

Калибровочная симметрия: Неабелевы теории

$$[T^a, T^b] = f_{abc}T^c$$

Алгебра g компактной группы
Ли G размерности d и ранга k

Генераторы T^a антиэрмитовы: $(T^a)^\dagger = -T^a$

● Наиболее важные примеры групп Ли:

(f – размерность минимального представления)

● Для фундаментального представления:

$$\text{Tr } T^a T^b = -\frac{1}{2} \delta^{ab}$$

● Физические поля принимают значения

в алгебре Ли: $\Phi = \phi^a T^a$, $A_\mu = A_\mu^a T^a$

$$F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^a T^a = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]$$

$$D_\mu \Phi = \partial_\mu \Phi + [A_\mu, \Phi]$$

G	d	f
$SU(N)$	N^2-1	N
$SO(N)$	$\frac{1}{2}N(N-1)$	N
$Sp(N)$	$N(2N+1)$	$2N$
E_6	78	27
E_7	133	56
E_8	248	248
F_4	52	6
G_2	14	7

● Калибровочные преобразования

Поле и ковариантная производная преобразуются одинаково:

$$\Phi \rightarrow \Phi' = U(x)\Phi, \quad D_\mu \Phi = \partial_\mu \Phi + A_\mu \Phi \rightarrow D_\mu \Phi' = U(D_\mu \Phi)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_\mu \Phi \rightarrow U(x)(\partial_\mu \Phi) + (\partial_\mu U(x))\Phi \\ D_\mu \Phi' = U(x)(\partial_\mu \Phi) + (\partial_\mu U(x))\Phi + A'_\mu U\Phi \end{array} \right.$$

$$\rightarrow UA_\mu = \partial_\mu U + A'_\mu U;$$

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = UA_\mu U^{-1} + U\partial_\mu U^{-1}$$

Задача 1: Проверьте, что при этом $F_{\mu\nu} \rightarrow F'_{\mu\nu} = UF_{\mu\nu}U^{-1}$

Подсказка: используйте тождества $U(\partial_\mu U^{-1}) + (\partial_\mu U)U^{-1} = 0$

и $U(\partial_\mu U^{-1})U = -(\partial_\mu U)U^{-1}U = -(\partial_\mu U)$

$$U(\partial_\mu U^{-1})U(\partial_\nu U^{-1}) = -UU^{-1}(\partial_\mu U)(\partial_\nu U^{-1}) = -(\partial_\mu U)(\partial_\nu U^{-1})$$

Задача 2: Проверьте, что $[D_\mu, D_\nu] = D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu = F_{\mu\nu}$

● Калибровочно инвариантные величины: $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$, $\Phi^\dagger \Phi$, $(D_\mu \Phi)^\dagger (D_\mu \Phi)$

SU(2) теория Янга-Миллса

Базис алгебры $su(2)$ – операторы, связанные с матрицами Паули :

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} \mathbb{I} + i \varepsilon_{ijk} \sigma_k, \quad \{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij} \mathbb{I}$$

$$T_i = -\frac{i}{2} \sigma_i, \quad [T_i, T_j] = i \varepsilon_{ijk} T_k$$

$$T_i T_j = \frac{1}{2} [T_i, T_j] + \frac{1}{2} \{T_i, T_j\}$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

● Поле Янга-Миллса: $A_\mu = -ig \frac{\sigma^a}{2} A_\mu^a, \quad D_\mu = \partial_\mu - ig A_\mu^a \frac{\sigma^a}{2}$

Задача 3: Проверьте, что $F_{\mu\nu} = -ig \frac{\sigma^a}{2} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + g \varepsilon_{abc} A_\mu^b A_\nu^c) \equiv F_{\mu\nu}^a T^a$

● Лагранжиан SU(2) теории Янга-Миллса:

$$L = \frac{1}{2g^2} \text{Tr} (F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}) = \frac{1}{2g^2} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^b (-ig)^2 \text{Tr} \left(\frac{\sigma^a}{2} \frac{\sigma^b}{2} \right) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a$$

Замечание: теория Янга-Миллса нелинейна: $L \sim \text{Tr} (\partial_\mu A_\nu) A^\mu A^\nu, \quad \text{Tr} (A_\nu) A_\mu A^\nu A^\mu$

- **Уравнения поля:** $\partial_\mu \left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu A_\nu^a)} \right) = \partial^\mu F_{\mu\nu}^a + g\varepsilon_{abc} A^{\mu b} F_{\mu\nu}^c \equiv (D^\mu F_{\mu\nu})^a = 0$
- **Тождество Бьянки:** $\frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} (D^\mu F^{\rho\sigma})^a \equiv (D^\mu \tilde{F}^{\mu\nu})^a = 0$
- **Закон Гаусса:** $D_k E_k^a = \partial_k E_k^a + \varepsilon_{abc} A_k^b E_k^c = 0, \quad E_k^a \equiv F_{0k}^a$

Замечание: по аналогии с абелевой электродинамикой, теория Янга-Миллса может включать топологический член: $\theta \in [0, 2\pi]$

$$L_\theta = \frac{\theta}{16\pi^2} \int d^4x \operatorname{Tr} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{\theta}{8\pi^2} \int d^4x \partial_\mu K^\mu; \quad K_\mu = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \operatorname{Tr} (A_\nu \partial_\rho A_\sigma + \frac{2}{3} A_\nu A_\rho A_\sigma)$$

проверка:

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} &= \operatorname{Tr} \left\{ (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \tilde{F}^{\mu\nu} + (A_\mu A_\nu - A_\nu A_\mu) \right\} \tilde{F}^{\mu\nu} = \\ &= \operatorname{Tr} \left\{ (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \tilde{F}^{\mu\nu} + A_\mu [A_\nu, \tilde{F}^{\mu\nu}] \right\} = \operatorname{Tr} \left\{ (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \tilde{F}^{\mu\nu} - A_\mu \partial_\nu \tilde{F}^{\mu\nu} \right\} = \\ &= \operatorname{Tr} \left\{ \partial_\mu A_\nu \tilde{F}^{\mu\nu} - \partial_\nu (A_\mu \tilde{F}^{\mu\nu}) \right\} = \\ &= \operatorname{Tr} \left\{ \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu A_\nu (\partial_\rho A_\sigma + A_\rho A_\sigma) - \partial_\nu (A_\mu \partial_\rho A_\sigma + A_\mu A_\rho A_\sigma) \right\} \end{aligned}$$

$D_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} + [A_\mu, \tilde{F}^{\mu\nu}] \equiv 0$

$\tilde{F}^{\mu\nu} = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (\partial_\rho A_\sigma + A_\rho A_\sigma)$

Очень Полезная Формула: $\text{Tr} [\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (\partial_\mu A_\nu) A_\rho A_\sigma] = \frac{1}{3} \text{Tr} [\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu (A_\nu A_\rho A_\sigma)]$

$$\begin{aligned} \rightarrow \text{Tr} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} &= \text{Tr} \{ \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu A_\nu (\partial_\rho A_\sigma + A_\rho A_\sigma) - \partial_\nu (A_\mu \partial_\rho A_\sigma + A_\mu A_\rho A_\sigma) \} \\ &= \text{Tr} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \left[2\partial_\mu \left(A_\nu \partial_\rho A_\sigma + \frac{2}{3} A_\nu A_\rho A_\sigma \right) \right] = 2\partial^\mu K_\mu \quad \text{Q.E.D} \end{aligned}$$

• **Кулоновская калибровка:** $A_0^a = 0$

$$L = \frac{1}{2g^2} \text{Tr} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{\theta}{16\pi^2} \text{Tr} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{g^2} \text{Tr} \left(\dot{A}_k^2 - B_k^2 \right) + \frac{\theta}{4\pi^2} \text{Tr} \left(\dot{A}_k \cdot B_k \right)$$

θ -член не меняет уравнения поля, но меняет импульсы:

$$\pi_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{A}_k} = \frac{1}{g^2} E_k + \frac{\theta}{8\pi^2} B_k$$

• **Инфинитезимальные преобразования:** $U = e^{\alpha^a T^a} \approx \mathbb{I} + \alpha^a T^a + \dots$

$$\rightarrow \delta A_\mu = \partial_\mu \alpha + [A_\mu, \alpha] + \dots = D_\mu \alpha, \quad \delta F_{\mu\nu} = [F_{\mu\nu}, \alpha]$$

Остаточные степени свободы: $A_k \rightarrow A'_k = U(\vec{x}) A_k U^{-1}(\vec{x}) + U(\vec{x}) \nabla_k U^{-1}(\vec{x})$

Глобальные («большие») калибровочные преобразования: $U(\vec{x}) \xrightarrow{\vec{x} \rightarrow \infty} \text{const}$

Каноническое квантование поля Янга-Миллса

● **Напомним:** в абелевой электродинамике

$$\partial_k E_k = e j_0 \quad \Rightarrow \quad Q = \frac{1}{4e\pi} \int d^3x (\partial_k E_k)$$

Генератор U(1) преобразований

Закон Гаусса

● **Лагранжиан Янга-Миллса в кулоновской калибровке:** $L = \frac{1}{g^2} \text{Tr} (\dot{A}_k^2 - B_k^2)$

Неабелево магнитное поле: $B_k = \frac{1}{2} \varepsilon_{kij} F_{ij} = \varepsilon_{kij} D_i A_j$

● **Канонические координаты и импульсы:**

$$A_k, \quad \pi_k = \frac{\delta L}{\delta \dot{A}_k} = \dot{A}_k = E_k$$

→ ● **Гамильтониан:** $H = \pi_k \dot{A}_k - L = \frac{1}{g^2} \text{Tr} (E_k^2 + B_k^2)$

● **Генератор калибровочных преобразований (заряд):**

$$Q(\omega) = \int d^3x \text{Tr} \left(\frac{\delta L}{\delta \dot{A}_k} \delta A \right) = \frac{1}{g^2} \int d^3x \text{Tr} (E_k (D_k \omega)) = -\frac{1}{g^2} \int d^3x \text{Tr} ((D_k E_k) \omega)$$

Глобальные преобразования являются нетеровскими генераторами симметрии

● **Напомним:** в U(1) электродинамике закон Гаусса эквивалентен условию $\nabla \cdot A = 0$
(кулоновская калибровка)

$$A_\mu = \int d^4k [a_\mu(k)e^{ikx} + a_\mu^*(k)e^{-ikx}] = A_\mu^\perp(x) + A_\mu^\parallel(x) \quad \Rightarrow \quad A_k^\parallel(x) = 0$$

(2 физические степени свободы, связанные с поперечной поляризацией)

● **Закон Гаусса в теории Янга-Миллса:** $D_k E_k^a = \partial_k E_k^a + \varepsilon_{abc} A_k^b E_k^c = 0$

● **Канонические коммутационные соотношения в теории Янга-Миллса:**

$$\begin{array}{l} \pi_k \rightarrow E_k^a \\ q_k \rightarrow A_k^a \end{array} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\{A_i^a(x, t), E_j^b(y, t)\} = \delta_{ab} \delta_{ij} \delta^{(3)}(x - y)}$$

Скобка Пуассона: $\{F(x), G(y)\} = \int d^4z \left(\frac{\delta F(x)}{\delta q(z)} \frac{\delta G(y)}{\delta \pi(z)} - \frac{\delta F(x)}{\delta \pi(z)} \frac{\delta G(y)}{\delta q(z)} \right)$

$$\Rightarrow \{B_i^a(x, t), E_j^b(y, t)\} = \varepsilon_{ijk} \left(\delta_{ab} \frac{\partial}{\partial x_k} \delta^{(3)}(x - y) - \varepsilon_{abc} A_k^c \delta^{(3)}(x - y) \right)$$

**Уравнения
движения:**

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{A}_i^a(x) = \{A_i^a(x), H\} = \int d^3y \{A_i^a(x), E_j^b(y)\} E_j^b(y) = E_i^a(x) \\ \dot{E}_i^a(x) = \{E_i^a(x), H\} = \varepsilon_{ijk} (\partial_j B_k^a(x) + \varepsilon_{abc} A_j^b B_k^c) = \varepsilon_{ijk} D_j B_k^a \end{array} \right.$$

Теория Янга-Миллса: Евклидова формулировка

$$t = -i\tau \rightarrow F_{0i}^a = \partial_0 A_i - \partial_i A_0 + g\epsilon_{abc} A_0^b A_i^c \rightarrow i\partial_\tau A_i^a - \partial_i A_0 + g\epsilon_{abc} A_0^b A_i^c$$

$$t = -i\tau, \quad A_0 = iA_0 \quad F_{0i}^a \rightarrow i(\partial_\tau A_i^a - \partial_i A_0 + g\epsilon_{abc} A_0^b A_i^c)$$

?

• Евклидово действие Янга-Миллса:

$$S = \frac{1}{4} \int d^3x dt F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a = \int d^3x dt \left\{ -\frac{1}{2} F_{0i}^a F_{0i}^a + \frac{1}{4} F_{ij}^a F_{ij}^a \right\} \rightarrow -iS_E$$

$$S_E = \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} F_{0i}^a F_{0i}^a + \frac{1}{4} F_{ij}^a F_{ij}^a \right\} = \frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a$$

Замечание: в калибровке $A_0^a = 0$ действие имеет канонический вид:

$$S = \int d^3x dt \left\{ -\frac{1}{2} (\partial_0 A_i)^2 + \frac{1}{4} F_{ij}^a F_{ij}^a \right\} \rightarrow S_E = \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} (\partial_0 A_i)^2 + \frac{1}{4} F_{ij}^a F_{ij}^a \right\}$$

Функциональный интеграл по полям Янга-Миллса

Замечание: каноническое квантование полей Янга-Миллса осложняется той же проблемой отсутствия в действии переменной, канонически сопряженной компоненте $A_0^a \rightarrow$ связь $\Phi^{(1)} = \pi_0^a = 0$

Условие сохранения связи: $\dot{\Phi}^{(1)} = \{\Phi^{(1)}, H\} = (D_i \pi_i)^a = D_i E_i^a = \Phi^{(2)}$

\rightarrow ● **Фиксация калибровки:** $G[A(x)] = 0$

$$A_\mu^\alpha = U [A_\mu + \partial_\mu] U^{-1}$$

● **Условие невырожденности калибровки:** $\det \left| \frac{\delta G[A^\alpha(x)]}{\delta \alpha(y)} \right| \neq 0$

Трюк Фаддева-Попова: вставка единицы в производящий функционал

$$1 = \int \mathcal{D}\alpha(x) \delta(G(A^\alpha)) \det \left(\frac{\delta G(A^\alpha)}{\delta \alpha} \right) \rightarrow \int \mathcal{D}[A_\mu(x)] e^{-\int d^4x \left[-\frac{1}{2g^2} \text{Tr} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right]}$$

$$Z = \left(\int \mathcal{D}\alpha \right) \int \mathcal{D}[A] \delta(G(A^\alpha)) \det \left(\frac{\delta G(A^\alpha)}{\delta \alpha} \right) e^{-S[A]}$$

● **Калибровка Лоренца:** $G(A) = \partial^\mu A_\mu^a - \omega^a(x) \rightarrow \int \mathcal{D}A \rightarrow \int \mathcal{D}A \int \mathcal{D}\omega$

Напомним: сдвиг калибровки не меняет δ -функции: $\delta(\partial^\mu A_\mu) = \delta(\partial^\mu A_\mu - \omega(x))$

• **Усреднение по дополнительной переменной интегрирования:**

$$\begin{aligned} Z[A] &= \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\omega \delta(\partial^\mu A_\mu^a - \omega^a) \det \left(\frac{\delta G[A^\alpha]}{\delta \alpha} \right) e^{-\int d^4x \frac{\omega^2}{2\varepsilon}} e^{-S[A]} \\ &= \int \mathcal{D}A \det \left(\frac{\delta G(A^\alpha)}{\delta \alpha} \right) e^{-\frac{1}{2\varepsilon} \int d^4x (\partial^\mu A_\mu^a)^2} e^{-S[A]} \end{aligned}$$

• **Вычисление детерминанта калибровки:** $U = e^{\alpha^a T^a} \approx \mathbb{I} + \alpha^a T^a + \dots$

$$A_\mu^\alpha = U [A_\mu + \partial_\mu] U^{-1} \approx A_\mu + \delta A_\mu = A_\mu + \partial_\mu \alpha + [A_\mu, \alpha] + \dots = A_\mu + D_\mu \alpha$$

Homework: используя алгебру матриц Паули, запишите соответствующее преобразование в компонентных обозначениях $A_\mu = -ig \frac{\sigma^a}{2} A_\mu^a$, $D_\mu = \partial_\mu - ig A_\mu^a \frac{\sigma^a}{2}$

Замечание: параметр калибровочного преобразования α ведет себя как скалярное поле в присоединенном представлении $SU(2)$

$$G[A_\mu^\alpha] = \partial^\mu A_\mu^\alpha + \partial^\mu D_\mu \alpha \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta G[A^\alpha]}{\delta \alpha} = \partial^\mu D_\mu \quad \boxed{\det \left(\frac{\delta G[A^\alpha]}{\delta \alpha} \right) = \det(\partial^\mu D_\mu)}$$

$$Z = \int \mathcal{D}A \det(\partial^\mu D_\mu) e^{-\frac{1}{2\varepsilon} \int d^4x (\partial^\mu A_\mu^a)^2} e^{-\int d^4x \left[-\frac{1}{2g^2} \text{Tr} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right]}$$

Напомним: трюк Фаддеева-Попова - детерминант $\det \partial^\mu D_\mu$ может быть записан в виде функционального интеграла по набору вспомогательных антикоммутирующих полей духов c^a, \bar{c}^a :

$$\det(\partial^\mu D_\mu) = \int \mathcal{D}c \mathcal{D}\bar{c} e^{-\int d^4x \bar{c}(-\partial^\mu D_\mu)c}, \quad c = -\frac{i}{2} \sigma^a c^a \in su(2)$$

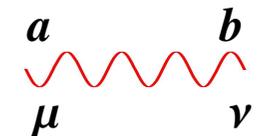
● **Полный производящий функционал с источниками:**

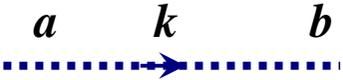
$$Z[J] = \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{c} \mathcal{D}c e^{-S_{eff}[A, \bar{c}, c] + J^\mu A_\mu}, \quad S_{eff} = S_{eff}^{(0)} + S_{eff}^{(int)}$$

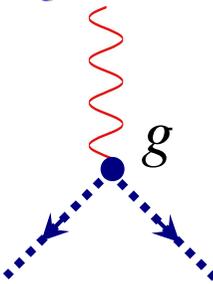
$$S_{eff}^{(0)} = \frac{1}{2} \int d^4x A_\mu^a \left(\delta_{\mu\nu} \square - \left(1 - \frac{1}{\epsilon}\right) \partial_\mu \partial_\nu \right) A_\nu^a - \int d^4x \bar{c}^a (\square) c^a$$

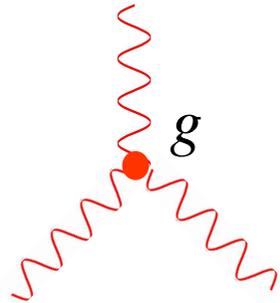
$$S_{eff}^{(int)} = \frac{g}{2} \int d^4x \varepsilon_{abc} A_\mu^b A_\nu^c (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a) + \frac{g^2}{4} \int d^4x \varepsilon_{abn} \varepsilon_{ncd} A_\mu^a A_\nu^b A_\mu^c A_\nu^d + \int d^4x \varepsilon_{abc} \bar{c}^a A_\mu^c \partial_\mu c^b$$

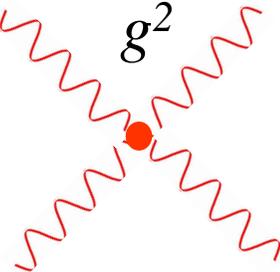
● **Пропагатор поля Янга-Миллса:**

$$G_{\mu\nu}^{ab}(k) = \delta^{ab} \left[\delta_{\mu\nu} k^2 + \left(\frac{1}{\epsilon} - 1 \right) k_\mu k_\nu \right]^{-1} = \frac{\delta^{ab}}{k^2} \left[\delta_{\mu\nu} + (\epsilon - 1) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right] \rightarrow \begin{array}{c} a \qquad b \\ \mu \qquad \nu \end{array}$$


● Пропагатор поля духов: $G^{ab}(k) = \frac{\delta^{ab}}{k^2} \Rightarrow$ 

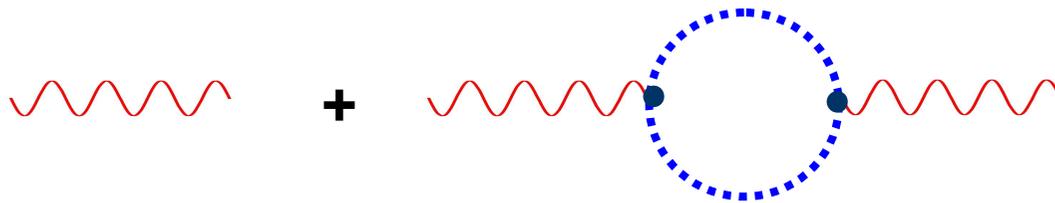
● Вершина $\bar{c}Ac$: 

● Вершина AAA : 

● Вершина AAAA : 

..+ симметрия по перестановке всех индексов..

● Поправка полей духов к пропагатору полей Янга-Миллса:



Вклад полей духов сокращает вклады двух нефизических поляризаций полей Янга-Миллса в петлях при вычислении амплитуд рассеяния скалярных частиц или фермионов

BRST симметрия

• **Эффективный лагранжиан:**

$$L = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} - \frac{1}{2\epsilon} (\partial^\mu A_\mu^a)^2 + \bar{c}^a (-\partial^\mu D_\mu^{ab}) c^b$$

Замечание: эквивалентная форма записи через вспомогательное нединамическое поле B^a :

$$L = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} + \frac{\epsilon}{2} (B^a)^2 + B^a (\partial^\mu A_\mu^a) + \bar{c}^a (-\partial^\mu D_\mu^{ab}) c^b$$

Проверка:

$$Z \rightarrow Z \int \mathcal{D}B e^{i \int d^4x \left[\frac{\epsilon}{2} (B^a)^2 + B^a (\partial^\mu A_\mu^a) \right]} \rightarrow \text{сдвиг переменной: } B^a \rightarrow B^a - \frac{1}{\epsilon} \partial^\mu A_\mu^a$$

$$= Z N e^{-i \int d^4x \frac{1}{2\epsilon} (\partial^\mu A_\mu^a)^2}$$

• **Глобальная BRST симметрия:**

η - нильпотентный параметр BRST преобразований, $\eta^2 = 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} A_\mu^a \rightarrow A_\mu^a + \delta A_\mu^a, \quad \delta A_\mu^a = \eta D_\mu^{ab} c^b \\ \bar{c}^a \rightarrow \bar{c}^a + \delta \bar{c}^a, \quad \delta \bar{c}^a = \eta B^a \\ c^a \rightarrow c^a + \delta c^a, \quad \delta c^a = -\frac{1}{2} \eta \epsilon_{abc} c^b c^c \\ B^a \rightarrow B^a + \delta B^a, \quad \delta B^a = 0 \end{array} \right.$$

Замечание: при инфинитезимальных калибровочных преобразованиях

$$A_\mu^a \rightarrow A_\mu^a + \delta A_\mu^a, \quad \delta A_\mu^a = D_\mu^{ab} \alpha^b$$

BRST симметрия – это калибровочные преобразования со специальным выбором параметра $\alpha^a = \eta c^a$

Проверка инвариантности:

$$\bullet \delta [\bar{c}^a (-\partial^\mu D_\mu^{ab}) c^b] = \delta \bar{c}^a (-\partial^\mu D_\mu^{ab}) c^b + \bar{c}^a \delta [(-\partial^\mu D_\mu^{ab}) c^b] =$$

$$\boxed{\delta c^a = \eta B^a} = -\eta B^a \cancel{(-\partial^\mu D_\mu^{ab})} c^b - \bar{c}^a \delta [(\partial^\mu D_\mu^{ab}) c^b]$$

$$\bullet \delta [B^a \partial^\mu A_\mu^a] = B^a \partial^\mu \delta A_\mu^a = \eta B^a \cancel{(\partial^\mu D_\mu^{ab})} c^b$$

$$\boxed{\delta B^a = 0, \quad \delta A_\mu^a = \eta D_\mu^{ab} c^b}$$

Задача: Проверьте, что

$$\delta [(\partial^\mu D_\mu^{ab}) c^b] = 0$$

генератор Q инфинитезимальных БРСТ преобразований:

$$A_\mu^a \rightarrow (A_\mu^a)' = e^{\eta Q} A_\mu^a \sim A_\mu^a + \eta Q A_\mu^a = A_\mu^a + \delta A_\mu^a; \quad \underline{Q A_\mu^a = D_\mu^{ab} c^b}$$

Замечание 1: Оператор БРСТ заряда нильпотентен: $Q^2 A_\mu^a = Q^2 c^a = 0$

Замечание 2: уравнения движения для поля B_μ^a : $\frac{\partial L}{\partial B^a} = \epsilon B^a + \partial^\mu A_\mu^a = 0$

$e_\mu^\pm = \frac{1}{2|\vec{k}|} (k^0, \pm \vec{k})$ - нефизические поляризации

$$\boxed{\epsilon B^a = -\partial^\mu A_\mu^a}$$



поле B^a идентифицируется с нефизическими степенями свободы поля Янга-Миллса: $k^\mu e_\mu^{(\pm)} \neq 0$

Квантовая теория Янга-Миллса

Метод фонового поля: $A_\mu = \bar{A}_\mu + \delta A_\mu$ ← Флуктуации («глюоны»)

$$F_{\mu\nu} \approx \bar{F}_{\mu\nu} + \bar{D}_\mu \delta A_\nu - \bar{D}_\nu \delta A_\mu + [\delta A_\mu, \delta A_\nu]$$

$$\bar{D}_\mu = \partial_\mu + [\bar{A}_\mu, \cdot]$$

Фоновая компонента, медленно
меняющаяся (при низких энергиях)

Разложение действия:

$$S \approx \frac{1}{g^2} \int d^4x \operatorname{Tr} \left\{ \frac{1}{2} \bar{F}_{\mu\nu} \bar{F}^{\mu\nu} + 2 \bar{F}^{\mu\nu} (\bar{D}_\mu \delta A_\nu) + \underbrace{(\bar{D}^\mu \delta A^\nu)(\bar{D}_\mu \delta A_\nu) - (\bar{D}^\mu \delta A^\nu)(\bar{D}_\nu \delta A_\mu)}_{\text{квadratic terms}} - \bar{F}^{\mu\nu} [\delta A_\mu, \delta A_\nu] + 2 (\bar{D}^\mu \delta A^\nu) [\delta A_\mu, \delta A_\nu] + \frac{1}{2} [\delta A^\mu, \delta A^\nu] [\delta A_\mu, \delta A_\nu] \right\}$$

квадратичные по флуктуациям члены:

$$\delta^2 S \sim \frac{1}{g^2} \int d^4x \operatorname{Tr} \left\{ (\bar{D}^\mu \delta A^\nu)(\bar{D}_\mu \delta A_\nu) - (\bar{D}^\mu \delta A^\nu)(\bar{D}_\nu \delta A_\mu) + \bar{F}^{\mu\nu} [\delta A_\mu, \delta A_\nu] \right\}$$

Инфинитезимальные калибровочные преобразования: $U = e^{\alpha^a T^a} \approx \mathbb{I} + \alpha^a T^a + \dots$

$$\delta_{gauge} \bar{A}_\mu = 0, \quad \delta_{gauge} (\delta A_\mu) = \bar{D}_\mu \alpha + [\delta A_\mu, \alpha]$$

- **Фиксация калибровки:** *калибровка фонового поля*

$$G[\bar{A}; \delta A] = \bar{D}^\mu \delta A_\mu = 0$$

- **Член, фиксирующий калибровку:**

$$S_{gauge} = \frac{1}{g^2} \int d^4x \text{Tr} (\bar{D}^\mu \delta A_\mu)^2$$

Замечание: этот выбор упрощает слагаемые во второй вариации действия:

$$\begin{aligned} & \int d^4x \text{Tr} (\bar{D}^\mu \delta A^\nu) (\bar{D}_\nu \delta A_\mu) = - \int d^4x \text{Tr} \delta A_\nu (\bar{D}^\mu \bar{D}^\nu) \delta A_\mu = \\ & = - \int d^4x \text{Tr} \delta A_\nu ([\bar{D}^\mu, \bar{D}^\nu] + \bar{D}^\nu \bar{D}^\mu) \delta A_\mu = \int d^4x \text{Tr} \{ \delta A_\nu [\bar{F}^{\mu\nu}, \delta A_\mu] + \underline{(\bar{D}^\mu \delta A_\mu)^2} \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow S + S_{gauge} = & \frac{1}{g^2} \int d^4x \text{Tr} \left\{ \frac{1}{2} \bar{F}_{\mu\nu} \bar{F}^{\mu\nu} + 2 \bar{F}^{\mu\nu} \bar{D}_\mu \delta A_\nu + (\bar{D}^\mu \delta A^\nu) (\bar{D}_\mu \delta A_\nu) \right. \\ & \left. - 2 \bar{F}^{\mu\nu} [\delta A_\mu, \delta A_\nu] + 2 (\bar{D}^\mu \delta A^\nu) [\delta A_\mu, \delta A_\nu] + \frac{1}{2} [\delta A^\mu, \delta A^\nu] [\delta A_\mu, \delta A_\nu] \right\} \end{aligned}$$

- **Трюк Фаддеева-Попова:** $\bar{A}_\mu^\alpha = \bar{A}_\mu, \quad \delta \bar{A}_\mu^\alpha = \delta A_\mu + \bar{D}_\mu \alpha + [\delta A_\mu, \alpha]$

$$1 = \int \mathcal{D}\alpha \delta(G[\bar{A}^\alpha; \delta A^\alpha]) \det \left(\frac{\partial G}{\partial \alpha} \right)$$

Интеграл по антикоммутирующим полям духов

$$\det \left(\frac{\partial G}{\partial \alpha} \right) = \int \mathcal{D}c \mathcal{D}\bar{c} \exp \left(-\frac{1}{g^2} \int d^4x \text{Tr} \{ -\bar{c} \bar{D}^2 c + \bar{c} [\bar{D}^\mu \delta A_\mu, c] \} \right)$$

● Действие квантовой теории Янга-Миллса:

$$S = \frac{1}{g^2} \int d^4x \operatorname{Tr} \left\{ \frac{1}{2} \bar{F}_{\mu\nu} \bar{F}^{\mu\nu} + 2\bar{F}^{\mu\nu} \bar{D}_\mu \delta A_\nu + \right. \\ \left. + (\bar{D}^\mu \delta A^\nu)(\bar{D}_\mu \delta A_\nu) - 2\bar{F}^{\mu\nu} [\delta A_\mu, \delta A_\nu] + (\bar{D}^\mu \bar{c})(\bar{D}_\mu c) + \right. \\ \left. + 2\bar{D}^\mu \delta A^\nu [\delta A_\mu, \delta A_\nu] + \frac{1}{2} [\delta A^\mu, \delta A^\nu] [\delta A_\mu, \delta A_\nu] + \bar{c} [\bar{D}^\mu \delta A_\mu, c] \right\}$$

однопетлевая поправка

Высшие порядки

«Классическая» часть

Приближение: фоновое поле минимизирует классическую часть действия

$$Z[\bar{A}, \delta A] = e^{-\frac{1}{g^2} \int d^4x \operatorname{Tr} \bar{F}_{\mu\nu} \bar{F}^{\mu\nu}} \int \mathcal{D}\delta A \mathcal{D}\bar{c} \mathcal{D}c e^{-S[\bar{A}, \delta A, \bar{c}, c]} \approx \\ \approx \left[\det^{-\frac{1}{2}} D_{\delta A}^{(2)} \right] \left[\det^{+1} D_c^{(2)} \right] e^{-\frac{1}{g^2} \int d^4x \operatorname{Tr} \bar{F}_{\mu\nu} \bar{F}^{\mu\nu}}$$

$$D_{\delta A}^{(2)} = -\bar{D}^2 \delta_{\mu\nu} - 2[\bar{F}_{\mu\nu}, \cdot], \quad D_c^{(2)} = -\bar{D}^2$$

● Эффективное однопетлевое действие квантовой теории Янга-Миллса:

$$S_{eff}[\bar{A}] = \frac{1}{g^2} \int d^4x \operatorname{Tr} \bar{F}_{\mu\nu} \bar{F}^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \operatorname{Tr} \ln D_{\delta A}^{(2)} - \operatorname{Tr} \ln D_c^{(2)}$$

• **Духи:**

$$\Delta_1 = \partial^\mu \bar{A}_\mu + \bar{A}_\mu \partial^\mu, \quad \Delta_2 = [\bar{A}^\mu, [\bar{A}_\mu, \cdot]]$$

$$\text{Tr} \ln D_c^{(2)} = \text{Tr} \ln(-\square + \Delta_1 + \Delta_2) = \text{Tr} \ln(-\square) + \text{Tr} \ln(1 + (-\square)^{-1}(\Delta_1 + \Delta_2)) =$$

По аналогии с теорией ϕ^4 :

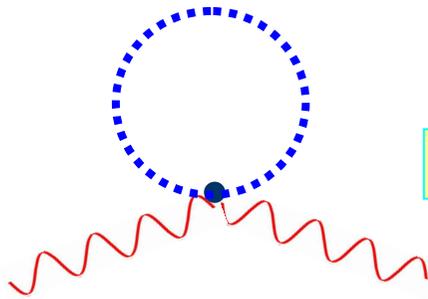
$$\ln(1 + x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \dots$$

$$= \underbrace{\text{Tr} \ln(-\square)}_{\text{Вклад в общую нормировку}} + \text{Tr} [(-\square)^{-1}(\Delta_1 + \Delta_2)] - \frac{1}{2} \text{Tr} [(-\square)^{-1}(\Delta_1 + \Delta_2)^2] + \dots$$

Вклад в общую нормировку

$$\text{Tr} (-\square)^{-1} \Delta_1 \sim \text{Tr} A_\mu = 0$$

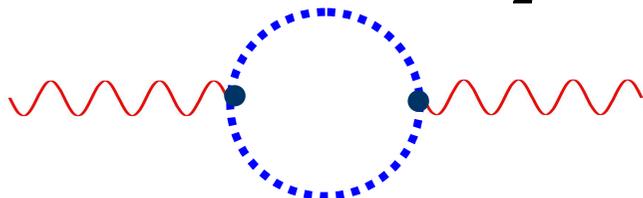
• **Tadpole ghost:**



$$\text{Tr} (-\square)^{-1} \Delta_2 = \int \frac{d^4 k}{(2\pi^4)} \text{Tr} \bar{A}_\mu(k) \bar{A}_\nu(-k) \int \frac{d^4 p}{(2\pi^4)} \frac{\delta_{\mu\nu}}{p^2}$$

Квадратичная расходимость

• **Рыба с духами:**



$$-\frac{1}{2} \text{Tr} [(-\square)^{-1} \Delta_1 (-\square)^{-1} \Delta_1] = \frac{1}{2} \text{Tr} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \bar{A}_\mu(k) \bar{A}_\nu(-k) \Sigma_{\mu\nu}^c(k)$$

$$\Sigma_{\mu\nu}^c = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{(2p+k)_\mu (2p+k)_\nu}{p^2 (p+k)^2}$$

● **Вклад духов в пропагатор:**

$$\text{Tr } T^a T^b = C_{adj} \delta^{ab} \quad SU(2) : (T^a)_{bc} = -i\epsilon_{abc}$$

$$\text{Tr } \ln D_c^{(2)} = \text{Tr } \ln(-\square) = \frac{C_{adj}}{3(4\pi)^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{tr} [\bar{A}_\mu(k) \bar{A}_\nu(-k)] (k^\mu k^\nu - k^2 \delta^{\mu\nu}) \ln \left(\frac{\Lambda^2}{k^2} \right)$$

Функциональный след

● **Вклад глюонной петли:**

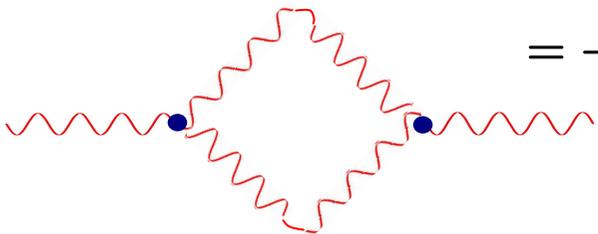
$$D_{\delta A}^{(2)} = -\bar{D}^2 \delta_{\mu\nu} - 2[\bar{F}_{\mu\nu}, \cdot], \quad D_c^{(2)} = -\bar{D}^2 \quad \text{tr } \delta_{\mu\nu} \text{ дает добавочный множитель 4}$$

$$\text{Tr } \ln D_{\delta A}^{(2)} = \text{Tr } \ln(4D_c^{(2)} - 2[\bar{F}_{\mu\nu}, \cdot]) = \text{Tr } \ln(-4\square - 2[\bar{F}_{\mu\nu}, \cdot]) =$$

$$= 4 \left[\text{Tr } \ln(-\square) - \frac{1}{2} \text{Tr} (-\square)^{-1} [\bar{F}_{\mu\nu}, (-\square)^{-1} \bar{F}^{\mu\nu}, \cdot] + \dots \right]$$

$$-4 \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{tr} [\bar{A}_\mu(k) \bar{A}_\nu(-k)] \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{-4(k^\rho \delta^{\mu\nu} - k^\sigma \delta^{\mu\rho})(k_\sigma \delta_\rho^\nu - k_\rho \delta_\sigma^\nu)}{p^2 (p+k)^2} =$$

$$= -\frac{8C_{adj}}{(4\pi)^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{tr} [\bar{A}_\mu(k) \bar{A}_\nu(-k)] (k^\mu k^\nu - \delta^{\mu\nu} k^2) \ln \left(\frac{\Lambda^2}{k^2} \right)$$



$$\frac{1}{2} \text{Tr } \ln D_{\delta A}^{(2)} = \frac{1}{2} \left[\frac{4}{3} - 8 \right] \frac{C_{adj}}{(4\pi)^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{tr} [\bar{A}_\mu(k) \bar{A}_\nu(-k)] (k^\mu k^\nu - \delta^{\mu\nu} k^2) \ln \left(\frac{\Lambda^2}{k^2} \right)$$

● **Эффективное однопетлевое действие квантовой теории Янга-Миллса:**

$$S_{eff}[\bar{A}] = \frac{1}{g^2} \int d^4x \text{Tr} \bar{F}_{\mu\nu} \bar{F}^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \text{Tr} \ln D_{\delta A}^{(2)} - \text{Tr} \ln D_c^{(2)}$$

● $\int d^4x \text{Tr} \bar{F}_{\mu\nu} \bar{F}^{\mu\nu} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{tr} [\bar{A}_\mu(k) \bar{A}_\nu(-k)] (k^\mu k^\nu - \delta^{\mu\nu} k^2)$

● $\frac{1}{2} \text{Tr} \ln D_{\delta A}^{(2)} = \frac{1}{2} \left[\frac{4}{3} - 8 \right] \frac{C_{adj}}{(4\pi)^2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{tr} [\bar{A}_\mu(k) \bar{A}_\nu(-k)] (k^\mu k^\nu - \delta^{\mu\nu} k^2) \ln \left(\frac{\Lambda^2}{k^2} \right)$

● $-\text{Tr} \ln D_c^{(2)} = -\frac{C_{adj}}{3(4\pi)^2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{tr} [\bar{A}_\mu(k) \bar{A}_\nu(-k)] (k^\mu k^\nu - k^2 \delta^{\mu\nu}) \ln \left(\frac{\Lambda^2}{k^2} \right)$

Бегущая константа связи неабелевой калибровочной теории:

$$\frac{1}{g^2(\mu)} = \frac{1}{g^2} + \frac{C_{adj}}{(4\pi)^2} \left[-\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} - 8 \right) \right] \ln \left(\frac{\Lambda_{UV}^2}{\mu^2} \right) = \frac{1}{g^2} - \frac{11}{3} \frac{C_{adj}}{(4\pi)^2} \ln \left(\frac{\Lambda_{UV}^2}{\mu^2} \right)$$

Знак „-“ !

Асимптотическая свобода КХД
(Д.Гросс, Ф.Вилчек и Д.Политцер, 1973)



SU(2) Модель Янга-Миллса-Хиггса

$$L = \frac{1}{2g^2} \text{Tr} (F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}) - \frac{1}{g^2} \text{Tr} (D_\mu \Phi)^2 + V(\Phi) =$$

$$T_i = -\frac{i}{2} \sigma_i, \quad [T_i, T_j] = i \varepsilon_{ijk} T_k$$

$$D_\mu = \partial_\mu - ig A_\mu^a \frac{\sigma^a}{2}$$

$$= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + \frac{1}{2} (D_\mu \Phi^a)(D^\mu \Phi^a) + V(\Phi)$$

$$A_\mu = -ig \frac{\sigma^a}{2} A_\mu^a = A_\mu^a T^a \in su(2), \quad F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^a T^a \in su(2), \quad \Phi = \Phi^a T^a \in su(2)$$



$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + g \varepsilon_{abc} A_\mu^b A_\nu^c, \quad D_\mu \Phi^a = \partial_\mu \Phi^a + g \varepsilon_{abc} A_\mu^b \Phi^c$$

• Потенциал Хиггса:

$$V(\Phi) = \frac{\lambda}{4} (\Phi^a \Phi^a - a^2)^2$$

• Уравнения поля:

$$D^\mu F_{\mu\nu}^a = g \varepsilon_{abc} \Phi^b D_\nu \Phi^c, \quad D^\mu D_\mu \Phi^a = \lambda \Phi^a (\Phi^b \Phi^b - a^2)$$

• Тождества Бианки:

$$D^\mu \tilde{F}_{\mu\nu}^a \equiv 0$$

Задача: Проверьте!

• Тензор энергии-импульса:

$$T_{\mu\nu} = F_{\mu\rho}^a F_\nu^{a\rho} + (D_\mu \Phi^a)(D_\nu \Phi^a) - g_{\mu\nu} L$$

• Энергия:

$$E = \int d^3x T_{00} = \int d^3x \left[\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + \frac{1}{2} (D_\mu \Phi^a)(D^\mu \Phi^a) + \frac{\lambda}{4} (\Phi^a \Phi^a - a^2)^2 \right]$$

Задача: Покажите, что закон Гаусса в модели Янга-Миллса-Хиггса имеет вид:

$$D_n E_n - ig [\Phi, D_0 \Phi] = 0, \quad E_n = F_{0n}$$

• **Вакуум Хиггса:** $\Phi^a \Phi^a = a^2, \quad F_{\mu\nu}^a = 0, \quad D_\mu \Phi^a = 0$

1. Поле Хиггса постоянно в вакууме:

$$\Phi_{vac} = -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} = aT^3$$

2. В вакууме симметрия теории нарушена: $SU(2) \rightarrow U(1)$

Флуктуации скалярного поля на фоне вакуума: $\Phi^a = (0, 0, a + \xi)$

$$\rightarrow (D_\mu \Phi^a)(D^\mu \Phi^a) \approx (\partial_\mu \xi)(\partial^\mu \xi) + \underbrace{g^2 a^2 [(A_\mu^1)^2 + (A_\mu^2)^2]}_{\text{Массовый член калибровочного поля}}, \quad V(\Phi) \approx \underbrace{\frac{\lambda}{2} a^2 \xi^2}_{\text{Массовый член скалярного поля}}$$

Массовый член калибровочного поля

Массовый член скалярного поля

$$A_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (A_\mu^1 \pm A_\mu^2) \Rightarrow m_\nu = ga, \quad A_\mu^3 \Rightarrow m = 0 \quad m_s = a\sqrt{\lambda}$$

Замечание: ненарушенная вакуумная симметрия $U(1)$, ассоциированная с вращениями вокруг вектора $\Phi^a T^a$, может быть сопоставлена электромагнитной подгруппе $A_\mu^{em} = A_\mu^a \Phi^a / a$

• **Генератор электрического заряда:** $Q = \frac{g}{a} (\Phi^a T^a)$

Собственные значения Q: $q = \pm \frac{g}{2}$

Монополи т Хуфта-Полякова

$$D_n \Phi^a = \partial_n \Phi^a + g \varepsilon_{abc} A_n^b \Phi^c \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0 \quad \hat{\Phi}^a \hat{\Phi}^a \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 1 \quad \rightarrow \quad \hat{\Phi}^a \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \hat{r}^a = \frac{r^a}{r}$$

$$\partial_n \left(\frac{r_a}{r} \right) = \frac{r^2 \delta_{an} - r_a r_n}{r^3} = (\delta_{an} \delta_{ck} - \delta_{ak} \delta_{nc}) \frac{r_c r_k}{r^3} = \varepsilon_{abc} \varepsilon_{bkn} \frac{r_c r_k}{r^3} \quad \langle \text{ЕЖ} \rangle$$

$$\rightarrow \quad A_k^a(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{1}{g} \varepsilon_{akn} \frac{r_n}{r^2}, \quad B_n^a = \frac{1}{2} \varepsilon_{nmk} F_{mk}^a \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{r_n r_a}{gr^4} \quad \underline{SO(3) \times SO(3) \rightarrow SO(3)}$$

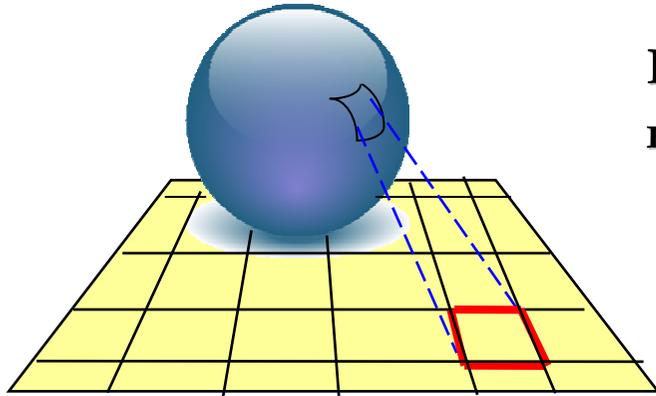
• **Электромагнитная подгруппа:** $F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^a \hat{\Phi}^a, \quad B_n \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{r_n}{gr^3}$

Модель Янга-Миллса-Хиггса допускает существование классических решений с кулоновской асимптотикой магнитного поля - **монополей**

• **Топология:** $S_{vac}^2 := \{ \Phi : \Phi^a \Phi^a = a^2 \}, \quad \Phi : S_\infty^2 \mapsto S_{vac}^2, \quad \Pi_2(S^2) = \mathbb{Z}$

• **Топологический ток:** $k_\mu = \frac{1}{2ga^3} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon_{abc} \partial^\nu \Phi^a \partial^\rho \Phi^b \partial^\sigma \Phi^c, \quad \partial^\mu k_\mu \equiv 0$

Индекс отображения: $Q = \int d^3x k_0 = \frac{1}{2ga^3} \int d^3x \varepsilon_{abc} \varepsilon_{mnk} \partial_m (\Phi^a \partial_n \Phi^b \partial_k \Phi^c) =$
 $= \frac{1}{2ga^3} \int d^2S_n \varepsilon_{abc} \varepsilon_{mnk} \Phi^a \partial_n \Phi^b \partial_k \Phi^c$



Переход от координат $r_n = (x, y, z)$ к локальным координатам ξ^α на сфере S^2_{vac} :

$$\partial_n \Phi^a = \frac{\partial \Phi^a}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial r_n}, \quad d^2 S_n = \frac{1}{2} \varepsilon_{nmk} \varepsilon_{\alpha\beta} \frac{\partial r^m}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial r^k}{\partial \xi^\beta} d^2 \xi$$

$$\Rightarrow Q = \frac{1}{2ga^3} \int d^2 S_n \varepsilon_{abc} \varepsilon_{mnk} \Phi^a \partial_n \Phi^b \partial_k \Phi^c = \frac{1}{g} \int d^2 \xi \sqrt{\mathbf{g}} =$$

$$= \frac{4\pi n}{g}, \quad n \in \mathbb{Z} \quad \mathbf{g} = \det(\partial_\alpha \hat{\Phi}^a, \partial_\beta \hat{\Phi}^a)$$

● **Анзац т'Хуфта-Полякова:**

$$r \rightarrow \zeta = gar$$

$$\Phi^a = \frac{r^a}{gr^2} H(r), \quad A_n^a = \varepsilon_{amn} \frac{r^m}{gr^2} [1 - K(r)], \quad A_0^a = 0$$

$$E = \frac{4\pi a}{g} \int \frac{d\zeta}{\zeta^2} \left[\zeta^2 \left(\frac{dK}{d\zeta} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{dH}{d\zeta} - H \right)^2 + \frac{1}{2} (K^2 - 1)^2 + k^2 H^2 + \frac{\lambda}{4g^2} (H^2 - \zeta^2) \right]$$

● **Уравнения поля:** $\frac{d^2 K}{d\zeta^2} = KH^2 + K(K^2 - 1), \quad \zeta^2 \frac{d^2 H}{d\zeta^2} = 2K^2 H + \frac{\lambda}{g^2} H(H^2 - \zeta^2)$

$$D_n \Phi^a = \frac{\delta_{an}}{gr^2} KH + \frac{r^a r^n}{gr^4} \left(\zeta \frac{dH}{d\zeta} - H - KH \right), \quad B_n^a = \frac{r_n r^a}{gr^4} \left(1 - K^2 + \zeta \frac{dK}{d\zeta} \right) - \frac{\delta_{an}}{gr^2} \zeta \frac{dK}{d\zeta}$$

● **Граничные условия:**

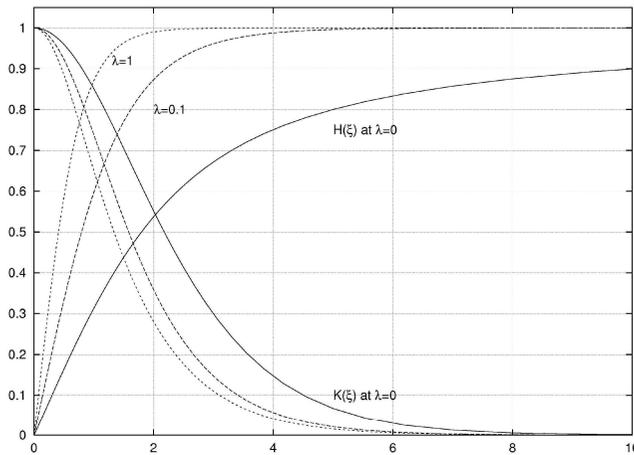
$$K(\zeta) \xrightarrow{r \rightarrow 0} 1, \quad H(\zeta) \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0, \quad K(\zeta) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0, \quad H(\zeta) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \zeta$$

● **Магнитный заряд:**

Тождество Бианки: $D_n B_n^a \equiv 0$

$$Q_{mag} = \frac{1}{a} \int d^2 S_n B_n = \frac{1}{a} \int d^2 S_n B_n^a \Phi^a = \frac{1}{a} \int d^3 x B_n^a D_n \Phi^a =$$

$$= \frac{4\pi}{g} \int_0^\infty \frac{d\zeta}{\zeta^2} \{ (K^2 - 1)(H - \zeta H') - 2\zeta K' K H \} = \frac{4\pi}{g} \int_0^\infty d\zeta \frac{d}{d\zeta} \left\{ \frac{1 - K^2}{\zeta} \right\} = \frac{4\pi}{g}$$



● **Дион:** $A_0^a = 0 \rightarrow A_0^a = \frac{r^a}{gr^2} J(r), \quad E_n^a = F_{0n}^a$

$$Q_{el} = \frac{1}{a} \int dS_n E_n = \frac{1}{a} \int dS_n E_n^a \Phi^a = \frac{1}{a} \int d^3 x E_n^a D_n \Phi^a$$

$$\begin{cases} \zeta^2 K'' = K(H^2 - J^2) + K(K^2 - 1) \\ \zeta^2 H'' = 2K^2 H + \frac{\lambda}{g^2} H(H^2 - \zeta^2) \\ \zeta^2 J'' = 2K^2 J \end{cases}$$

$$J(r) \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0, \quad J(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} Cr$$

● **Электрический заряд:**

$$Q_{el} = \frac{4\pi}{g} \int_0^\infty \frac{d\zeta}{\zeta^2} \{ 2JHK^2 + \zeta^2 J' H' + JH - \zeta(J' H + H' J) \} = \frac{4\pi}{g} \int_0^\infty d\zeta \frac{d}{d\zeta} \left\{ \zeta H \frac{d}{d\zeta} \left(\frac{JH}{\zeta} \right) \right\} = \frac{4\pi C}{g}$$

Калибровочная нулевая мода монополя

Замечание 1: анзац т'Хуфта-Полякова статичен и $A_0 = 0$

Замечание 2: ненарушенная вакуумная симметрия $U(1)$, ассоциированная с вращениями вокруг вектора $\Phi^a T^a$, соответствует электромагнитной подгруппе

Замечание 3: Калибровочные преобразования могут зависеть от времени

Периодические по времени калибровочные преобразования $U(\mathbf{r}, t) = e^{ig\alpha(\mathbf{r})t}$:

$$A_n(\mathbf{r}, 0) \rightarrow A_n(\mathbf{r}, t) = U(\mathbf{r}, t)A_n(\mathbf{r}, 0)U^{-1}(\mathbf{r}, t) - \frac{i}{g}U(\mathbf{r}, t)\partial_n U^{-1}(\mathbf{r}, t)$$

$$\Phi(\mathbf{r}, 0) \rightarrow \Phi(\mathbf{r}, t) = U(\mathbf{r}, t)\Phi(\mathbf{r}, 0)U^{-1}(\mathbf{r}, t)$$

Чистая калибровка

$$A_0(\mathbf{r}, 0) = 0 \rightarrow A_0(\mathbf{r}, t) = -\frac{i}{g}U(\mathbf{r}, t)\partial_0 U^{-1}(\mathbf{r}, t) = -\alpha(\mathbf{r})$$

Инфинитезимальные преобразования:

$$U(\mathbf{r}, t) \approx \mathbb{I} + ig\alpha(\mathbf{r})\delta t$$

$$\rightarrow \begin{cases} A_n(\mathbf{r}, \delta t) \approx A_n(\mathbf{r}) + (ig[\alpha, A_n(\mathbf{r})] - \partial_n \alpha) \delta t \\ \Phi(\mathbf{r}, \delta t) \approx \Phi(\mathbf{r}) + ig[\alpha, \Phi(\mathbf{r})]\delta t \end{cases}$$

$$\rightarrow \partial_0 A_n = ig[\alpha, A_n(\mathbf{r})] - \partial_n \alpha = -D_n \alpha, \quad \partial_0 \Phi = ig[\alpha, \Phi]$$

• Параметр преобразования $\alpha(\mathbf{r})$ задает калибровочную нулевую моду:

$$\begin{pmatrix} \partial_0 A_n \\ \partial_0 \Phi \end{pmatrix}$$

Замечание: калибровочные преобразования не меняют поля и производные:

$$E_n^a = \partial_0 A_n - D_n A_0 = -D_n \alpha + D_n \alpha \equiv 0$$

$$D_0 \Phi = \partial_0 \Phi + ig[A_0, \Phi] = ig[\alpha, \Phi] - ig[\alpha, \Phi] \equiv 0$$

• «Кинетическая энергия» монополя: $\int d^3x \text{Tr} (E_n E_n + D_0 \Phi D_0 \Phi) = 0$

• Закон Гаусса: $D_n E_n - ig[\Phi, D_0 \Phi] = 0$



Тривиальное решение: $E_n = D_0 \Phi = 0$

Дополнительное условие на нулевую моду монополя: **фоновая калибровка**

$$D_n(\partial_0 A_n) - ig[\Phi, (\partial_0 \Phi)] = 0$$

← Уравнения Богомольного выполняются и для флуктуаций полей

Нетривиальное решение: $\alpha = \dot{\Upsilon}(t)\Phi$

$$U(\mathbf{r}, t) = \exp\{ig\dot{\Upsilon}(t)\Phi(\mathbf{r})t\} \approx \mathbb{I} + ig\dot{\Upsilon}\Phi \delta t$$

$$\Rightarrow \partial_0 A_n = \dot{\Upsilon} D_n \Phi, \quad \partial_0 \Phi = 0 \quad \Rightarrow E_n = \partial_0 A_n = \dot{\Upsilon}(t) D_n \Phi = \dot{\Upsilon}(t) B_n, \quad D_0 \Phi = 0$$

← BPS монополь

• «Кинетическая энергия» монополя:

$$\frac{1}{2} \dot{\Upsilon}^2 \int d^3x D_n \Phi^a D_n \Phi^a = \frac{\dot{\Upsilon}^2}{2} \int d^3x B_n^a B_n^a = \frac{2\pi a}{g} \dot{\Upsilon}^2 = \frac{1}{2} M \dot{\Upsilon}^2$$

