

# Действие свободного электромагнитного поля

$$S = -\frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \int d^4x A_\mu \{ \eta_{\mu\nu} \square - \partial_\mu \partial_\nu \} A_\nu$$

- **Уравнение для функции Грина:**  $(\eta_{\mu\nu} \square - \partial_\mu \partial_\nu) G_{\nu\rho}(x-y) = i\delta_{\mu\rho} \delta(x-y)$

$$G_{\nu\rho}(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} G_{\nu\rho}(k) e^{ik_\mu x_\mu} \rightarrow (-k^2 \eta_{\mu\nu} + k_\mu k_\nu) G_{\nu\rho}(k) = i\delta_{\mu\rho}$$

**Проблема:** оператор  $-k^2 \delta_{\mu\nu} + k_\mu k_\nu$  сингулярен, он тождественен нулю для любой функции  $\sim \partial_\mu \alpha(x)$  (чистая калибровка) – функция Грина?

Производящий функционал

$$Z[J_\mu] = \int \mathcal{D}[A_\mu(x)] e^{-\int d^4x \left[ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - J^\mu A_\mu \right]}$$



**Замечание:** интегрирование по калибровочным орбитам приводит к бесконечному учету вклада одной и той же конфигурации.

- **Фиксация калибровки:** наложено условие  $G(A) = 0$

$$A_\mu^\alpha = A_\mu + \frac{1}{\varepsilon} \partial_\mu \alpha(x) \iff L = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \rightarrow L + L_G = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\varepsilon} (\partial^\mu A_\mu)^2$$

Член, фиксирующий калибровку

$$\rightarrow S = -\frac{1}{2} \int d^4x A_\mu \{ \eta_{\mu\nu} \square + \left( \frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) \partial_\mu \partial_\nu \} A_\nu$$

• Уравнение для функции Грина:  $(\eta_{\mu\nu} \square + \left( \frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) \partial_\mu \partial_\nu) G_{\nu\rho}(x-y) = \delta_{\mu\rho} \delta(x-y)$

$$G_{\nu\rho}(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} G_{\nu\rho}(k) e^{ik_\mu x_\mu} \rightarrow \left[ -k^2 \eta_{\mu\nu} - \left( \frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) k_\mu k_\nu \right] G_{\nu\rho}(k) = \delta_{\mu\rho}$$

• Фотонный пропагатор:  $G_{\mu\nu}^{-1}(k) = -\frac{1}{k^2} \left[ \eta_{\mu\nu} + (\varepsilon - 1) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right]$

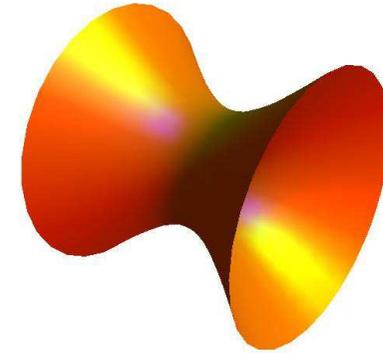
**Задача:** проверьте, что  $G_{\mu\nu}^{-1}(k) G^{\nu\rho}(k) = \delta_\mu^\rho$

• Калибровка Феймана:  $\varepsilon = 1, \implies G_{\mu\nu}^{-1}(k) = -\frac{\eta_{\mu\nu}}{k^2}$

• Калибровка Ландау:  $\varepsilon = 0, \implies G_{\mu\nu}^{-1}(k) = -\frac{\eta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}}{k^2}$

● **Простой пример из обычного интегрирования:**

$$\int_0^\infty dx dy dz F(x^2 - y^2 - z^2) = \int d\Sigma \int_0^\infty dr r^2 F(r^2)$$



Функция  $F(r^2)$  - инвариант  $SO(2,1)$  преобразований

→ ∞

$$(x, y, z) = (r \cosh \gamma, r \cos \phi \sinh \gamma, r \sin \phi \sinh \gamma)$$

● **Ограничение интегрирования:** вставка в интеграл  $\delta$ -функции

$$\int_{-\infty}^{\infty} df \delta(f) = 1, \quad f - \text{условие, ограничивающее область интегрирования}$$

например,  $f(a) \Rightarrow x^2 - y^2 - z^2 = a^2$

$$\vec{f}(\vec{a}) \Rightarrow 1 = \int d\vec{f} \delta^{(n)}(\vec{f})$$

● **Замена переменной интегрирования:**

$$1 = \left( \prod_n \int da_n \right) \delta^{(n)}[f(\vec{a})] \det \left( \frac{\partial f_n}{\partial a_m} \right)$$

● **Ограничение функционального интегрирования условием  $G(A^\alpha) = 0$ :**

$$1 = \int \mathcal{D}\alpha(x) \delta(G(A^\alpha)) \det \left( \frac{\delta G(A^\alpha)}{\delta \alpha} \right)$$

$$A_\mu^\alpha = A_\mu + \frac{1}{\varepsilon} \partial_\mu \alpha(x)$$

• **Калибровка Лоренца:**  $G(A^\alpha) = \partial^\mu A_\mu^\alpha = \partial^\mu A_\mu + \frac{1}{\varepsilon} \square \alpha = 0$

→  $\det \left( \frac{\delta G(A^\alpha)}{\delta \alpha} \right) = \frac{1}{\varepsilon} \square$  - детерминант не зависит от  $A_\mu$

**Трюк Фаддева-Попова:** вставка единицы в производящий функционал

$$1 = \int \mathcal{D}\alpha(x) \delta(G(A^\alpha)) \det \left( \frac{\delta G(A^\alpha)}{\delta \alpha} \right) \rightarrow \int \mathcal{D}[A_\mu(x)] e^{-\int d^4x \left[ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right]}$$

**Напомним:** Калибровка Лоренца оставляет остаточные преобразования с произвольной функцией  $\omega(x)$  →  $G(A) = \partial_\mu A^\mu - \omega(x)$

**Производящий функционал с полностью фиксированной калибровкой:**

$$Z = \det \left( \frac{1}{\varepsilon} \square \right) \int \mathcal{D}\alpha \int \mathcal{D}[A] e^{-S[A]} \delta(\partial_\mu A^\mu - \omega(x))$$

**Замечание 1:**  $\alpha$  – параметр локального  $U(1)$  калибровочного преобразования

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \frac{i}{e} U \partial_\mu U^{-1}, \quad U = e^{ie\alpha(x)} \in U(1)$$

**Замечание 2:** сдвиг калибровки не меняет  $\delta$ -функции:  $\delta(\partial_\mu A_\mu) = \delta(\partial_\mu A_\mu - \omega(x))$

$$Z = \det \left( \frac{1}{\varepsilon} \square \right) \left( \int \mathcal{D}\alpha \right) \int \mathcal{D}[A] e^{-S[A]} \delta(\partial_\mu A^\mu - \omega(x))$$

- **Усреднение по дополнительной переменной интегрирования  $\omega$  (гауссов интеграл формально подавляет расходимость):**

$$\begin{aligned} Z[A, \omega] \rightarrow Z[A] &= \int \mathcal{D}\omega e^{-\int d^4x \frac{\omega^2}{2\varepsilon}} Z[A, \omega] \\ &= \det \left( \frac{1}{\varepsilon} \square \right) \left( \int \mathcal{D}\alpha \right) \int \mathcal{D}[A] e^{-S[A] - \int d^4x \frac{1}{2\varepsilon} (\partial_\mu A^\mu)^2} \end{aligned}$$

**Замечание:** детерминант  $\det \frac{1}{\varepsilon} \square$  может быть записан в виде функционального интеграла по новому набору вспомогательных антикоммутирующих полей  $c, \bar{c}$  (духи):

$$\det \left( \frac{1}{\varepsilon} \square \right) = \int \mathcal{D}c \mathcal{D}\bar{c} e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int d^4x \bar{c} (-\square) c}, \quad \{\bar{c}, c\} = \bar{c}c + c\bar{c} = 0$$

- **Эффективный лагранжиан:**

$$L = -\frac{1}{4} (F_{\mu\nu})^2 + \frac{1}{2\varepsilon} (\partial_\mu A^\mu)^2 + \bar{c} (-\square) c$$

*Поля духов не являются динамическими. В абелевой электродинамике их вклад в производящий функционал отщепляется*

# BRST симметрия

● **Эффективный лагранжиан:**

$$L = -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2 + \frac{1}{2\varepsilon}(\partial_\mu A^\mu)^2 + \bar{c}(-\square)c$$

● **Калибровочная инвариантность кажется потеряна ?**

$$L \rightarrow L[A, B, c, \bar{c}] = -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2 - \frac{1}{2\varepsilon}B^2 + B(\partial_\mu A^\mu) + \bar{c}(-\square)c,$$

$B$  – еще одно вспомогательное поле,  $\int \mathcal{D}A \mathcal{D}c \mathcal{D}\bar{c} \rightarrow \int \mathcal{D}B \int \mathcal{D}A \mathcal{D}c \mathcal{D}\bar{c}$

**Проверка:**

$$Z \rightarrow Z \int \mathcal{D}B e^{i \int d^4x \left[ \frac{\varepsilon}{2}(B^a)^2 + B^a (\partial^\mu A_\mu^a) \right]} \rightarrow \text{сдвиг переменной: } B^a \rightarrow B^a - \frac{1}{\varepsilon} \partial^\mu A_\mu^a$$

$$= Z N e^{-i \int d^4x \frac{1}{2\varepsilon} (\partial^\mu A_\mu^a)^2}$$

**Бекки-Руэ-Стора-Тютин  
(BRST) симметрия:**

$$\left\{ \begin{array}{l} A_\mu \rightarrow A_\mu + \delta A_\mu, \quad \delta A_\mu = \eta \partial_\mu c \\ \bar{c} \rightarrow \bar{c} + \delta \bar{c}, \quad \delta \bar{c} = \eta B \\ c \rightarrow c + \delta c, \quad \delta c = 0 \\ B \rightarrow B + \delta B, \quad \delta B = 0 \end{array} \right.$$

$\eta$  - нильпотентный параметр BRST преобразований,  $\eta^2 = 0$

# Взаимодействующие поля: скалярная электродинамика

$$L_A = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x)$$

Локальная U(1) инвариантность

$$L_\phi = (\partial_\mu\phi)^*(\partial^\mu\phi) - m^2\phi^*\phi$$

$$\phi(x) \rightarrow e^{ie\alpha}\phi(x), \quad \phi^*(x) \rightarrow e^{-ie\alpha}\phi^*(x)$$

Глобальная U(1) инвариантность

- Концепция калибровочной инвариантности: перейти от обычной производной скалярного поля  $\partial_\mu\phi$  к ковариантной производной

$$D_\mu\phi \equiv \partial_\mu\phi - ieA_\mu\phi \rightarrow e^{ie\alpha(x)}D_\mu\phi$$

- Калибровочно-инвариантный лагранжиан:

$$L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + (D_\mu\phi)^*(D^\mu\phi) - m^2\phi^*\phi$$

- Уравнения поля:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial^\mu F_{\mu\nu} = ej^\nu, \quad j^\nu = -i[\phi^*D^\nu\phi - (D^\nu\phi)^*\phi] \\ D_\mu D^\nu\phi + m^2\phi = 0 \end{array} \right.$$

- **Задача:** проверить, что ток  $j_\mu$  сохраняется

● **Задача:** показать, что  $[D_\mu, D_\nu]\phi \equiv (D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu)\phi = ieF_{\mu\nu}\phi$

● **Сохраняющийся нетеровский заряд:**

$$Q = \int d^3x j_0 = i \int d^3x \{(\partial_0\phi^*)\phi - \phi^*(\partial_0\phi) + 2ieA_0\phi^*\phi\}$$

● **Действие скалярной электродинамики в калибровке Лоренца (Евклид):**

$$S[A, \phi, \phi^*] = \int d^4x \frac{1}{2} \left\{ A^\mu \left[ \delta_{\mu\nu} \square + \left( \frac{1}{\alpha} - 1 \right) \partial_\mu \partial_\nu \right] A^\nu + \phi^* (\square + m^2) \phi \right\}$$

$$+ \int d^4x \{ ieA^\mu (\phi^* (\partial_\mu \phi) - (\partial_\mu \phi^*) \phi) + e^2 A_\mu^2 |\phi|^2 \} \leftarrow L_{int}$$

● **Уравнения поля (калибровка Феймана):**  $(-\partial_\mu^2 + m^2) \phi(x) = J_s(x); \quad \square A_\mu(x) = J_\mu^{em}(x)$

● **Флуктуации полей над вакуумом:**  $\phi = \phi^{(0)} + \delta\phi, A_\mu = A_\mu^{(0)} + \delta a_\mu \quad \phi^{(0)} = A_\mu^{(0)} = \text{const}$

● **Свободный производящий функционал :**

$$Z_0[J_s^*, J_s, J_\mu^{em}] = \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\phi^* \mathcal{D}\phi e^{-S[A, \phi^*, \phi] + J_s^* \phi + \phi^* J_s + J_\mu^{em} A^\mu} =$$

$$N e^{\int d^4x d^4x' J_s^*(x') G(x-x') J_s(x) + \frac{1}{2} J_\mu^{em} G_{\mu\nu}(x-x') J_\nu^{em}} = N e^{J_s^* \star G \star J_s + J_\mu^{em} \star G_{\mu\nu} \star J_\nu^{em}}$$

● **Полный производящий функционал :**

$$Z[J_s^*, J_s, J_\mu^{em}] = \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\phi^* \mathcal{D}\phi Z_0 \left[ e^{-\int d^4x \{ieA_\mu(\phi^*(\partial_\mu\phi) - (\partial_\mu\phi^*)\phi) + e^2 A_\mu^2 |\phi|^2\}} \right]$$

**Метод:** пертурбативное разложение по калибровочной константе связи  $e$ :

$$\begin{aligned} & \exp \left\{ \int d^4x \, ieA^\mu [(\phi^*(\partial_\mu\phi) - (\partial_\mu\phi^*)\phi)] \right\} \times \exp \left\{ -e^2 A_\mu^2 |\phi|^2 \right\} = \\ & \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ie)^n}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n \, A_\mu(x_1) [\phi^*(x_1)(\partial_\mu\phi(x_1)) - (\partial_\mu\phi^*(x_1))\phi(x_1)] \dots \right. \\ & \quad \left. \dots A_\mu(x_n) [\phi^*(x_n)(\partial_\mu\phi(x_n)) - (\partial_\mu\phi^*(x_n))\phi(x_n)] \right) \\ & \times \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{2n}}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n \, A_\mu^2(x_1) \phi^*(x_1)\phi(x_1) \dots A_\mu^2(x_n) \phi^*(x_n)\phi(x_n) \right) \approx \end{aligned}$$

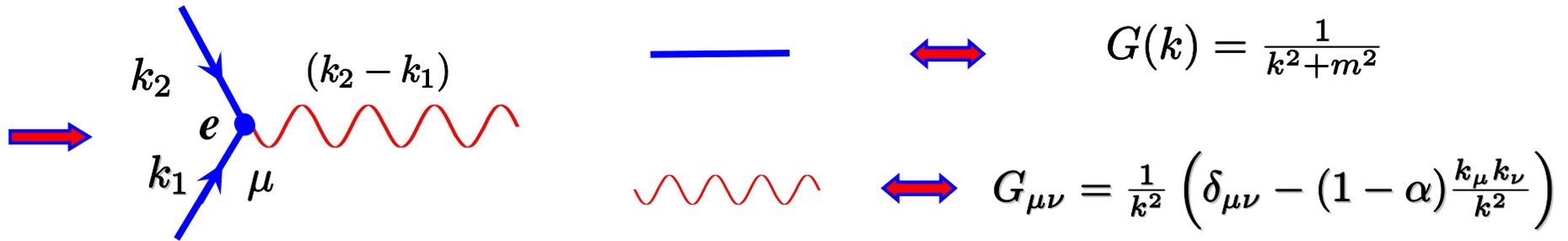
$$\approx \left( 1 + ie \int d^4x \{A_\mu(x) [\phi^*(x)(\partial_\mu\phi(x)) - (\partial_\mu\phi^*(x))\phi(x)] + \dots\} \right) \left( 1 + e^2 \int d^4x \, A_\mu^2(x) |\phi(x)|^2 + \dots \right)$$

**Замечание:** в первом порядка по  $e$ :

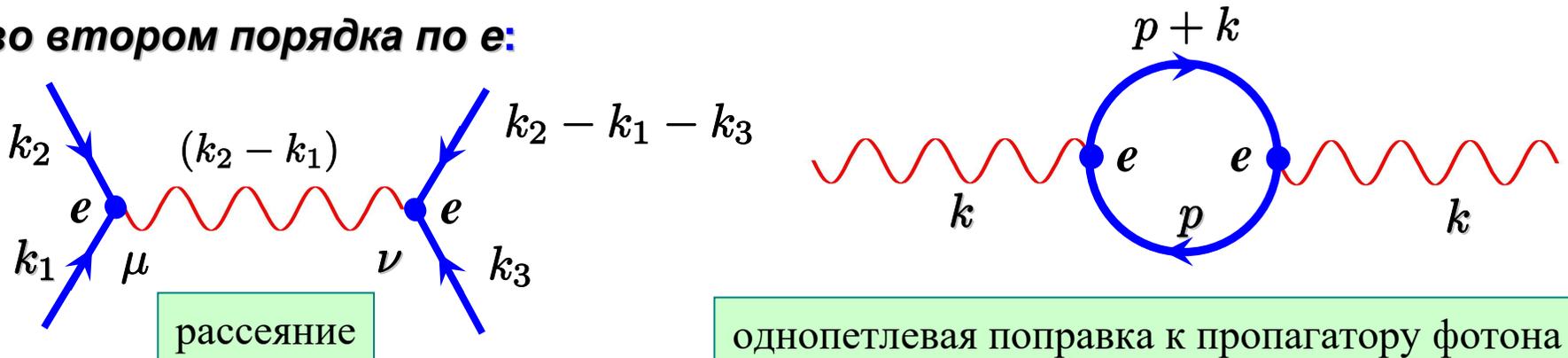
$$e^{-\int d^4x \{ieA_\mu(\phi^*(\partial_\mu\phi) - (\partial_\mu\phi^*)\phi) + e^2 A_\mu^2 |\phi|^2\}} \approx 1 + ie \int d^4x \{A_\mu(x) [\phi^*(x)(\partial_\mu\phi(x)) - (\partial_\mu\phi^*(x))\phi(x)] + \dots\}$$

• **Преобразование Фурье:**

$$\begin{aligned}
 & ie \int d^4x \{ A_\mu(x) [\phi^*(x)(\partial_\mu \phi(x)) - (\partial_\mu \phi^*(x))\phi(x)] = \\
 & = -e \int d^4x \int \frac{d^4k}{2\pi^4} \int \frac{d^4k_1}{2\pi^4} \int \frac{d^4k_2}{2\pi^4} A_\mu(k) \phi^*(k_1) \phi(k_2) (k_2^\mu - k_1^\mu) e^{ix(k+k_2-k_1)} = \\
 & = -e \int \frac{d^4k}{2\pi^4} \int \frac{d^4k_1}{2\pi^4} \int \frac{d^4k_2}{2\pi^4} A_\mu(k) \phi^*(k_1) \phi(k_2) (k_2^\mu - k_1^\mu) \delta(k+k_2-k_1) = \\
 & = -e \int \frac{d^4k_1}{2\pi^4} \int \frac{d^4k_2}{2\pi^4} A_\mu(k_1 - k_2) \phi^*(k_1) \phi(k_2) (k_2^\mu - k_1^\mu)
 \end{aligned}$$

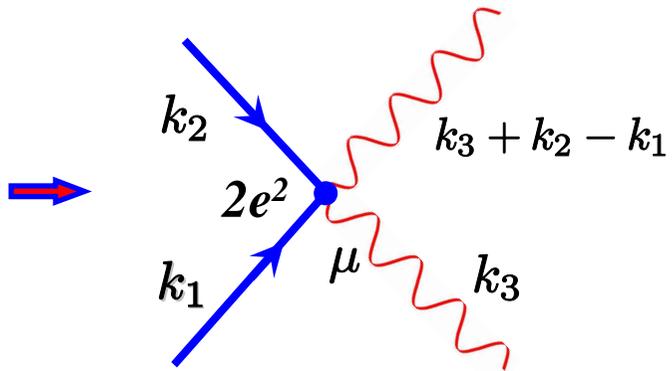


• **во втором порядке по  $e$ :**

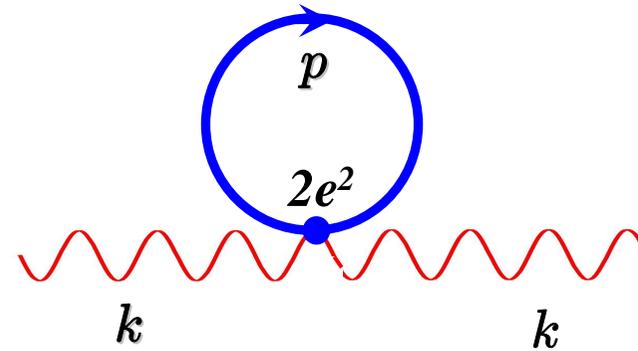


• во втором порядке по  $e$ :

$$A_\mu^2(x)\phi^*(x)\phi(x) = \frac{\delta}{\delta J_\mu^{em}(x)} \frac{\delta}{J_\mu^{em}(x)} \frac{\delta}{\delta J_s(x)} \frac{\delta}{\delta J_s^*(x)} \left( e \int d^4x' A_\mu(x')J_\mu(x') + \phi^*(x')J_s(x') + J_s^*(x')\phi(x') \right) \Big|_{J=0}$$



аннигиляция в 2 фотона



однопетлевая поправка к пропагатору фотона

**Задача:** вычислите вклад «рыбы» и «головастика» в фотонный пропагатор (поляризация вакуума):

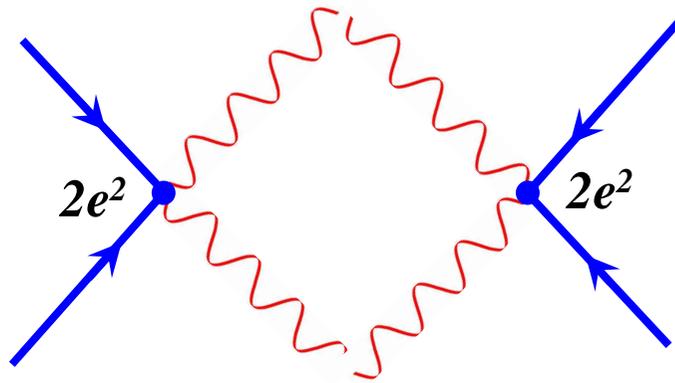
$$G_{\mu\nu}(k) = \text{diagram 1} + \text{diagram 2} + \text{diagram 3}$$

The equation shows the photon propagator  $G_{\mu\nu}(k)$  as a sum of three diagrams. The first diagram is a simple photon propagator with momentum  $k$  and indices  $\mu$  and  $\nu$ . The second diagram is a 'fish' diagram, consisting of a photon line with momentum  $k$  and indices  $\mu$  and  $\nu$  connected to a fermion loop with momentum  $p$ . The third diagram is a 'tadpole' diagram, consisting of a photon line with momentum  $k$  and indices  $\mu$  and  $\nu$  connected to a fermion loop with momentum  $p$ .

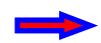
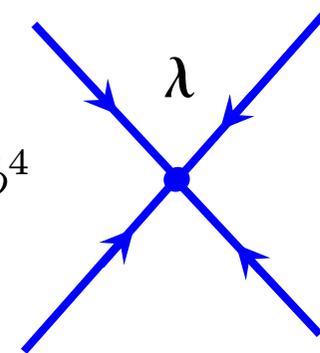
• **Подсказка:** вклад «рыбы» -  $e^2 \int \frac{d^4p}{2\pi^4} \frac{2p_\mu + k_\mu}{p^2 + m^2} \frac{2p_\nu + k_\nu}{(p+k)^2 + m^2}$

вклад «головастика» -  $2e^2 \int \frac{d^4p}{2\pi^4} \frac{\delta_{\mu\nu}}{p^2 + m^2}$

• ...и еще одна диаграмма высшего порядка:



поправка к вершине  $\lambda\phi^4$



• Эффективный потенциал теории  $\lambda\phi^4$  включает поправки  $\sim e^4$

• Действие (Евклид):

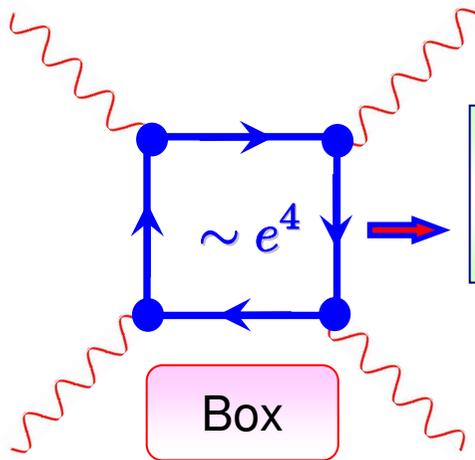
$$S = \int d^4x \left\{ \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + (D_\mu\phi)^*(D_\mu\phi) + m^2(\phi^*\phi) + \frac{\lambda}{3!}(\phi^*\phi)^2 \right\}$$

$$D_\mu\phi = \partial_\mu\phi - ieA_\mu\phi$$

• Производящий функционал:

$$Z = \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\phi^* \mathcal{D}\phi \delta[\partial_\mu A_\mu] \det(-\square) e^{-S[A, \phi^*, \phi]}$$

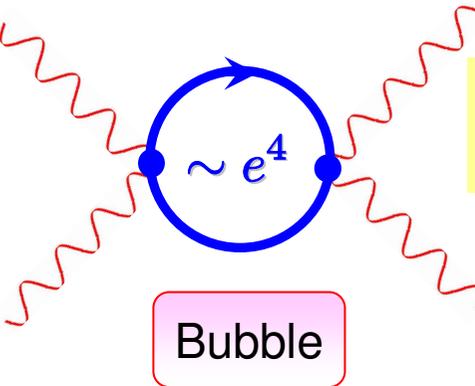
• ...и еще три диаграммы высшего порядка для фотонов:



Box

**Рассеяние света на свете**  
*H.Euler & W.Heisenberg*  
 1936

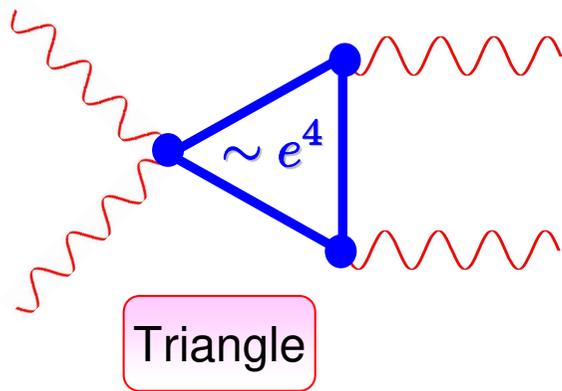
$$\sum_i k_i = 0, \quad k_i^2 = 0$$



Bubble

• **Эффективный лагранжиан скалярной электродинамики включает нелинейные поправки:**

$$L_{eff} = \frac{1}{2}(E^2 - B^2) + \frac{2e^4}{45m^4} [(E^2 - B^2)^2 + 7(E \cdot B)^2] + \dots$$



Triangle

**Фолгерунген аус дер Диракскен Theorie дес Позитронс.**

Von W. Heisenberg und H. Euler in Leipzig.

Mit 2 Abbildungen. (Eingegangen am 22. Dezember 1935.)

Aus der Diracschen Theorie des Positrons folgt, da jedes elektromagnetische Feld zur Paarerzeugung neigt, eine Abänderung der Maxwell'schen Gleichungen des Vakuums. Diese Abänderungen werden für den speziellen Fall berechnet, in dem keine wirklichen Elektronen und Positronen vorhanden sind, und in dem sich das Feld aus Strahlen der Compton-Wellenlänge nur wenig ändert. Es ergibt sich für das Feld eine Lagrange-Funktion:

$$L = \frac{1}{8} (E^2 - B^2) + \frac{e^2}{4c} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial \eta}{\partial t} \left( i \eta^2 (E \cdot B) - \frac{\cos \left( \frac{\eta}{|E_0|} \sqrt{E^2 - B^2 + 2i(E \cdot B)} \right) + \cos \left( \frac{\eta}{|E_0|} \sqrt{E^2 - B^2 + 2i(E \cdot B)} \right) - \cos \left( \frac{\eta}{|E_0|} \sqrt{E^2 - B^2 + 2i(E \cdot B)} \right) - \cos \left( \frac{\eta}{|E_0|} \sqrt{E^2 - B^2 + 2i(E \cdot B)} \right) \right) + |E_0|^2 + \frac{e^2}{8} (E^2 - B^2) \right)$$

(E, B Kraft auf das Elektron.  
 $|E_0| = \frac{m^2 c^3}{e \hbar} = \frac{1}{137} \frac{m c^2}{\hbar} = \text{„Kritische Feldstärke“}$ )

Diese Entwicklungsglieder für (gegen  $|E_0|$ ) kleine Felder beschreiben Prozesse der Streuung von Licht an Licht, deren einfachstes bereits aus einer Störungsrechnung bekannt ist. Für große Felder sind die hier abgeleiteten Feldgleichungen von den Maxwell'schen sehr verschieden. Sie werden mit den von Born vorgeschlagenen verglichen.

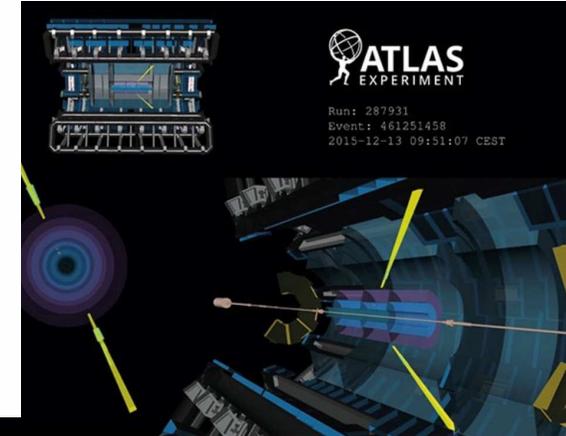
ARTICLES  
 PUBLISHED ONLINE: 14 AUGUST 2017 | DOI: 10.1038/NPHYS4208  
 nature physics  
 OPEN

**Evidence for light-by-light scattering in heavy-ion collisions with the ATLAS detector at the LHC**

ATLAS Collaboration<sup>†</sup>

Light-by-light scattering ( $\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma$ ) is a quantum-mechanical process that is forbidden in the classical theory of electrodynamics. This reaction is accessible at the Large Hadron Collider thanks to the large electromagnetic field strengths generated by ultra-relativistic colliding lead ions. Using  $480 \mu\text{b}^{-1}$  of lead-lead collision data recorded at a centre-of-mass energy per nucleon pair of 5.02 TeV by the ATLAS detector, here we report evidence for light-by-light scattering. A total of 13 candidate events were observed with an expected background of  $2.6 \pm 0.7$  events. After background subtraction and analysis corrections, the fiducial cross-section of the process  $\text{Pb} + \text{Pb} (\gamma\gamma) \rightarrow \text{Pb}^{2+} + \text{Pb}^{2+} \gamma\gamma$ , for photon transverse energy  $E_T > 3$  GeV, photon absolute pseudorapidity  $|\eta| < 2.4$ , diphoton invariant mass greater than 6 GeV, diphoton transverse momentum lower than 2 GeV and diphoton acoplanarity below 0.01, is measured to be  $70 \pm 24$  (stat.)  $\pm 17$  (syst.) nb, which is in agreement with the standard model predictions.

One of the key features of Maxwell's equations is their linearity in both the sources and the fields, from which follows the superposition principle. This forbids effects such as light-by-light (LbL) scattering,  $\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma$ , which is a purely quantum-mechanical process. It was realized in the early history of quantum electrodynamics (QED) that LbL scattering is related to relativistic charged particles can be described by the equivalent photon approximation (EPA)<sup>1,2</sup>, which is schematically shown in Fig. 1b. The EM fields produced by the colliding Pb nuclei can be treated as a beam of quasi-real photons with a small virtuality of  $Q^2 < 1/R^2$ , where  $R$  is the radius of the charge distribution and so  $Q^2 < 10^{-3} \text{ GeV}^2$ . Then, the cross-section for the reaction



# Тождества Уорда-Такахаша

• Производящий функционал скалярной теории:

$$S[\phi, \phi^*] = \int d^4x [(\partial_\mu \phi)^* (\partial^\mu \phi) + m^2 \phi^* \phi]$$

$$Z[J, J^*] = N \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\phi^* e^{-S[\phi, \phi^*] + J^* \phi + J \phi^*}$$

Глобальная U(1) инвариантность действия:  $\phi(x) \rightarrow e^{ie\alpha} \phi(x)$ ,  $\phi^*(x) \rightarrow e^{-ie\alpha} \phi^*(x)$

$$\delta_\epsilon S[\phi, \phi^*] + \delta_\epsilon \left( \int d^4x (J^* \phi + J \phi^*) \right) = \int d^4x (J^* \delta_\epsilon \phi + J \delta_\epsilon \phi^*) = -ie \int d^4x (J^* \phi - J \phi^*)$$

$$\Rightarrow \delta_\epsilon Z[J, J^*] = N \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\phi^* \left[ -ie \int d^4x (J^* \phi - J \phi^*) \right] e^{-S[\phi, \phi^*] + J^* \phi + J \phi^*} = 0$$

Напомним:

$$\begin{cases} \frac{\delta Z[J, J^*]}{\delta J(x)} = N \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\phi^* \phi^*(x) e^{-S[\phi, \phi^*] + J^* \phi + J \phi^*} \\ \frac{\delta Z[J, J^*]}{\delta J^*(x)} = N \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\phi^* \phi(x) e^{-S[\phi, \phi^*] + J^* \phi + J \phi^*} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int d^4x \left( J^*(x) \frac{\delta}{\delta J^*(x)} - J(x) \frac{\delta}{\delta J(x)} \right) Z[J, J^*] = \int d^4x \left( J^*(x) \frac{\delta W}{\delta J^*(x)} - J(x) \frac{\delta W}{\delta J(x)} \right) = 0$$

$$\left. \begin{aligned} \langle \phi(x) \rangle &= \frac{\delta W}{\delta J^*(x)}, & \langle \phi^*(x) \rangle &= \frac{\delta W}{\delta J(x)} \\ \Gamma[\langle \varphi \rangle] &= J \star \langle \varphi \rangle + W[J] \end{aligned} \right\}$$



$$\langle \phi \rangle \star \frac{\delta \Gamma}{\delta \langle \phi \rangle} - \langle \phi^* \rangle \star \frac{\delta \Gamma}{\delta \langle \phi^* \rangle} = 0$$

# Скалярная КЭД: Эффект Коулмена-Вайнберга

Калибровка:  $\partial_\mu A^\mu = 0$        $L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + (D_\mu\phi)^*(D_\mu\phi) - m^2\phi^*\phi + \frac{\lambda}{4!}(\phi^*\phi)^2$

$$D_\mu\phi = \partial_\mu\phi + ieA_\mu\phi, \quad V(|\phi|) = -m^2|\phi|^2 + \frac{\lambda}{4!}|\phi|^4$$

● **Вакуум:**  $A_\mu^{(0)} = 0, \quad |\phi| = \phi_0 = \frac{2\sqrt{3}m}{\sqrt{\lambda}} = \text{const} \quad \Rightarrow \quad m^2 = \frac{2\lambda}{4!}\phi_0^2$

● **Флуктуации над вакуумом:**  $\phi \approx \phi_0 + \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma + i\pi), \quad A_\mu$

**Потенциал флуктуаций:**  $V(|\phi|) \approx -\frac{\lambda}{4!}\phi_0^4 + \frac{2\lambda}{4!}\phi_0^2\sigma^2 + \frac{\sqrt{2}\lambda}{4!}\phi_0(\sigma^2 + \pi^2)\sigma + \frac{1}{4}\frac{\lambda}{4!}(\sigma^2 + \pi^2)^2$

$$(D_\mu\phi)^*(D_\mu\phi) \approx \frac{1}{2}(\partial_\mu\sigma)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\pi)^2 + \sqrt{2}e\phi_0(\partial_\mu\pi)A^\mu + \frac{e}{\sqrt{2}}[\sigma(\partial_\mu\pi) - \pi(\partial_\mu\sigma)]A^\mu + e^2\phi_0^2A_\mu^2 + \sqrt{2}e^2\phi_0\sigma A_\mu^2 + \frac{1}{2}e^2A_\mu^2(\sigma^2 + \pi^2)$$

Калибровка:

**Лагранжиан флуктуаций:**  $L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + e^2\phi_0^2A_\mu^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\sigma)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\pi)^2 + \frac{\lambda}{12}\phi_0^2\sigma^2 + \sqrt{2}e\phi_0(\partial_\mu\pi)A^\mu$

**Члены взаимодействия**

$$\left\{ \begin{aligned} & + \frac{e}{\sqrt{2}}[\sigma(\partial_\mu\pi) - \pi(\partial_\mu\sigma)]A^\mu + \sqrt{2}e^2\phi_0\sigma A_\mu^2 + \frac{e^2}{2}A_\mu^2(\sigma^2 + \pi^2) \\ & + \frac{\sqrt{2}\lambda}{4!}\phi_0(\sigma^2 + \pi^2)\sigma + \frac{1}{4}\frac{\lambda}{4!}(\sigma^2 + \pi^2)^2 \end{aligned} \right.$$

$$L_A = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + e^2\phi_0^2 A_\mu^2, \quad L_\pi = \frac{1}{2}(\partial_\mu\pi)^2, \quad L_\sigma = \frac{1}{2}(\partial_\mu\sigma)^2 + \frac{\lambda}{12}\phi_0^2\sigma^2$$

Векторное поле  $A_\mu$  - массивное поле Прока (3 степени свободы),  $m_A = \sqrt{2}e\phi_0$

Скалярное поле  $\sigma$  - массивное,  $m_\sigma = \sqrt{\frac{\lambda}{6}}\phi_0 = \sqrt{2}m$

Скалярное поле  $\pi$  - безмассовое,  $m_\pi = 0$

• Интегрирование по калибровочному полю:

$$S_A = \frac{1}{2} \int d^4x A_\mu \{ (\delta_\nu^\mu \square + 2e^2\phi_0^2 - \cancel{\partial^\mu\partial_\nu} \} A^\nu =$$

Калибровка

Проекционный оператор

$$= S_{A_\perp} = \frac{1}{2} \int d^4x A_\mu \{ (\square + 2e^2\phi_0^2) \left( \delta_\nu^\mu - \frac{\partial^\mu\partial_\nu}{\square} \right) \} A^\nu$$

$$P_\perp = \delta_\nu^\mu - \frac{\partial^\mu\partial_\nu}{\square}, \quad P_\perp^2 = P_\perp$$

$$P_\perp(k) = \delta_\nu^\mu - \frac{k^\mu k_\nu}{k^2}$$

$$\int \mathcal{D}A e^{-S_A} \rightarrow \int \mathcal{D}A_\perp e^{-S_{A_\perp}} = \det(\square + 2e^2\phi_0^2)^{-3/2}$$

• Интегрирование по массивному скалярному полю:

$$S_\sigma = \frac{1}{2} \int d^4x \sigma \{ (\square + 2m^2) \} \sigma$$

$$\int \mathcal{D}\sigma e^{-S_\sigma} = \det(\square + 2m^2)^{-1/2}$$

• **Общая формула для эффективного потенциала в одной петле:**

$$\Delta V_{eff}(\phi) = \frac{m^4(\phi)}{26\pi^2} \left( \ln \frac{m^2(\phi)}{M^2} - \frac{1}{2} \right) \quad M \rightarrow Me^{1/2}, \quad \Delta V_{eff}(\phi) \rightarrow \frac{m^4(\phi)}{26\pi^2} \ln \frac{m^2(\phi)}{M^2}$$

$$\rightarrow \Delta V_{eff}(A_{\perp}, \sigma) = \frac{1}{26\pi^2} \left[ 3(2e^2\phi_0^2)^2 \ln \frac{2e^2\phi_0}{M^2} + 4m^4 \ln \frac{m^2}{M^2} \right]$$

$$V_{eff}(\phi) = \frac{\lambda}{4!} \phi^4 - \cancel{m^2} \phi^2 + \frac{1}{26\pi^2} \left[ 3(2e^2\phi^2)^2 \ln \frac{2e^2\phi^2}{M^2} + 4\cancel{m^4} \ln \frac{m^2}{M^2} \right]$$

**Безмассовый предел**  $m = 0$

Эффективный потенциал  
скалярной электродинамики

$$V_{eff}(\phi) = \frac{\lambda}{4!} \phi^4 + \frac{3e^4}{16\pi^2} \phi^4 \ln \frac{2e^2\phi^2}{M^2}$$

• **Минимум потенциала:**

$$\frac{\partial V_{eff}}{\partial \phi^2} = \frac{\lambda}{12} \phi^2 + \frac{3e^4}{16\pi^2} \left( 2\phi^2 \ln \frac{2e^2\phi^2}{M^2} + \phi^2 \right) = 0$$

Минимум нетривиален, если  $\lambda \sim e^4$

$$\rightarrow \ln \frac{2e^2\phi^2}{M^2} = -\frac{1}{2} - \frac{4\lambda\pi^2}{9e^4}$$

На масштабе  $M = m_A = \sqrt{2}e\langle\phi\rangle$ ,

$$\lambda = -\frac{9e^4}{8\pi^2}$$

Потенциал  
Коулмена-Вайнберга 
$$U_{eff} = \frac{3e^4}{16\pi^2} \phi^4 \left( \ln \frac{\phi^2}{\langle\phi\rangle^2} - \frac{1}{2} \right)$$

# Эффект Коулмена-Вайнберга: Унитарная калибровка

Унитарная калибровка:  $\phi \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\rho(x)e^{i\theta(x)}$ ,  $A_\mu(x) \rightarrow \tilde{A}_\mu = A_\mu(x) + \frac{1}{e}\partial_\mu\theta(x)$

$$Z \rightarrow Z = \int \mathcal{D}\tilde{A}\mathcal{D}\rho\mathcal{D}\theta \rho \delta[\partial_\mu\tilde{A}_\mu - \frac{1}{e}\square\theta] \underline{\det(-\square)} e^{-S[\tilde{A},\rho]}$$

**Замечание 1:** скалярное поле  $\rho(x)$  - действительное

$$\Rightarrow S = \int d^4x \left\{ \frac{1}{4}\tilde{F}_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\rho)^2 + \frac{1}{2}m^2\rho^2 + \frac{1}{2}e^2\rho^2\tilde{A}_\mu^2 + \frac{\lambda}{4!}\rho^4 \right\}$$

**Замечание 2:** действие не зависит от переменной  $\theta(x)$  – соответствующая калибровочная степень свободы в мере интеграла  $Z$  может быть отинтегрирована

**Напомним:**  
Вставка единицы

$$1 = \int \mathcal{D}\theta \delta(G(\tilde{A})) \det\left(\frac{\delta G(\tilde{A})}{\delta\theta}\right) \Rightarrow \int \mathcal{D}\theta \delta[\partial_\mu\tilde{A}_\mu - \frac{1}{e}\square\theta] = \underline{\frac{\det e}{\det(-\square)}}$$

Вклад духов сокращается

$$\det e = \prod_x e$$

**Замечание 3:** векторное поле  $\tilde{A}(x)$  - массивное поле Прока (3 степени свободы)

$$L_{\tilde{A}} = \frac{1}{4}\tilde{F}_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2}e^2\rho^2\tilde{A}_\mu^2 \Rightarrow S = \frac{1}{2} \int d^4x A_\mu \{ (-\delta_{\mu\nu} \square + e^2\rho^2) - \partial_\mu\partial_\nu \} A_\nu$$

# Heat kernel

**Напомним:**  $e^{-W} = \det[-\square + m^2(\psi)]^{-1/2} = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi e^{-\frac{1}{2} \int d^4x \phi[-\square + m^2(\psi)]\phi}$

$\psi$  – внешнее (фоновое) поле

→  $W = \frac{1}{2} \ln \det[-\square + m^2(\psi)] = \text{Tr} \ln[-\square + m^2(\psi)]$

•  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{ds}{s} e^{-sx} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (-Ei[-\epsilon x]) = \infty + \ln x$

*Интегральная показательная функция*

• **Обозначим**

$$\text{Tr} e^{-s[-\square + m^2(\psi)]} = \int d^4x G(x, x'; s), \quad G(x, x'; s) := \langle x | e^{-s[-\square + m^2(\psi)]} | x' \rangle$$

$G(x, x'; s)$  - функция Грина уравнения диффузии в d=5

$$[\partial_s - \square_x + m^2(\psi)]G(x, x'; s) = \delta(s)\delta^4(x - x'); \quad G(x, x'; 0) = \delta^4(x - x')$$

→  $G(x, x') = \frac{e^{-m^2(\psi)s}}{16\pi^2 s^2} e^{-\frac{(x-x')^2}{4s}}, \quad W = \frac{1}{2} \int_{\epsilon:=\Lambda^{-2}}^{\infty} \frac{ds}{s} \int d^4x G(x, x'; s)$

$$W = \frac{1}{32\pi^2} \int d^4x \int_{\Lambda^{-2}}^{\infty} \frac{ds}{s^3} e^{-m^2(\psi)s} = \frac{1}{64\pi^2} \left[ \Lambda^4 m^4(\psi) \ln \frac{m^2(\psi)}{\Lambda^2} \right] + \dots$$

**Потенциал  
Коулмена-  
Вайнберга**

# Модель $\phi^4$ в 1+1 измерениях: Кинк

$$L = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \lambda(\phi^2 - a^2)^2, \quad E = \int dx \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial\phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial\phi}{\partial x} \right)^2 + \lambda(\phi^2 - a^2)^2 \right\}$$

Условие минимальной энергии:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \pm\sqrt{2\lambda}(\phi^2 - a^2) \Rightarrow x - x_0 = \pm\frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \int \frac{d\phi}{\phi^2 - a^2} = \pm\frac{2}{m} \operatorname{arctanh} \frac{\phi}{a}$$

$$m^2 = 8\lambda a^2$$

Кинк (антикинк):

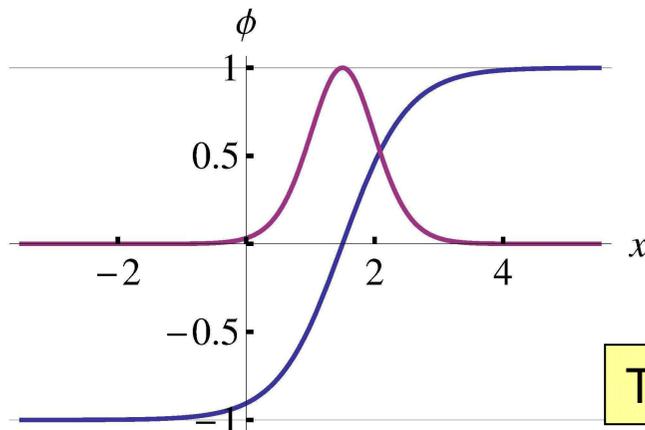
$$\phi_K = a \tanh \frac{1}{2} m(x - x_0); \quad \phi_{\bar{K}} = -a \tanh \frac{1}{2} m(x - x_0)$$

Плотность энергии:

$$\mathcal{E} = \frac{m^4}{32\lambda} \frac{1}{\cosh^4[\frac{1}{2}m(x-x_0)]}$$

Масса кинка:

$$M = \int \mathcal{E} dx = \frac{m^3}{12\lambda}$$



Топологический заряд:

$$Q = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{1}{2} [\phi(\infty) - \phi(-\infty)]$$

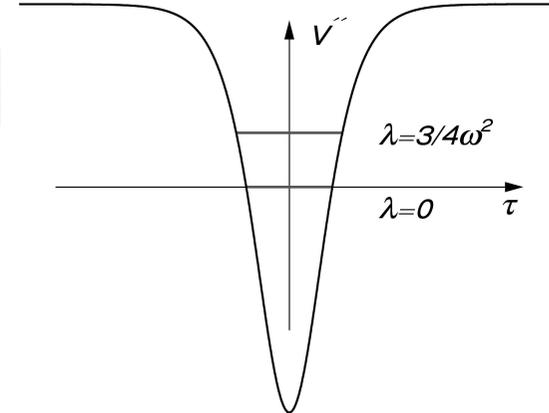
Топологический ток:

$$J_\mu = \frac{1}{2\pi} \varepsilon_{\mu\nu} \partial^\nu \phi, \quad \partial^\mu J_\mu \equiv 0$$

# Возбуждения на фоне $\phi^4$ кинка

$$\phi(x, t) = \phi_k(x) + \xi(x)e^{i\omega t}$$

Пешль-Теллер, again



$$\left( -\frac{d^2}{dx^2} + 4m^2 - \frac{6m^2}{\cosh^2 \frac{x}{2}} \right) \xi = \omega^2 \xi$$

нулевая мода,  $\omega_0=0$  :

$$\xi_0^{(n)}(x) = \frac{1}{\cosh^2 \left( \frac{m(x-x_0)}{2} \right)}$$

локализованная мода,  $\omega_1 = \frac{\sqrt{3}m}{2}$

$$\xi_1 = \frac{\sinh \left( \frac{mx}{2} \right)}{\cosh^2 \left( \frac{mx}{2} \right)}$$

непрерывный спектр:  $\omega_n = \sqrt{k_n^2 + m^2}$

$$\xi_k = e^{ikx} \left\{ \frac{3m^2}{2} \tanh^2 \frac{mx}{2} - \frac{m^2}{2} - 2k^2 - 3imk \tanh \frac{mx}{2} \right\}$$

# Квантовые поправки к массе $\phi^4$ кинка

„There is nothing as classical field theory in Nature“ E. Weinberg

## Тривиальный вакуум:

$$\phi \approx a + \delta\phi, \quad V \approx 4\lambda a^2 (\delta\phi)^2, \quad [\partial^\mu \partial_\mu + m^2] \delta\phi = 0, \quad m^2 = V'' = 8\lambda a^2$$

Возбуждения вакуума:  $\omega^{vacuum} = m$

## Квантовые поправки на фоне кинка: $\omega_0 = 0, \quad \omega_1 = \frac{\sqrt{3}m}{2}, \quad \omega_n = \sqrt{k_n^2 + m^2}$

$$E = M_{cl} + \left( \frac{1}{2} \sum \omega_i^{kinck} - \frac{1}{2} \sum \omega_i^{vacuum} \right) = \frac{m^3}{12\lambda} + \frac{1}{2} (0 - m) + \frac{1}{2} \left( \frac{\sqrt{3}m}{2} - m \right) +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \left[ \underbrace{\sqrt{k_n^2 + m^2}}_{\text{КИНК}} - \underbrace{\sqrt{(k_n^{(0)})^2 + m^2}}_{\text{ВАКУУМ}} \right]$$

## Моды континуума: $\xi_k = e^{ikx} \left\{ \frac{3m^2}{2} \tanh^2 \frac{mx}{2} - \frac{m^2}{2} - 2k^2 - 3imk \tanh \frac{mx}{2} \right\}$

$$\xi(-\infty) = e^{ikx} (m^2 - 2k^2 - 3imk) = e^{ikx} (m - ik)(m - 2ik) \quad \left. \vphantom{\xi(-\infty)} \right\} \quad \xi(-\infty) = e^{i\delta_k} \xi(\infty)$$

$$\xi(\infty) = e^{ikx} (m^2 - 2k^2 + 3imk) = e^{ikx} (m + ik)(m + 2ik)$$

$$e^{i\delta_k} = \frac{(ik + m)(ik + 2m)}{(ik - m)(ik - 2m)}$$

$$e^{i\delta_k} = \frac{(ik + m)(ik + 2m)}{(ik - m)(ik - 2m)}$$

**Замечание:**  $\operatorname{arctg} x = \frac{i}{2} \ln \left( \frac{i + x}{i - x} \right)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 2 \operatorname{arctg} \frac{k}{m} + 2 \operatorname{arctg} \frac{k}{2m} &= i \ln \left( \frac{i + \frac{k}{m}}{i - \frac{k}{m}} \right) + i \ln \left( \frac{i + \frac{k}{2m}}{i - \frac{k}{2m}} \right) = \\ &= i \ln \left( \frac{(im + k)(2im + k)}{(im - k)(2im - k)} \right) = -i \ln \left( \frac{(ik + m)(ik + 2m)}{(ik - m)(ik - 2m)} \right) = -i \ln(e^{i\delta_k}) = \delta_k \end{aligned}$$

**Дискретизация:**  $x \in [-L, L]$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \rightarrow L; & \chi_k \rightarrow \sin(kL + \delta_k) \\ x \rightarrow -L; & \chi_k^{\text{vacuum}} \rightarrow \sin(kL) \end{cases}$$

$$k_n L + \delta_k = \pi n, \quad k_n = \frac{\pi n}{L} - \frac{\delta_k}{L} = k_n^{(0)} - \frac{\delta_k}{L}$$

**Вакуумные моды**

$$L \gg 1$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} \left[ \sqrt{k_n^2 + m^2} - \sqrt{\left(k_n^{(0)}\right)^2 + m^2} \right] &= \frac{1}{L} \sum \sqrt{k_0^2 + m^2} \left( \frac{-k_n^{(0)} \delta_k}{k_n^2 + m^2} \right) + O(1/L^2) \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} dk \frac{k \delta_k}{\sqrt{k^2 + m^2}} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} dk \left[ \frac{d}{dk} \left( \sqrt{k^2 + m^2} \delta_k \right) - \sqrt{k^2 + m^2} \frac{d\delta_k}{dk} \right] = \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \sqrt{k^2 + m^2} \delta_k \Big|_0^\infty - \frac{m}{2\pi} \int_0^\Lambda dk \sqrt{k^2 + m^2} \left[ \frac{2}{k^2 + m^2} + \frac{1}{k^2 + \frac{m^2}{4}} \right]$$

$$\delta_k = 2 \operatorname{arctg} \frac{k}{m} + 2 \operatorname{arctg} \frac{k}{2m} = 2 \operatorname{arctg} \frac{3km}{2m^2 - k^2}$$

для функции  $\operatorname{arctg} x$  выбираем ветви, для которых  $\delta_{0+} = 2\pi$ ,  $\delta_\infty = 0$

$$\Rightarrow \delta(k \rightarrow \infty) \sim \frac{6m}{k}, \quad \delta_k = -\delta_{-k} \quad \text{скачок в 0!}$$

$$E = M_{cl} + \left( \frac{1}{2} \sum \omega_i^{kink} - \frac{1}{2} \sum \omega_i^{vacuum} \right) = \frac{m^3}{12\lambda} + \frac{1}{2} (0 - m) + \frac{1}{2} \left( \frac{\sqrt{3}m}{2} - m \right) +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{n=2}^\infty \left[ \sqrt{k_n^2 + m^2} - \sqrt{(k_n^{(0)})^2 + m^2} \right] = \frac{m^3}{12\lambda} + \frac{\sqrt{3}m}{4} - m +$$

$$+ m - \frac{3m}{2\pi} - \frac{m}{4\pi} \int_0^\Lambda dk \sqrt{k^2 + m^2} \left[ \frac{2}{k^2 + m^2} + \frac{1}{k^2 + \frac{m^2}{4}} \right] =$$

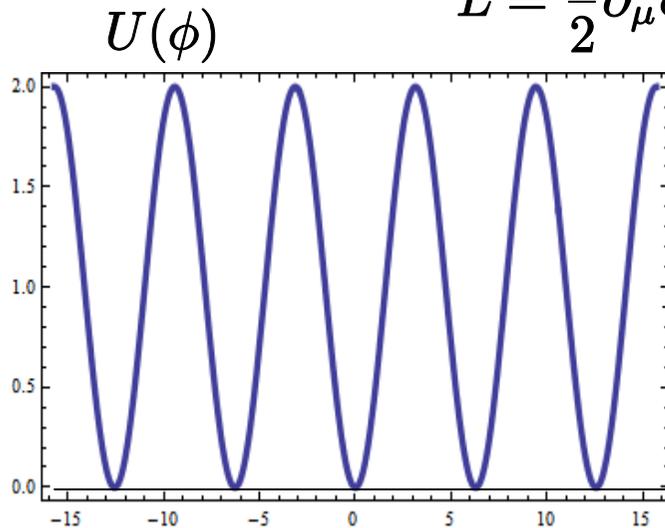
$$= M_{cl} + \frac{\sqrt{3}m}{4} - \frac{3m}{2\pi} + \text{log divergent terms}$$

$$\Delta M = m \left( \frac{\sqrt{3}}{12} - \frac{3}{8\pi} \right)$$

+ перенормировка,  
+ вычисление диаграмм  
= квантовая поправка

# Модель sin-Gordon

$$L = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - U(\phi); \quad U(\phi) = 1 - \cos \phi$$



Уравнения поля:

Симметрия:

$$\phi_{tt} - \phi_{xx} + \sin \phi = 0$$

$$\phi \rightarrow \phi \pm 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Статический кинк: поле  $\phi(x)$  интерполирует между

$$\phi(-\infty) = 0, \quad \phi(\infty) = 2\pi$$

• **Уравнение:**  $\phi_{xx} = \sin \phi$  | X множитель  $\frac{d\phi}{dx}$

$$\frac{1}{2} \left( \frac{d\phi}{dx} \right)^2 = -\cos \phi + C$$

Граничное условие:  $\phi_x \rightarrow 0$  as  $x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow C = 1$

Уравнение движения псевдочастицы в периодическом потенциале

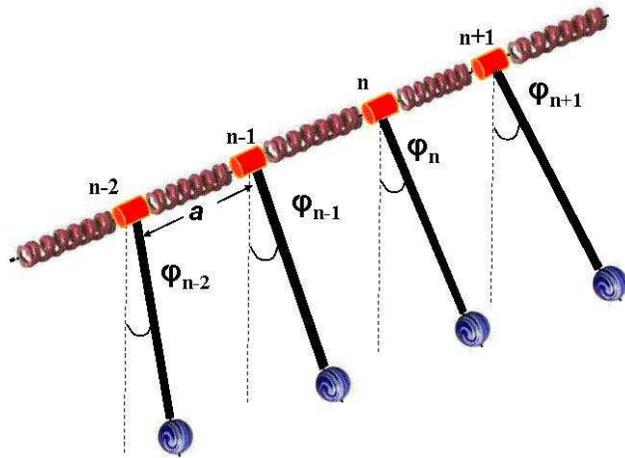
• **Разделение переменных:**

$$x - x_0 = \pm \int \frac{d\phi}{\sqrt{2(1 - \cos \phi)}} = \pm \int \frac{d\phi}{2 \sin(\phi/2)} = \int d(\ln \tan \frac{\phi}{4})$$

• **Решение (кинк):**  $\phi = \pm 4 \arctan \exp(x - x_0)$

Буст кинка:  $x \rightarrow \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}}$

# Sine-Gordon model: playing with the kinks



By courtesy of Patrick Dorey

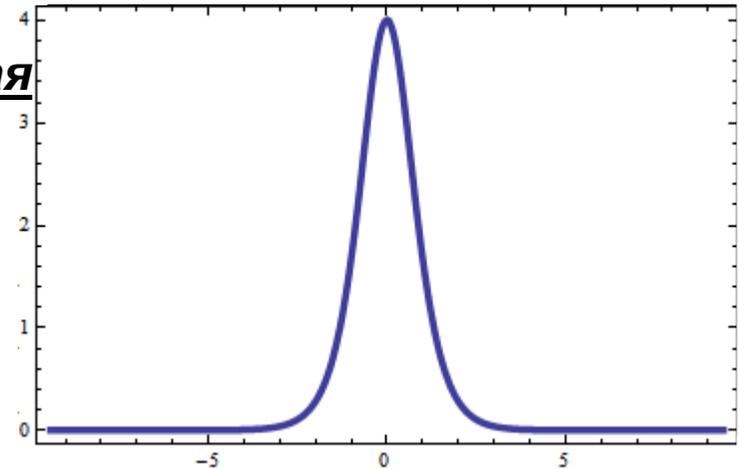
# Sine-Gordon: скалярная теория

- Заметим:**
- Поле  $\phi(x)$  не стремится к 0 при  $x \rightarrow \pm\infty$
  - Амплитуда SG кинка не зависит от его скорости
  - SG кинк - **топологический солитон**
  - Модель SG полностью **интегрируемая**
  - Модель SG релятивистская

При малых  $\phi(x)$   $1 - \cos \phi \approx \frac{\phi^2}{2} + \frac{\phi^4}{4} + \dots$

Модель  $\phi^4$

$$L = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - (\phi^2 - 1)^2$$



SG кинк:

$$\phi_{K\bar{K}} = \pm 4 \arctan(e^{-x+x_0})$$

Плотность энергии:

$$\mathcal{E} = \frac{4}{\cosh^2(x-x_0)}$$



Масса кинка:

$$M = \int \mathcal{E} dx = 8$$

Топологический ток:

$$J_\mu = \frac{1}{2\pi} \varepsilon_{\mu\nu} \partial^\nu \phi, \quad \partial^\mu J_\mu \equiv 0 \rightarrow \text{не по теореме Нетер!}$$

Топологический заряд:

$$Q = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\partial \phi}{\partial x} - n\text{-кратное покрытие интервала } [0, 2\pi]$$

# Уравнение sin-Gordon: Light cone координаты

- Координаты светового конуса:

$$\downarrow \quad x_{\pm} = \frac{1}{2}(x \pm t) \quad \partial_x = \frac{1}{2}\partial_+ + \frac{1}{2}\partial_-; \quad \partial_t = \frac{1}{2}\partial_+ - \frac{1}{2}\partial_-$$

$$\partial_t^2 - \partial_x^2 = -\partial_- \partial_+ \quad \text{SG уравнение в координатах } x_{\pm} : \quad \partial_- \partial_+ \phi = \sin \phi$$

- Геометрическая интерпретация: 1<sup>я</sup> фундаментальная форма двумерной поверхности параметризованной координатами  $x_{\pm}$  :

$$ds^2 = dx_-^2 + dx_+^2 + 2 \cos \phi dx_- dx_+$$

$\phi$  - угол между асимптотами  $x_- = const; \quad x_+ = const$

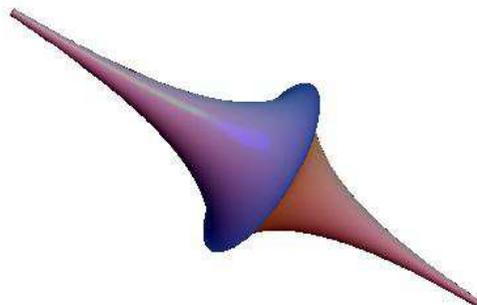
- 2<sup>я</sup> фундаментальная форма :  $\mathbb{I} = \sin \phi dx_- dx_+$

- Уравнение гауссовой кривизны  $K$ :  $\partial_- \partial_+ \phi + K \sin \phi = 0$

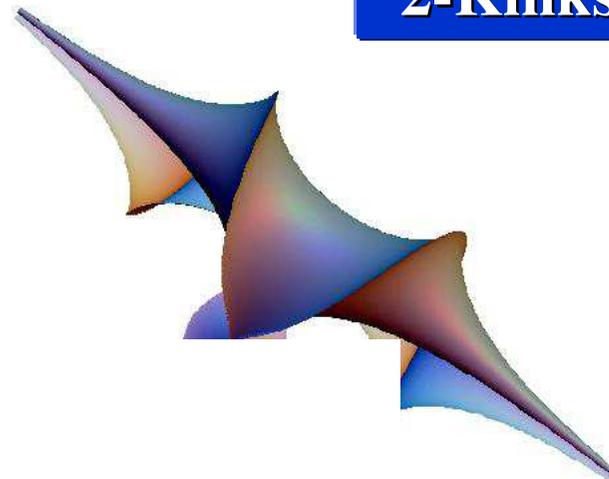
Уравнение sin-Gordon геометрически представляет условие соответствия первой и второй фундаментальных форм поверхности:  $K=-1$

# Псевдосферические поверхности отрицательной кривизны $K = -1$

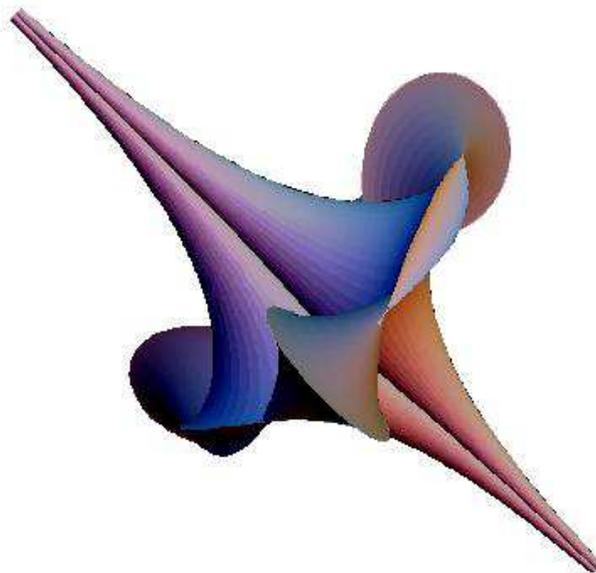
1-Kink



2-Kinks



Breather



# Модель sin-Gordon как интегрируемая теория

**Преобразование Бэклунда (1880):** если имеется какое-то решение интегрируемой теории, даже тривиальное, то существует алгебраическое преобразование этого решения в новое нетривиальное решение.

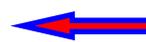
● **Пример I:** Уравнение Лапласа в 2d  $\Delta u(x, y) = (\partial_x^2 + \partial_y^2)u = 0$

Рассмотрим другое такое уравнение для новой функции  $v(x, y)$  :

$$\Delta v(x, y) = (\partial_x^2 + \partial_y^2)v = 0$$

**Замечание:** функции  $u(x, t)$  и  $v(x, t)$  не являются независимыми:

$$\partial_x u = \partial_y v; \quad \partial_y u = -\partial_x v$$



**Преобразование Бэклунда**

Действительно,  $\partial_x(\partial_x u) = \partial_x(\partial_y v)$ ,  $\partial_y(\partial_y u) = -\partial_y(\partial_x v)$ , сумма этих двух уравнений воспроизводит первое из уравнений Лапласа

Подстановка тривиального решения  $v(x, y) = xy$  в преобразование Бэклунда :

  $u_x = x; \quad u_y = -y \quad \text{i.e.} \quad u = \frac{1}{2} (x^2 - y^2)$

# Преобразование Бэклунда в теории sG

Уравнение sG:

$$\partial_- \partial_+ \phi = \sin \phi$$

• Рассмотрим пару уравнений:

$$\partial_+ \psi = \partial_+ \phi - 2\lambda \sin\left(\frac{\phi + \psi}{2}\right), \quad \partial_- \psi = -\partial_- \phi + \frac{2}{\lambda} \sin\left(\frac{\phi - \psi}{2}\right)$$



$$\partial_- \partial_+ \psi = \partial_- \partial_+ \phi - 2 \cos\left(\frac{\phi + \psi}{2}\right) \sin\left(\frac{\phi - \psi}{2}\right) = \partial_- \partial_+ \phi + \sin \phi - \sin \psi$$

If  $\partial_- \partial_+ \phi = \sin \phi$ , then  $\partial_- \partial_+ \psi = \sin \psi$

**Homework: Prove it!**

• Стартуем с тривиального вакуумного решения:  $\phi=0$

$$\partial_+ \psi = -2\lambda \sin(\psi/2); \quad \partial_- \psi = -2\lambda^{-1} \sin(\psi/2) \quad \Rightarrow \quad \psi = 4 \arctan\left[\exp\left(-\lambda x_+ - \frac{x_-}{\lambda}\right)\right]$$

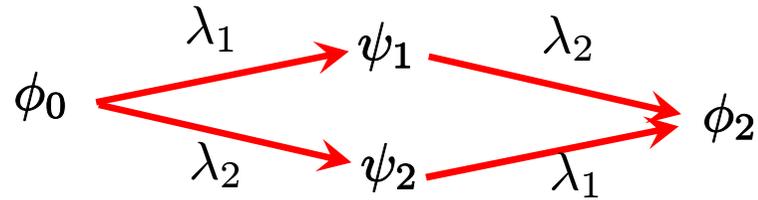
• Возвращаемся к обычным координатам:  $\lambda x_+ + \lambda^{-1} x_- = \pm \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}}$  где  $v = \frac{1 - \lambda^2}{1 + \lambda^2}$

Решение для движущегося кинка:

$$\phi_{K\bar{K}} = \pm 4 \arctan\left(e^{\pm \frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2}}}\right)$$

# Преобразование Бэклунда в модели sG

• sG 2х солитонное решение:



Два последовательных sG преобразования тривиального решения ( $\phi_0=0$ )

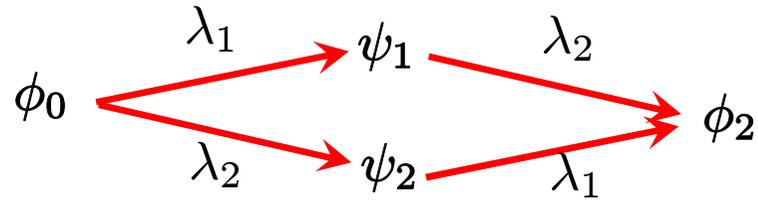
$$\left\{ \begin{array}{l}
 \partial_+ \psi_1 = -2\lambda_1 \sin\left(\frac{\psi_1}{2}\right), \quad \partial_- \psi_1 = -\frac{2}{\lambda_1} \sin\left(\frac{\psi_1}{2}\right) \\
 \partial_+ \psi_2 = -2\lambda_2 \sin\left(\frac{\psi_2}{2}\right), \quad \partial_- \psi_2 = -\frac{2}{\lambda_2} \sin\left(\frac{\psi_2}{2}\right) \\
 \partial_+ \phi_2 - \partial_+ \psi_1 = -2\lambda_2 \sin\left(\frac{\psi_1 + \phi_2}{2}\right), \quad \partial_- \phi_2 + \partial_- \psi_1 = \frac{2}{\lambda_2} \sin\left(\frac{\psi_1 - \phi_2}{2}\right) \\
 \partial_+ \phi_2 - \partial_+ \psi_2 = -2\lambda_1 \sin\left(\frac{\psi_2 + \phi_2}{2}\right), \quad \partial_- \phi_2 + \partial_- \psi_2 = \frac{2}{\lambda_1} \sin\left(\frac{\psi_2 - \phi_2}{2}\right)
 \end{array} \right.$$

$\lambda_1 \sin \frac{1}{4} (\psi_2 - \psi_1 - \phi_2) = \lambda_2 \sin \frac{1}{4} (\psi_1 - \psi_2 - \phi_2)$

$$\tan\left(\frac{\phi_2}{4}\right) = \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}\right) \tan\left(\frac{\psi_2 - \psi_1}{4}\right)$$

# Преобразование Бэклунда в модели sG

• sG 2х солитонное решение:



Убираем производные из двух последовательных sG преобразований, получим ( $\phi_0=0$ )

$$\tan\left(\frac{\phi_2}{4}\right) = \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}\right) \tan\left(\frac{\psi_2 - \psi_1}{4}\right)$$

**Напомним:**

$$\psi_{1,2} = 4 \arctan e^{\theta_{1,2}} \quad \theta_{1,2} = \frac{1}{2} (\lambda_i x + \lambda_i^{-1} t + C_i) \quad \downarrow$$

2 односолитонных решения

$$\phi_2 = 4 \arctan \left( \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) \frac{e^{\theta_1} - e^{\theta_2}}{1 + e^{\theta_1 + \theta_2}}$$

2х солитонное решение

• Асимптотика:  $\theta_2 \gg 1 \rightarrow \frac{e^{\theta_1} - e^{\theta_2}}{1 + e^{\theta_1 + \theta_2}} \rightarrow \frac{e^{\theta_1}/e^{\theta_2} - 1}{e^{-\theta_2} + e^{\theta_1}} \sim -e^{-\theta_1}$

• Симметричное 2-кинковое решение (лобовое столкновение, одинаковые скорости):

$$\lambda_2 = -\frac{1}{\lambda_1}; \quad v = \frac{1 - \lambda_1^2}{1 + \lambda_1^2}, \quad \lambda_1 > 0$$

$$\phi_2 = 4 \arctan \left[ \frac{v \sinh \frac{x}{\sqrt{1-v^2}}}{\cosh \frac{vt}{\sqrt{1-v^2}}} \right]$$

Топологический заряд:

$$Q = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\partial \phi_2}{\partial x} = 2$$

# Модель sG : 2-солитонные решения

● **KK-collision**  
 $v=0.8$

$$\phi_2 = 4 \arctan \left[ \frac{v \sinh \frac{x}{\sqrt{1-v^2}}}{\cosh \frac{vt}{\sqrt{1-v^2}}} \right]$$

● **K $\bar{K}$ -collision**  
 $v=0.8$

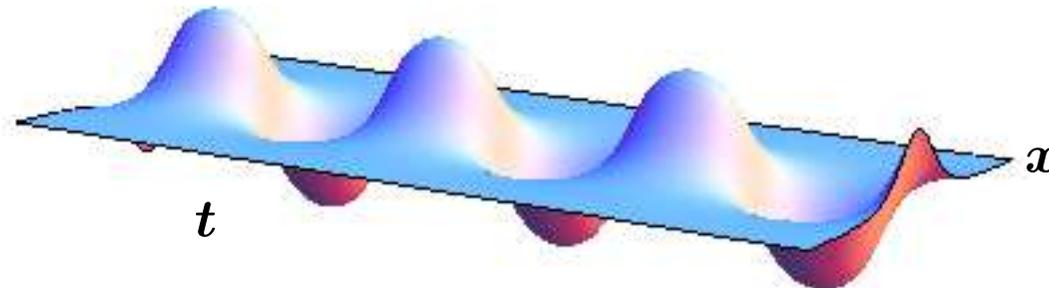
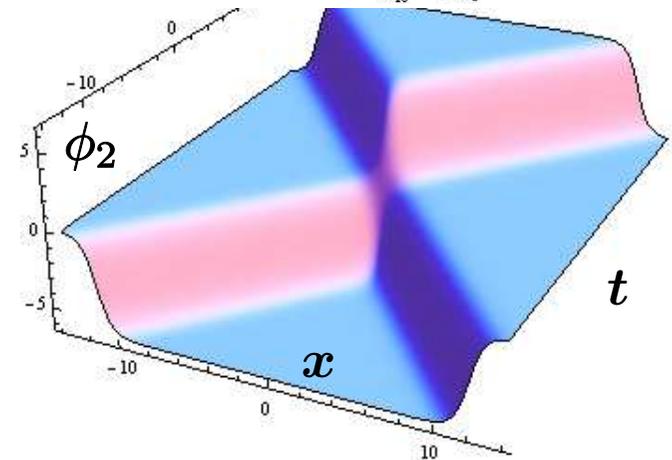
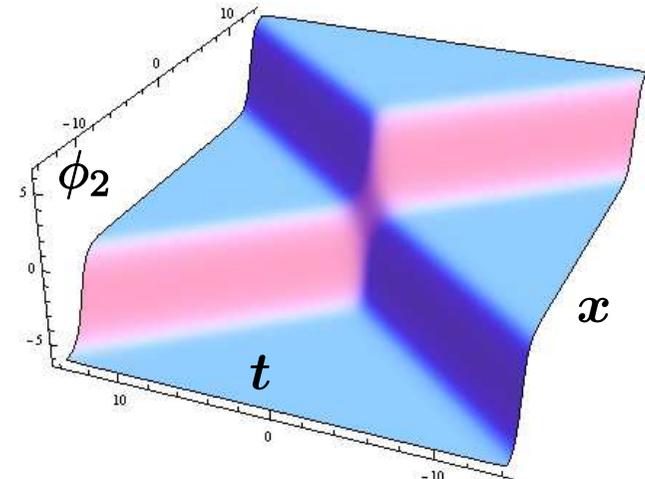
$$\lambda_2 = \frac{1}{\lambda_1}; \quad v = \frac{1 - \lambda_1^2}{1 + \lambda_1^2}, \quad \lambda_1 > 0$$

$$\phi_2 = 4 \arctan \left[ \frac{\sinh \frac{vt}{\sqrt{1-v^2}}}{v \cosh \frac{x}{\sqrt{1-v^2}}} \right]$$

● **Breather:**

$$v = \frac{i\omega}{\sqrt{1-\omega^2}}$$

$$\phi_2 = 4 \arctan \left[ \frac{\sqrt{1-\omega^2}}{\omega} \frac{\sin \omega t}{\cosh \sqrt{1-\omega^2} x} \right]$$

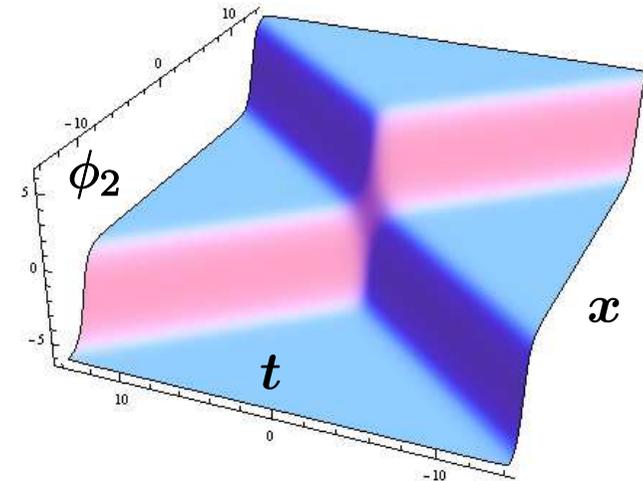


# Модель sG: 2-солитонные решения

## ● KK-collision

$$\phi_2 = 4 \arctan \left[ \frac{\sinh \gamma vt}{v \cosh \gamma x} \right]; \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$$

$$= 4 \tan^{-1} \left[ \frac{e^{\gamma vt - \ln v} - e^{-\gamma vt - \ln v}}{e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}} \right]$$



Асимптотика:  $t \rightarrow -\infty$

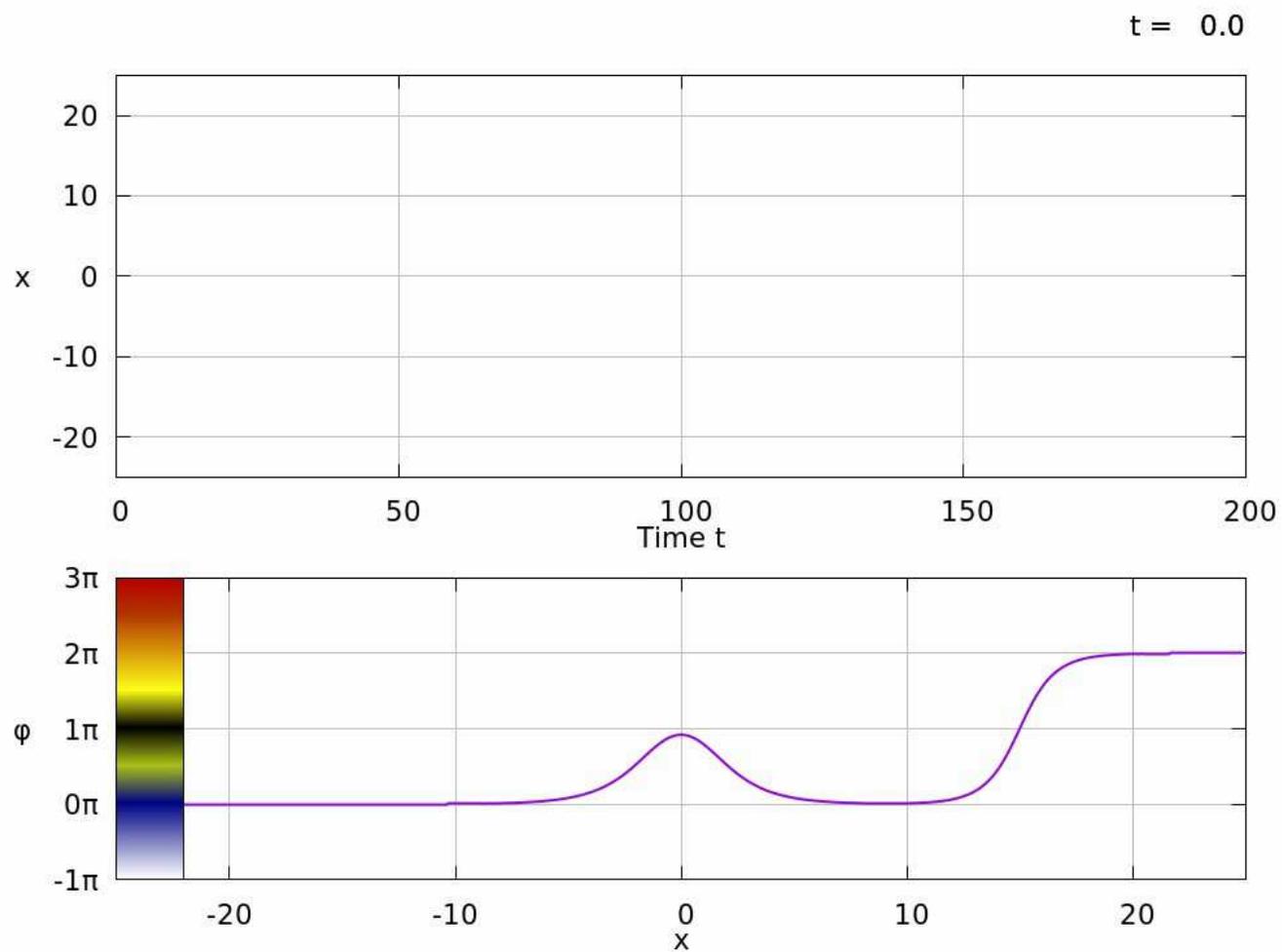
$$\rightarrow \phi_2 \approx \phi_K \left[ \left( x + v \left( t + \frac{\delta t}{2} \right) \right) \gamma \right] + \phi_{\bar{K}} \left[ \left( x - v \left( t - \frac{\delta t}{2} \right) \right) \gamma \right]$$

Асимптотика:  $t \rightarrow +\infty$

$$\rightarrow \phi_2 \approx \phi_K \left[ \left( x + v \left( t - \frac{\delta t}{2} \right) \right) \gamma \right] + \phi_{\bar{K}} \left[ \left( x - v \left( t + \frac{\delta t}{2} \right) \right) \gamma \right]$$

Фазовый сдвиг:  $\delta t = 2 \frac{\ln v}{\gamma v} = 2 \sqrt{v^2 - 1} \ln v$

# Модель sG: столкновение бризера с кинком



# Модель sG: пара Лакса

Пара Лакса задана 2 линейными уравнениями

$$\psi_x = L\psi; \quad \psi_t = A\psi$$

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} \\ \psi_{21} & \psi_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \psi_{xt} = L_t\psi + L\psi_t; \\ \psi_{tx} = A_x\psi + A\psi_x. \end{cases}$$

$$L_t\psi + LA\psi = A_x\psi + AL\psi;$$

$$L_t - A_x = [A, L]$$

Условие нулевой кривизны

• sine-Gordon:

$$L = i\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & u_x \\ u_x & 0 \end{pmatrix} = i\lambda \cdot \sigma_3 + \frac{i}{2} u_x \cdot \sigma_1; \quad \lambda \in \mathbb{C}$$



$$A = \frac{\cos u}{4i\lambda} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4i\lambda} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \frac{\cos u}{4i\lambda} \cdot \sigma_3 + \frac{1}{4i\lambda} \cdot \sigma_2$$

$$L_t = \frac{i u_{tx}}{2} \cdot \sigma_1; \quad A_x = -\frac{1}{4i\lambda} u_x \sin u \cdot \sigma_3 + \frac{1}{4i\lambda} u_x \cdot \sigma_2$$



$$[A, L] = \frac{i}{4\lambda} \cdot \sigma_2 - \frac{i}{4\lambda} \cdot \sigma_3 + \frac{i}{2} \sin u \cdot \sigma_1$$



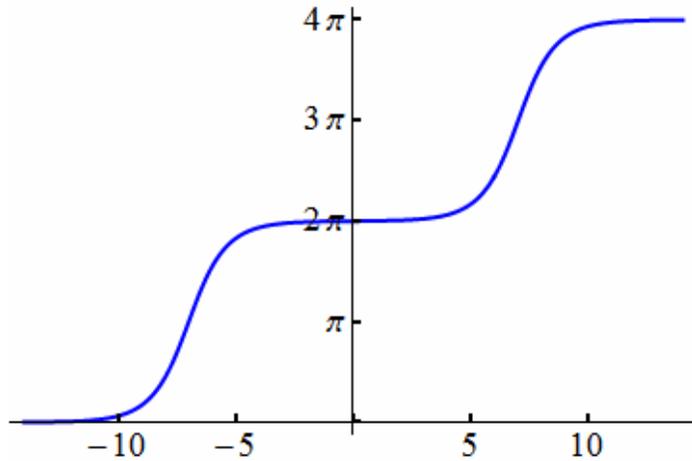
в 0<sup>th</sup> порядке по  $\lambda$

$$\frac{i u_{tx}}{2} \cdot \sigma_1 = \frac{i}{2} \sin u \cdot \sigma_1$$

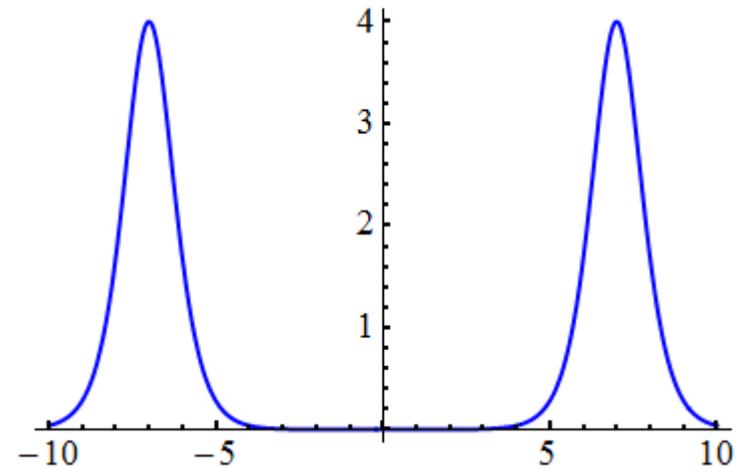
Уравнение sine-Gordon!

# Взаимодействие между кинками

2-solitons solutions



$$\phi = \phi_K(x - d) + \phi_k(x + d) - 2\pi$$



$$E_{int}(d) = E_{KK}(d) - 2M \approx 32e^{-2d}$$

● **Линеаризованные возмущения sG кинка:**

**Homework: Prove it!**

$$\left. \begin{aligned} \phi &= \phi_K(x) + \eta(x, t) \\ \phi_K &= 4 \arctan e^x \end{aligned} \right\}$$

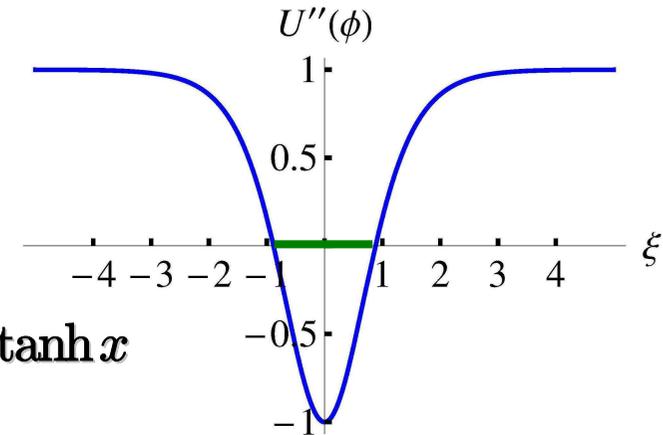
$$\rightarrow \partial_{tt}^2 \eta(x, t) - \partial_{xx}^2 \eta(x, t) + \eta(x, t) \cos \phi_K(x) = 0$$

$$\underline{\eta(x, t) = \Re \xi(x) e^{i\omega t}}$$

$$\left( -\frac{d^2}{dx^2} + 1 - \frac{2}{\cosh^2 x} \right) \xi(x) = \omega^2 \xi(x)$$

# Линеаризованные возмущения sG кинка

$$\left( -\frac{d^2}{dx^2} + 1 - \frac{2}{\cosh^2 x} \right) \xi(x) = \omega^2 \xi(x)$$



$$\hat{a}^\dagger \hat{a} \xi(x) = \omega^2 \xi(x); \quad \hat{a} = \frac{d}{dx} + \tanh x; \quad \hat{a}^\dagger = -\frac{d}{dx} + \tanh x$$

Вакуум  $\hat{a} \xi_0 \equiv \left( \frac{d}{dx} + \tanh x \right) \xi(x) = 0$

$$\xi_0(x) = \frac{1}{\cosh x}$$

Нулевая мода

$$\phi = \phi_K(x) + C \xi_0(x) = 4 \arctan e^x + \frac{C}{\cosh x} = \phi_K + \frac{C}{2} \frac{d\phi_K}{dx} \approx \phi_K \left( x + \frac{C}{2} \right)$$

Континуум:

$$\xi_k(x) = (\tanh x + ik) e^{ikx}; \quad \omega_k = \sqrt{1 + k^2}$$

**Note:**  $\hat{a} e^{ikx} \equiv \left( \frac{d}{dx} + \tanh x \right) e^{ikx} = \xi_k(x)$

**Безотражательный потенциал**

$$\xi(-\infty) = (-1 + ik) e^{ikx}; \quad \xi(\infty) = (1 + ik) e^{ikx + \delta}; \quad e^{i\delta} = \frac{ik + 1}{ik - 1}$$

# sG ↔ массивная модель Тирринга

$$S = \int d^2x \left[ \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{\alpha}{\beta^2} (1 - \cos \beta \phi) \right]$$

**Модель sG**

**Модель Тирринга**

$$S = \int d^2x \left[ i\bar{\psi} \gamma_\mu \partial^\mu \psi + m\bar{\psi} \psi - \frac{g}{2} (\bar{\psi} \gamma_\mu \psi) (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi) \right]$$

$$\gamma_0 = \sigma_1, \quad \gamma_1 = -i\sigma_2, \quad \gamma_5 = \gamma_0 \gamma_1 = \sigma_3$$

Симметрии:  $\phi \rightarrow \phi' = \phi + \frac{2\pi n}{\beta}; \quad \psi \rightarrow \psi' = e^{i\alpha_V} \psi; \quad \psi \rightarrow \psi' = e^{i\gamma_5 \alpha_A} \psi$

**Трюк бозонизации:**  $m\bar{\psi} \frac{1 \mp \gamma_5}{2} \psi = -\frac{\alpha}{\beta^2} e^{\pm i\phi} \quad \frac{\beta^2}{4\pi} = \frac{1}{1+g/\pi}$

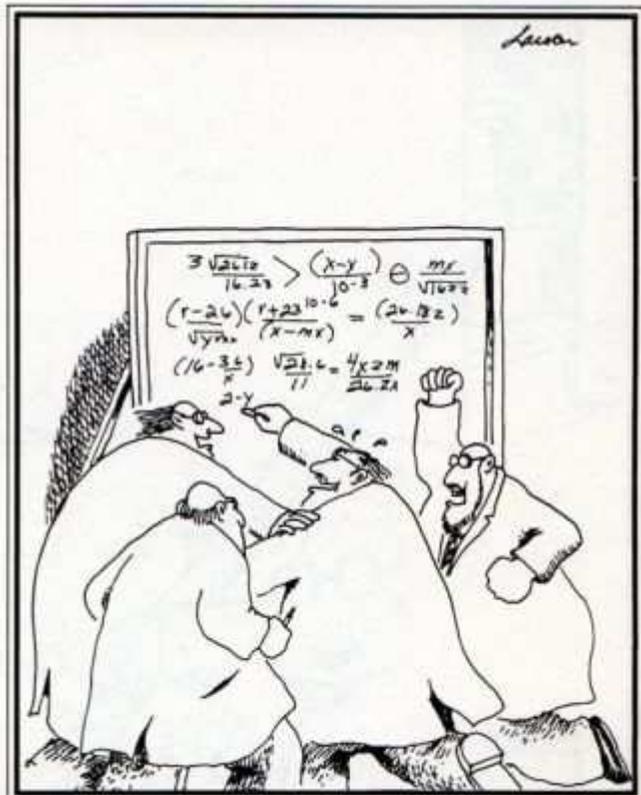
Возбуждения кинка → связанные состояния

**(S.Coleman, 1975)**

Солитон → фермионная нулевая мода

Топологический ток модели sG  $J_\mu = \frac{1}{2\pi} \varepsilon_{\mu\nu} \partial^\nu \phi$

дуален нетеровскому току модели Тиринга  $j_\mu = i\bar{\psi} \gamma_\mu \partial^\mu \psi$



"Go for it, Sidney! You've got it! You've got it! Good hands! Don't choke!"

Work in progress,  
more quantum theory around!

**Part II: квантовая теория фермионов, суперсимметрия  
квантование калибровочных полей**