Кафедра фундаментальных
и прикладных проблем
физики микромира,
МФТИ/ЛТФ Дубна

Квантовая теория калибровочных полей

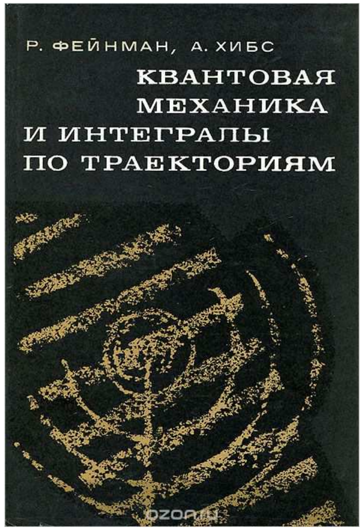
Я М Шнир

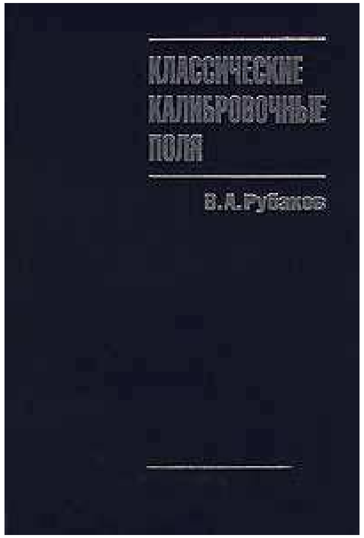
все вопросы, комментарии, замечания и протесты:
shnir@theor.jinr.ru

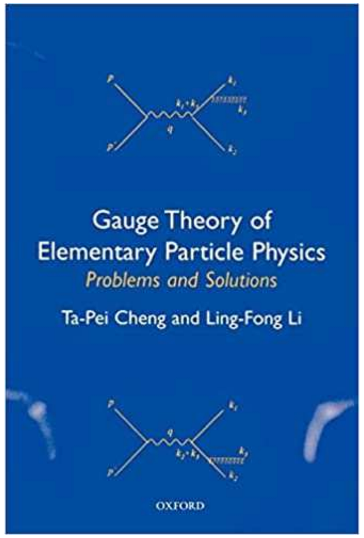
План лекций

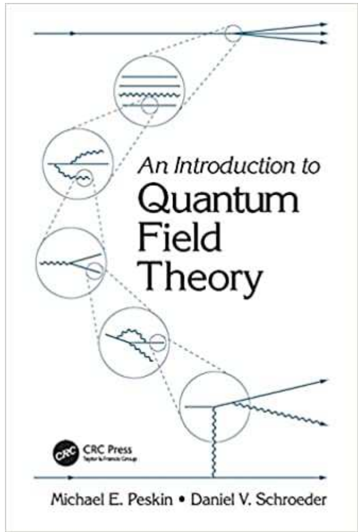
- **Фейнмановская формулировка квантовой механики, основанная на вычислении интегралов по траекториям.**
- **Теория свободного скалярного поля, энергия вакуума.**
- **Теория $\lambda\phi^4$, вычисление эффективного потенциала. Эффект Коулмена-Вайнберга**
- **Регуляризация и перенормировка. Бегущая константа связи**
- **Эффективное действие. Петлевое разложение и диаграммная техника. Разложение по константе связи**
- **Перенормировка**
- **Простейшие топологические солитоны, кинки. Классическое комплексное скалярное поле, локальная и глобальная калибровочная инвариантность, Q-balls**
- **Взаимодействующие скалярные поля, скалярная электродинамика. Абелева модель Хиггса, вихри**
- **Квантование калибровочных полей методами функционального интегрирования, детерминант Фаддеева-Попова и поля духов**
- **Неабелевы калибровочные теории. Инстантоны и монополи**
- *… и, если останется время – теории с фермионами (нулевые моды, теорема об индексе, etc, etc)…*

Литература

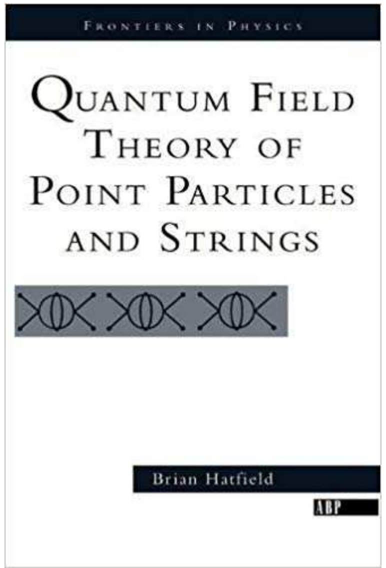

Р. ФЕЙНМАН, А. ХИБС
КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА И ИНТЕГРАЛЫ ПО ТРАЕКТОРИЯМ
ozon.ru

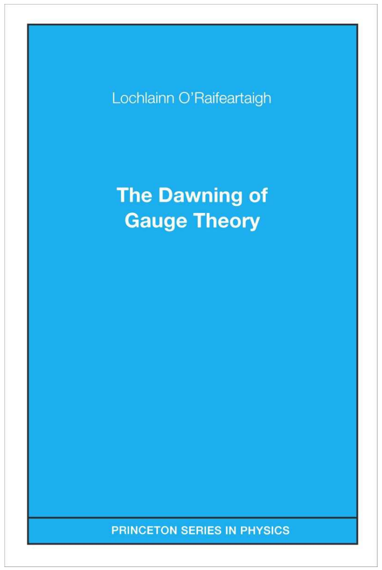

КЛАССИЧЕСКИЕ КАЛИБРОВОЧНЫЕ ПОЛЯ
В.А.Рубаков

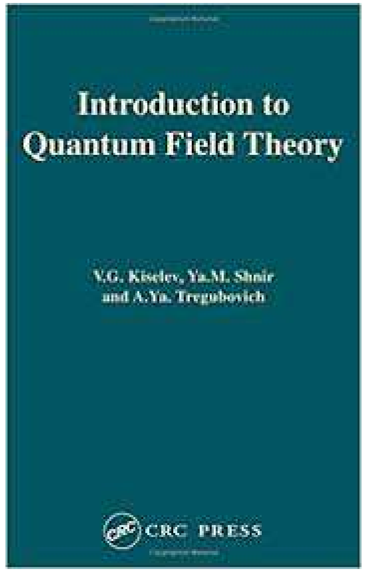

Gauge Theory of Elementary Particle Physics
Problems and Solutions
Ta-Pei Cheng and Ling-Fong Li
OXFORD


An Introduction to Quantum Field Theory
CRC Press
Michael E. Peskin • Daniel V. Schroeder


А.А.СЛАВНОВ, Л.Д.ФАДДЕЕВ
ВВЕДЕНИЕ В КВАНТОВУЮ ТЕОРИЮ КАЛИБРОВОЧНЫХ ПОЛЕЙ


FRONTIERS IN PHYSICS
QUANTUM FIELD THEORY OF POINT PARTICLES AND STRINGS
Brian Hatfield


Lochlainn O'Raifeartaigh
The Dawning of Gauge Theory
PRINCETON SERIES IN PHYSICS


Introduction to Quantum Field Theory
V.G. Kiselev, Ya.M. Shnir and A.Ya. Tregubovich
CRC PRESS

Лекция 1: Действие в классической механике

Свободное одномерное движение частицы

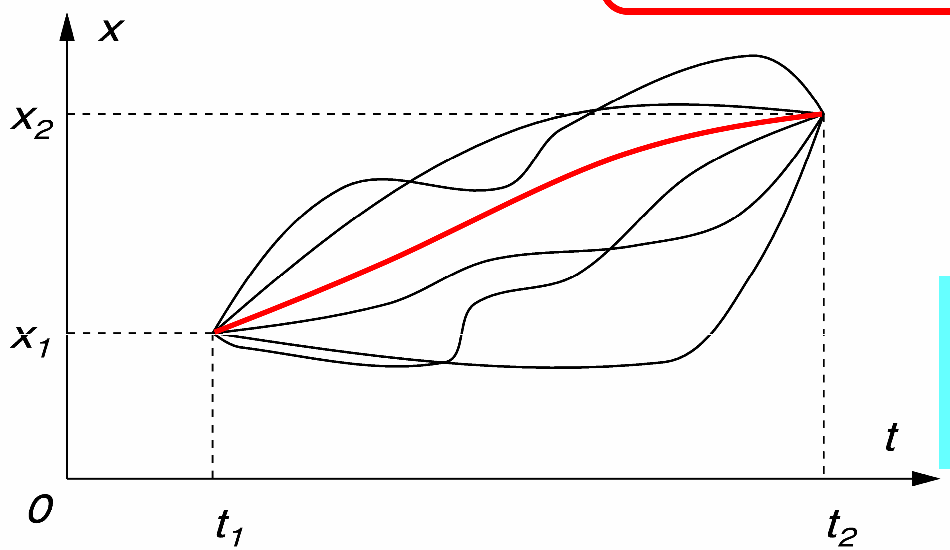
$$\boxed{m\frac{d^2x}{dt^2} = F(x)}$$

- **Лагранжиан:** $\boxed{\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{V}}$ $\qquad \mathcal{T} = \frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2; \quad F(x) = -\frac{d\mathcal{V}}{dx}$

Кинетическая энергия **Потенциальная энергия**

Уравнение движения $\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} = 0}$

Импульс $p = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}}$



- **Действие:** $\boxed{S[x] = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(\dot{x}, x; t)dt}$

Классическая траектория $\bar{x}(t)$ соответствует стационарной точке действия: $\delta S = 0$

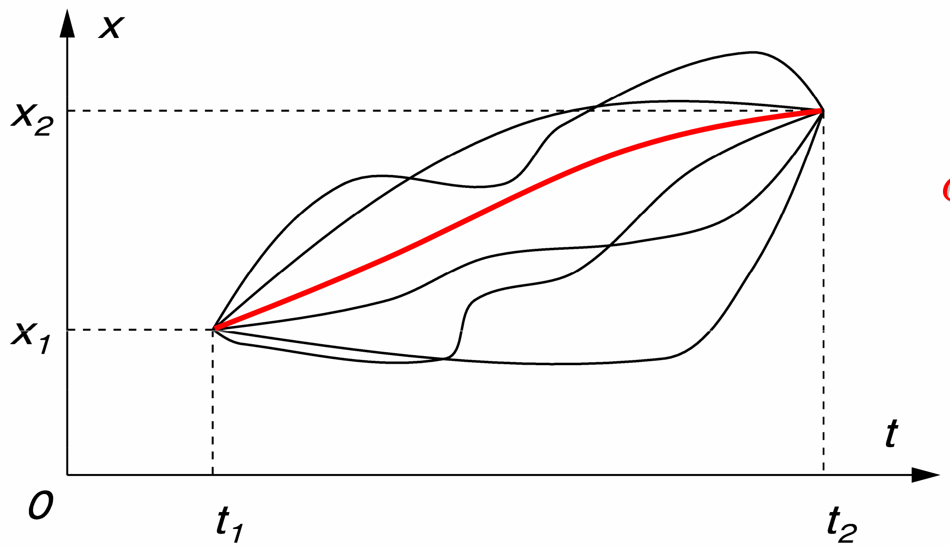
Вариационный принцип

Пучок траекторий, близких к классической:

$$x(t) = \bar{x}(t) + \delta x(t); \qquad \delta x(t_1) = \delta x(t_2) = 0$$

Вариация действия: $\delta S = S[\bar{x} + \delta x] - S[\bar{x}] = \int\limits_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \delta x \right) dt$

$$= \delta x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \Big|_{t_1}^{t_2} - \int\limits_{t_1}^{t_2} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \right) \delta x dt = - \int\limits_{t_1}^{t_2} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \right) \delta x dt$$



Уравнение движения

$$\delta S = 0 \Longrightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0$$

Замечание: **_действие является_** **_<u>функционалом</u> траектории_** $x(t)$

Функционалы и операции над ними

Функционал – это операция, ставящая в соответствие функции $x(t)$ некоторое число

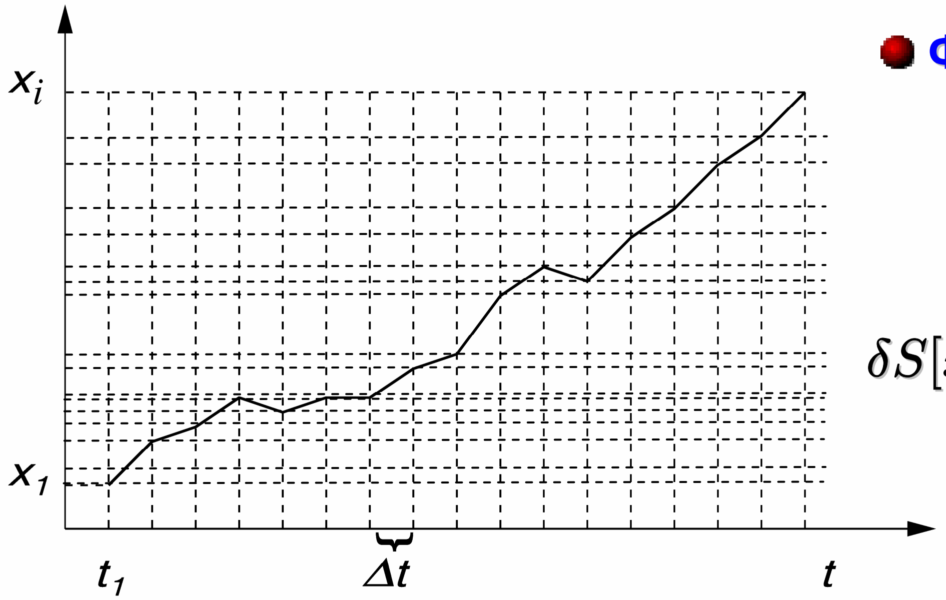
Дискретизация: $\Delta t = \frac{t_b - t_a}{N}, \quad t_{i+1} - t_i = \Delta t, \quad i = 0, 1, \dots N, \; x(t_1) = x_1, \; x(t_N) = x_N$

Дискретизованное действие:

$$S_N = \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \left[\frac{m}{2} \left(\frac{x_{n+1} - x_n}{\Delta t} \right)^2 - \mathcal{V}(x_n) \right]$$

Стационарная точка:

$$\frac{\partial S_N}{\partial x_i} = \Delta t \left[m \left(\frac{x_i - x_{i+1}}{\Delta t^2} - \frac{x_{i+1} - x_i}{\Delta t^2} \right) - \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x_i} \right] = 0$$



- **Функциональная производная**

$$\boxed{\frac{\delta}{\delta x(t)} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \frac{\partial}{\partial x_i}}$$

$$\delta S[x(t)] = \lim_{\Delta t \to 0} dS_N = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{n=1}^{N-1} \frac{\partial S_N}{\partial x_i} dx_i$$

$$= \int_{t_a}^{t_b} \frac{\delta S}{\delta x(t)} \delta x(t) dt$$

Функционалы и операции над ними

- **Функциональная производная - более практичное определение:**

?

$$\frac{\delta S[x(t)]}{\delta x(t')} = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\Big(S[x(t)+\epsilon\,\delta(t-t')] - S[x(t)]\Big)$$

Задача: проверить что это определение совпадает с $\dfrac{\delta}{\delta x(t)} = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{1}{\Delta t}\dfrac{\partial}{\partial x_i}$

Подсказка: воспользуйтесь формулой $\delta(t-t') = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{1}{\Delta t}\delta_{ij}$

Примеры вычисления функциональной производной $\dfrac{\delta F[x(t)]}{\delta x(t')}$

- $F[x] = C = const$ $\Rightarrow$ $\dfrac{\delta F[x(t)]}{\delta x(t')} = 0$

- $F[x] = \int x(t)dt$ $\Rightarrow$ $\dfrac{\delta F[x(t)]}{\delta x(t')} = \lim\limits_{\epsilon\to 0}\dfrac{1}{\epsilon}\left\{\int\Big(x(t)+\epsilon\delta(t-t')\Big)dt - \int x(t)dt\right\}$

$$= \int \delta(t-t')dt = 1$$

$$\boxed{F[x] = \int G(t, t'')x(t)dt}$$

t'' **- параметр**

$$\Rightarrow \frac{\delta F[x(t)]}{\delta x(t')} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon} \left\{ \int G(t, t'') \Big(x(t) + \epsilon \delta(t - t') \Big) dt - \int G(t, t'')\, x(t) dt \right\}$$

$$= \int G(t, t'') \delta(t - t') dt = G(t', t'')$$

$$\boxed{F[x] = x(t)}$$

Обыкновенная функция, а не функционал

$$F[x] = \int \delta(t' - t) x(t') dt' \Rightarrow \frac{\delta F[x(t)]}{\delta x(t')} = \delta(t - t')$$

$$\boxed{F[x] = \int \dot{x}(t)^2 dt} \Rightarrow \frac{\delta F[x(t)]}{\delta x(t')} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon} \left\{ \int \left(\frac{d(x(t) + \epsilon \delta(t - t'))}{dt} \right)^2 dt - \int \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 dt \right\}$$

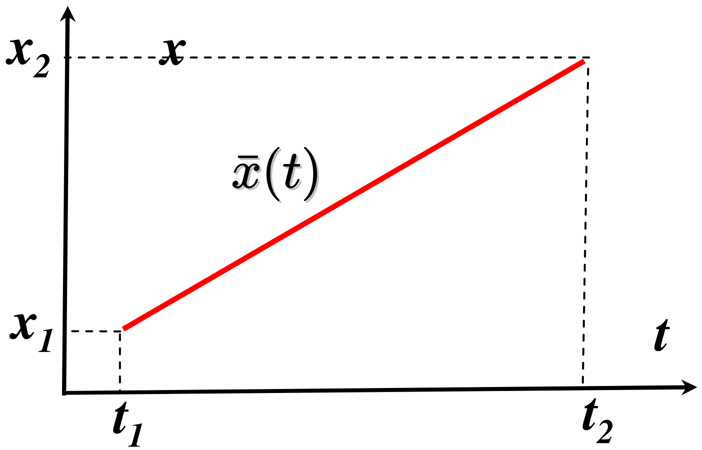
$$= 2 \int \frac{dx(t)}{dt} \frac{d}{dt} (\delta(t - t')) dt = 2 \left(\cancel{\dot{x}(t) \delta(t - t')} \Big|_{t_1}^{t_2} - \int \ddot{x}(t) \delta(t - t') dt \right) = -2 \ddot{x}(t')$$

Действие как функция граничных условий

- ***Свободное движение:***

$$S[x(t)] = \frac{m}{2}\int_{t_1}^{t_2} \dot{x}^2 dt$$

$$x(t_1) = x_1, \;\; x(t_2) = x_2$$

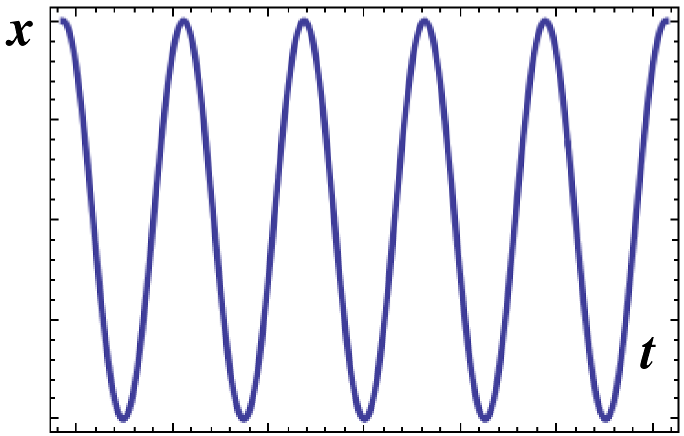


$$\bar{x}(t) = vt; \;\Rightarrow\; S(x_1, x_2, t_1, t_2) = \frac{mv^2}{2}(t_2 - t_t)$$

$$\boxed{S(x_1, x_2, t_1, t_2) = \frac{m(x_2 - x_1)^2}{2(t_2 - t_1)}} \qquad v = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

- ***Гармонический осциллятор:***

$$S[x(t)] = \frac{m}{2}\int_{t_1}^{t_2} \left(\dot{x}^2 - \omega^2 x^2\right) dt$$



$$\bar{x}(t) = x_1 \cos(\omega t) + (\dot{x}_1/\omega)\sin(\omega t)$$

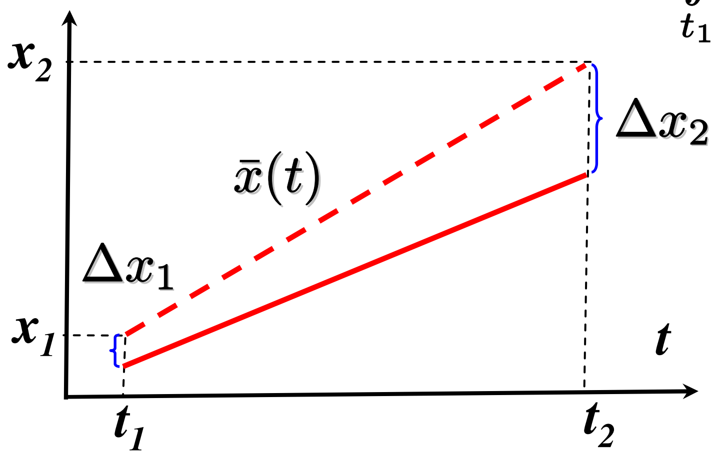
Задача: проверить что $S(x_1, x_2, t_1, t_2) =$ **?**

$$\boxed{= \frac{m\omega}{2\sin\omega(t_2 - t_1)}\left[(x_1^2 + x_2^2)\cos\omega(t_2 - t_1) - 2x_1 x_2\right]}$$

Действие как функция граничных условий

- ***Свободное движение:***

$$S[x(t)] = \frac{m}{2}\int_{t_1}^{t_2} \dot{x}^2 dt \qquad S(x_1, x_2, t_1, t_2) = \frac{m(x_2 - x_1)^2}{2(t_2 - t_1)}$$



$$x_1 \to x_1 + \Delta x_1, \;\; x_2 \to x_2 + \Delta x_2$$

$$\delta S = \frac{\partial \mathcal{L}(\bar{x}(t))}{\partial \dot{x}} \delta x(t)\Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \cancel{\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}(\bar{x}(t))}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial \mathcal{L}(\bar{x}(t))}{\partial x}\right)} \Delta x(t) dt$$

Если $\Delta x_1 = \Delta x_2$, то условие $\delta S=0$ означает сохранение импульса:

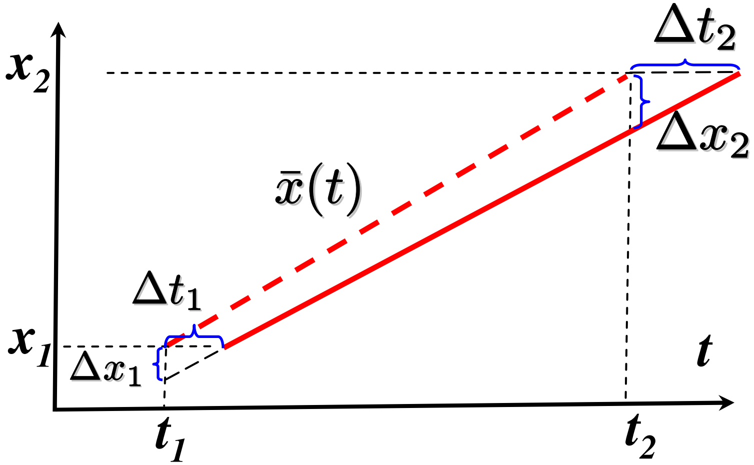
$$\delta S = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \Delta x \Big|_{t_1}^{t_2} = p(t_2)\Delta x_2 - p(t_1)\Delta x_1$$

$$\boxed{\frac{\partial S(x_2, x_1, t_2, t_1)}{\partial x_1} = -p(t_1), \qquad \frac{\partial S(x_2, x_1, t_2, t_1)}{\partial x_2} = p(t_2)}$$

Действие как функция граничных условий

- ***Свободное движение:***

$$S[x(t)] = \frac{m}{2}\int\limits_{t_1}^{t_2} \dot{x}^2 dt \qquad S(x_1, x_2, t_1, t_2) = \frac{m(x_2 - x_1)^2}{2(t_2 - t_1)}$$



$$t_1 \to t_1 + \Delta t_1, \; t_2 \to t_2 + \Delta t_2$$

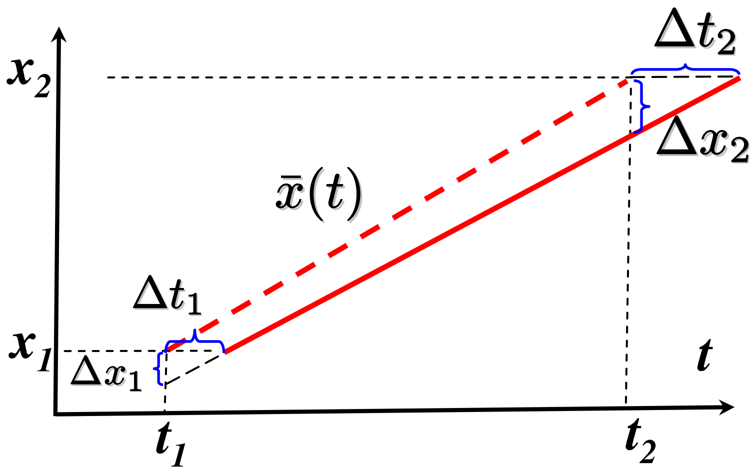
Вариация Δx, связанная с вариацией Δt:

$$\boxed{\Delta x = \frac{\Delta x}{\Delta t}\Delta t = \dot{x}(t)\Delta t}$$

$$S(x_1, x_2, t_1+\Delta t_1, t_2+\Delta t_2) = \int\limits_{t_1+\Delta t_1}^{t_2+\Delta t_2} \mathcal{L}(\bar{x}+\Delta x, \dot{\bar{x}}+\Delta\dot{x})dt = \int\limits_{t_1+\Delta t_1}^{t_1} \mathcal{L}dt + \int\limits_{t_2}^{t_2+\Delta t_2} \mathcal{L}dt + \int\limits_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}dt$$

$$\Downarrow$$

$$\delta S = \mathcal{L}\Delta t_2 - \mathcal{L}\Delta t_1 + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\Delta x\Big|_{t_1}^{t_2} + \int\limits_{t_1}^{t_2}\left(\cancel{\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}}\right)\Delta x dt$$



$$\delta S = \mathcal{L}\Delta t_2 - \mathcal{L}\Delta t_1 + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\Delta x\Big|_{t_1}^{t_2} =$$

$$= \left(\mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\dot{x}\right)\Delta t_2 - \left(\mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\dot{x}\right)\Delta t_1 = 0$$

Гамильтониан: $\boxed{H = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\dot{x} - \mathcal{L}}$

Если $\Delta t_1 = \Delta t_2$, то условие $\delta S=0$ означает сохранение энергии:

$$S(x_1, x_2, t_1, t_2) = \frac{m(x_2 - x_1)^2}{2(t_2 - t_1)}$$

$$\Downarrow$$

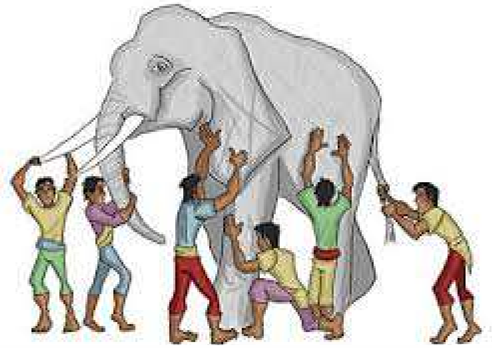
$$\begin{cases} \dfrac{\partial S(x_2, x_1, t_2, t_1)}{\partial t_2} = -\dfrac{m(x_2 - x_1)^2}{2(t_2 - t_1)^2} = -\left(\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\dot{x} - \mathcal{L}\right)\Big|_{t_2} \equiv -H(t_2) \\ \dfrac{\partial S(x_2, x_1, t_2, t_1)}{\partial t_1} = \dfrac{m(x_2 - x_1)^2}{2(t_2 - t_1)^2} = \left(\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\dot{x} - \mathcal{L}\right)\Big|_{t_1} \equiv H(t_1) \end{cases}$$

Функциональные интегралы в квантовой механике

Daniel F. Styer et al,
Am. J. Phys. 70 (3), March 2002 → 9 формулировок Квантовой механики

- **Матричная формулировка Гейзенберга**

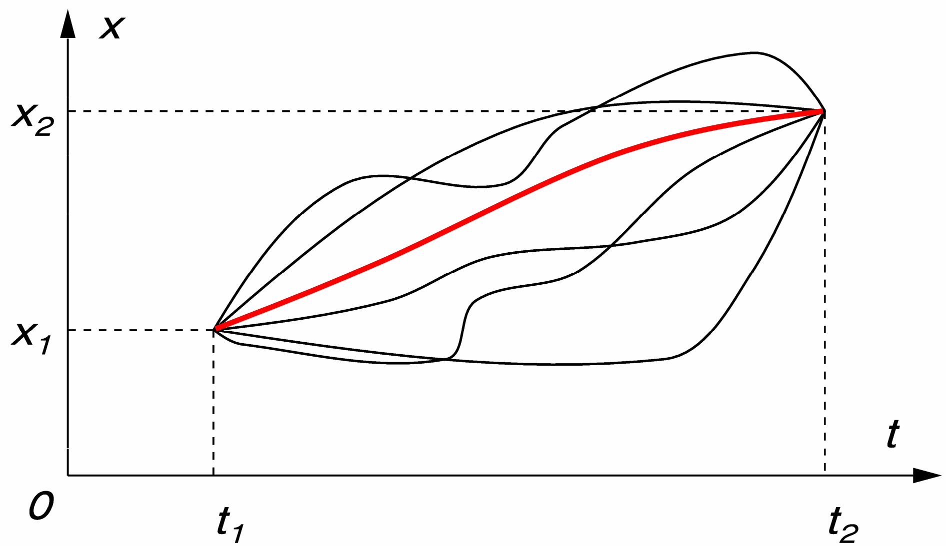
$$< \psi | f(\hat{A}) | \psi >; \qquad \frac{d\hat{A}}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[\hat{A}, \hat{H}] + \frac{\partial \hat{A}}{\partial t}$$



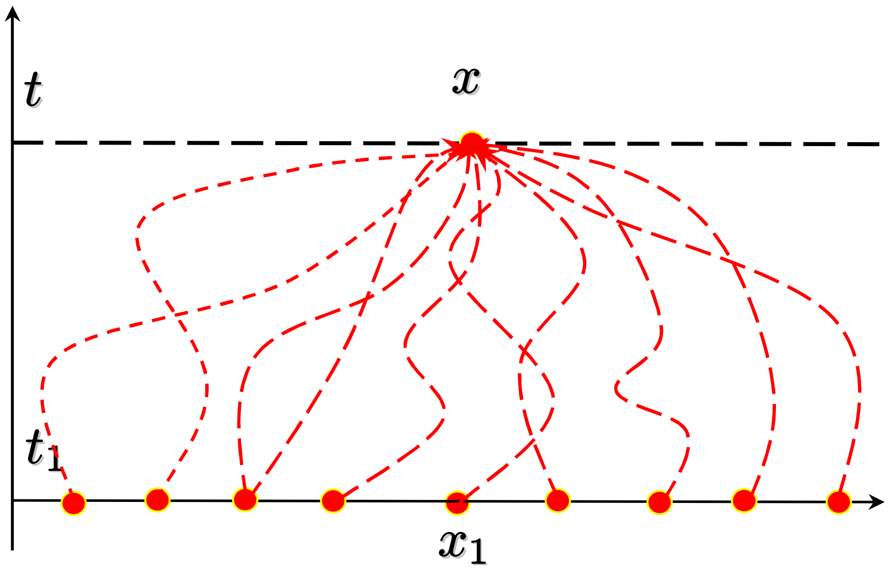
- **Волновая формулировка Шредингера**

$$i\hbar \frac{d\psi(x,t)}{dt} = \hat{H}\psi(x,t)$$

- **Фейнмановские интегралы по траекториям**



Уравнение Шрёдингера: Функция Грина



$$i\hbar\frac{d\psi(x,t)}{dt} = \hat{H}\psi(x,t)$$

Функция Грина уравнения Шрёдингера

$$G(x,x_1,t,t_1)$$

(пропагатор, резольвента)

$$\psi(x,t) = \int dx_1 G(x,x_1,t,t_1)\psi(x_1,t_1)$$

$$\begin{cases} i\hbar\dfrac{dG(x,x_1,t,t_1)}{dt} = \hat{H}G(x,x_1,t,t_1) \\ G(x,x_1,t_1,t_1) = \delta(x-x_1) \quad . \end{cases}$$

Стационарная задача: $\hat{H}\psi_n(x) = E_n\psi_n(x)$

$$\sum_n \psi_n(x)\psi_n^*(y) = \delta(x-y)$$

? **Задача:** **проверить что**

$$G(x,x_1,t,t_1) = \sum_n \psi_n(x)\psi_n^*(x_1)e^{-\frac{i}{\hbar}E_n(t-t_1)}$$

Функция Грина свободной частицы

$$\begin{cases} \hat{H} = -\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{d^2}{dx^2} & \hat{H}\psi(x) = E\psi(x) \\ \hat{P} = -i\hbar\dfrac{\partial}{\partial x} & \hat{P}\psi(x) = p\psi(x) \end{cases} \Rightarrow \psi(x) = e^{\frac{i}{\hbar}px} \qquad E = \frac{p^2}{2m}$$

- **Дискретизация спектра:**

$$\boxed{0 \le x \le L; \quad \psi(0,t) = \psi(L,t)} \Rightarrow \boxed{\psi(x) \to \psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{L}}\exp\left(\frac{i}{\hbar}p_n x\right)}$$

$$p_n = \frac{2\pi n\hbar}{L}, \qquad E_n = \frac{p_n^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{2\pi n}{L}\right)^2 \qquad \begin{cases} n \to n+1 \\ p \to p + \Delta p = p + \dfrac{2\pi\hbar}{L} \end{cases}$$

- **Функция Грина:**

$$G(x,x_1,t,t_1) = \sum_n \psi_n(x)\psi_n^*(x_1)e^{-\frac{i}{\hbar}E_n(t-t_1)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{L}\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left[p(x-x_1) - \frac{p^2(t-t_1)}{2m}\right]\right\}$$

$$\boxed{\Delta p = \frac{2\pi\hbar}{L}} \Rightarrow \boxed{G(x,x_1,t,t_1) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp}{2\pi\hbar}\exp\left[-\frac{i}{2m\hbar}p^2(t-t_1) + \frac{i}{\hbar}p(x-x_1)\right]}$$

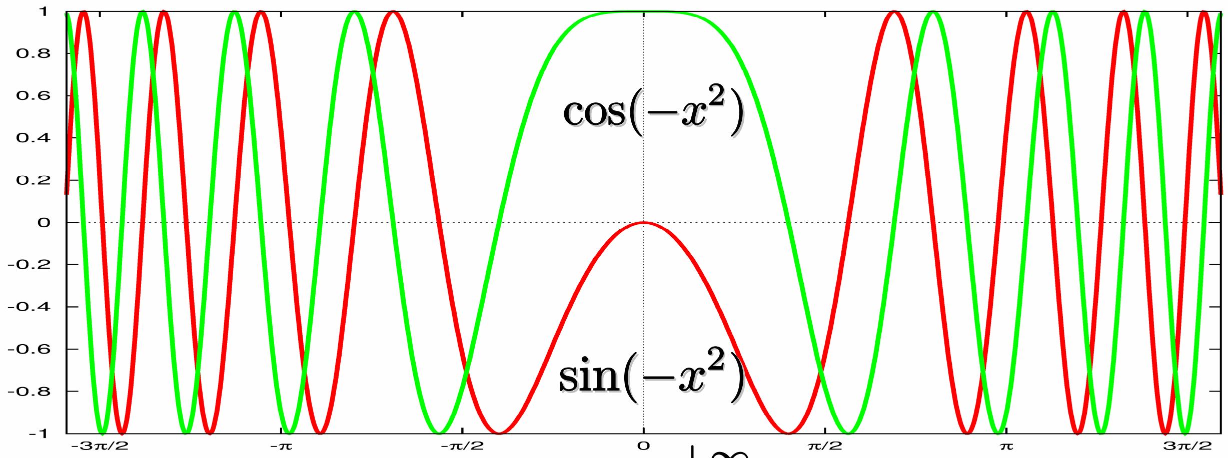
Гауссовы интегралы

- **Тривиальные интегралы:**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\pi} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2+bx}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{4a}}$$

Похожие интегралы Френеля:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos x^2\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin x^2\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$



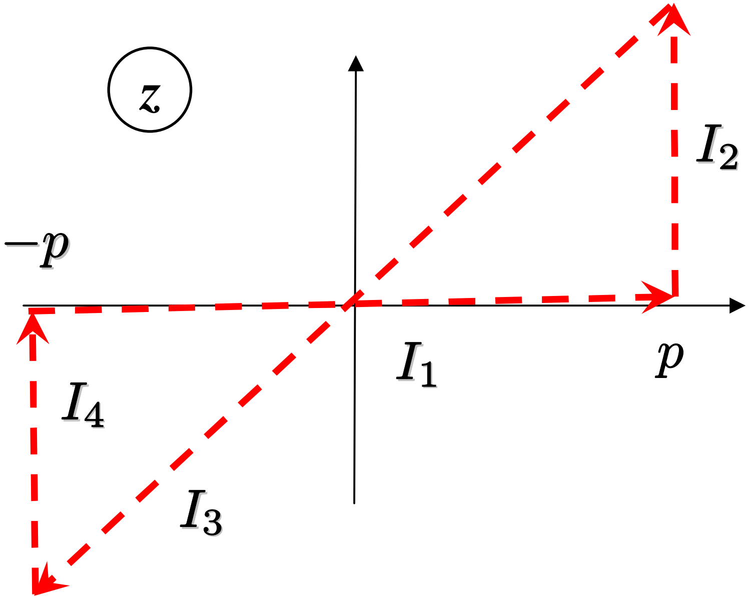
$$\cos x^2 + i \sin x^2 = e^{ix^2} \longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix^2}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} (1+i) = \sqrt{\pi} e^{i\pi/4} = \sqrt{i\pi}$$

Гауссов интеграл от чисто мнимой экспоненциальной функции имеет тот же вид, что и интеграл от действительной функции при замене $-a \to ia, \quad a > 0$

Гауссовы интегралы

Более детальный анализ:

$$I(a)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax^2}\,dx \quad \Rightarrow \quad \oint e^{iaz^2}\,dz = I_1+I_2+I_3+I_4=0$$



$$I_1: \quad z=x \to I_1=\lim_{p\to\infty}\int_{-p}^{p} e^{iax^2}\,dx = I(a)$$

$$I_2: \quad z=p+iy \to I_2=\lim_{p\to\infty}\int_{0}^{p} e^{ia(p+iy)^2}\,i\,dy$$

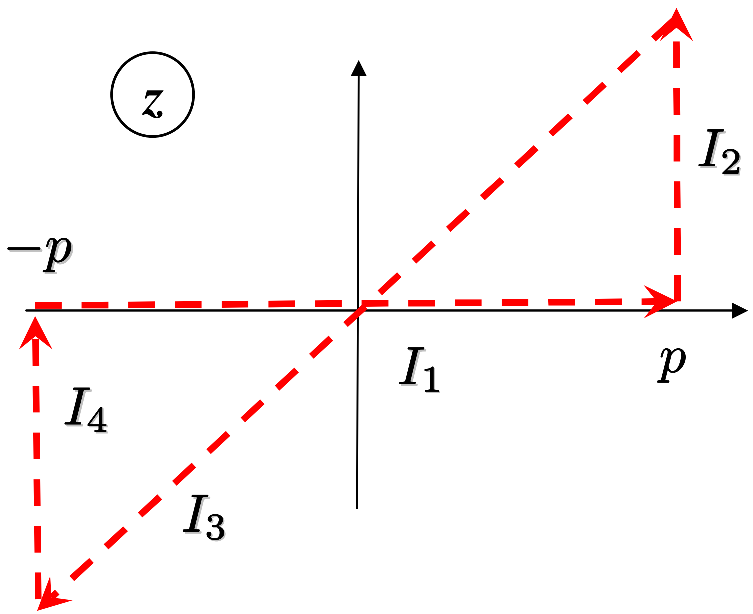
$$I_3: \quad z=x+iy=(1+i)y=\sqrt{2}e^{i\pi/4}y$$

$$I_3=e^{i\pi/4}\lim_{p\to\infty}\int_{\sqrt{2}p}^{-\sqrt{2}p} e^{-ax^2}\,dx$$

$$I_4: \quad z=-p+iy \to I_4=\lim_{p\to\infty}\int_{-p}^{0} e^{ia(iy-p)^2}\,i\,dy$$

$$(y\to -y) \to I_4=\lim_{p\to\infty}\int_{0}^{p} e^{ia(iy+p)^2}\,i\,dy = I_2$$

Гауссовы интегралы



$$|I_2| = |I_4| = \lim_{p\to\infty}\left|\int_0^p e^{ia(p+iy)^2} i\,dy\right| =$$

$$= \lim_{p\to\infty}\left|\int_0^p e^{-2apy} dy\right| = \lim_{p\to\infty}\frac{1-e^{-2ap^2}}{2ap} = 0$$

$$\boxed{I_1 + I_3 = 0}$$

$$I(a) = -I_3 = e^{i\pi/4}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = e^{i\pi/4}\sqrt{\frac{\pi}{a}} = \boxed{\sqrt{\frac{i\pi}{a}}}$$

- **Менее тривиальные интегралы (домашнее задание):**

?

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2+ibx} dx\ ; \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-ax^2+bx} dx\ ; \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-ax^2+bx} dx$$

Вычисление функции Грина свободной частицы

$$G(x,x_1,t,t_1)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp}{2\pi\hbar}\exp\left[-\frac{i}{2m\hbar}p^2(t-t_1)+\frac{i}{\hbar}p(x-x_1)\right]$$

$$a=\frac{i(t-t_1)}{2m\hbar};\quad b=\frac{i}{\hbar}(x-x_1) \Rightarrow$$

$$G(x,x_1,t,t_1)=\sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar(t-t_1)}}e^{\frac{i}{\hbar}\frac{m(x-x_1)^2}{2(t-t_1)}}$$

Классическое действие свободной частицы:

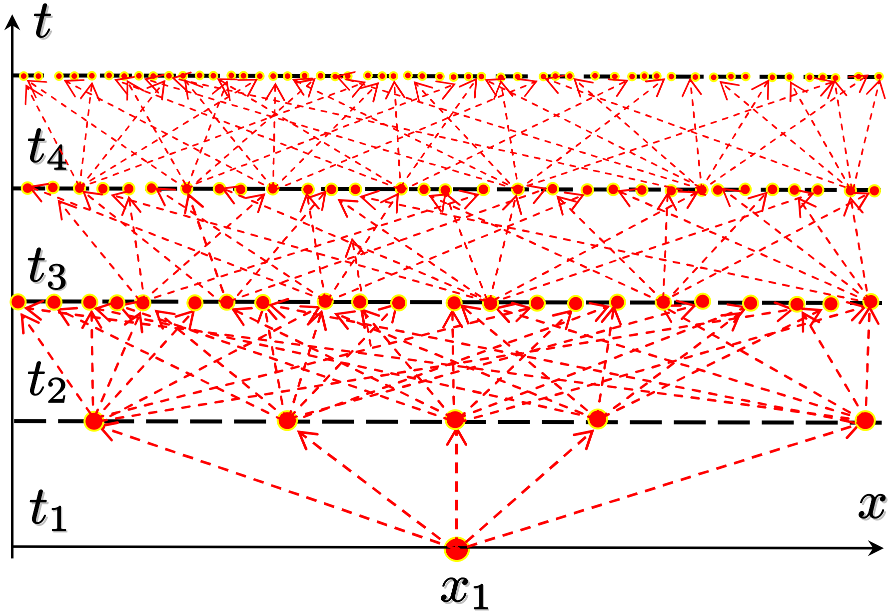
$$S_{cl}(x_1,x_2,t_1,t_2)=\frac{m(x_2-x_1)^2}{2(t_2-t_1)}$$

$$G(x,x_1,t,t_1)=\sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar(t-t_1)}}e^{\frac{i}{\hbar}S_{cl}(x,x_1,t,t_1)}$$

***Замечание:** этот результат является точным!*

Интеграл по траекториям

$$G(x,x_1,t,t_1)=\int dx_2dx_3\ldots dx_N G(x,x_N,t,t_N)\ldots G(x_3,x_2,t_3,t_2)G(x_2,x_1,t_2,t_1)$$



Дискретизация:

$$\Delta t=\frac{t-t_1}{N},\quad t_{i+1}-t_i=\Delta t,\quad i=1,2,\ldots N$$

$$N\to\infty\ ,\quad \Delta t\to 0$$

$$G(x,x_1,t+\Delta t,t)\approx G(x,x_1,t,t)+\frac{\partial G}{\partial t}\Delta t=$$
$$=G(x,x_1,t,t)-\frac{i}{\hbar}\hat{H}G(x,x_1,t,t)\Delta t$$

$$\hat{H}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+V(x)$$

$$G(x,x_1,t,t)=\delta(x-x_1)=\int\frac{dk}{2\pi}e^{ik(x-x_1)}$$

$$G(x,x_1,t+\Delta t,t)\approx\delta(x-x_1)-\frac{i\Delta t}{\hbar}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\delta''(x-x_1)+V(x)\delta(x-x_1)\right)$$

$$k=\frac{p}{\hbar}$$

$$\approx\int\frac{dp}{2\pi\hbar}e^{\frac{ip}{\hbar}(x-x_1)}\left[1-\frac{i\Delta t}{\hbar}\left(\frac{p^2}{2m}+V(x)\right)\right]$$

$$G(x, x_1, t+\Delta t, t) \approx \int \frac{dp}{2\pi\hbar} e^{\frac{ip}{\hbar}(x - x_1)} \left[1 - \frac{i\Delta t}{\hbar}\left(\frac{p^2}{2m} + V(x)\right)\right]$$

$$\approx \int \frac{dp}{2\pi\hbar} e^{\frac{i\Delta t}{\hbar}\left[p\frac{(x-x_1)}{\Delta t} - \left(\frac{p^2}{2m} + V(x)\right)\right]}$$

Функция Грина уравнения Шредингера:

$$G(x, x_1, t, t_1) = \int dx_2 dx_3 \dots dx_N G(x, x_N, t, t_N) \dots G(x_3, x_2, t_3, t_2) G(x_2, x_1, t_2, t_1)$$

$$= \lim_{N\to\infty} \int dx_2 dx_3 \dots dx_N \frac{dp_1}{2\pi\hbar}\frac{dp_2}{2\pi\hbar} \dots \frac{dp_N}{2\pi\hbar} e^{\frac{i\Delta t}{\hbar}\sum_{i=1}^{N}\left[p_i\frac{(x_{i+1}-x_i)}{\Delta t} - \left(\frac{p_i^2}{2m} + V(x_i)\right)\right]}$$

- N интегралов по импульсу и по координатам, размерность конфигурационного пространства 2N-1
- Координаты x и импульсы p – это классические функции, а не операторы
- Предел $N \to \infty$ соответствует обычным траекториям в фазовом пространстве $x(t),\ p(t)$
- В этом пределе в экспоненциальной части функции Грина находится

классическое действие: $S[p(t), x(t)] = \int dt(p\dot{x} - H(p, x))$

Интеграл по траекториям

$$G(x,x_1,t,t_1)=\lim_{N\to\infty}\int dx_2dx_3\ldots dx_N\frac{dp_1}{2\pi\hbar}\frac{dp_2}{2\pi\hbar}\ldots\frac{dp_N}{2\pi\hbar}e^{\frac{i\Delta t}{\hbar}\sum\limits_{i=1}^{N}\left[p_i\frac{(x_{i+1}-x_i)}{\Delta t}-\left(\frac{p_i^2}{2m}+V(x_i)\right)\right]}$$

$$G(x,x_1,t,t_1)=\int\mathcal{D}x(t)\mathcal{D}p(t)e^{\frac{i}{\hbar}\int\limits_{t_1}^{t}dt[p(t)\dot{x}(t)-H(p(t),x(t))]}=\int\mathcal{D}x\mathcal{D}p\;e^{\frac{i}{\hbar}S[p,x]}$$

Редуцированная форма получается интегрированием по импульсам:

$$\int\frac{dp_i}{2\pi\hbar}e^{\frac{i\Delta t}{\hbar}\left[p_i\frac{(x_{i+1}-x_i)}{\Delta t}-\frac{p_i^2}{2m}\right]}=\sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar\Delta t}}e^{-\frac{i\Delta t}{\hbar}\frac{m}{2}\left(\frac{x_{i+1}-x_i}{\Delta t}\right)^2}$$

$$G(x,x_1,t,t_1)=\lim_{N\to\infty}\int dx_2dx_3\ldots dx_N\left(\sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar\Delta t}}\right)^N e^{\frac{i\Delta t}{\hbar}\sum\limits_{i=1}^{N}\left[\frac{m}{2}\left(\frac{x_{i+1}-x_i}{\Delta t}\right)^2-V(x_i)\right]}$$

$$\equiv\int\mathcal{D}x(t')e^{\frac{i}{\hbar}\int\limits_{t_1}^{t}dt'\left[\frac{m}{2}\dot{x}(t')^2-V(x(t'))\right]}=\int\mathcal{D}x(t')e^{\frac{i}{\hbar}S[x(t')]}$$

Функция Грина свободной частицы

- **Функция Грина уравнения Шредингера:**

$$G(x,x_1;T)=\sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar T}}e^{\frac{i}{\hbar}\frac{m(x-x_1)^2}{2T}}$$

- **Интеграл по траекториям:** $G(x,x_1;T)=\int \mathcal{D}x(t')e^{\frac{i}{\hbar}S[x(t')]}$

$$\approx \int \prod_{i=2}^{N} dx_i \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar\Delta t_i}}e^{\frac{im}{\hbar}\left[\frac{(x_2-x_1)^2}{2\Delta t_1}+\frac{(x_3-x_2)^2}{2\Delta t_2}+\dots\right]}$$

Бесконечная цепочка Гауссовых интегралов по dx_i типа:

$$\int dx_2 \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar\Delta t_1}}\sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar\Delta t_2}}e^{\frac{im}{2\hbar}\left[x_2^2\left(\frac{1}{\Delta t_1}+\frac{1}{\Delta t_2}\right)-2x_2\left(\frac{x_1}{\Delta t_1}+\frac{x_3}{\Delta t_2}\right)+\frac{x_1^2}{\Delta t_1}+\frac{x_3^2}{\Delta t_2}\right]}$$

$=$

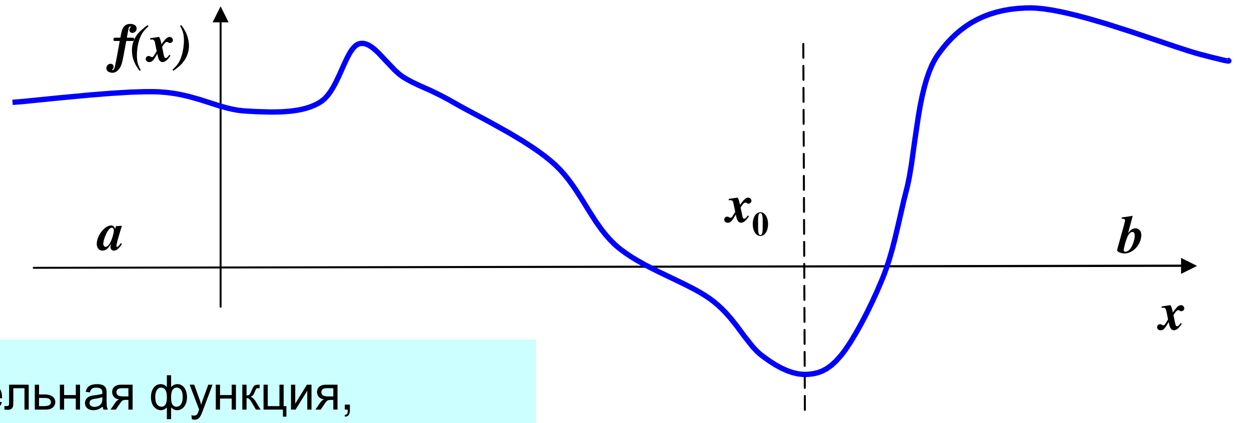
…и так далее для всех последующих интегрирований по $dx_3, dx_4, \dots$

Замечание: ***прямое вычисление интеграла по траекториям возможно только для свободного движения, $V(x)=0$***

Метод стационарной фазы

- **Простой пример приближенного вычисления обычного интеграла:**

$$\boxed{I = \int_a^b dx\, e^{-f(x)}}$$



$f(x)$ - гладкая действительная функция,
имеющая минимум $f(x_0),\ x_0 \in [a,b],\ f'(x_0)=0$

$$I \approx \int_a^b dx\, e^{-f(x_0)-\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2-\frac{1}{3!}f'''(x_0)(x-x_0)^3-\frac{1}{4!}f^{\text{ɪv}}(x_0)(x-x_0)^4-\ldots}$$

$$\approx \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-f(x_0)-\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2} = \boxed{\sqrt{\frac{2\pi}{f''(x_0)}}e^{-f(x_0)}}$$

Основной вклад в интеграл набирается в области $x - x_0 \sim 1/\sqrt{f''(x_0)}$

Метод стационарной фазы

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-f(x)} \approx \sqrt{\frac{2\pi}{f''(x_0)}}\, e^{-f(x_0)}$$

Замечание: ***приближение работает, если поправки 3го и 4го порядка***

пренебрежимо малы: $\dfrac{f'''(x_0)}{\left(f''(x_0)\right)^{3/2}} \ll 1$ ***и*** $\dfrac{f^{iv}(x_0)}{\left(f''(x_0)\right)^{2}} \ll 1$

Это условие автоматически выполняется, если $f(x) = g(x)/\hbar, \quad \hbar \ll 1$

- ***Пример: формула Стирлинга:*** $z! = \Gamma(z+1) = \int_0^\infty dt\ t^z e^{-t} = \int_0^\infty dt\ e^{-t+z\ln t}$

$$f(t) = t - z\ln t, \quad \longrightarrow f'(t_0) = -1 + z/t_0 = 0, \quad t_0 = z$$
$$f''(t_0) = -z/t_0^2 = -z^{-1}$$

$$z! \approx \sqrt{2\pi z}\left(\frac{z}{e}\right)^z$$

- **Домашнее задание:** ***получить аналогичную формулу для оценки экспоненциального интеграла от аналитической функции комплексной переменной z***

Функция Грина свободной частицы

- **Вычисление интеграла по траекториям методом стационарной фазы**

Вариация траектории:

$$x(t) = \bar{x}(t) + \delta x(t) \qquad S[\overline{x}(t) + \delta x(t)] \approx S[\overline{x}(t)] + \delta S + \frac{1}{2}\delta^2 S + \ldots$$

Классическая траектория $\overline{x}(t)$ $\Rightarrow$ $\delta S[x(t)] = 0$ $\qquad S[\overline{x}(t)] = \dfrac{m(x-x_0)^2}{2(t-t_0)}$

Свободное движение – все вариации действия кроме второй, $\delta^2 S$, равны нулю

$$\delta^2 S[x(t)] = \frac{1}{2}\int_0^T dt \left(\frac{d\delta x}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}\int_0^T dt\delta x \left(\frac{-d^2\delta x}{dt^2}\right)\delta x \equiv \frac{1}{2}\int_0^T dt\delta x(-\partial_t^2)\delta x$$

Функция Грина:

$$G(x, x_0, T) = \int \mathcal{D}[x(t)]\ e^{\frac{i}{\hbar}\left[S[\overline{x}(t)]+\delta^2 S\right]} = e^{\frac{i}{\hbar}\frac{m(x-x_0)^2}{2T}} \int \mathcal{D}[\delta x(t)] e^{\frac{im}{2\hbar}\int_0^T dt\delta x(-\partial_t^2)\delta x}$$

Классическая часть

Квантовые поправки

Оператор второй вариации действия

Задача: найти собственные функции и собственные значения оператора $-\partial_t^2$

$$\delta x(t) = \sum_n C_n \psi_n(t); \qquad -\partial_t^2 \psi_n(t) = \lambda_n \psi_n(t)$$

Граничные условия: $0 \le t \le T; \quad \psi_n(0) = \psi_n(T) = 0$

- ***Ортонормированные моды:*** $\boxed{\psi_n(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \sin\frac{\pi n t}{T}; \qquad \lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{T^2} \quad n = 1, 2, 3\ldots}$

- ***Вторая вариация действия:***

$$\boxed{\delta^2 S[x(t)] = \frac{1}{2}\int_0^T dt \sum_{m,n} C_n \psi_n(t) \lambda_m C_m \psi_m(t) = \frac{1}{2}\sum_n \lambda_n C_n^2}$$

- ***Функциональный интеграл:***

$$G(x, x_0, T) = e^{\frac{i}{\hbar}\frac{m(x-x_0)^2}{2T}} \int \prod_n dC_n \, \mathcal{A} \, e^{\frac{im}{2\hbar}\sum_n C_n^2 \lambda_n}$$

Якобиан преобразования переменных $\delta x \to C_n$

$$G(x,x_0,T) = e^{\frac{i}{\hbar}\frac{m(x-x_0)^2}{2T}} \int \prod_n dC_n \; \mathcal{A} \; e^{\frac{im}{2\hbar}\sum_n C_n^2 \lambda_n}$$

Произведение бесконечного числа интералов вида:

$$\boxed{\int dC_n \exp\left(\frac{im}{2\hbar}\lambda_n C_n^2\right) = \sqrt{\frac{2i\pi\hbar}{m\lambda_n}}}$$

$$G(x,x_0,T) = e^{\frac{i}{\hbar}\frac{m(x-x_0)^2}{2T}} \mathcal{A} \prod_n \sqrt{\frac{2i\pi\hbar}{m\lambda_n}} = e^{\frac{i}{\hbar}\frac{m(x-x_0)^2}{2T}} \mathcal{A} \prod_n \sqrt{\frac{2T^2 i\hbar}{\pi n^2 m}}$$

Замечание: Ответ уже известен из непосредственного вычисления!

$$\boxed{G(x,x_1,T) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar T}} e^{\frac{i}{\hbar}\frac{m(x-x_0)^2}{2T}}}$$

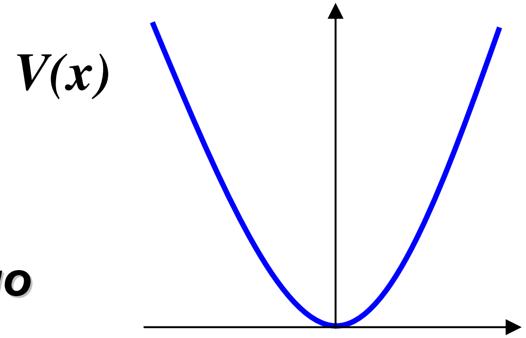
$$\boxed{\mathcal{A} \prod_n \sqrt{\frac{2i\hbar T^2}{\pi n^2 m}} = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar T}}}$$

Рецепт вычисления функционального интеграла

- **Найти классическую траекторию $\overline{x}(t)$ из условия $\delta S[\overline{x}(t)] = 0$ и вычислить действие на классической траектории.**
- **Разложить функционал действия в окрестности классической траектории, $x(t) = \overline{x}(t) + \delta x(t)$**
- **Перейти к переменным $\delta x(t)$ и вычислить функциональный интеграл гауссового типа по ним.**

Функция Грина гармонического осциллятора

$$S[x(t)] = \frac{m}{2}\int\limits_0^T dt\,(\dot{x}^2 - \omega^2 x^2)$$



Замечание: ***Действие осциллятора квадратично по переменной*** x ***→ все его вариации кроме*** $\delta^2 S$ ***обращаются в ноль.***

$$G(x, x_0, T) = e^{\frac{i}{\hbar} S[\overline{x}(t)]} \int \mathcal{D}\delta x(t)\; e^{\frac{im}{\hbar}\int\limits_0^T dt\,\delta x(t)(-\partial_t^2 - \omega^2)\delta x(t)}$$

Классическая часть

Квантовые поправки

Классическое действие:

$$S[\overline{x}(t)] = \frac{m\omega}{2\sin\omega T}\left[(x^2 - x_0^2)\cos\omega T - 2xx_0\right]$$

Оператор второй вариации действия

Задача: найти собственные функции и собственные значения оператора

$$\delta x(t) = \sum_n C_n \psi_n(t); \qquad -(\partial_t^2 + \omega^2)\psi_n(t) = \lambda_n \psi_n(t)$$

Граничные условия: $0 \le t \le T; \quad \psi_n(0) = \psi_n(T) = 0$

- ***Ортонормированные моды:***

$$\boxed{\psi_n(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \sin\frac{\pi n t}{T}; \quad \lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{T^2} - \omega^2, \quad n = 1, 2, 3 \ldots}$$

- ***Вторая вариация действия:***

$$\boxed{\delta^2 S[x(t)] = \frac{1}{2}\int_0^T dt \sum_{m,n} C_n \psi_n(t) \lambda_m C_m \psi_m(t) = \frac{1}{2}\sum_n \lambda_n C_n^2}$$

Функциональный интеграл: $G(x,x_0,T) = e^{\frac{i}{\hbar}S[\overline{x}(t)]}\int\prod_n dC_n\mathcal{A}\, e^{\frac{im}{2\hbar}\sum_n C_n^2\lambda_n}$

$$= e^{\frac{i}{\hbar}S[\overline{x}(t)]}\mathcal{A}\prod_{n=1}^{\infty}\left[\frac{m}{2i\hbar}\left(\frac{\pi^2n^2}{T^2}-\omega^2\right)\right]^{-\frac{1}{2}} = e^{\frac{i}{\hbar}S[\overline{x}(t)]}\mathcal{A}\prod_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2iT^2\hbar}{mn^2\pi}}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\omega^2T^2}{n^2\pi^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Воспользуемся тем, что

1. Как и для свободной задачи

$$\mathcal{A}\prod_n\sqrt{\frac{2i\hbar T^2}{\pi n^2 m}} = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar T}}$$

2. Возможно точное вычисление бесконечного произведения вида

$$\boxed{\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right) = \frac{\sin x}{x}}$$

Точная квантовомеханическая функция Грина гармонического осциллятора

$$\boxed{G(x,x_0,T) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i\hbar\sin(\omega T)}}\, e^{\frac{i}{\hbar}\frac{m\omega}{2\sin\omega T}\left((x_0^2+x(T)^2)\cos\omega T-2x_0x(T)\right)}}$$

Евклидово время и связь со статфизикой

Физический смысл функции Грина $G(x, x_0; T)$:
Вероятность перехода частицы из точки x_0 в точку x за время T

Знание функции Грина эквивалентно знанию волновой функции и энергии квантового состояния системы.

Вопрос:
а как теперь найти волновую функции и энергию основного состояния?

- ***Переход к евклидовому времени:*** $\tau = iT$ $\qquad dt \to i d\tau; \quad \frac{dx}{dt} \to i\frac{dx}{d\tau}$

$$S[x(t)] = \int_0^T dt \left[\frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - V(x) \right] \quad \Rightarrow \quad iS_E[x(\tau)] = i\int_0^T d\tau \left[\frac{m}{2}\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + V(x) \right]$$

Обычное действие

Евклидово действие

$$e^{iS[x]/\hbar} \quad \Rightarrow \quad e^{-S[x]/\hbar}$$

$$T = -i\tau$$

Обычная функция Грина:

$$G(x, x_0; T) = \sum_n \psi_n(x)\psi_n^*(x_0)e^{-iE_nT/\hbar}$$

Уравнение Шрёдингера

$$i\hbar\frac{d\psi(x,t)}{dt} = \hat{H}\psi(x,t)$$

$$\tau = iT$$

Евклидова функция Грина:

$$G(x, x_0; \tau) = \sum_n \psi_n(x)\psi_n^*(x_0)e^{-E_n\tau/\hbar}$$

Уравнение теплопроводности

$$-\hbar\frac{d\psi(x,\tau)}{d\tau} = \hat{H}\psi(x,\tau)$$

$$G(x, x_0; \tau) = \psi_0(x)\psi_0^*(x_0)e^{-\frac{E_0\tau}{\hbar}} + \psi_1(x)\psi_1^*(x_0)e^{-\frac{E_1\tau}{\hbar}} + \psi_2(x)\psi_2^*(x_0)e^{-\frac{E_2\tau}{\hbar}} + \dots$$

$$E_0 < E_1 < E_2 < \dots$$

Статсумма Больцмана:

$$Z = \sum_{n=0}^{N} e^{-\frac{E_n}{k_BT}} = e^{-\frac{E_0}{k_BT}} + e^{-\frac{E_1}{k_BT}} + \dots$$

$$\frac{1}{k_BT} \Rightarrow \frac{\tau}{\hbar}$$

Точная квантовомеханическая функция Грина гармонического осциллятора

$$\boxed{G(x,x_0,T)=\sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i\hbar\sin(\omega T)}}\,e^{\frac{i}{\hbar}\frac{m\omega}{2\sin\omega T}\left((x_0^2+x(T)^2)\cos\omega T-2x_0x(T)\right)}}$$

$$T=-i\tau \qquad \sinh(ix)=i\sin x; \qquad \cosh(ix)=\cos x$$

Евклидова функция Грина:

$$\Downarrow$$

$$\boxed{G(x,x_0;\tau)=\sqrt{\frac{m\omega}{2\pi\hbar\sinh(\omega\tau)}}\,e^{-\frac{m\omega}{2\hbar\sinh(\omega\tau)}\left[(x^2+x_0^2)\cosh(\omega\tau)-2x_0x\right]}}$$

В пределе $\tau\to\infty$**,** $\sinh\omega\tau\simeq\cosh\omega\tau\approx\frac{1}{2}e^{\omega\tau}$

$$G(x,x_0,\tau)\approx\sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}\,e^{-\frac{\omega\tau}{2}}e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}(x_0^2+x^2)}=\underbrace{\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}}_{\psi_0(x)}\;\underbrace{\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}e^{-\frac{m\omega x_0^2}{2\hbar}}}_{\psi_0(x_0)}\;\underbrace{e^{-\frac{\omega\tau}{2}}}$$

$$\boxed{G(x,x_0;\tau)\to\psi_0(x)\psi_0^*(x_0)e^{-\frac{E_0\tau}{\hbar}}}$$

$$\boxed{E_0=\frac{\hbar\omega}{2}}$$

Рецепт вычисления энергии основного состояния

- Вычислить функцию Грина квантовой системы методом стационарной фазы с учетом квантовых поправок
- Перейти к евклидову времени τ и рассмотреть предел $\tau \to \infty$
- Все, что является коэффициентом при τ в экспоненциальном множителе, интепретируется как энергия основного состояния (вакуума)
- Предэкпоненциальные множители интерпретируются как волновые функции основного состояния