-S}\right]$$

Амплитуда перехода из $x(-\infty) = -a$ **в** $x(\infty) = a$ **:** $(n = 2k+1)$

$$G(-a,a,T) = Z_0 \sum_{k=0}^{\infty} e^{-(2k+1)S} K^{2k+1} \frac{T^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sqrt{\frac{\omega}{\pi}} e^{-\frac{\omega T}{2}} \sinh\left[KTe^{-S}\right]$$

$$\Delta = Ke^{-S}$$

$$G(-a,-a,T) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\omega}{\pi}}\left[e^{-\frac{\omega T}{2}+\frac{\Delta\cdot T}{2}} + e^{-\frac{\omega T}{2}-\frac{\Delta\cdot T}{2}}\right]$$

$$G(-a,a,T) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\omega}{\pi}}\left[e^{-\frac{\omega T}{2}+\frac{\Delta\cdot T}{2}} - e^{-\frac{\omega T}{2}-\frac{\Delta\cdot T}{2}}\right]$$

$$G(x_0,x;T) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(x_0)\psi_n^*(x)e^{-E_nT} \Rightarrow E_0^{(\pm)} = \frac{\omega}{2} \mp \Delta$$

Задача: найти Δ !

Вклад окрестностей инстантонной траектории

Вторая вариация действия:

$$\delta^2 S[x(t)] = \frac{1}{2}\int\limits_0^T d\tau\delta x(\tau)\left(-\frac{d^2}{d\tau^2}+V''(x)\right)\delta x(\tau)$$

Задача: найти собственные функции и собственные значения оператора

$$D^{(2)}\chi_n(\tau) = \left(-\frac{d^2}{d\tau^2}+V''(\overline{x})\right)\chi_n(\tau) = \lambda_n\chi_n(\tau)$$

$$\delta x(\tau) = \sum_n C_n\chi_n(\tau)$$

$$Z = e^{-S[\overline{x}]}\mathcal{A}\int\prod_{n=0}^{\infty}\exp\left\{\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n C_n^2\right\} = e^{-S[\overline{x}]}\mathcal{A}\prod_{n=0}^{\infty}\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda_n}}$$

$$= Ne^{-S[\overline{x}]}\det\left(-\frac{d^2}{d\tau^2}+V''(x(\tau))\right)^{-1/2}$$

Функциональный детерминант

Тривиальная траектория (осцилляции около локального минимума):

$$x(\tau) = -a, \qquad D^{(2)} = -\frac{d^2}{d\tau^2} + \omega^2$$

Ортонормированные моды:

$$\chi_k(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \sin\frac{\pi k t}{T}; \quad \lambda_k = \frac{\pi^2 k^2}{T^2} + \omega^2, \quad k = 1, 2, 3 \ldots$$

$$\Rightarrow \quad G(-a, -a, T) = \sqrt{\frac{\omega}{\pi}} e^{-\frac{\omega T}{2}}$$

Нулевая (трансляционная) мода:
одно из собственных значений $\lambda_0 = 0$

Уравнение движения $-\ddot{x} + V' = 0$ $\Rightarrow$ $\left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(\overline{x})\right) \frac{d\overline{x}}{d\tau} = 0$

Мода $\chi_0 = A\dot{x}(\tau)$ соответствует нулевому собственному значению $\lambda_0 = 0$

Замечание: Действие на инстантонной траектории

$$S_{inst} = \int_0^T d\tau \left(\frac{d\overline{x}}{d\tau}\right)^2 = \frac{1}{A^2} \int_0^T d\tau \chi_0^2 = \frac{1}{A^2} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{\sqrt{S}}$$

Смысл возбуждения нулевой моды – трансляция кинка

$$\overline{x} \to \overline{x} + C_0\chi_0 = \overline{x}(\tau) + \frac{C_0}{\sqrt{S}} \frac{d\overline{x}}{d\tau} \approx \overline{x}\left(\tau + \frac{C_0}{\sqrt{S}}\right)$$

В функциональном интеграле Z одно из интегрирований – не гауссово

$$Z = N\int \prod_{n=0}^{\infty} \exp\left\{\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n C_n^2\right\} e^{-S} \Rightarrow NT\sqrt{\frac{S}{2\pi}}\det{}'\left[-\frac{d^2}{d\tau^2}+V''\right]^{-1/2} e^{-S}$$

- **Нормировка на осцилляторный детерминант:**

$$\frac{Z}{Z_0} = T\sqrt{\frac{S}{2\pi}}\left[\frac{\det{}'\left[-d^2/d\tau^2+V''(\overline{x}(\tau))\right]}{\det\left[-d^2/d\tau^2+\omega^2\right]}\right]^{-1/2} e^{-(S-S_0)}$$

- **Квантовая поправка к инстантонной траектории:**

$$K = \sqrt{\frac{S}{2\pi}}\left[\frac{\omega^2\det{}'\left[-d^2/\tau^2+V''(\overline{x}(\tau))\right]}{\det[-d^2/\tau^2+\omega^2]}\right]^{-1/2}$$

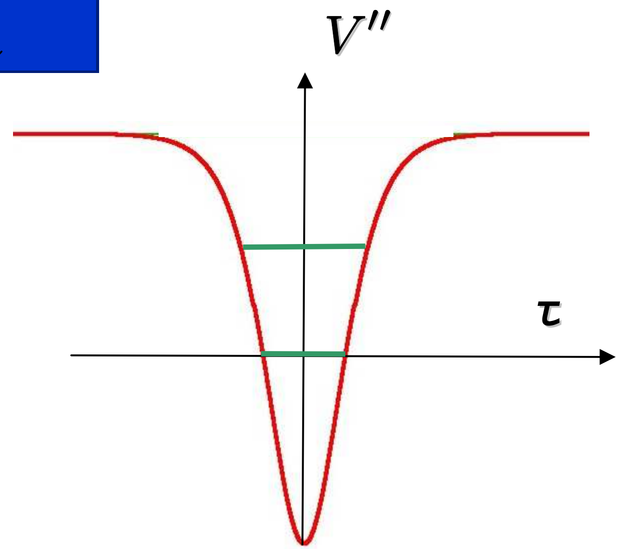
Задача: найти собственные функции и собственные значения оператора

$$D^{(2)}\chi_n(\tau) = \left(-\frac{d^2}{d\tau^2}+V''(\overline{x})\right)\chi_n(\tau) = \lambda_n\chi_n(\tau)$$

$$\begin{cases} V''(x) = -4\lambda a^2 + 12\lambda\overline{x}^2 \\ \overline{x}(\tau) = a\tanh\dfrac{\omega\tau}{2} \end{cases}$$

Потенциал Пёшль-Теллера

Частота осцилляций: $\omega^2 = V''(a) = 8\lambda a^2$



$$V''(x) = -4\lambda a^2 + 12\lambda\bar{x}^2 = \omega^2 - \frac{3\omega^2}{2\cosh^2\frac{\omega\tau}{2}}$$

- **Задача Пёшль-Теллера:**

$$\boxed{\left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + \omega^2 - \frac{3\omega^2}{2\cosh^2\frac{\omega\tau}{2}}\right)\chi(\tau) = \lambda\chi(\tau)}$$

$\tau \to \pm\infty$

$$\left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + \underbrace{\omega^2 - \lambda}\right)\chi = 0$$

$$\kappa = \sqrt{\omega^2 - \lambda}$$

Выделяя асимптотику: $\chi(\tau) = f(\tau)e^{\kappa\tau}$

$$\boxed{\frac{d^2 f}{d\tau^2} + 2\kappa\frac{df}{d\tau} + \frac{3\omega^2}{2\cosh^2\frac{\omega\tau}{2}}f = 0}$$

$$\xi = \tanh\frac{\omega\tau}{2}$$

$$\frac{d}{dx}\tanh x = \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$$

$$\boxed{\frac{1}{2}(1-\xi^2)\frac{d^2 f}{d\xi^2} - \xi\frac{df}{d\xi} + \frac{2\kappa}{\omega}\frac{df}{d\xi} + 3f = 0}$$

И еще одна замена переменной: $z = \frac{1+\xi}{2}$

Гипергеометрическое уравнение:

$$z(1-z)f''_{zz} - \left(2z - 1 - \frac{2\kappa}{\omega}\right)f'_z + 6f = 0$$

Обычный алгоритм поиска решения в виде ряда: $f(z) = \sum_n B_n z^n$

$$\sum_n z(1-z)\underbrace{n(n-1)B_n z^{n-2}}_{n-2 \to n} + \sum_n \left(1 - 2z + \frac{2\kappa}{\omega}\right)\underbrace{nB_n z^{n-1}}_{n-1 \to n} + \sum_n 6B_n z^n = 0$$

$$\sum_n \left[-n(n-1)B_n + (n+1)nB_{n+1} - 2nB_n + \left(1 + \frac{2\kappa}{\omega}\right)(n+1)B_{n+1} + 6B_n\right]z^n = 0$$

Реккурентное соотношение:

$$B_{n+1} = B_n \frac{-6 + 2n + n(n-1)}{(n+1)\left(n+1+\frac{2\kappa}{\omega}\right)}$$

$$B_{n+1} = B_n \frac{-6 + 2n + n(n-1)}{(n+1)\left(n+1+\frac{2\kappa}{\omega}\right)}$$

$$B_0 = 1; \quad B_1 = -\frac{6\omega}{\omega + 2\kappa}; \quad B_2 = \frac{6\omega^2}{(\omega+2\kappa)(\omega+\kappa)}; \quad B_3 = 0\ldots$$

Собственные функции: $\kappa = \sqrt{\omega^2 - \lambda}$ $\quad \xi = \tanh\frac{\omega\tau}{2}$

$$\chi(\tau) = e^{\kappa\tau}\left(\frac{2\kappa-\omega}{2(\kappa+\omega)} - \frac{3\kappa\omega}{(2\kappa+\omega)(\kappa+\omega)}\xi + \frac{3\omega^2}{2(2\kappa+\omega)(\kappa+\omega)}\xi^2\right)$$

- ***Асимптотическое поведение:*** $\tau \to -\infty \Rightarrow \xi \to -1$

$$P(\kappa,\xi) = \left(\frac{2\kappa-\omega}{2(\kappa+\omega)} - \frac{3\kappa\omega}{(2\kappa+\omega)(\kappa+\omega)}\xi + \frac{3\omega^2}{2(2\kappa+\omega)(\kappa+\omega)}\xi^2\right) \xrightarrow[\tau\to-\infty]{} 1$$

- $\tau \to \infty \Rightarrow \xi \to 1$ $\quad P(\kappa, 1) = \frac{(\kappa-\omega)(\kappa-\omega/2)}{(\kappa+\omega)(\kappa+\omega/2)}$

Локализованные моды: $\kappa = \omega; \quad \kappa = \omega/2 \Rightarrow \lambda_0 = 0, \quad \lambda_1 = \frac{3}{4}\omega^2$

$$\chi(\tau) = e^{\kappa\tau}\left(\frac{2\kappa-\omega}{2(\kappa+\omega)} - \frac{3\kappa\omega}{(2\kappa+\omega)(\kappa+\omega)}\xi + \frac{3\omega^2}{2(2\kappa+\omega)(\kappa+\omega)}\xi^2\right)$$

- **Собственные функции:** $\kappa = \omega, \quad \lambda_0 = 0$

$$\chi_0(\tau) = e^{\omega\tau}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\tanh\frac{\omega\tau}{2} + \frac{1}{4}\tanh^2\frac{\omega\tau}{2}\right) = \frac{1}{4}e^{\omega\tau}\left(1-\tanh\frac{\omega\tau}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2(e^{\frac{\omega\tau}{2}} + e^{-\frac{\omega\tau}{2}})} = \frac{1}{4}\,\frac{1}{\cosh^2\frac{\omega\tau}{2}}$$

Нулевая (трансляционная) мода

- **Собственные функции:** $\kappa = \omega/2, \quad \lambda_1 = \frac{3}{4}\omega^2$

$$\chi_1(\tau) = e^{\frac{\omega\tau}{2}}\left(-\frac{1}{2}\tanh\frac{\omega\tau}{2} + \frac{1}{2}\tanh^2\frac{\omega\tau}{2}\right) = -\frac{e^{\frac{\omega\tau}{2}} - e^{-\frac{\omega\tau}{2}}}{(e^{\frac{\omega\tau}{2}} + e^{-\frac{\omega\tau}{2}})^2}$$

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{\sinh\frac{\omega\tau}{2}}{\cosh^2\frac{\omega\tau}{2}}$$

Осцилляторная (вибрационная) мода

Непрерывный спектр

$$\chi(\tau) = e^{\kappa\tau}\left(\frac{2\kappa - \omega}{2(\kappa+\omega)} - \frac{3\kappa\omega}{(2\kappa+\omega)(\kappa+\omega)}\xi + \frac{3\omega^2}{2(2\kappa+\omega)(\kappa+\omega)}\xi^2\right)$$

- ***Аналитическое продолжение:*** $\kappa = ik, \quad \lambda = \omega^2 + k^2$

$$\chi(\tau) = e^{ik\tau}\left(\frac{2k + i\omega}{2(k - i\omega)} + \frac{3ik\omega}{(2k - i\omega)(k - i\omega)}\xi - \frac{3\omega^2}{2(2k - i\omega)(k - i\omega)}\xi^2\right)$$

- ***Асимптотическое поведение:*** $\tau \to -\infty$ ⇒ $\xi \to -1$ ⇒ $\chi(\tau) \to e^{i\kappa\tau}$
- $\tau \to \infty$ ⇒ $\xi \to 1$ ⇒ $P(ik, 1) = \dfrac{(k + i\omega)(k + i\omega/2)}{(k - i\omega)(k - i\omega/2)}$

$\chi(\infty) = e^{i(k\tau + \delta_k)}$ **Фазовый сдвиг** $e^{i\delta_k} = \dfrac{(k + i\omega)(k + i\omega/2)}{(k - i\omega)(k - i\omega/2)}$

Потенциал Пёшль-Теллера является безотражательным!

Задача: Найти произведение ненулевых собственных значений λ по всему спектру

$$\lambda_1 = \frac{3}{4}\omega^2, \quad \lambda_k = \omega^2 + k^2$$

Дискретизация: $\tau \in [0, T]$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} \tau \to 0; & \chi \to \sin(k\tau) \to 0 \\ \tau \to \infty; & \chi \to \sin(k\tau + \delta_k) \to 0 \end{cases}$

$$k_n T + \delta_k = \pi n, \qquad k_n = \frac{\pi n}{T} - \frac{\delta_k}{T} = k_n^{(0)} - \frac{\delta_k}{T}$$

Моды осциллятора

- **Нормировка на осцилляторный детерминант:**

$$\prod_{n=2}^{\infty} \frac{\lambda_n}{\lambda_n^{(0)}} = \exp\left(\sum_{n=2}^{\infty} \ln \frac{\lambda_n}{\lambda_n^{(0)}}\right) = \exp\left(\sum_{n=2}^{\infty} \ln \frac{\omega^2 + k_n^2}{\omega^2 + {k_n^{(0)}}^2}\right)$$

- **В пределе $T \to \infty$ с точностью до членов порядка $1/T^2$:**

$$\sum_{n=2}^{\infty} \ln \frac{\lambda_n}{\lambda_n^{(0)}} \approx \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{2k_n^{(0)}\delta(k_n^{(0)})}{T(\omega^2 + {k_n^{(0)}}^2)}\right) \approx -\frac{1}{T}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2k_n^{(0)}\delta(k_n^{(0)})}{\omega^2 + {k_n^{(0)}}^2}$$

$$\boxed{\Delta n = 1 \to k_n \to \frac{\pi}{T}} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{\lambda_n}{\lambda_n^{(0)}} = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{dk k \delta_k}{\omega^2 + k^2}$$

Вспомогательная задача: Вычислить интеграл

$$I=-\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty\frac{dk k\delta_k}{\omega^2+k^2}$$

$$\boxed{e^{i\delta_k}=\frac{(k+i\omega)(k+i\omega/2)}{(k-i\omega)(k-i\omega/2)}}$$

- **Замена переменной** $k\to x=k/\omega$ $\Rightarrow$ $I=-\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty\delta_k\frac{x\ dx}{1+x^2}$
- **Замена** $\frac{2x}{1+x^2}=\frac{d}{dx}\left(\ln(1+x^2)\right)$
- **Интегрирование по частям:**

$$-\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty dx\ \delta_k\frac{d}{dx}\left(\ln(1+x^2)\right)=\cancel{-\delta_k\ln(1+x^2)\big|_0^\infty}+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty\frac{d\delta_k}{dx}\ln(1+x^2)\ dx$$

- **Вычисление производной** $\frac{d\delta_k}{dx}$ $\Rightarrow$ $\frac{d}{dx}e^{i\delta_k}=\frac{d\delta_k}{dx}e^{i\delta_k}$

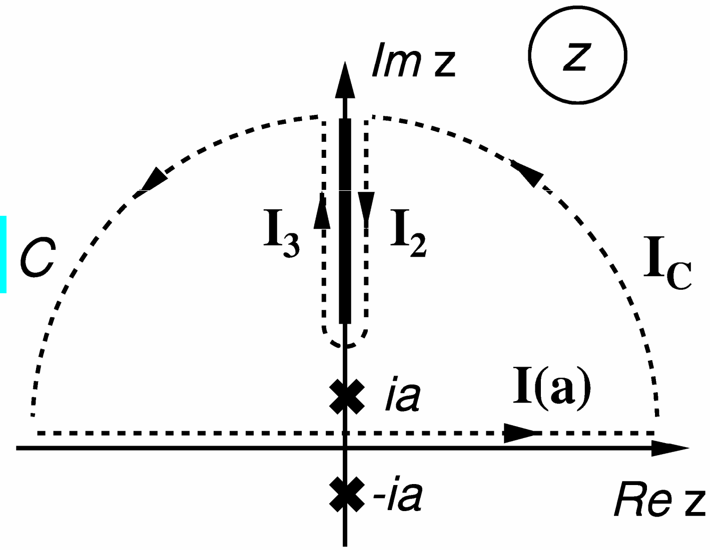
$$\frac{d\delta_k}{dx}=-i\left(\frac{1}{x+i}+\frac{1}{x+i/2}-\frac{1}{x-i}-\frac{1}{x-i/2}\right)=-\frac{2}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+1/4}$$

- **Переформулировка задачи: вычислить интеграл вида**

$$I(a)=-\frac{a}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)}\ln(1+x^2)$$

$$\boxed{I=I(1)+I(\tfrac{1}{2})}$$

$$\boxed{I(a) = -\frac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)}\ln(1+x^2)}$$



Скачок функции $\ln(1+z^2)$ на разрезе:

$$I_2 + I_3 = -\frac{1}{\pi}\int_i^{i\infty}(-2\pi i)\frac{a}{a^2+z^2}dz$$

$$\boxed{y = \mathrm{Im}\ z}$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_1^{\infty}2\pi\frac{a}{a^2-y^2}dy = -2\int_1^{\infty}dy\frac{a}{a^2-y^2} = \ln\frac{y-a}{y+a}\Bigg|_{\infty}^{1} = \boxed{-\ln\frac{1-a}{1+a}}$$

Простой полюс внутри контура *C* в точке $z = ia$:

$$I_C = -\frac{1}{\pi}2\pi i\ \ln(1-a^2)\frac{a}{2ia} = \boxed{-\ln(1-a^2)}$$

Интеграл, который мы ищем:

$$I(a) = I_C - I_2 - I_3 = -\ln(1-a^2) + \ln\frac{1-a}{1+a}$$

$$= \boxed{-2\ln(1+a)}$$

$$\boxed{I = I(1) + I(\tfrac{1}{2})) = -2\ln 2 - 2\ln\tfrac{3}{2}}$$

Вклад окрестностей инстантонной траектории (Итоги)

- **Квантовая поправка к инстантонной траектории:**

$$K = \sqrt{\frac{S}{2\pi}} \left[\frac{\omega^2 \det' \left[-d^2/\tau^2 + V''(\overline{x}(\tau)) \right]}{\det[-d^2/\tau^2 + \omega^2]} \right]^{-1/2}$$

$$\frac{\det'[-d^2/d\tau^2 + V''(\overline{x})]}{\det[-d^2/d\tau^2 + \omega^2]} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{\lambda_n^{(0)}}$$

- **Вклад дискретного спектра:**

$$\frac{1}{\lambda_1^{(0)}} \frac{\lambda_2}{\lambda_2^{(0)}} = \frac{1}{\omega^2} \frac{3}{4}$$

- **Вклад непрерывного спектра:**

$$\prod_{n=3}^{\infty} \frac{\lambda_n}{\lambda_n^{(0)}} = \exp\left(\sum_{n=3}^{\infty} \ln \frac{\lambda_n}{\lambda_n^{(0)}} \right) = e^{I(1)+I(\frac{1}{2})} = e^{-2(\ln \frac{3}{2} + \ln 2)} = \frac{1}{9}$$

- **Квантовая поправка:**

$$K = \sqrt{\frac{S}{2\pi} \frac{1}{12}} = \frac{\omega}{24} \sqrt{\frac{\omega}{6\pi\lambda}}$$

$$S = \frac{\omega^3}{12\lambda}$$

- **Расщепление спектра:**

$$\Delta = K e^{-S} = \frac{\omega}{24} \sqrt{\frac{\omega}{6\pi\lambda}} e^{-\frac{\omega^3}{12\lambda}}$$

Расщепление спектра основного состояния:

$$\Delta == \frac{\omega}{24}\sqrt{\frac{\omega}{6\pi\lambda}}e^{\frac{\omega^3}{12\lambda}}$$

Вопрос: При каких условиях применимо это выражение?

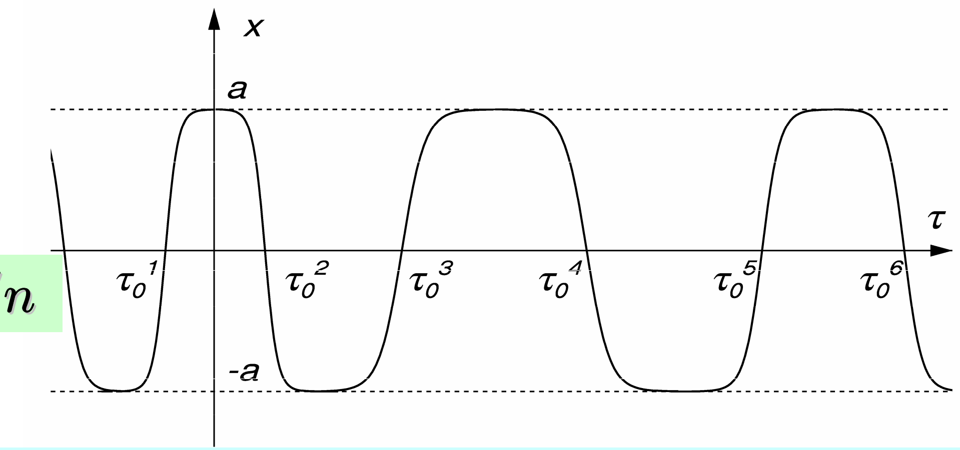
Приближение разреженного инстантонного газа: $S_n = nS$

$$\overline{x}(\tau) = a\tanh\frac{\omega(\tau-\tau_0)}{2}$$

Размер инстантона $\sim \omega^{-1}$

Расстояние между инстантонами $\sim T/n$

$$\boxed{n \ll \omega T}$$



Вопрос: Какое число инстантонов дает максимальный вклад в амплитуду?

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(KTe^{-\frac{S}{\hbar}})^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\Delta\cdot T)^n}{n!}$$

Формула Стирлинга: $n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n$

n-й член суммы: $\sim (e\Delta\cdot T/n)^n$

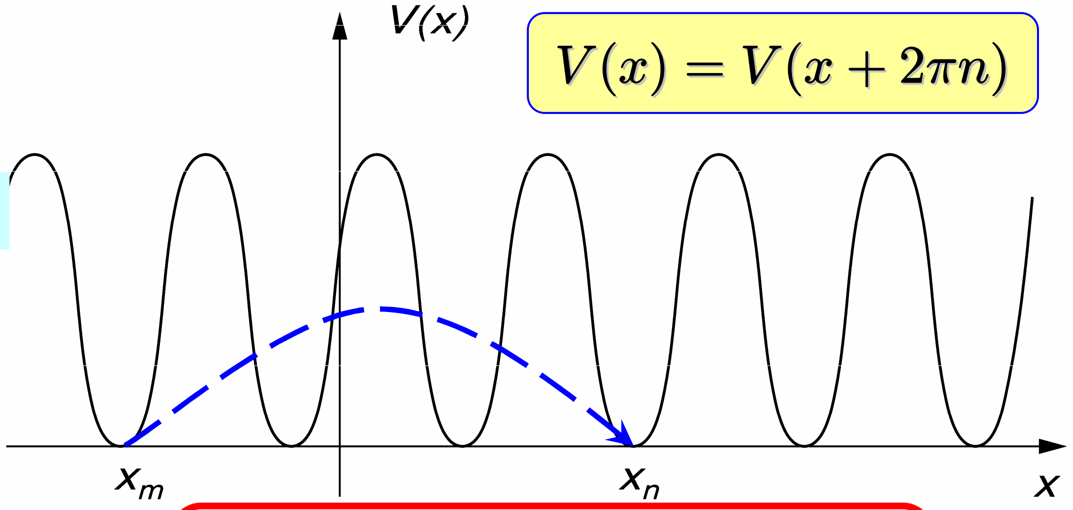
Максимум при $n \approx n_{max} = \Delta\cdot T$

Плотность инстантонов: Δ

Частица в периодическом потенциале

Например, $V(x) = 1 - \cos x$

$$V(x) = V(x + 2\pi n)$$



В окрестности каждого минимума

$$\omega^2 = V''(x_m)/a^2$$

Квантовая механика:
теорема Блоха

$$\psi_\theta(x + 2\pi) = e^{i\theta}\psi_\theta(x)$$

$$\psi_\theta(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\theta}\psi_0(x + 2\pi n)$$

Расщепление спектра (зонная структура): $E(\theta) = \omega/2 - \Delta\cos\theta$

Задача: найти величину Δ методами функционального интегрирования:

$$\boxed{k - k' = m - n \equiv l}$$

$$G(x_n, x_m; T) = \int \mathcal{D}x e^{-S[x(t)]} = Z_0 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k'=0}^{\infty} \frac{\delta_{k-k',l}}{k!k'!} \left(KTe^{-S}\right)^{(k+k')}$$

Число инстантонов:

Число анти-инстантонов:

Зонная структура

$$G(x_n, x_m; T) = Z_0 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k'=0}^{\infty} \frac{\delta_{k-k',l}}{k!k'!} \left(KTe^{-S}\right)^{(k+k')}$$

$$K = \omega \sqrt{\frac{S}{2\pi\hbar}} \left[\frac{\omega^2 \det'[-d^2/\tau^2 + V''(\bar{x})]}{\det[-d^2/\tau^2 + \omega^2]} \right]^{-1/2}$$

$$\delta_{k-k',l} = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \exp\left(i(k-k'-l)\theta\right)$$

Амплитуда перехода из $x_m(-\infty)$ в $x_n(\infty)$:

$$\Delta = Ke^{-S}$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\omega}{\pi}} e^{-\frac{\omega T}{2}}$$

$$G(x_n, x_m, T) = Z_0 \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} e^{-il\theta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(KTe^{-S}e^{i\theta}\right)^k}{k!} \sum_{k'=0}^{\infty} \frac{\left(KTe^{-S}e^{-i\theta}\right)^{k'}}{(k')!}$$

$$= Z_0 \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} e^{-il\theta} \exp\left(e^{i\theta} \frac{\Delta \cdot T}{2}\right) \exp\left(e^{-i\theta} \frac{\Delta \cdot T}{2}\right) = \boxed{\sqrt{\frac{\omega}{\pi}} e^{-\frac{\omega T}{2}} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} e^{-il\theta} e^{\Delta \cdot T \cos\theta}}$$

- ***Коэффициент при евклидовом времени T:*** $E(\theta) = \omega/2 - \Delta \cos\theta$

Энергия основного состояния (нижняя зона)