Функциональное интегрирование по фермионам

Напомним: **Классический осциллятор:** $H = \frac{1}{2}\left(p^2 + x^2\right)$

Квантовый осциллятор:

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + ip)\,; \quad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - ip)$$

$$\begin{cases} a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \\ a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \end{cases}$$

$$H = \frac{1}{2}\left(a^\dagger a + a a^\dagger\right) \equiv \{a, a^\dagger\} = N + \frac{1}{2}; \qquad N = a^\dagger a; \qquad N|n\rangle = n|n\rangle$$

Коммутационные соотношения: $[a, a^\dagger] = aa^\dagger - a^\dagger a = 1, \quad [a, a] = [a^\dagger, a^\dagger] = 0$

Антикоммутационные соотношения: $\{\theta, \theta^\dagger\} = \theta\theta^\dagger + \theta^\dagger\theta = 1, \quad \{\theta, \theta\} = \{\theta^\dagger, \theta^\dagger\} = 0$

Замечание: *антикоммутирующие операторы* ***нильпотентны***: $\theta^2 = \left(\theta^\dagger\right)^2 = 0$

Грассманова алгебра: $\theta_i\theta_j + \theta_j\theta_i = 0\,, \quad i, j = 1, 2\ldots$

Суперчисла: $x = x_0 + x_i\theta^i + \frac{1}{2}x_{ij}\theta^i\theta^j + \ldots$

Грассмановы переменные

- **Разложение в ряд:**

- **Дифференцирование:** $$\frac{\partial}{\partial\theta_i}\frac{\partial}{\partial\theta_j}+\frac{\partial}{\partial\theta_j}\frac{\partial}{\partial\theta_i}=0$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial_L}{\partial\theta_1}f(\theta_1,\theta_2)=f_1+f_{12}\theta_2\\[2mm]\dfrac{\partial_R}{\partial\theta_1}f(\theta_1,\theta_2)=f_1-f_{12}\theta_2\end{cases}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial\theta_i}\right)^2=0,\qquad\left\{\frac{\partial}{\partial\theta_i},\theta_j\right\}\equiv\frac{\partial}{\partial\theta_i}\theta_j+\theta_j\frac{\partial}{\partial\theta_i}=\delta_{ij}$$

- **Вариация функции:** $$\delta f(\theta)=\delta\theta\frac{\partial_L f}{\partial\theta}=\frac{\partial_R f}{\partial\theta}\delta\theta$$

- **Интегрирование = дифференцирование:** $$\int d\theta\equiv\frac{\partial}{\partial\theta}\ \Longrightarrow\ \int d\theta\int d\theta=0$$

$$\int d\theta=0;\qquad\int\theta d\theta=1$$

$$\int d\theta\ f(\theta+\eta)=\int d\theta\ f(\theta)$$

- **Комплексные грассмановы переменные:**

$$\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}(\theta_1+i\theta_2)\,;\qquad\bar\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}(\theta_1-i\theta_2)$$

$$\overline{\theta\eta}=\bar\eta\bar\theta=-\bar\theta\bar\eta$$

Фермионный осциллятор в 0+1 dim

$$\boxed{L = \frac{i}{2}\left(\bar{\psi}\dot{\psi} - \dot{\bar{\psi}}\psi\right) - \frac{\omega}{2}[\bar{\psi}, \psi]} \Rightarrow \quad P_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = -\frac{i}{2}\bar{\psi}, \quad P_{\bar{\psi}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{\psi}}} = -\frac{i}{2}\psi$$

- **Классический гамильтониан:** $H = \dot{\psi}P_\psi + \dot{\bar{\psi}}P_{\dot{\bar{\psi}}} - L \boxed{= \frac{\omega}{2}[\bar{\psi}, \psi]}$

Уравнения движения:

$$\frac{\partial L}{\partial \psi} = \frac{i}{2}\dot{\bar{\psi}} + \omega\bar{\psi} \qquad \frac{\partial L}{\partial \bar{\psi}} = \frac{i}{2}\dot{\psi} - \omega\psi$$

$$\Rightarrow \quad \dot{\bar{\psi}} + i\omega\bar{\psi} = 0 \qquad \dot{\psi} - i\omega\psi = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\bar{\psi} = \bar{\theta}e^{-i\omega t} \qquad \psi = \theta e^{i\omega t}}$$

Раскладывая поля по операторам:

$$\boxed{H_B = \frac{1}{2}\left(a^\dagger a + a a^\dagger\right) \equiv \{a, a^\dagger\}} \Leftrightarrow \boxed{H_F = \frac{1}{2}\left(\theta^\dagger\theta - \theta\theta^\dagger\right) \equiv [\theta^\dagger, \theta]}$$

$$N_B = a^\dagger a; \qquad N_F = \theta^\dagger\theta \quad \Leftrightarrow \quad N_f^2 = \theta^\dagger\theta\theta^\dagger\theta = \theta^\dagger(1 - \theta^\dagger\theta)\theta = \theta^\dagger\theta = N_f$$

Замечание:* *Как бозонный, так и фермионный осциллятор рассматриваются в качестве классических моделей.

Гауссовы интегралы по фермионам

$\int d\theta\delta(\theta) = \int d\theta\theta = 1 \Rightarrow$ **$\delta(\theta)=\theta$**

$$e^{a\theta} = 1 + a\theta; \quad e^{\bar\theta a\theta} = 1 + \bar\theta a\theta$$

$$\int d\theta e^{a\theta} = \int d\theta(1 + a\theta) = a$$

$$\int d\bar\theta d\theta e^{\bar\theta a\theta} = \int d\bar\theta d\theta(1 + \bar\theta a\theta) = a \equiv e^{\ln a}$$

- **d=2:** $\theta = (\theta_1, \theta_2), \quad \bar\theta\theta = (\bar\theta_1\theta_1 + \bar\theta_2\theta_2), \quad (\bar\theta\theta)^2 = 2\bar\theta_1\theta_1\bar\theta_2\theta_2$

$$\overline{\theta_1\theta_2} = \bar\theta_2\bar\theta_1 = -\bar\theta_1\bar\theta_2 \qquad \int d\theta = \int d\theta_2 \int d\theta_1; \quad \int d\bar\theta = \int d\bar\theta_1 \int d\bar\theta_2$$

- $$\int d\bar\theta \int d\theta e^{\bar\theta\theta} = \int d\bar\theta_1 \int d\bar\theta_2 \int d\theta_2 \int d\theta_1 e^{\bar\theta_1\theta_1} e^{\bar\theta_2\theta_2} =$$

$$\int d\bar\theta_1 \int d\bar\theta_2 \int d\theta_2 \int d\theta_1 (1+\bar\theta_1\theta_1)(1+\bar\theta_2\theta_2) = \int d\bar\theta_1 \int d\bar\theta_2 \int d\theta_2 \int d\theta_1 \, \bar\theta_1\theta_1\bar\theta_2\theta_2 = 1$$

- $$\int d\bar\theta_1 \int d\bar\theta_2 \int d\theta_2 \int d\theta_1 e^{\bar\theta_1 a_1\theta_1} e^{\bar\theta_2 a_2\theta_2} = \int d\bar\theta_1 \int d\theta_1 e^{\bar\theta_1 a_1\theta_1} \int d\bar\theta_2 \int d\theta_2 e^{\bar\theta_2 a_2\theta_2} =$$

$$= a_1 a_2 = e^{\ln a_1 + \ln a_2}$$

$$\int d\bar\theta_1 d\theta_1 d\bar\theta_2 d\theta_2 e^{\bar\theta_1 M_{11}\theta_1 + \bar\theta_1 M_{12}\theta_2 + \bar\theta_2 M_{21}\theta_1 + \bar\theta_2 M_{22}\theta_2}$$

$$= M_{11}M_{22} - M_{12}M_{21} = \det\ M = e^{\ln\det\ M}$$

- **Гауссов интеграл:**

$$\boxed{I_F = \int d\bar\theta d\theta e^{\bar\theta_i M_{ij}\theta_j} = \det\ M}$$

Напомним:

$$\boxed{I_B = \int d^n z^* d^n z\ e^{z_i^* M_{ij} z_j} = \frac{(2\pi)^n}{\det\ M}}$$

- **Гауссов интеграл с источниками:**

$$\boxed{I_F[\bar\eta, \eta] = \int d\bar\theta d\theta e^{\bar\theta_i M_{ij}\theta_j + \bar\theta_i \eta_i + \bar\eta_i \theta_i}}$$

Сдвиг переменных: $\theta_i \to \theta_i + M^{-1}_{ik}\eta_k; \qquad \bar\theta_i \to \bar\theta_i + \bar\eta_k M^{-1}_{ki}$

$$\Rightarrow \quad I_F[\bar\eta, \eta] = \int d\bar\theta d\theta e^{(\bar\theta + \bar\eta M^{-1}) M (\theta + M^{-1}\eta) + \bar\eta M^{-1}\eta} = \boxed{\det\ M\ e^{\bar\eta M^{-1}\eta}}$$

Напомним:

$$\boxed{I_B[J^*, J] = \int d^n z^* d^n z\ e^{z_i^* M_{ij} z_j + J_i^* z_i + z_i^* J_i} = \frac{(2\pi)^n}{\det\ M} e^{J_i^* M^{-1}_{ij} J_j}}$$

Фермионный осциллятор: функция Грина

$$L = \frac{i}{2}\left(\bar\psi\dot\psi - \dot{\bar\psi}\psi\right) - \frac{\omega}{2}[\bar\psi, \psi] \Rightarrow L = \frac{1}{2}\bar\Psi\left(i\sigma_3\frac{d}{dt} - \omega\right)\Psi$$

Двухкомпонентный спинор: $\Psi = \begin{pmatrix} \psi \\ \bar\psi \end{pmatrix}, \quad \bar\Psi = \Psi^\dagger\sigma_3 = (\bar\psi, -\psi)$

- $$i\bar\Psi\sigma_3\frac{d}{dt}\Psi = i(\bar\psi, -\psi)\begin{pmatrix} \dot\psi \\ -\dot{\bar\psi} \end{pmatrix} = i(\bar\psi\dot\psi + \psi\dot{\bar\psi}) \equiv i(\bar\psi\dot\psi - \dot{\bar\psi}\psi)$$

- $$\bar\Psi\Psi = (\bar\psi, -\psi)\begin{pmatrix} \psi \\ \bar\psi \end{pmatrix} = \bar\psi\psi - \psi\bar\psi \equiv [\bar\psi, \psi]$$

- **Функция Грина фермионного осциллятора:**

$$\left(i\sigma_3\frac{d}{dt} - \omega\right)G(t-t') = \delta(t-t')$$

Преобразование Фурье: $G(t-t') = \int\frac{dk}{2\pi}G(k)e^{-ik(t-t')}; \quad \delta(t-t') = \int\frac{dk}{2\pi}e^{-ik(t-t')}$

$$G(k) = \frac{1}{\sigma_3 k - \omega} = \frac{\sigma_3 k + \omega}{k^2 - \omega^2}$$

- *Уравнения движения:*

$$\left(i\sigma_3\frac{d}{dt}-\omega\right)\Psi(t)=\Theta(t),\quad \Theta(t)=\left(\begin{array}{c}\eta(t)\\ \bar{\eta}(t)\end{array}\right)$$

Источники

- **Формальное решение уравнения движения:**

$$\Psi(t)=\int dt'\ G(t-t')\Theta(t')\equiv G\star\Theta$$

- **Производящий функционал** $Z[\bar{\Theta},\Theta]=Ne^{\int dtdt'\bar{\Theta}(t')G(t-t')\Theta(t)}\equiv Ne^{\bar{\Theta}\star G\star\Theta}$

Производящий функционал *связных* функций Грина

$$W[\bar{\Theta},\Theta]=-\int dtdt'\bar{\Theta}(t)G(t-t')\Theta(t')\equiv-\bar{\Theta}\star G\star\Theta$$

- **Пропагатор фермионного осцллятора:**

$$G(t-t')\equiv-\frac{\delta}{\delta\bar{\Theta}(t)}\frac{\delta}{\delta\Theta(t')}W[\bar{\Theta},\Theta]$$

Фермионный осциллятор: функциональный интеграл

Действие:

$$S = \frac{1}{2}\int dt \left[\bar{\Psi}\left(i\sigma_3 \frac{d}{dt} - \omega\right)\Psi + \bar{\Theta}\Psi + \bar{\Psi}\Theta\right]$$

- ***Источники:***

$$\bar{\Theta}\Psi \equiv \bar{\Psi}\Theta = (\bar{\psi}, -\psi)\begin{pmatrix}\eta \\ \bar{\eta}\end{pmatrix} = \bar{\psi}\eta + \bar{\eta}\psi$$

- ***Функциональный интеграл:***

$$Z[\bar{\Theta},\Theta] = \int \mathcal{D}\bar{\Psi}\mathcal{D}\Psi e^{\frac{i}{2}\int dt\left[\bar{\Psi}\left(i\sigma_3\frac{d}{dt}-\omega\right)\Psi+\bar{\Theta}\Psi+\bar{\Psi}\Theta\right]} = N e^{\int dt dt' \bar{\Theta}(t')G(t-t')\Theta(t)}$$

- **Вакуумное среднее поля Ψ:**

$$\langle\Psi\rangle = \left.\frac{\delta Z}{\delta\bar{\Theta}}\right|_{\Theta=\bar{\Theta}=0} = \frac{1}{Z}\int \mathcal{D}\bar{\Psi}\mathcal{D}\Psi\ \Psi e^{\frac{i}{2}\int dt\bar{\Psi}\left(i\sigma_3\frac{d}{dt}-\omega\right)\Psi} = 0$$

- **Двухточечная функция:**

$$\langle\bar{\Psi}\Psi\rangle = \left.\frac{\delta Z}{\delta\bar{\Theta}\delta\Theta}\right|_{\Theta=\bar{\Theta}=0} = \frac{1}{Z}\int \mathcal{D}\bar{\Psi}\mathcal{D}\Psi\ \bar{\Psi}\Psi e^{\frac{i}{2}}\int dt\bar{\Psi}\left(i\sigma_3\frac{d}{dt}-\omega\right)\Psi = G(t-t')$$

Суперсимметричный осциллятор

- **А что, если рассмотреть бозонный и фермионный осцилляторы вместе?**

Напомним: $[a_B, a_B^\dagger] = 1; \qquad \{a_F, a_F^\dagger\} = 1$

$$\boxed{H_B = \omega\left(a_B^\dagger a_B + \frac{1}{2}\right) = \omega\left(N_B + \frac{1}{2}\right);} \qquad \boxed{H_F = \omega\left(a_F^\dagger a_F - \frac{1}{2}\right) = \omega\left(N_F - \frac{1}{2}\right)}$$

$$N_B = 0, 1, 2\ldots \qquad\qquad N_F = 0, 1$$

$$H = H_B + H_F = \omega(a_B^\dagger a_B + a_F^\dagger a_F) = \omega(N_B + N_F)$$

- **Замечание: энергия основного состояния равна нулю!**

Рассмотрим *суперзаряды* $\quad Q = a_B^\dagger a_F, \quad \bar{Q} = a_F^\dagger a_B$

Задача: 1) проверьте, что $[Q, H] = [\bar{Q}, H] = 0$, и $\{Q, \bar{Q}\} = H/\omega$

2) проверьте, что $[Q, N_B] = -Q,$ и $[Q, N_F] = Q$

- ***Оператор Q увеличивает N_B на 1 и уменьшает N_F на 1;***
- ***Оператор $\bar{Q}$ уменьшает N_B на 1 и увеличивает N_F на 1***

Свободная суперчастица: $S = \frac{1}{2}\int dt\left(\dot{x}^2 + i\psi\dot{\psi}\right)$

Первая вариация действия: $\delta S = \int dt\left\{\dot{x}\delta\dot{x} + \frac{i}{2}\left(\delta\psi\dot{\psi} + \psi\delta\dot{\psi}\right)\right\}$

$$= \int dt\left\{-\ddot{x}\delta x + \frac{i}{2}\left(\delta\psi\dot{\psi} - \dot{\psi}\delta\psi\right)\right\} = \int dt\left\{-\ddot{x}\delta x + i\delta\psi\dot{\psi}\right\} = 0$$

Уравнения поля: $\ddot{x} = 0, \quad \dot{\psi} = 0$

$\epsilon\psi = -\psi\epsilon$

Симметрия действия: $x \to x + \delta_\epsilon x, \quad \psi \to \psi + \delta_\epsilon\psi; \quad \delta_\epsilon x = -i\epsilon\psi; \quad \delta_\epsilon\psi = \epsilon\dot{x}$

Суперсимметрия - SUSY

Напомним: ***генератор преобразований симметрии с параметром ϵ определяется как*** $\delta S = \int dt\dot{\epsilon}Q = 0$

$$\delta S = \int dt(i\ddot{x}\epsilon\psi + i\epsilon\dot{x}\dot{\psi}) = -\int dt\ i\dot{x}\dot{\epsilon}\psi - \int dt\ i\dot{x}\epsilon\dot{\psi} + i\epsilon\dot{x}\dot{\psi} = -\int dt\ \dot{\epsilon}(i\dot{x}\psi)$$

Суперзаряд: $Q = i\dot{x}\psi$

Оператор преобразований SUSY: $e^{i\bar{Q}\epsilon} = 1 + i\bar{Q}\epsilon$

Суперсимметричный осциллятор

$$L = \frac{\dot{x}^2}{2} - \frac{V^2(x)}{2} + i\bar{\psi}\dot{\psi} - V'(x)\bar{\psi}\psi, \quad V(x) = \omega x$$

Преобразования суперсимметрии:

$$\begin{cases} \delta_\epsilon x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\bar{\psi}\epsilon \\ \delta_\epsilon \psi = -\dfrac{i}{\sqrt{2}}\dot{x}\epsilon - \dfrac{1}{\sqrt{2}}V(x)\epsilon \\ \delta_\epsilon \bar{\psi} = 0 \end{cases}$$

- **Задача:** вычислите вариацию лагранжиана при этих преобразованиях

- $\dfrac{\dot{x}^2}{2} \to \dfrac{\dot{x}^2}{2} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\dot{x}\dot{\bar{\psi}}\epsilon$
- $-\dfrac{V^2(x)}{2} \to -\dfrac{1}{2}V^2\left(x + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\bar{\psi}\epsilon\right) = -\dfrac{V^2(x)}{2} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}VV'\bar{\psi}\epsilon$
- $i\bar{\psi}\dot{\psi} \to i\bar{\psi}\dot{\psi} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\bar{\psi}\ddot{x}\epsilon - \dfrac{i}{\sqrt{2}}\bar{\psi}V'\dot{x}\epsilon$
- $-V'\bar{\psi}\psi \to -V'\bar{\psi}\psi + \dfrac{i}{\sqrt{2}}\bar{\psi}V'\dot{x}\epsilon + \dfrac{1}{\sqrt{2}}VV'\bar{\psi}\epsilon$

$$L \to L + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\dot{x}\dot{\bar{\psi}} \cancel{- VV'\bar{\psi}} + \bar{\psi}\ddot{x} \cancel{- i\bar{\psi}\dot{x}V'} \cancel{+ i\bar{\psi}\dot{x}V'} \cancel{+ VV'\bar{\psi}}\right)\epsilon = L + \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{d}{dt}\left(\dot{x}\bar{\psi}\right)\epsilon}$$

- **Действие – инвариант SUSY:** $S \to S$

Фермионы в 2+1 измерениях

$$L = \bar\psi\left(i\sigma_3\frac{d}{dt} - \omega\right)\psi$$ ➡ $$L = \bar\psi\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - m\right)\psi$$

- **0+1 dim:** $\psi(t)$

- **2+1 dim:** $\psi(\mathbf{r},t) = \begin{pmatrix} \psi_1(\mathbf{r},t) \\ \bar\psi_2(\mathbf{r},t) \end{pmatrix}$

Алгебра Клиффорда: $\{\gamma_\mu,\gamma_\nu\} = 2\eta_{\mu\nu}, \quad \eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\,(-1,1,1)$

Обычный выбор: $\gamma_0 = \sigma_3; \quad \gamma_1 = -i\sigma_1; \quad \gamma_2 = -i\sigma_2$ $\qquad \bar\psi = \psi^\dagger\gamma_0$

Замечание:* Евклидовы γ матрицы задаются алгеброй** $\{\gamma_\mu,\gamma_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu}$ ➡ $\gamma_0 = I_2; \quad \gamma_k = i\sigma_k$ ***и $\bar\psi = \psi^\dagger$

- ***Канонический импульс:***

$$\pi = \frac{\delta L}{\delta\dot\psi} = i\bar\psi\gamma_0 = i\phi^\dagger$$

- ***Гамильтониан:***

$$H = \pi\dot\psi - L = -i\bar\psi\gamma^k\partial_k\psi + m\bar\psi\psi$$

Производящий функционал фермионных полей

- **Уравнение Дирака:**

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\,\psi = 0$$

- **Фермионный пропагатор:**

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\,G_F(x-y) = \delta(x-y)$$

Преобразование Фурье:

$$G_F(x-y) = i\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{e^{ik^\mu(x_\mu - y_\mu)}}{\gamma^\mu k_\mu - m}$$

- ***Обратный пропагатор:*** $G_F^{-1}(x,y) = -i\,(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\,\delta(x-y)$

Задача: вычислить производящий функционал

$$Z[\bar\eta,\eta] = \int D\psi D\bar\psi e^{iS[\bar\psi,\psi]+i\bar\eta\star\psi+i\bar\psi\star\eta}$$

Метод: разложение экспоненты около экстремума: $\psi \to \psi_0 + \psi,\quad \bar\psi \to \bar\psi_0 + \bar\psi$

$$\begin{cases} \bar\psi_0 = -\bar\eta(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)^{-1} \\ \psi_0 = -(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)^{-1}\eta \end{cases}$$

$$iS[\bar\psi,\psi] + i\bar\eta\star\psi + i\bar\psi\star\eta =$$

$$i\int dxdy\ \bar\eta(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)^{-1}\eta(y) + i\int dxdy\ \bar\psi(x)\,(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(y) =$$

$$= -i\bar\eta\star G_F\star\eta - \bar\psi\star G_F^{-1}\star\psi$$

- **Производящий функционал:**

$$\boxed{Z[\bar{\eta},\eta] = \int D\psi D\bar{\psi} e^{-\bar{\eta}\star G_F\star\eta - \bar{\psi}\star G_F^{-1}\star\psi} = \det(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)e^{-i\bar{\eta}\star G_F\star\eta}}$$

Напомним: для комплексного скалярного поля

$$Z[J,J^*] = \det{}^{-1}(-\partial_\nu^2 + m^2)e^{-iJ^*\star G_B\star J}$$

- ***Вакуумные средние:***

$$\boxed{\langle\psi(x)\rangle = \frac{1}{Z[\bar{\eta},\eta]}\frac{\delta Z[\bar{\eta},\eta]}{i\delta\bar{\eta}(x)} = \langle\bar{\psi}(x)\rangle = \frac{1}{Z[\bar{\eta},\eta]}\frac{\delta Z[\bar{\eta},\eta]}{-i\delta\eta(x)} = 0}$$

- ***2-х точечная функция:***

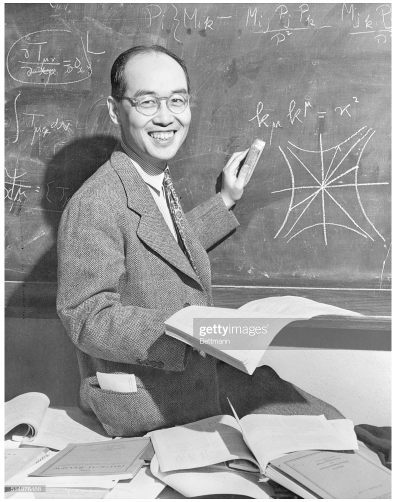
$$\langle\psi(x)\bar{\psi}(y)\rangle = \frac{1}{Z[\bar{\eta},\eta]}\left(\frac{\delta}{i\delta\bar{\eta}(x)}\right)\left(\frac{\delta}{-i\delta\eta(y)}\right)Z[\bar{\eta},\eta] = G_F(x-y)$$

Диаграммная техника:

$$\Leftrightarrow \quad G_F(x-y) = -\frac{\delta W[J]}{\delta\bar{\eta}(x)\eta(y)}$$

Фермионы + бозоны

$$S = \frac{1}{2}\int d^4x\,\left((\partial_\mu\varphi)^2 + M^2\varphi^2\right) + \bar\psi\,(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\,\psi + g\varphi\bar\psi\psi$$



Взаимодействие Юкавы $L_{int} = g\varphi\bar\psi\psi$

- **Производящий функционал (Евклид):**

$$Z[\bar\eta,\eta,J] = \int D\varphi D\psi D\bar\psi e^{-S[\phi,\bar\psi,\psi]+J\star\varphi+\bar\eta\star\psi+\bar\psi\star\eta}$$

Метод: пертурбативное разложение по константе связи *g*:

$$\exp\left\{-g\int d^4x\varphi\bar\psi\psi\right\} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-g)^n}{n!}\int d^4x_1\ldots d^4x_n\varphi(x_1)\bar\psi(x_1)\psi(x_1)\ldots\varphi(x_n)\bar\psi(x_n)\psi(x_n)$$

$$\Downarrow$$

$$Z[\bar\eta,\eta,J] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-g)^n}{n!}\int d^4x_1\ldots d^4x_n\varphi(x_1)\bar\psi(x_1)\psi(x_1)\ldots\varphi(x_n)\bar\psi(x_n)\psi(x_n)$$
$$\times\; e^{-\int d^4x\left[\frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2+\frac{1}{2}M^2\varphi^2+\bar\psi(i\gamma^\mu\partial_\mu-m)\psi+J(x)\varphi(x)+\bar\eta(x)\psi(x)+\bar\psi(x)\eta(x)\right]}$$

Замечание: $\varphi(x_1)\bar\psi(x_1)\psi(x_1)\dots\varphi(x_n)\bar\psi(x_n)\psi(x_n) =$

$$= \frac{\delta}{\delta J(x_1)}\frac{\delta}{\delta\eta(x_1)}\frac{\delta}{\delta\bar\eta(x_1)}\cdots\frac{\delta}{\delta J(x_n)}\frac{\delta}{\delta\eta(x_n)}\frac{\delta}{\delta\bar\eta(x_n)}\left(e^{\int d^4x\varphi(x)J(x)+\bar\eta(x)\psi(x)+\bar\psi(x)\eta(x)}\right)\Bigg|_{J=\bar\eta=\eta=0}$$

- **В первом порядка по g:** $Z = (1 - g\,\delta Z_1 + \dots)Z_0$

$$\boxed{Z[J,\bar\eta,\eta] \approx \int d^4x\left[1 - g\frac{\delta}{\delta J(x)}\frac{\delta}{\delta\eta(x)}\frac{\delta}{\delta\bar\eta(x)}\right]e^{\frac{1}{2}J\star G_B\star J+\bar\eta\star G_F\star\eta}}$$

- $$\frac{\delta}{\delta J(x)}\left(e^{\frac{1}{2}\int d^4y d^4z\;J(y)G_B(y-z)J(z)+\int d^4y d^4z\;\bar\eta(y)G_F(y-z)\eta(z)}\right) =$$
$$= \left[\int d^4y\;G_B(x-y)J(y)\right]e^{\frac{1}{2}J\star G\star J+\bar\eta\star G_F\star\eta}$$

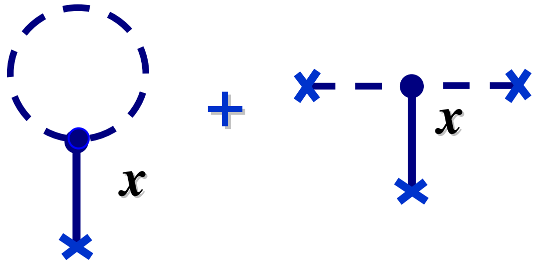
- $$\frac{\delta}{\delta\bar\eta(x)}\frac{\delta}{\delta J(x)}\left(e^{\frac{1}{2}\int d^4y d^4z\;J(y)G_B(y-z)J(z)+\int d^4y d^4z\;\bar\eta(y)G_F(y-z)\eta(z)}\right) =$$
$$= \frac{\delta}{\delta\bar\eta(x)}\left(\left[\int d^4y\;G_B(x-y)J(y)\right]e^{\frac{1}{2}J\star G\star J+\bar\eta\star G_F\star\eta}\right)$$
$$= \left[\left(\int d^4y\;G_B(x-y)J(y)\right)\left(\int d^4y\;G_F(x-y)\eta(y)\right)\right]e^{\frac{1}{2}J\star G\star J+\bar\eta\star G_F\star\eta}$$

$$\frac{\delta}{\delta\eta(x)}\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(x)}\frac{\delta}{\delta J(x)}\left(e^{\frac{1}{2}\int d^4y d^4z\ \ J(y)G_B(y-z)J(z)+\int d^4y d^4z\ \ \bar{\eta}(y)G_F(y-z)\eta(z)}\right)=$$

$$=\frac{\delta}{\delta\eta(x)}\left(\left[\left(\int d^4y\ G_B(x-y)J(y)\right)\left(\int d^4y\ G_F(x-y)\eta(y)\right)\right]e^{\frac{1}{2}J\star G\star J+\bar{\eta}\star G_F\star\eta}\right)$$

$$\boxed{=\left[\left(\int d^4y\ G_B(x-y)J(y)\right)\left(G_F(0)+\int d^4y\ G_F(x-y)\eta(y)\int d^4y\ \bar{\eta}(y)G_F(x-y)\right)\right]e^{\frac{1}{2}J\star G\star J+\bar{\eta}\star G_F\star\eta}}$$

$$\frac{\delta}{\delta J(x)}\frac{\delta}{\delta\eta(x)}\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(x)}e^{\frac{1}{2}J\star G_B\star J+\bar{\eta}\star G_F\star\eta}=\Bigg\{$$



$$\Bigg\}\ e^{\frac{1}{2}J\star G_B\star J+\bar{\eta}\star G_F\star\eta}$$

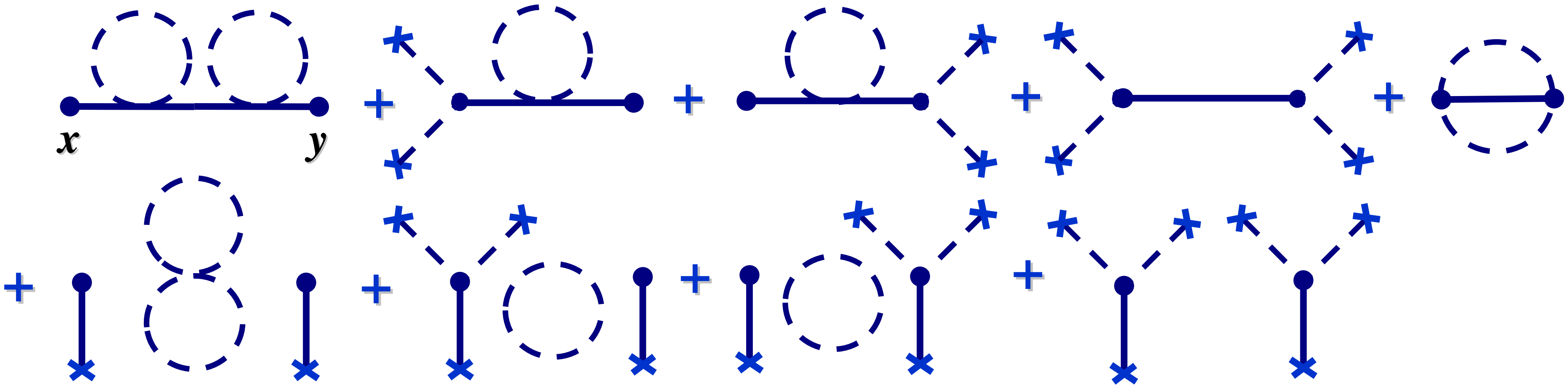
- ***Поправки 1го порядка не меняют пропагаторы полей***

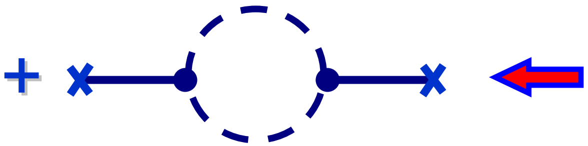
- **Во втором порядка по g:** $Z=\left(1-g\ \delta Z_1+\frac{g^2}{2}\ \delta Z_2\right)Z_0$

$$Z[J,\bar{\eta},\eta]\approx\int d^4x\left[1-g\frac{\delta}{\delta J(x)}\frac{\delta}{\delta\eta(x)}\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(x)}+\frac{g^2}{2}\frac{\delta}{\delta J(x)}\frac{\delta}{\delta\eta(x)}\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(x)}\frac{\delta}{\delta J(y)}\frac{\delta}{\delta\eta(y)}\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(y)}\right]e^{\frac{1}{2}J\star G_B\star J+\bar{\eta}\star G_F\star\eta}$$

Домашнее задание: **проверить, что**

$$
\begin{aligned}
\delta Z_2 = &\left[G_B(x-y) + \left(\int d^4x'\; G_B(x-x')J(x')\right)\left(\int d^4y'\; G_B(y-y')J(y')\right)\right] \\
&\times\Bigg\{\left[G_F(0) + \left(\int d^4x'\bar{\eta}(x')G_F(x-x')\right)\left(\int d^4x'' G_F(x-x'')\eta(x'')\right)\right] \\
&\quad\times\left[G_F(0) + \left(\int d^4y'\bar{\eta}(y')G_F(y-y')\right)\left(\int d^4y'' G_F(y-y'')\eta(y'')\right)\right] \\
&\quad+\int d^4x d^4y\; G_F(x-y)G_F(y-x)\Bigg\}
\end{aligned}
$$





Фермионный однопетлевой вклад в бозонный пропагатор

Локализация фермионов на кинке в 1+1 dim

$$L = (\partial_\mu \phi)^2 + i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi + g\phi\bar{\psi}\psi - \frac{1}{2}\left(\phi^2 - 1\right)^2$$

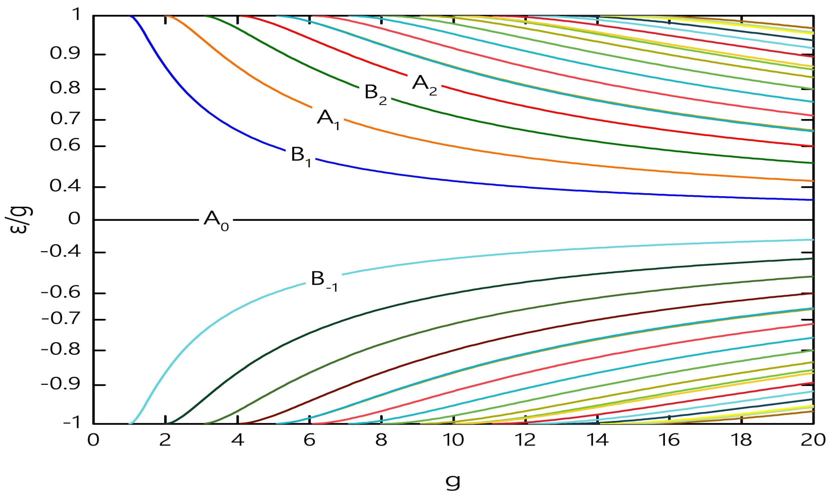
R.Jackiw and C.Rebbi
Phys. Rev. D13 3398 (1976)

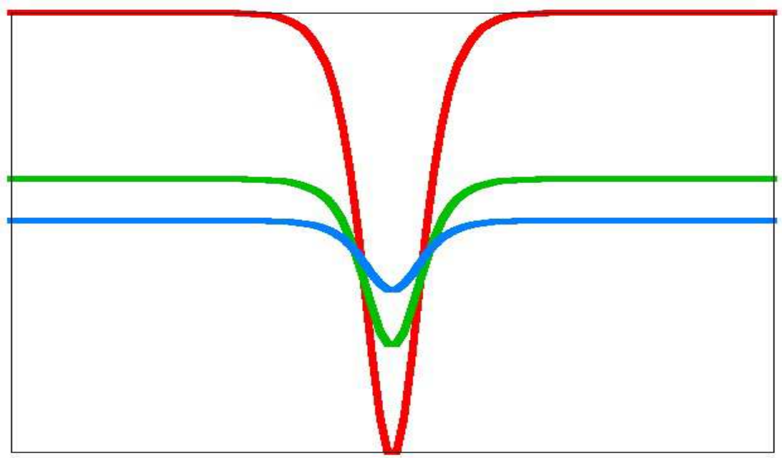
- **Уравнения поля:** $i\gamma^\mu \partial_\mu \psi = g\phi\psi\,; \qquad \partial_\mu \partial^\mu \phi = \phi(1-\phi^2) - g\bar{\psi}\psi$

Фоновое поле (g≪1): $\psi = e^{-i\epsilon t}\begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \end{pmatrix}$ $\qquad \int dx\, |\bar{\psi}\psi| = \int dx\, (u^2 + v^2) = 1$

$\phi_K = \tanh x \qquad\qquad |\epsilon| \le g$

$$\boxed{\begin{aligned}(\partial_x + g\tanh x)v_1 &= -\epsilon v_2 \\ (\partial_x - g\tanh x)v_2 &= \epsilon v_1\end{aligned}} \Longrightarrow \begin{aligned}&\left(-\partial_x^2 + U_\pm(x)\right) v_{1,2} = \epsilon^2 v_{1,2} \\ &U_\pm(x) = g^2 - g(g\pm 1)\mathrm{sech}^2 x\end{aligned}$$





- **N=1 SUSY kink**

$$L = (\partial_\mu \phi)^2 + i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi + g\phi\bar{\psi}\psi - \frac{1}{2}(\phi^2 - 1)^2$$

$$\boxed{L_{N=1} = (\partial_\mu \phi)^2 + i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi + F^2 + 2FW' - W''\bar{\psi}\psi}$$

F – вспомогательное поле: $F = -W$

$$\boxed{L_{N=1} = (\partial_\mu \phi)^2 + i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - W^2 - W''\bar{\psi}\psi}$$

$$W' = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi^2 - 1)$$

- **Генераторы SUSY:** $Q_\pm = \int dx \left\{ (\dot{\phi} \pm \phi')\psi_\pm \mp W^2 \psi_\mp \right\}$

- **Преобразования SUSY:** $\delta\phi = \eta\psi; \qquad \delta\psi = \eta\left(\gamma^\mu \partial_\mu \phi - W\right)$

Фермионная нулевая мода кинка:
Грассмановы деформации бозонного сектора

$$\psi_0 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{1}{\cosh x} \\ 0 \end{pmatrix}$$

- **В отсутствие суперсимметрии:** $\psi_0 \sim \begin{pmatrix} \frac{1}{\cosh^g x} \\ 0 \end{pmatrix}$

Замечание:* *В топологически тривиальном внешнем бозонном поле нет фермионных нулевых мод –* *теорема об индексе

Пара $K\bar{K}$, локализованная фермионами

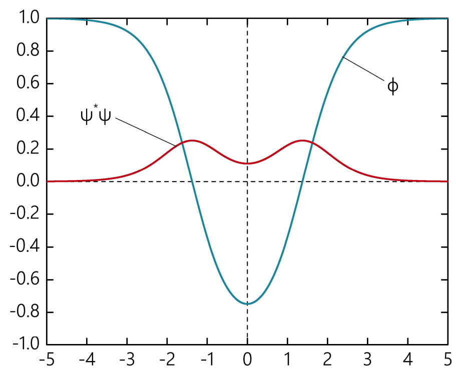
$$L = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \phi\right)^2 + i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi + g\phi\bar{\psi}\psi - U(\phi)$$

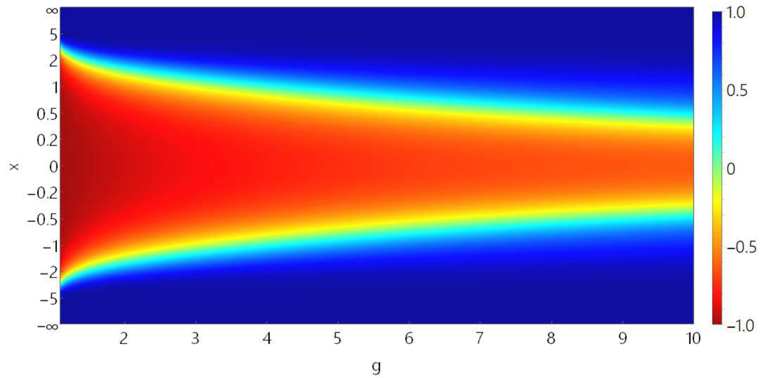
- **sG модель:** $U(\phi) = 1 - \cos\phi$
- **ϕ^4 модель:** $U(\phi) = \frac{1}{2}\left(1-\phi^2\right)^2$

Однокинковое решение (g=0): $\phi_{SG} = 4\arctan e^x, \quad \phi_{\phi^4} = \tanh x$

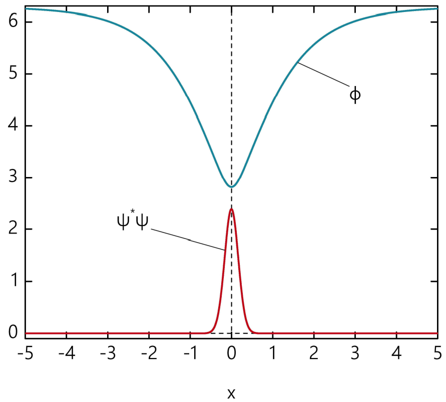
Связанная пара KK

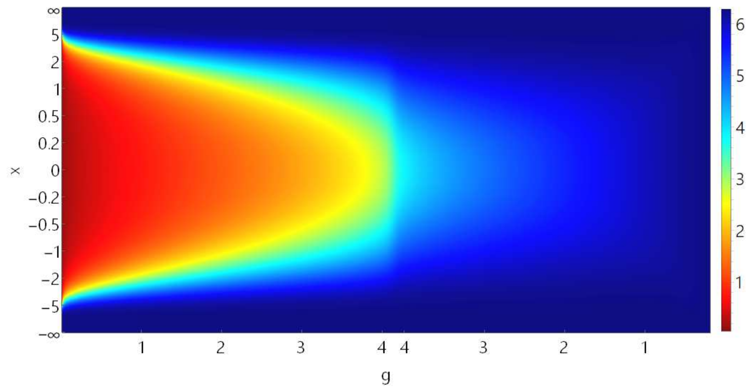
- **ϕ^4:**





- **sG:**

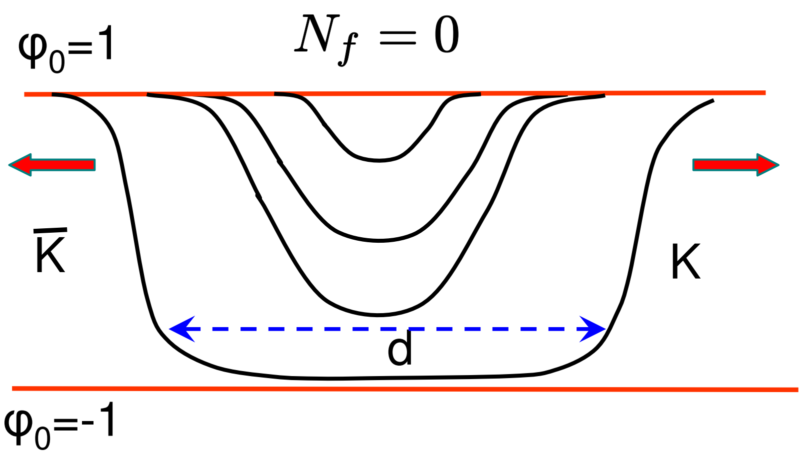




- **Вопрос:**
Чему равняется фермионное число этой системы?

Полуцелые фермионные числа

Связанная пара КК



- d конечная величина:
  2 квазинулевых уровня

$$N_f = N_f^K + N_f^{\bar{K}} = 0$$

- d стремится к бесконечности:
  1 нулевой уровень (мода на кинке,
  на антикинке ее нет, или наоборот)

$$\Rightarrow \quad \boxed{N_f^K = -N_0^K = \frac{1}{2}}$$

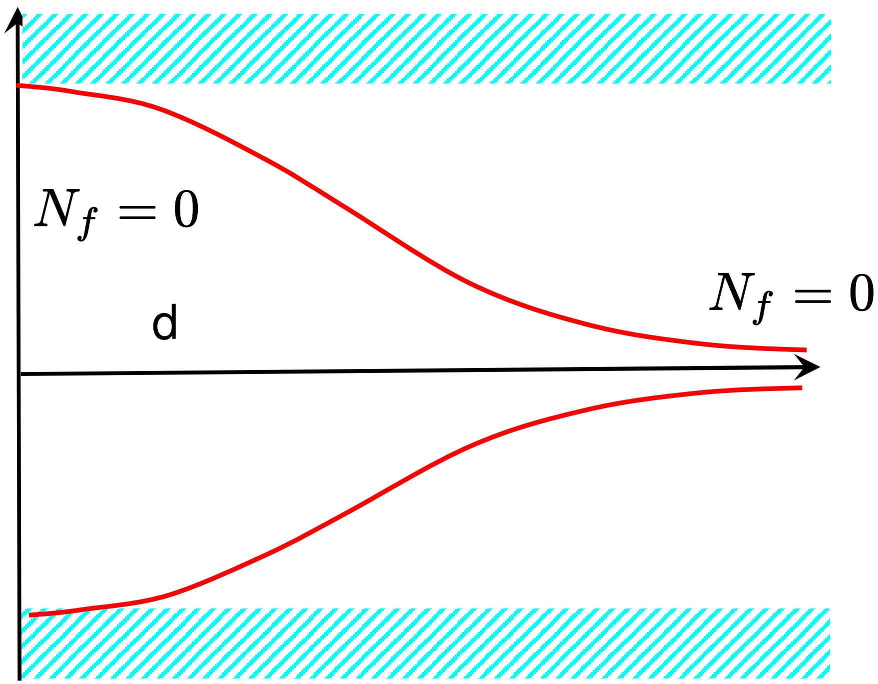
$$\boxed{N_f^K - N_0^K = 1}$$

Вырождение по энергии:

$$E_{N_f^K} = E_{N_0^K}$$

Симметрия относительно отражений:

$$N_f^K = N_f^{\bar{K}}$$



Пересечение уровней и теорема об индексе

- **Безмассовые фермионы в d=1+1:** $i\gamma^\mu \partial_\mu \psi = 0, \qquad \psi = \begin{pmatrix} u(x,t) \\ v(x,t) \end{pmatrix}$

- **Ток и киральный ток:** $j_\mu = \bar\psi \gamma_\mu \psi, \quad j^5_\mu = \bar\psi \gamma_\mu \gamma_5 \psi \quad \gamma_0 = \sigma_3; \quad \gamma_1 = -i\sigma_1; \quad \gamma_2 = -i\sigma_2$

$$i(\partial_t - \partial_x)u = 0; \qquad i(\partial_t + \partial_x)v = 0$$

Киральные компоненты спинора: $u = f(x+t), \qquad v = g(x-t)$

$x \in [-L : L]$ + периодические гранусловия : $\begin{cases} u = e^{-i\omega t + ikx}, & \omega = -k \\ v = e^{-i\omega t + ikx}, & \omega = +k \end{cases} \qquad k = \dfrac{2\pi n}{L}$

- **Фермионное число и киральность:** $N_F = \int dx j_0 = N_L + N_R, \quad Q^5 = \int dx j^5_0 = N_L - N_R$

- **Безмассовые фермионы во внешнем поле в d=1+1:** $\partial_\mu \to D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$

$$i(\partial_t - ieA_t) - i(\partial_x - ieA_x)\} u = 0 \qquad i(\partial_t - ieA_t) + i(\partial_x - ieA_x)\} v = 0$$

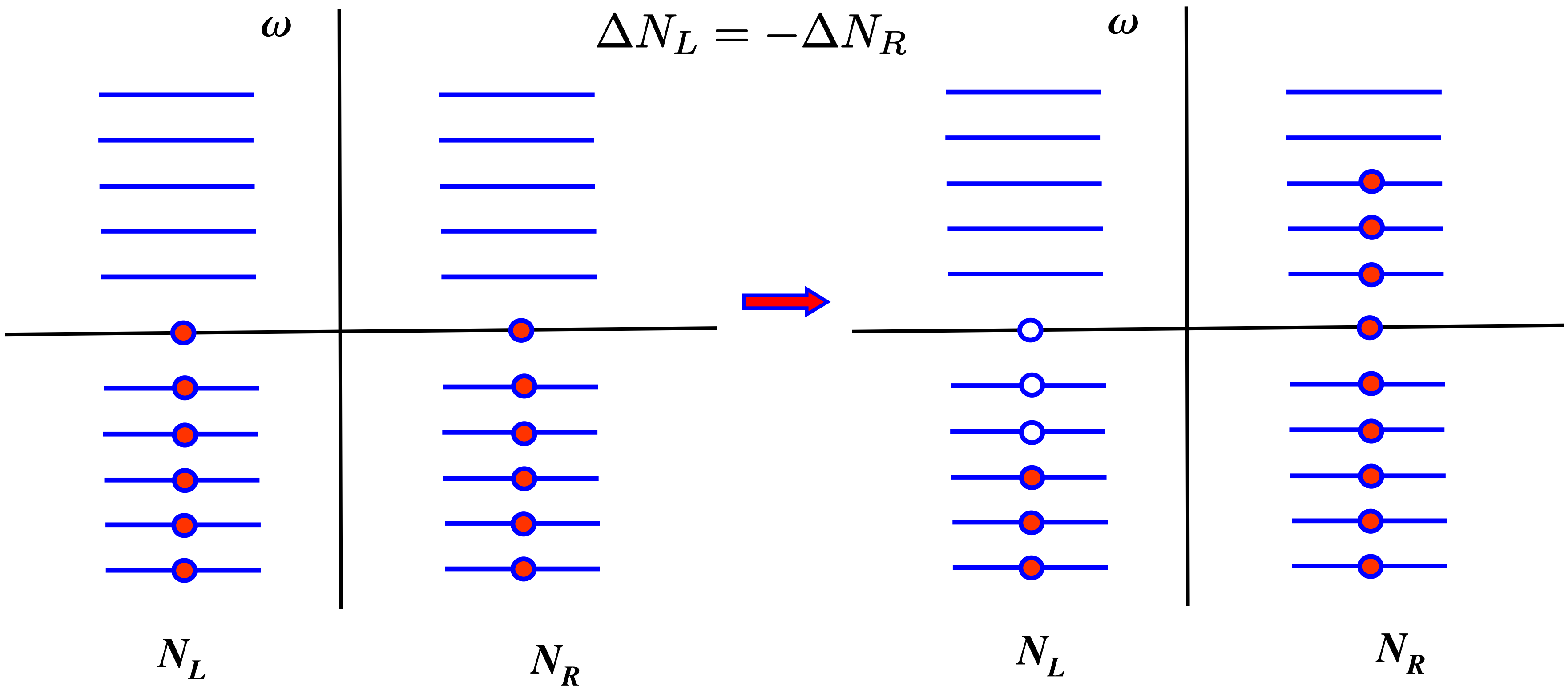
Калибровка: $A_t = 0, \quad A_x = A(t), \qquad E = \partial_t A$

химпотенциал

- ***Адиабатическое включение поля:*** $A(-\infty) = 0, \quad A(\infty) = \text{const} = \dfrac{\mu}{e}$

$$\begin{cases} i\partial_t - i(\partial_x - ieA)\}\, u = 0 \\ i\partial_t + i(\partial_x - ieA)\}\, v = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{aligned} u &= \exp\left\{-i\omega(t+x) - ie\int_{-\infty}^{t} dt' A(t')\right\} \\ v &= \exp\left\{-i\omega(t-x) + ie\int_{-\infty}^{t} dt' A(t')\right\} \end{aligned}$$

$t \to -\infty$ $\quad E_u \to \omega, \quad E_v \to \omega$ $\qquad$ $t \to \infty$ $\quad E_u \to \omega - \mu, \quad E_v \to \omega + \mu$



Несохранение киральности: $\Delta N_F = \Delta N_L + \Delta N_R = 0, \quad \Delta Q^5 = \Delta N_L - \Delta N_R \neq 0$

- **Эквидистантные уровни киральных фермионов:** $\omega = \frac{2\pi n}{L} \in [0, \mu]$

Число возможных заполненных уровней: $n_{max} = \Delta N_R = \dfrac{L\mu}{2\pi}$

$$A = \tfrac{\mu}{e}, \quad E = \partial_t A \Leftarrow \mu = e\textstyle\int dtE, \quad L = \textstyle\int dx$$

$$\Rightarrow \quad \Delta N_R = -\Delta N_L = \frac{e}{2\pi}\int dtdx\, E = \frac{e}{4\pi}\int d^2x\, \varepsilon_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

Несохранение киральности: $\Delta Q^5 = \Delta N_L - \Delta N_R = \dfrac{e}{2\pi}\displaystyle\int d^2x\, \varepsilon_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ **?**

Напомним: вакуум в U(1) теории: $A_t = 0, \quad A_x(x,t) = \frac{i}{e}U\partial_x U^{-1}, \quad U = e^{ie\alpha(x.t)}$

Граничные условия: $U(x = \pm L) = 1$

Тривиально: $\alpha(\pm L) = 0$

Нетривиально: $\alpha(-L) = 0, \quad \alpha(+L) = 2\pi n$

$$n = \frac{i}{2\pi}\int dxU\partial_x U^{-1} = \frac{1}{2\pi}\int dxA_x$$

Индекс отображения

$$q = \frac{e}{4\pi}\int d^2x\, \varepsilon_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \frac{e}{2\pi}\left[\int_{-L}^{L} dxA_x\right]_{t=-\infty}^{t=\infty} = [n_{t=\infty} - n_{t=-\infty}]$$

Теорема об индексе: $q = \Delta Q^5$