

Производящий функционал и корреляторы

● Производящий функционал:

$$Z(J) = \int D\varphi e^{-S[\varphi] + J \star \varphi}$$

$$J \star \varphi \equiv \int d^4x J(x)\varphi(x)$$

● Вакуумное среднее поля $\varphi(x)$:

$$\langle \varphi(x) \rangle = \frac{1}{Z(J)} \int D\varphi \varphi e^{-S[\varphi] + J \star \varphi} = \frac{1}{Z(J)} \frac{\delta}{\delta J(x)} Z[J]$$

● Двухточечная корреляционная функция:

$$\langle \varphi(y)\varphi(x) \rangle = \frac{1}{Z[J]} \frac{\delta}{\delta J(y)} \frac{\delta}{\delta J(x)} Z[J]$$

Физический смысл – определение вероятности наблюдения поля в точках x и y

● Трехточечная корреляционная функция:

$$\langle \varphi(z)\varphi(y)\varphi(x) \rangle = \frac{1}{Z[J]} \frac{\delta}{\delta J(z)} \frac{\delta}{\delta J(y)} \frac{\delta}{\delta J(x)} Z[J]$$

И так далее...

• **n-точечная корреляционная функция:**

$$\langle \varphi(x_n) \dots \varphi(x_2) \varphi(x_1) \rangle = \frac{1}{Z[J]} \frac{\delta}{\delta J(x_n)} \dots \frac{\delta}{\delta J(x_2)} \frac{\delta}{\delta J(x_1)} Z[J]$$

**Знание всех корреляционных функций квантовой теории
дает полную информацию о ней и эквивалентно
заданию производящего функционала**

• **Аналогия со статфизикой:**

$$Z_{stat} = \int \mathcal{D}[\varphi] e^{-\frac{H[\varphi]}{k_B T}} \equiv e^{-\frac{F}{k_B T}}$$



$$Z(J) = \int D\varphi e^{-S[\varphi] + J \star \varphi} = e^{-W[J]}$$

$W[J]$ - Производящий функционал связанных функций Грина

$$\langle \varphi(x) \rangle = \frac{1}{Z[J]} \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)} = \frac{\delta}{\delta J(x)} \ln Z[J] = -\frac{\delta W[J]}{\delta J(x)}$$

● **Пропагатор:**

$$\mathcal{G}(x, y) \equiv \frac{\delta}{\delta J(y)} \langle \varphi(x) \rangle = -\frac{\delta}{\delta J(y)} \frac{\delta}{\delta J(x)} W[J]$$

Замечание:

$$\langle \varphi(x) \rangle = \frac{1}{Z[J]} \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)} \quad \rightarrow \quad \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)} = Z[J] \langle \varphi(x) \rangle$$



$$\langle \varphi(y)\varphi(x) \rangle = \frac{1}{Z[J]} \frac{\delta}{\delta J(y)} \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)} = \frac{1}{Z[J]} \frac{\delta}{\delta J(y)} (Z[J] \langle \varphi(x) \rangle) = \langle \varphi(y) \rangle \langle \varphi(x) \rangle + \mathcal{G}(x, y)$$

● **Пропагатор – это величина, описывающая взаимное влияние полей в точках x и y :**

$$\mathcal{G}(x, y) = \langle \varphi(x)\varphi(y) \rangle - \langle \varphi(x) \rangle \langle \varphi(y) \rangle$$

Если поля статистически независимы, то $\langle \varphi(x)\varphi(y) \rangle = \langle \varphi(x) \rangle \langle \varphi(y) \rangle$ (тривиализация) и $\mathcal{G}(x, y) = 0$

● **Теория называется тривиальной, если для всех n -точечных функций**

$$\langle \varphi(x_n)\varphi(x_{n-1}) \dots \varphi(x_2)\varphi(x_1) \rangle = \langle \varphi(x_n) \rangle \langle \varphi(x_{n-1}) \rangle \dots \langle \varphi(x_2) \rangle \langle \varphi(x_1) \rangle$$

Корреляционные функции свободной теории

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x ((\partial_\mu \varphi)^2 + m^2 \varphi^2)$$

Действие

Производящий функционал

$$Z[J] = \int \mathcal{D}[\varphi(x)] e^{-\int d^4x [\frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)^2 + \frac{1}{2}m^2 \varphi^2 - J(x)\varphi(x)]}$$



● Уравнения поля (Евклид): $(-\partial_\mu^2 + m^2) \varphi(x) = J(x)$

● Флуктуации полей над вакуумом: $\varphi = \phi_0 + \delta\varphi$, $\phi_0 = \text{const}$

● Производящий функционал флуктуаций:

$$Z[J] = e^{\int d^4x J(x)\varphi_0(x)} \int \mathcal{D}[\chi(x)] e^{-\frac{1}{2} \int d^4x \chi(x)(-\partial_\nu^2 + m^2)\chi(x)}$$

Гауссово интегрирование:

$$Z[J] = N [\det(-\partial_\nu^2 + m^2)]^{-1/2} e^{\int d^4x J(x)\varphi_0(x)} = N' e^{\int d^4x J(x)\varphi_0(x)}$$

Функция Грина свободной теории

Функция Грина уравнения Клейна-Гордона:

$$(-\partial_\nu^2 + m^2) G(x - y) = \delta(x - y)$$

$$\left\{ \begin{aligned} G(x) &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} G(p) e^{ip_\mu x_\mu} \\ \delta(x) &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ip_\mu x_\mu} \end{aligned} \right.$$

$$(p^2 + m^2)G(p) = 1, \quad G(x) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{ip_\mu x_\mu}}{p^2 + m^2}$$

Замечание: В отличие от функции Грина в пространстве Миньковского подинтегральное выражение не имеет полюсов.

$$p_4 = -ip_0; \quad \rightarrow \quad G_M(x) = - \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{ip_\mu x_\mu}}{p_0^2 - \vec{p}^2 - m^2}$$

Формальное решение уравнения Клейна-Гордона:

$$\varphi_0(x) = \int d^4 y G(x - y) J(y) \equiv G \star J$$

Производящий функционал $Z[J] = N' e^{\int d^4 x d^4 x' J(x') G(x - x') J(x)} \equiv N' e^{J \star G \star J}$

$$W[J] = - \int d^4 x d^4 x' J(x) G(x - x') J(x') \equiv -J \star G \star J$$

Свойства функция Грина

- Обратная функция Грина:

$$G^{-1}(x, y) = \delta(x - y)(-\partial_\mu^2 + m^2)$$

Проверка: $G^{-1} \star G = \int d^4y G^{-1}(x, y)G(y, z) = \int d^4y \delta(x - y)(-\partial_\mu^2 + m^2)G(y, z)$
 $= \int d^4y \delta(x - y)\delta(y - z) = \delta(x - z)$

- Действие:

$$S[\varphi_0(x)] = \frac{1}{2} \int d^4x \varphi(x)(-\partial_\mu^2 + m^2)\varphi(x) = \frac{1}{2} \int d^4x d^4y \varphi(y)\delta(x - y)(-\partial_\mu^2 + m^2)\varphi(x)$$

$$= \frac{1}{2} \int d^4x d^4y \varphi(y)G^{-1}(x - y)\varphi(x) \equiv \text{[red box]}$$

← Раздвижка точек

- Вакуумное среднее:

$$\langle \varphi(x) \rangle = \frac{1}{Z[J]} \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)} = \int d^4y G(x - y)J(y) = G \star J$$

- Коррелятор:

$$\langle \varphi(x)\varphi(y) \rangle = \frac{1}{Z[J]} \frac{\delta}{\delta J(x)} \frac{\delta}{\delta J(y)} Z[J] = e^{-J \star G \star J} \frac{\delta}{\delta J(x)} \left(G(y, y') \star J(y') e^{J \star G \star J} \right)$$







$$= G(x, y) + \left(G(x, x') \star J(x') \right) \left(G(y, y') \star J(y') \right)$$

• **3-х точечная функция:** $\langle \varphi(x)\varphi(y)\varphi(z) \rangle = \frac{1}{Z[J]} \frac{\delta}{\delta J(x)} \frac{\delta}{\delta J(y)} \frac{\delta}{\delta J(z)} Z[J]$?

$$= \left(G(x, x') \star J(x') \right) \left(G(y, y') \star J(y') \right) \left(G(z, z') \star J(z') \right)$$

$$+ G(x, y) \left(G(z, z') \star J(z') \right) + G(x, z) \left(G(y, y') \star J(y') \right) + G(y, z) \left(G(x, x') \star J(x') \right)$$

Диаграммная техника:

		$G(x - y) = -\frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x) \delta J(y)}$
		$\int d^4 x' G(x - x') J(x') = -\frac{\delta W[J]}{\delta J[x]}$
		$\int d^4 x' d^4 x'' J(x') G(x' - x'') J(x'') = -W[J]$

Замечание: Диаграмма для вакуумного среднего

		$\langle \varphi(x) \rangle$
-------------------------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------------------	------------------------------

$$\langle \varphi(x)\varphi(y) \rangle = G(x, y) + \left(G(x, x') \star J(x') \right) \left(G(y, y') \star J(y') \right)$$

$$\langle \varphi(x)\varphi(y)\varphi(z) \rangle = \left(G(x, x') \star J(x') \right) \left(G(y, y') \star J(y') \right) \left(G(z, z') \star J(z') \right) + G(x, y) \left(G(z, z') \star J(z') \right) + G(x, z) \left(G(y, y') \star J(y') \right) + G(y, z) \left(G(x, x') \star J(x') \right)$$

● Разложение производящего функционала:

$$Z[J] = 1 + \langle \varphi(x) \rangle \Big|_{J=0} \star J(x) + \frac{1}{2!} \langle \varphi(x)\varphi(y) \rangle \Big|_{J=0} \star J(x) \star J(y) + \dots$$

$$Z[J] = \text{---} \times + \frac{1}{2!} \begin{matrix} \times & \text{---} & \times \\ \times & \text{---} & \times \end{matrix} + \frac{1}{3!} \begin{matrix} \times & \text{---} & \times \\ \times & \text{---} & \times \\ \times & \text{---} & \times \end{matrix}$$

Производящий функционал теории φ^4

Действие:

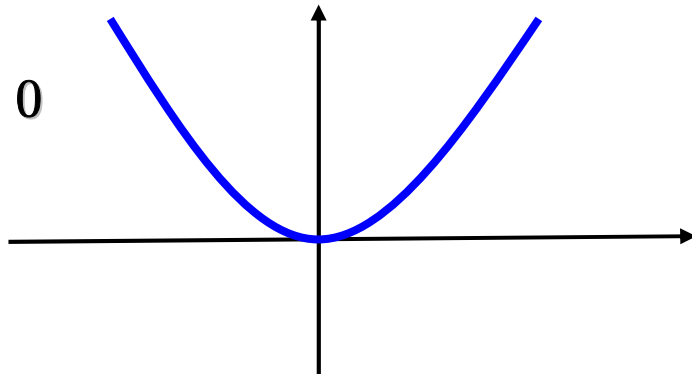
$$S = \frac{1}{2} \int d^4x [(\partial_\mu \varphi)^2 + U(\varphi)]$$

Потенциал:

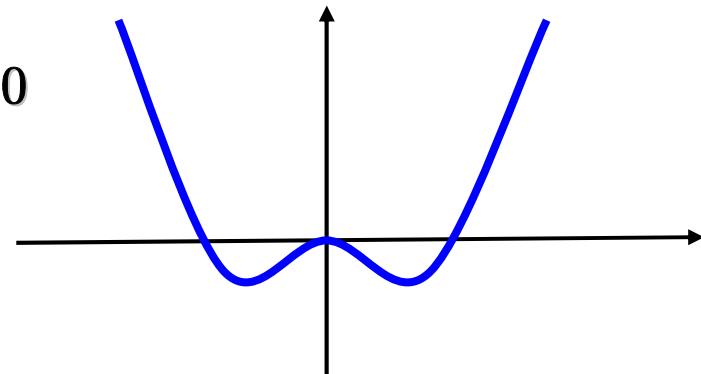
$$U(\varphi) = \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 + \frac{\lambda}{4!} \varphi^4 \equiv \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 + U_{int}(\varphi)$$



$m^2 > 0$



$m^2 < 0$



● **Модель без спонтанного нарушения симметрии: $m^2 > 0$**

Задача: вычислить производящий функционал

$$Z[J] = \int \mathcal{D}[\varphi(x)] e^{-\int d^4x [\frac{1}{2}(\partial_\nu \varphi)^2 + \frac{1}{2} \cancel{m^2} \varphi^2 + \frac{\lambda}{4!} \varphi^4 - J(x)\varphi(x)]}$$

● **Рассмотрим сначала безмассовую модель: $m = 0$**

Метод: пертурбативное разложение по константе связи λ

$$\exp \left\{ -\frac{\lambda}{4!} \int d^4x \varphi^4 \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-\lambda}{4!} \right)^n \frac{1}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n \varphi^4(x_1) \dots \varphi^4(x_n)$$



$$Z[J] = \sum_n \left(\frac{-\lambda}{4!} \right)^n \frac{1}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n \int \mathcal{D}[\varphi(x)] \varphi^4(x_1) \dots \varphi^4(x_n) \\ \times e^{-\int d^4x \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 - J(x) \varphi(x) \right]}$$

Замечание: $\varphi(x_1) \varphi(x_2) \dots \varphi(x_n) = \frac{\delta^n}{\delta J(x_1) \delta J(x_2) \dots \delta J(x_n)} \left(e^{\int d^4x \varphi(x) J(x)} \right) \Big|_{J=0}$

$$Z[J] = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-\lambda}{4!} \right)^n \frac{1}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n \left(\frac{\delta}{\delta J(x_1)} \right)^4 \dots \left(\frac{\delta}{\delta J(x_n)} \right)^4 \\ \times \int \mathcal{D}[\varphi(x)] e^{-\int d^4x \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 - J(x) \varphi(x) \right]}$$

$$= e^{-\int d^4x U_{int}\left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)} \int \mathcal{D}[\varphi(x)] e^{-S_0[\varphi(x)] + \int d^4x J(x) \varphi(x)} = e^{-\int d^4x U_{int}\left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)} e^{\frac{1}{2} J \star G \star J}$$

• В первом порядке по λ :

$$Z[J] \approx \int d^4x \left[1 - \frac{\lambda}{4!} \left(\frac{\delta}{\delta J(x)} \right)^4 \right] e^{\frac{1}{2} J \star G \star J}$$

Задача: последовательно вычислить четвертую вариационную производную:

$$\frac{\delta}{\delta J(x)} \left(e^{\frac{1}{2} \int d^4y d^4z J(y) G(y-z) J(z)} \right) = \left[\int d^4y G(x-y) J(y) \right] e^{\frac{1}{2} J \star G \star J}$$

$$\frac{\delta^2}{\delta J^2(x)} \left(e^{\frac{1}{2} J \star G \star J} \right) = \left[G(x-x) + \left(\int d^4y G(x-y) J(y) \right)^2 \right] e^{\frac{1}{2} J \star G \star J}$$

$$\frac{\delta^3}{\delta J^3(x)} \left(e^{\frac{1}{2} J \star G \star J} \right) =$$


$$\left[3G(x-x) \left(\int d^4y G(x-y) J(y) \right) + \left(\int d^4y G(x-y) J(y) \right)^3 \right] e^{\frac{1}{2} J \star G \star J}$$

$$\frac{\delta^4}{\delta J^4(x)} \left(e^{\frac{1}{2} J \star G \star J} \right) =$$

$$\left[3G^2(0) + 6G(0) \left(\int d^4y G(x-y) J(y) \right)^2 + \left(\int d^4y G(x-y) J(y) \right)^4 \right] e^{\frac{1}{2} J \star G \star J}$$

$$\frac{\delta^4}{\delta J^4(x)} \left(e^{\frac{1}{2} J \star G \star J} \right) = \left\{ 3 \text{ (two circles)} + 6 \text{ (circle with two external legs)} + \text{ (four external legs)} \right\} e^{\frac{1}{2} J \star G \star J}$$

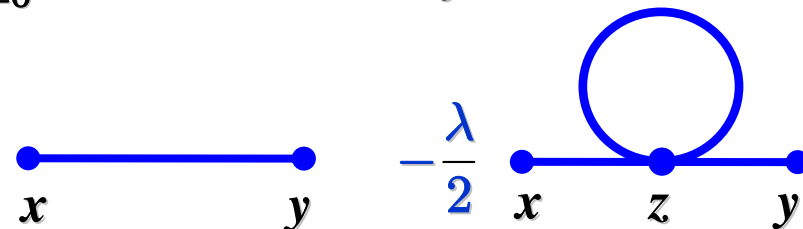
$$Z[J] = \left\{ 1 - \frac{\lambda}{4!} \int d^4x \left[3G(0)^2 + 6G(0) \left(\int d^4y G(x-y) J(y) \right)^2 + \left(\int d^4y G(x-y) J(y) \right)^4 \right] \right\} e^{\frac{1}{2} J \star G \star J}$$

$$W[J] = -\frac{1}{2} J \star G \star J + \frac{\lambda}{4!} \int d^4x \left[3G(0)^2 + 6G(0) \left(G \star J \right)^2 + \left(G \star J \right)^4 \right]$$

● Двухточечная функция:

$$\langle \varphi(x) \varphi(y) \rangle \Big|_{J=0} = \frac{1}{Z[J]} \frac{\delta}{\delta J(x)} \frac{\delta}{\delta J(y)} Z[J] \Big|_{J=0} = G(x-y) - \frac{\lambda}{2} G(0) \int d^4z G(x-y) G(z-y)$$

● **Первая поправка к классическому пропагатору:**



Замечание: Любой вершине λ соответствует 4 «ноги». Пертурбативное разложение по константе связи предполагается в режиме слабой связи

Петлевое разложение производящего функционала

Действие:

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x [(\partial_\mu \varphi)^2 + U(\varphi)]$$

Потенциал:

$$U(\varphi) = \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 + \frac{\lambda}{4!} \varphi^4 \equiv \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 + U_{int}(\varphi)$$

● **Массивная модель без спонтанного нарушения симметрии:** $m^2 > 0$

Задача: вычислить производящий функционал

$$Z[J] = \int \mathcal{D}[\varphi(x)] e^{-\int d^4x [\frac{1}{2}(\partial_\nu \varphi)^2 + \frac{1}{2}m^2 \varphi^2 + \frac{\lambda}{4!} \varphi^4 - J(x)\varphi(x)]}$$

● **Уравнения поля (Евклид):** $\partial_\mu^2 \varphi(x) = U' - J(x),$ $U' = \frac{\delta U}{\delta \varphi}$

● **Флуктуации полей над вакуумом:** $\varphi(x) = \phi_0(x) + \delta\varphi(x)$

● **Разложение действия по флуктуациям поля:**

$$S[\varphi] - J \star \varphi = S[\phi_0] - J \star \phi_0 + \delta S - J \star \delta\phi + \frac{1}{2!} \delta^2 S + \frac{1}{3!} \delta^3 S + \dots$$

● **Первая вариация действия:**

$$\delta S - J \star \delta\phi = \int d^4x [-\partial_\mu^2 \varphi_0 + U'(\varphi_0) - J(x)] \delta\phi$$

← **Уравнения поля**

● **Вторая вариация действия:**

$$\delta^2 S = \int d^4x \delta\phi [-\partial_\mu^2 + U''(\varphi_0)] \delta\phi$$

← **Функциональный детерминант**

● **Третья вариация действия:**

$$\delta^3 S = \int d^4x U'''(\varphi_0) \delta\phi^3$$

● **Четвертая вариация действия:**

$$\delta^4 S = \int d^4x U^{(IV)}(\varphi_0) \delta\phi^4$$

Замечание 1: в теории φ^4 все высшие вариации действия равны 0

Замечание 2: в теории имеется 2 типа разложения действия: по константе связи («ноги», $\lambda \ll 1$) и по δS («петли», $\hbar \ll 1$)

● **Проблема:** Действие S зависит от поля φ_0 а не от $\langle \varphi(x) \rangle$:



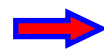
$$Z[J] = e^{-S[\varphi_0] + J \star \varphi_0} \int \mathcal{D}[\delta\phi] e^{\frac{1}{2!} \delta\phi \star \frac{\delta^2 S[\varphi_0]}{\delta\varphi^2} \star \delta\phi + \frac{1}{3!} \frac{\delta^3 S[\varphi_0]}{\delta\varphi^3} \star \delta^3 \phi + \frac{1}{4!} \frac{\delta^4 S[\varphi_0]}{\delta\varphi^4} \star \delta^4 \phi \dots}$$

Преобразование Лежандра

- Простой пример преобразования обычной действительной функции:

$$f(x); \quad df(x) = f'(x)dx$$

$$d(xf') = f'dx + xdf'$$

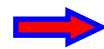


$$d(xf' - f) = xdf'$$

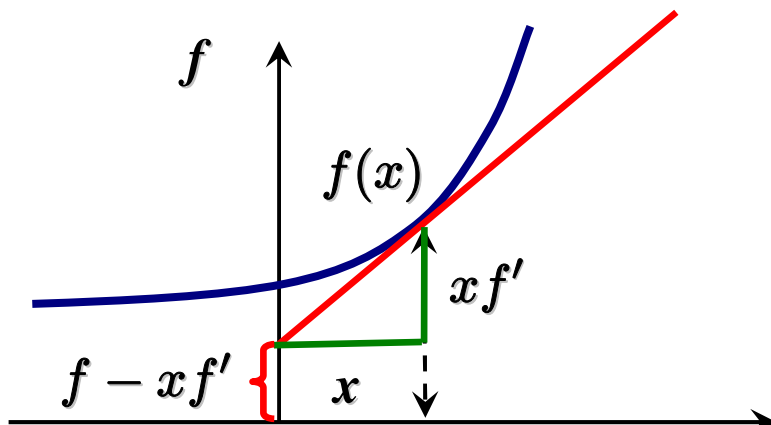
- Определим новую функцию F и переменную y :

$$(f, x) \implies (F, y)$$

$$F = xf' - f; \quad y = f'(x)$$



$$dF(y) = F'(y)dy; \quad x = F'(y)$$



- Преобразование Лежандра: от лагранжевой к гамильтоновой механике

$$f \implies L(q, \dot{q}); \quad x \implies \dot{q}$$

$$H = \dot{q}p - L; \quad p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$$

Переменная q не затрагивается

$$\frac{\partial H(p, q)}{\partial p} = \dot{q}; \quad \frac{\partial H(p, q)}{\partial q} = -\dot{p}$$

Функциональное преобразование Лежандра

● **Задача:** убрать зависимость от источников $J(x)$ в функционале $W[J]$:

$$\langle \varphi(x) \rangle = - \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)}$$



$$p = \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{q} \\ p \\ L(q, \dot{q}) \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} J(x); \\ \langle \varphi(x) \rangle \\ W[J] \end{array} \right\}$$

● **Эффективное действие:**

$$H = p\dot{q} - L \longleftrightarrow \Gamma[\langle \varphi \rangle] = J \star \langle \varphi \rangle + W[J]$$

● **Замечание 1:** Эффективное действие $\Gamma[\langle \varphi \rangle]$ зависит от $\langle \varphi(x) \rangle$ а не от φ :

● **Уравнения движения:** $\frac{\delta \Gamma}{\delta \langle \varphi(x) \rangle} = J \longleftrightarrow \left. \frac{\delta S}{\delta \varphi} \right|_{\varphi=\varphi_0} = J$

● **Замечание 2:** Эффективное действие $\Gamma[\langle \varphi \rangle]$ не зависит от J :

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta J} = \langle \varphi(x) \rangle + \frac{\delta W}{\delta J} = 0$$

● **Замечание 3:**

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta\langle\varphi(x)\rangle} = J \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\langle\varphi(x)\rangle\delta\langle\varphi(y)\rangle} = \frac{\delta J(x)}{\delta\langle\varphi(y)\rangle} = G^{-1}(x, y)}$$

Проверка:

$$\begin{aligned} G(x, y) = \frac{\delta\langle\varphi(x)\rangle}{\delta J(y)} &\rightarrow G^{-1}(x, y) \star G(y, z) = \int dy \frac{\delta J(x)}{\delta\langle\varphi(y)\rangle} G(y, z) \\ &= \int dy \frac{\delta J(x)}{\delta\langle\varphi(y)\rangle} \frac{\delta\langle\varphi(y)\rangle}{\delta J(z)} = \frac{\delta\langle J(x)\rangle}{\delta J(z)} = \delta(x - z) \end{aligned}$$

Напомним:

$$W[J] = S[\varphi_0] - J \star \varphi_0 + \frac{\hbar}{2} \ln \det [-\partial_\mu^2 + U''(\varphi_0)]$$

$$\Gamma[\langle\varphi\rangle] = S[\varphi_0] + J \star (\langle\varphi(x)\rangle - \varphi_0) + \frac{\hbar}{2} \ln \det [-\partial_\mu^2 + U''(\varphi_0)]$$

$$J = \left. \frac{\delta S}{\delta\varphi} \right|_{\varphi=\varphi_0}$$

$$= S[\langle\varphi\rangle] + \frac{\hbar}{2} \ln \det [-\partial_\mu^2 + U''(\langle\varphi\rangle)] + O(\hbar^2)$$

● В пределе $\hbar \rightarrow 0$ эффективное действие Γ переходит в обычное действие S , а вакуумное среднее $\langle\varphi\rangle$ - в классическое поле φ

● Эффективное действие Γ описывает эволюцию вакуумного среднего поля $\langle\varphi\rangle$ так же, как обычное действие S описывает эволюцию поля φ

Разложение функционального детерминанта

● **Проблема:** Как вычислить функциональный детерминант?

Решение возможно для слабо меняющихся или постоянных полей в вакууме

(Квазиклассическое приближение)

● **Флуктуации полей над вакуумом:** $\varphi(x) = a + \chi(x)$

Потенциал:

$$U(\varphi) = \frac{\lambda}{4!}(\varphi^2 - a^2)^2; \quad \varphi_0 = \pm a$$

$$U''(\varphi(x)) = U''(a) + U'''(a)\chi(x) + \frac{1}{2}U^{iv}(a)\chi(x)^2 \equiv U''(a) + U_{int}(\chi(x))$$

$$U''(a) = \frac{\lambda a^2}{3}; \quad U'''(a) = \lambda a; \quad U^{iv}(a) = \lambda$$

Массовый член m^2

Потенциал взаимодействия: $U_{int} = \lambda a \cdot \chi + \frac{\lambda}{2} \cdot \chi^2$

● **Разложение функционального детерминанта:**

$$\ln \det = \text{Tr} \ln$$

$$\frac{\hbar}{2} \ln \det [-\partial_\mu^2 + m^2 + U_{int}] = \frac{\hbar}{2} \text{Tr} \ln [G^{-1} + U_{int}] = \frac{\hbar}{2} \text{Tr} \ln G^{-1} + \frac{\hbar}{2} \text{Tr} \ln [1 + G \star U_{int}]$$

● **Замечание:** след Tr не матричный, а функциональный!

$$\frac{\hbar}{2} \ln \det [-\partial_\mu^2 + m^2 + U_{int}] = \frac{\hbar}{2} \text{Tr} \ln G^{-1} + \frac{\hbar}{2} \text{Tr} \ln [1 + G \star U_{int}]$$

$$\ln(1 + x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots$$

$$\text{Tr} \ln [1 + G \star U_{int}] = \text{Tr} G \star U_{int} - \frac{1}{2} \text{Tr} G \star U_{int} \star G \star U_{int} + \frac{1}{3} \text{Tr} G \star U_{int} \star G \star U_{int} \star G \star U_{int} - \dots$$

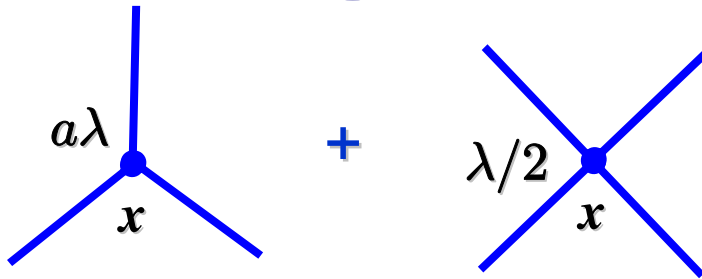
Напомним:

$$\frac{1}{3} \text{Tr} G \star U_{int} \star G \star U_{int} \star G \star U_{int} =$$

$$= \frac{1}{3} \int dx_1 dx_2 dx_3 G(x_1 - x_2) U_{int}(x_1) G(x_2 - x_3) U_{int}(x_2) G(x_3 - x_1) U_{int}(x_3)$$

$$\frac{1}{2} \text{Tr} \ln [1 + G \star U_{int}] = \frac{1}{2} \left\{ \text{circle}(x_1) - \frac{1}{2} \text{circle}(x_1, x_2) + \frac{1}{3} \text{circle}(x_1, x_2, x_3) + \dots \right\}$$

$$U_{int} = a\lambda \cdot \chi + \frac{\lambda}{2} \cdot \chi^2$$



$$\frac{1}{2} \text{Tr} \ln[1 + G \star U_{int}] = \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} \text{Diagram 1: Circle with } a\lambda \text{ at bottom, top-left and top-right external lines} \\ \text{Diagram 2: Circle with } \lambda/2 \text{ at bottom, bottom-left and bottom-right external lines} \\ \text{Diagram 3: Circle with } a\lambda \text{ at left and right, top-left and top-right external lines} \end{array} \right\} + \dots$$

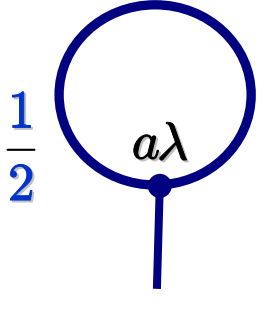
$$- \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} \text{Diagram 4: Circle with } \lambda/2 \text{ at left and right, bottom-left and bottom-right external lines} \\ \text{Diagram 5: Circle with } \lambda/2 \text{ at left and right, top-left and top-right external lines} \\ \dots \end{array} \right\}$$

Разложение эффективного действия:

$$\Gamma[\phi_0 + \chi(x)] = VT U_{eff}(\phi_0) + \Gamma^{(1)}[\phi_0] \star \chi + \frac{1}{2!} \Gamma^{(2)}[\phi_0] \star \chi \star \chi + \frac{1}{3!} \Gamma^{(3)}[\phi_0] \star \chi \star \chi \star \chi + \dots$$

$$U_{eff} = S[\langle \varphi_0 \rangle] + \frac{1}{2} \text{Tr} \ln [-\partial_\mu^2 + U'']$$

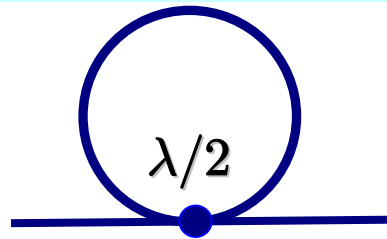
Вершина: $\Gamma^{(1)} = \frac{a\lambda}{2} G(0) \int d^4x \chi(x)$

$$\frac{1}{2} \Gamma^{(2)} \star \chi \star \chi = \frac{1}{2} \int d^4x \chi [+\partial_\mu^2 + u''] \chi + \frac{1}{2} \lambda G(0) \int d^4x \chi^2 - \frac{1}{4} (a\lambda)^2 \int d^4x d^4y \chi(x) G(x-y) \chi(y) G(y-x) + \dots$$


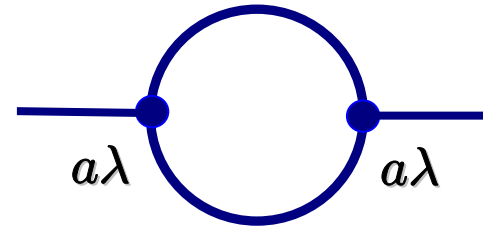
Вычисление эффективного действия

Задача: вычислить диаграммы, вносящие вклад в эффективное действие

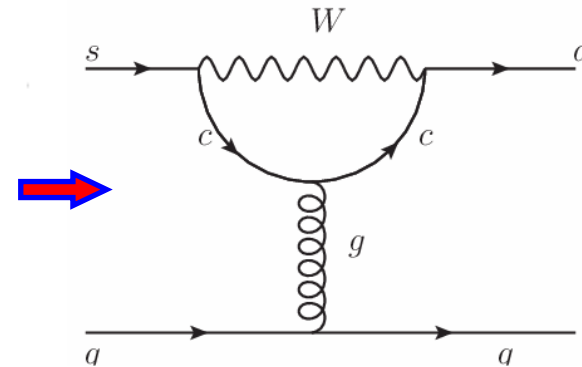
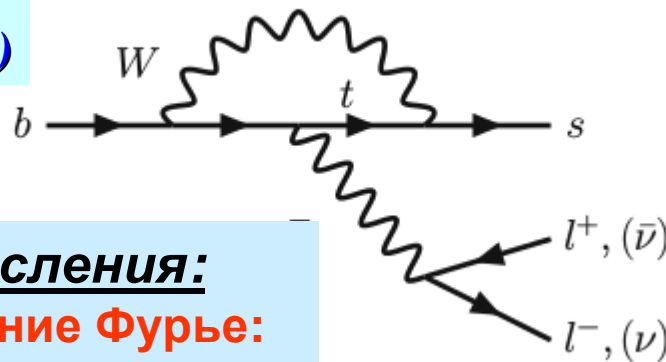
● **Tadpole:**



● **Fish:**



Penquin:
(не очень похож?)



Техника вычисления:
1. Преобразование Фурье:

$$\chi(k) = \int d^4x \chi(x) e^{-ikx}; \quad \chi(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \chi(k) e^{ikx}$$

● **Напомним:**

$$G(k, k') = \frac{\delta(k + k')}{k^2 + m^2}, \quad G^{-1}(k, k') = (2\pi)^4 \delta(k + k') (k^2 + m^2)$$

● **Вторая вариация действия:**

$$\delta^2 S = \frac{1}{2} \int d^4 x \chi(x) (-\partial^2 + m^2) \chi(x) = \frac{1}{2} \int d^4 x \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (k^2 + m^2) \chi(k') \chi(k) e^{i(k+k')x}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta(k+k') (k^2 + m^2) \chi(k') \chi(k) = \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (k^2 + m^2) |\chi(k)|^2$$

● **Третья вариация действия:**

$$\delta^3 S = \frac{1}{3!} \int d^4 x U''' \chi(x)^3 = \frac{a\lambda}{3!} \int d^4 x \chi(x)^3$$

$$= \frac{a\lambda}{3!} \int d^4 x \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_3}{(2\pi)^4} \chi(k_1) \chi(k_2) \chi(k_3) e^{i(k_1+k_2+k_3)x}$$

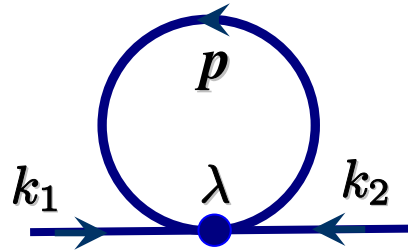
$$= \frac{a\lambda}{3!} \int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_3}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta(k_1 + k_2 + k_3) \chi(k_1) \chi(k_2) \chi(k_3)$$

● **Четвертая вариация действия:**

$$\delta^4 S = \frac{1}{4!} \int d^4 x U^{(iv)} \chi(x)^4 = \frac{\lambda}{4!} \int d^4 x \chi(x)^4$$

$$= \frac{\lambda}{4!} \int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \cdots \frac{d^4 k_4}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) \chi(k_1) \chi(k_2) \chi(k_3) \chi(k_4)$$

Tadpole:



$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda}{2} \int d^4x G(x-x) \chi^2(x)$$

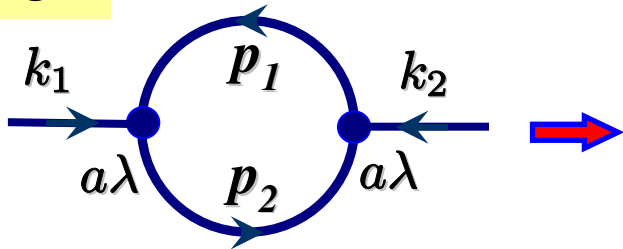
Преобразование Фурье:

$$= \frac{\lambda}{4} \int d^4x \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4k_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 + m^2} \chi(k_1) \chi(k_2) e^{ik_1x} e^{ik_2x}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4k_2}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta(k_1 + k_2) \Sigma^{(1)} \chi(k_1) \chi(k_2)$$

$$\Sigma^{(1)} = \frac{\lambda}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 + m^2}$$

Fish:



$$-\frac{a^2 \lambda^2}{4} \int d^4x d^4y \chi(x) G(x-y) \chi(y) G(y-x)$$

$$= -\frac{a^2 \lambda^2}{4} \int d^4x d^4y \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4k_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} \frac{e^{ip_1(x-y)}}{p_1^2 + m^2} \frac{e^{ip_2(y-x)}}{p_2^2 + m^2} \chi(k_1) \chi(k_2) e^{ik_1x + ik_2y}$$

$$= -\frac{a^2 \lambda^2}{4} \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4k_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta(p_1 - p_2 + k_1) (2\pi)^4 \delta(p_2 - p_1 + k_2)$$

$$\times \frac{1}{p_1^2 + m^2} \frac{1}{p_2^2 + m^2} \chi(k_1) \chi(k_2)$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta(k_1 + k_2) \Sigma^{(2)}(k_1) \chi(k_1) \chi(k_2)$$

$$\Sigma^{(2)}(k) = -\frac{a^2 \lambda^2}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 + m^2} \frac{1}{(p+k)^2 + m^2}$$

● **Напомним:**

$$\Gamma[\phi_0 + \chi(x)] = VT U_{eff}(\phi_0) + \Gamma^{(1)}[\phi_0] * \chi + \frac{1}{2!} \Gamma^{(2)}[\phi_0] * \chi * \chi + \frac{1}{3!} \Gamma^{(3)}[\phi_0] * \chi * \chi * \chi + \dots$$

$$\Gamma^{(2)}[\phi_0] = G^{-1}(k) + \Sigma^{(1)} + \Sigma^{(2)} + \dots = k^2 + m^2 + \frac{\lambda}{2} A^{(1)} - \frac{a^2 \lambda^2}{2} A^{(2)}(k) + \dots$$

Интеграл Фейнмана:

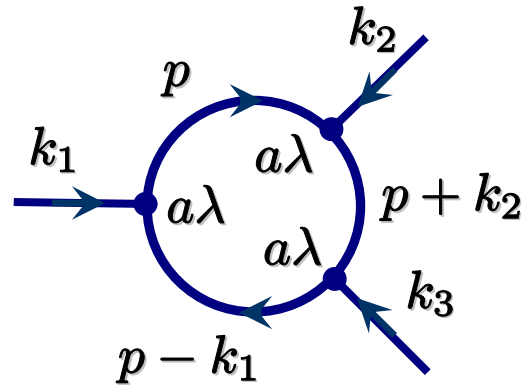
$$A^{(n)}(k_1, k_2 \dots k_n) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 + m^2} \frac{1}{(p+k_1)^2 + m^2} \dots \frac{1}{(p+k_1+\dots+k_{n-1})^2 + m^2}$$

● **Собственная энергетическая часть:**

$$\Sigma = \Sigma^{(1)} + \Sigma^{(2)}$$

● **Замечание:** вклад петлевых поправок в Σ сдвигает полюс пропагатора

● **Вершина:**



Задача: покажите, что

$$\Gamma^{(3)}(k_1, k_2, k_3) = a\lambda - 3A^{(2)}(k_1 + k_2, k_3) + (a\lambda)^3 A^{(3)}(k_1, k_2, k_3) + \dots$$

$$\Gamma^{(4)}(k_1, k_2, k_3, k_4) = \lambda - 6A^{(2)}(k_1, k_2) + \\ + 12\lambda(a\lambda)^2 A^{(3)}(k_1, k_2, k_3 + k_4) - 3A^{(4)}(k_1, k_2, k_3, k_4) + \dots$$

● **Замечание:** Расходятся только 2 интеграла:

$$\Sigma^{(1)} = \frac{\lambda}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 + m^2}$$

$$\Sigma^{(2)}(k) = -\frac{a^2 \lambda^2}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 + m^2} \frac{1}{(p+k)^2 + m^2}$$

Собирая все поправки в эффективное действие, получим:

$$\begin{aligned}
 \Gamma[\phi_0 + \chi(x)] &= VT U_{eff}(\phi_0) + \Gamma^{(1)}[\phi_0] * \chi + \frac{1}{2!} \Gamma^{(2)}[\phi_0] * \chi * \chi + \frac{1}{3!} \Gamma^{(3)}[\phi_0] * \chi * \chi * \chi + \dots \\
 &= VT U_{eff}(\phi_0) + \frac{1}{2!} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[k^2 + m^2 + \frac{1}{2} \lambda A^{(1)} - \frac{1}{2} (a\lambda)^2 A^{(2)} \right] \chi(k) \chi(-k) \\
 &+ \frac{1}{3!} \left(a\lambda - \frac{3}{2} a\lambda^2 A^{(2)} \right) \int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_3}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta(k_1 + k_2 + k_3) \chi(k_1) \chi(k_2) \chi(k_3) \\
 &+ \frac{1}{4!} \left(\lambda - \frac{3}{2} \lambda^2 A^{(2)} \right) \int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \dots \frac{d^4 k_4}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta(k_1 + \dots + k_4) \chi(k_1) \dots \chi(k_4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= VT U_{eff} + \int d^4 x \left\{ \frac{1}{2} \chi(x) \left[-\partial^2 + m^2 + \frac{1}{2} \lambda A^{(1)} - \frac{1}{2} (a\lambda)^2 A^{(2)} \right] \chi(x) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{3!} \left[\lambda - \frac{3}{2} \lambda^2 A^{(2)} \right] a \chi(x)^3 + \frac{1}{4!} \left[\lambda - \frac{3}{2} \lambda^2 A^{(2)} \right] \chi(x)^4 \right\}
 \end{aligned}$$

● **Физическая масса:** $m_{phys}^2 = m^2 + \frac{1}{2} \lambda A^{(1)} - \frac{1}{2} (a\lambda)^2 A^{(2)}$

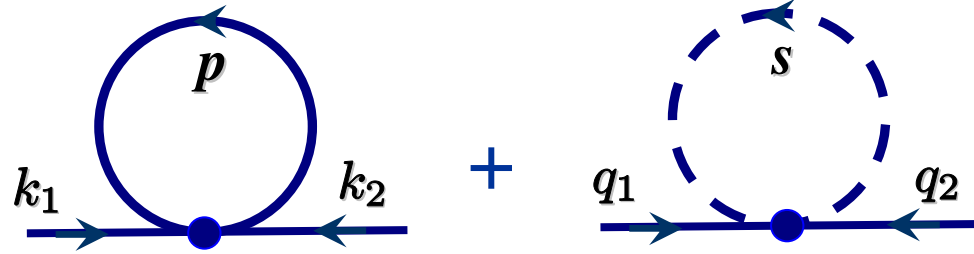
● **Физическая константа связи:** $\lambda_{phys} = \lambda - \frac{3}{2} \lambda^2 A^{(2)}$

Регуляризация Паули-Вилларса

● **Задача:** смягчить или убрать расходимость

Вклад полей регуляторов

$$S[\varphi] \rightarrow S[\varphi(x)] + S_R[\Phi]$$



$$= \int d^4x \left(\frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2 + U(\varphi) \right) + \frac{1}{2} \int d^4x \left((\partial_\mu \Phi)^2 + U''(\varphi) \Phi^2 + M^2 \Phi^2 \right)$$

● **Вторая вариация действия:**

$$\Phi_0 = 0, \quad M^2 \gg m^2 = U''(\varphi)$$

$$\delta^2 S = \frac{1}{2} \int d^4x \delta\varphi (-\partial_\mu^2 + m^2) \delta\varphi + \frac{1}{2} \int d^4x \delta\Phi (-\partial_\mu^2 + m^2 + M^2) \delta\Phi$$

Предположение: поле Φ обладает аномальными свойствами, из-за которых его функциональный детерминант дает вклад с противоположным знаком:

$$\Gamma[\varphi] = S[\varphi] + S_R[\Phi] + \frac{1}{2} \ln \det [-\partial_\mu^2 + m^2] - \frac{1}{2} \ln \det [-\partial_\mu^2 + m^2 + M^2]$$

$$\Sigma^{(1)} = \frac{\lambda}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left(\frac{1}{p^2 + m^2} - \frac{1}{p^2 + m^2 + M^2} \right) = \frac{\lambda}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left(\frac{M^2}{(p^2 + m^2)(p^2 + m^2 + M^2)} \right)$$

! $\sim \ln p, \quad p \rightarrow \infty$

Задача: покажите, что такая регуляризация делает конечной диаграмму «рыба»

• **Несколько полей-регуляторов:** $\Sigma^{(1)} = \frac{\lambda}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left(\frac{1}{p^2 + m^2} - \sum_i \frac{C_i}{p^2 + m^2 + M_i^2} \right)$

Разложение по обратным большим импульсам:

$$\begin{aligned} \frac{1}{p^2 (1 + m^2/p^2)} - \sum_i \frac{C_i}{p^2 (1 + m^2/p^2 + M_i^2/p^2)} &\approx \frac{1}{p^2} - \frac{m^2}{p^4} - \sum_i C_i \left(\frac{1}{p^2} - \frac{m^2}{p^4} - \frac{M_i^2}{p^4} \right) \\ &\approx \frac{1}{p^2} - \frac{\sum_i C_i}{p^2} - \frac{m^2}{p^4} + \frac{m^2}{p^4} \sum_i C_i + \frac{\sum_i C_i M_i^2}{p^4} + \dots \end{aligned}$$

• **Расходимости сокращаются, если:** $\sum_i C_i = 1, \quad \sum_i C_i M_i^2 = 0,$

Например: $C_1 = C_2 = 1, \quad C_3 = -1; \quad M_1 = M_2 = M, \quad M_3 = \sqrt{2}M$

Вычисление интегралов

Регуляризованный интеграл:

Tadpole: $z = 1$

Fish: $z = 2$

$$I_z(m^2) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p^2 + m^2)^z}$$

$$t = p^2/m^2$$

$$I_z(m^2) = \frac{2\pi^2}{(2\pi)^4} \int dp p^3 \frac{1}{m^{2z} (1 + p^2/m^2)^z} = \frac{m^{-2z}}{16\pi^2} \int dp^2 p^2 \frac{1}{(1 + p^2/m^2)^z}$$

$$= \frac{(m^2)^{2-z}}{16\pi^2} \int_0^\infty \frac{dt t}{(1+t)^z}$$

β -функция (математическая):

$$\beta(a, b) \equiv \int_0^1 dt t^{a-1} (1-t)^{b-1} = \int_0^\infty \frac{dt t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}} = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

Γ -функция (математическая):

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty dt e^{-t} t^{a-1}$$

$$I_z(m^2) = \frac{(m^2)^{2-z}}{16\pi^2} \beta(2, z-2) = \frac{(m^2)^{2-z}}{16\pi^2} \frac{\Gamma(2)\Gamma(z-2)}{\Gamma(z)} = \frac{(m^2)^{2-z}}{16\pi^2} \frac{\Gamma(z-2)}{\Gamma(z)}$$

Рассмотрим $z = 1 + \varepsilon$, $\varepsilon \ll 1$

$$I_z(m^2) = \frac{(m^2)^{2-z} \Gamma(z-2)}{16\pi^2 \Gamma(z)}$$

$$\frac{\Gamma(z-2)}{\Gamma(z)} = \frac{\Gamma(\varepsilon-1)}{\Gamma(\varepsilon+1)} = \frac{\Gamma(\varepsilon-1)}{\Gamma(\varepsilon-1)\varepsilon(\varepsilon-1)} = \frac{1}{\varepsilon(\varepsilon-1)} \approx -\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}$$

$$(m^2)^{2-z} \rightarrow (m^2)^{1-\varepsilon} = e^{(1-\varepsilon)\ln(m^2)} \approx m^2(1 - \varepsilon \ln m^2)$$

Регуляризованный интеграл:

$$I_{1+\varepsilon}(m^2) \approx -\frac{m^2}{16\pi^2} \frac{1}{\varepsilon} (1 - \varepsilon \ln m^2 + \varepsilon)$$

Паули-Вилларс:

$$I(m^2) \rightarrow I(m^2) - \sum_i C_i I(m^2 + M_i^2)$$

$$\sum_i C_i = 1$$

$$\sum_i C_i M_i^2 = 0$$

$$-\frac{m^2}{16\pi^2} \frac{1}{\varepsilon} (1 - \varepsilon \ln m^2 + \varepsilon) + \frac{1}{16\pi^2} \sum_i \frac{C_i (m^2 + M_i^2)}{\varepsilon} (1 - \varepsilon \ln(m^2 + M_i^2) + \varepsilon)$$



$$\frac{m^2}{16\pi^2} \ln m^2 - \frac{m^2}{16\pi^2} \sum_i C_i \ln M_i^2 \equiv \frac{m^2}{16\pi^2} \ln m^2 - \frac{m^2}{16\pi^2} \ln \Lambda^2 = \frac{m^2}{16\pi^2} \ln \frac{m^2}{\Lambda^2}$$

Это выражение ничего не напоминает?

Рассмотрим $z = 2 + \varepsilon$, $\varepsilon \ll 1$

$$I_z(m^2) = \frac{(m^2)^{2-z}}{16\pi^2} \frac{\Gamma(z-2)}{\Gamma(z)}$$

● $\frac{\Gamma(z-2)}{\Gamma(z)} = \frac{\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(2+\varepsilon)} = \frac{\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(\varepsilon)\varepsilon(1+\varepsilon)} = \frac{1}{\varepsilon(1+\varepsilon)} \approx \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$

● $(m^2)^{2-z} \rightarrow (m^2)^{-\varepsilon} = e^{-\varepsilon \ln(m^2)} \approx 1 - \varepsilon \ln m^2$

● Регуляризованный интеграл:

$$I_{2+\varepsilon}(m^2) \approx \frac{1}{16\pi^2} \frac{1}{\varepsilon} (1 - \varepsilon \ln m^2 - \varepsilon)$$

● Паули-Вилларс:

$$I(m^2) \rightarrow I(m^2) - \sum_i C_i I(m^2 + M_i^2)$$

$$\begin{aligned} \sum_i C_i &= 1 \\ \sum_i C_i M_i^2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{16\pi^2} \frac{1}{\varepsilon} (1 - \varepsilon \ln m^2 - \varepsilon) - \frac{1}{16\pi^2} \sum_i \frac{C_i}{\varepsilon} (1 - \varepsilon \ln(m^2 + M_i^2) - \varepsilon)$$



$$-\frac{1}{16\pi^2} \ln m^2 + \frac{1}{16\pi^2} \sum_i C_i \ln(m^2 + M_i^2) \approx -\frac{1}{16\pi^2} \ln m^2 + \frac{1}{16\pi^2} \sum_i C_i \ln M_i^2$$

$$\equiv -\frac{1}{16\pi^2} \ln m^2 + \frac{1}{16\pi^2} \ln \Lambda^2 = \boxed{-\frac{1}{16\pi^2} \ln \frac{m^2}{\Lambda^2}} \longleftarrow \boxed{I_2(m^2)}$$

Вычисление интегралов

• Параметризация Фейнмана:

$$A^{(n)}(k_1, k_2 \dots k_n) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 + m^2} \frac{1}{(p+k_1)^2 + m^2} \dots \frac{1}{(p+k_1+\dots+k_{n-1})^2 + m^2}$$



$$A^{(2)}(k, -k) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{[p^2 + m^2][(p+k)^2 + m^2][(p-k)^2 + m^2]}$$

Вспомогательный интеграл:

$$\frac{1}{a_1 a_2 \dots a_n} = (n-1)! \int_0^1 dx_1 dx_2 \dots dx_n \frac{\delta(x_1 + \dots + x_n - 1)}{(a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n)^n}$$

В частности (n=2)

$$\frac{1}{a_1 a_2} = \int_0^1 \frac{dx}{[a_1 x + a_2(1-x)]^2}$$



$$A^{(2)}(k, -k) = \int_0^1 dx \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{[p^2 + m^2 + ((k+p)^2 + m^2 - (p^2 + m^2))x]^2}$$

$$\boxed{p' = p + kx} = \int_0^1 dx \int \frac{d^4 p'}{(2\pi)^4} \frac{1}{[p'^2 + k^2 x(1-x) + m^2]^2} = \int_0^1 dx I_2(k^2 x(1-x) + m^2)$$

Регуляризованный интеграл:

$$A^{(2)}(k, -k) = -\frac{1}{16\pi^2} \int_0^1 dx \ln \frac{k^2 x(1-x) + m^2}{\Lambda^2} = -\frac{1}{16\pi^2} \int_0^1 dx \left\{ \ln \frac{m^2}{\Lambda^2} + \ln \frac{k^2}{4m^2} + \ln \left[4x(1-x) + \frac{4m^2}{k^2} \right] \right\}$$

$$-\frac{1}{16\pi^2} \int_0^1 dx \left(\ln \frac{m^2}{\Lambda^2} + \ln \frac{k^2}{4m^2} \right) - \frac{1}{16\pi^2} \int_0^1 dx \ln \left[4x(1-x) + \frac{4m^2}{k^2} \right]$$

$$-\frac{1}{16\pi^2} \left(\ln \frac{m^2}{\Lambda^2} + \ln \frac{k^2}{4m^2} \right)$$

$$\int_0^1 dt \ln(a^2 - t^2) = -2 + \ln(a^2 - 1) + a \ln \frac{a+1}{a-1}$$

$$t = 2x - 1; \quad \int_{-1}^1 \rightarrow 2 \int_0^1$$

$$a^2 = 1 + 4m^2/k^2 > 0$$

$$-\frac{1}{16\pi^2} \left(-2 + \ln \frac{4m^2}{k^2} + \sqrt{1 + \frac{4m^2}{k^2}} \ln \frac{\sqrt{1 + \frac{4m^2}{k^2}} + 1}{\sqrt{1 + \frac{4m^2}{k^2}} - 1} \right)$$

● Вклад «рыбы»:

$$\Sigma^{(2)} = \frac{\lambda^2 a^2}{32\pi^2} \left[\ln \frac{m^2}{\Lambda^2} - 2 + \sqrt{1 + \frac{4m^2}{k^2}} \ln \frac{\sqrt{1 + \frac{4m^2}{k^2}} + 1}{\sqrt{1 + \frac{4m^2}{k^2}} - 1} \right]$$

● **Напомним:**

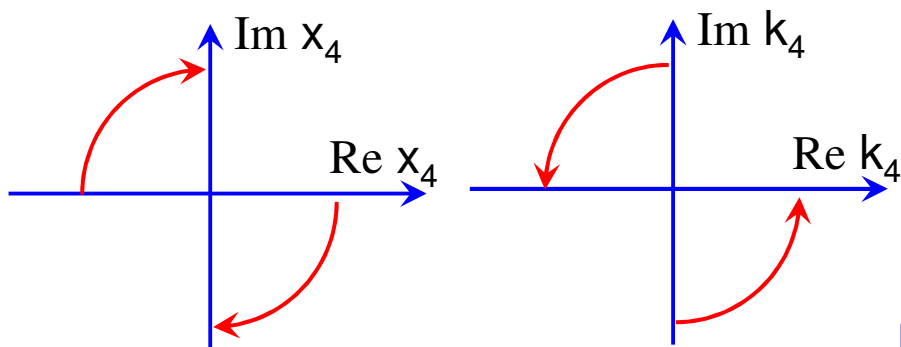
$$\Gamma^{(2)}[\phi_0] = G^{-1}(k) + \Sigma^{(1)} + \Sigma^{(2)} + \dots = k^2 + m_0^2 + \frac{\lambda}{2} A^{(1)} - \frac{a^2 \lambda^2}{2} A^{(2)}(k) + \dots$$

● **Физическая регуляризованная масса (в Евклидовом пространстве \mathbb{R}^4):**

$$m_{phys}^2 = m_0^2 + \frac{\lambda m^2}{32\pi^2} \ln \frac{m^2}{\Lambda^2} + \frac{\lambda^2 a^2}{32\pi^2} \left[\ln \frac{m^2}{\Lambda^2} - 2 + \sqrt{1 + \frac{4m^2}{k^2}} \ln \frac{\sqrt{1 + \frac{4m^2}{k^2}} + 1}{\sqrt{1 + \frac{4m^2}{k^2}} - 1} \right]$$

● **Задача – перейти из \mathbb{R}^4 в \mathbb{M}^4 :** $x_4 = it, \quad x_\mu x^\mu = -t^2 + x_i^2 \rightarrow x_4^2 + x_i^2$

● **Аналитическое продолжение:** $x_4 \rightarrow |x_4|e^{i\alpha}, \quad k_4 \rightarrow |k_4|e^{-i\alpha}$



$$d^4x \rightarrow id^4x_E; \quad d^4k \rightarrow id^4k_E$$

$$k_\mu = (k_4, \vec{k}); \quad k_4 = -ik_0$$

$$k_\mu k^\mu = -k_0^2 + \vec{k}^2 \rightarrow k_4^2 + \vec{k}^2$$

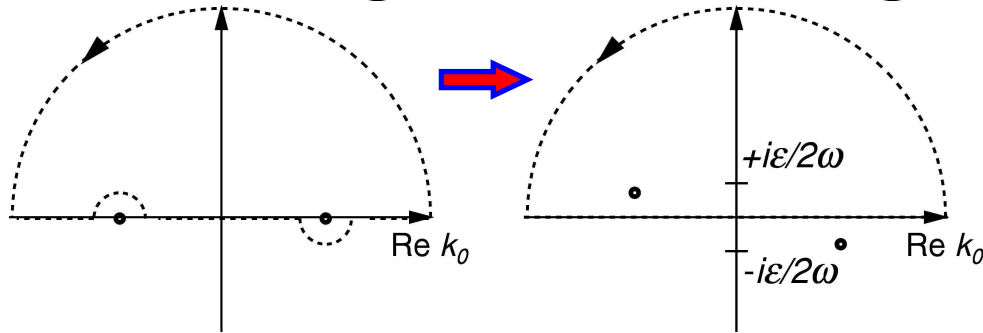
$$k_4 x_4 \rightarrow k_0 t; \quad e^{ik_\mu x^\mu} \rightarrow e^{ik_\mu x^\mu}$$

Замечание:

Преобразование Фурье инвариантно относительно поворота Вика

Евклидов пропагатор:

$$G_E(x) = \int_{\text{Im } k_0} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik_\mu x^\mu}}{k^2 + m^2}$$



Пропагатор в M⁴:

$$\rightarrow -i \int_{k_0} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik_\mu x^\mu}}{-k_0^2 + \vec{k}^2 + m^2}$$

Pole at: $k_0 = \pm \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$

$$G(x) = -i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik_\mu x^\mu}}{k_0^2 + \vec{k}^2 + m^2 - i\epsilon}$$

При $t > 0$ простой вычет в $k_0 \equiv \omega = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$

$$\rightarrow G(x) = -\frac{1}{2\omega(2\pi)^3} \int d^3 \vec{k} e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)}$$

Однопетлевая поправка в M⁴:

$$k^2 = |k^2| e^{-i\pi}$$

$$\alpha = \arctan \sqrt{\frac{4m^2}{|k^2|} - 1}$$

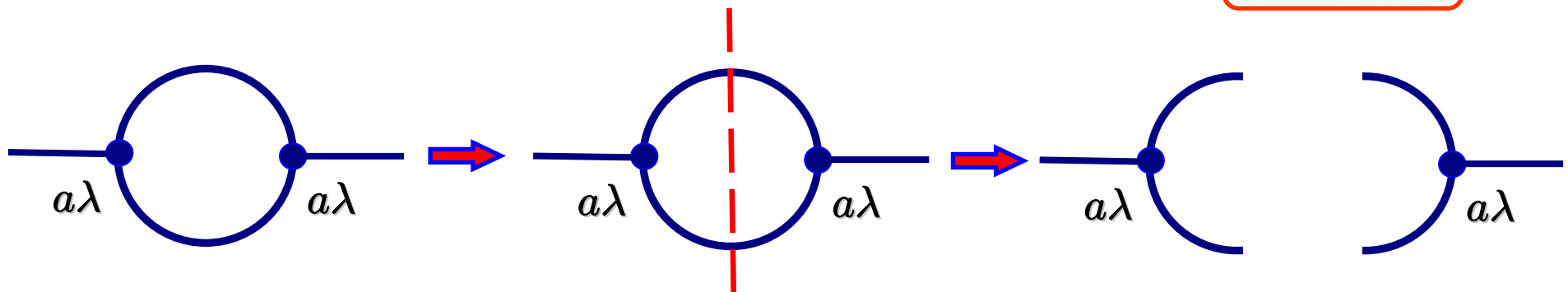
$$\ln \frac{\sqrt{1 + \frac{4m^2}{k^2}} + 1}{\sqrt{1 + \frac{4m^2}{k^2}} - 1} \rightarrow \ln \frac{i\sqrt{\frac{4m^2}{|k^2|} - 1} + 1}{i\sqrt{\frac{4m^2}{|k^2|} - 1} - 1} = \ln(-e^{2i\alpha}) = -i\pi + 2i\alpha$$

● **Физический регуляризованный пропагатор (в пространстве M^4):**

$$\mathcal{G}^{-1}(k^2) = -|k^2| + m_0^2 + \frac{\lambda m^2}{32\pi^2} \ln \frac{m^2}{\Lambda^2} + \frac{\lambda^2 a^2}{32\pi^2} \left\{ \ln \frac{m^2}{\Lambda^2} - 2 + \pi \sqrt{\frac{4m^2}{|k^2|} - 1} - 1 - 2 \sqrt{\frac{4m^2}{|k^2|} - 1} \arctan \sqrt{\frac{4m^2}{|k^2|} - 1} \right\} = -|k^2| + m_0^2 + \Sigma^{(1)} + \Sigma^{(2)}(k^2)$$

Замечание:

● **Пропагатор остается действительным при условии** $|k^2| < 4m^2$



● **Порог рождения (аннигиляции):** $k = 2m$

Перенормировка

• **Замечание:** Физическая масса соответствует полюсу пропагатора:

$$-m^2 + m_0^2 + \Sigma^{(1)} + \Sigma^{(2)}(-m^2) = 0 \rightarrow \mathcal{G}^{-1}(k^2) = k^2 + m_0^2 + \Sigma^{(1)} + \Sigma^{(2)}(k^2)$$



• Перенормированный обратный пропагатор:

$$\mathcal{G}^{-1}(k^2) = k^2 + m^2 + \Sigma^{(2)}(k^2) - \Sigma^{(2)}(-m^2)$$

Конечная часть:

$$\Sigma(k^2) = \Sigma(-m^2) + \left. \frac{\partial \Sigma(k^2)}{\partial k^2} \right|_{k^2=-m^2} (k^2 + m^2) + \dots$$

$$\mathcal{G}^{-1}(k^2) = \left(1 + \left. \frac{\partial \Sigma(k^2)}{\partial k^2} \right|_{k^2=-m^2} + \dots \right) (k^2 + m^2) = Z(k^2 + m^2)$$

• **Мультипликативная перенормировка:** $(k^2 + m^2) \rightarrow Z(k^2 + m^2)$

Вычисление интегралов

• Параметризация Фейнмана:

$$A^{(n)}(k_1, k_2 \dots k_n) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 + m^2} \frac{1}{(p+k_1)^2 + m^2} \dots \frac{1}{(p+k_1+\dots+k_{n-1})^2 + m^2}$$



$$A^{(2)}(k) \rightarrow \Sigma^{(2)}(k) = -\frac{a^2 \lambda^2}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{[p^2 + m^2]} \frac{1}{[(p+k)^2 + m^2]}$$

Вспомогательный интеграл:

$$\frac{1}{a_1 a_2 \dots a_n} = (n-1)! \int_0^1 dx_1 dx_2 \dots dx_n \frac{\delta(x_1 + \dots + x_n - 1)}{(a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n)^n}$$

В частности (n=2)

$$\frac{1}{a_1 a_2} = \int_0^1 \frac{dx}{[a_1 x + a_2 (1-x)]^2}$$

$$a_1 = (p+k)^2 + m^2$$

$$a_2 = p^2 + m^2$$



$$\Sigma^{(2)}(k) \propto \int_0^1 dx \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{[p^2 + m^2 + ((k+p)^2 + m^2 - (p^2 + m^2))x]^2}$$

$$\boxed{p' = p + kx} = \int_0^1 dx \int \frac{d^4 p'}{(2\pi)^4} \frac{1}{[p'^2 + k^2 x(1-x) + m^2]^2} = \int_0^1 dx I_2(k^2 x(1-x) + m^2)$$

Регуляризованный интеграл:

$$A^{(2)}(k, -k) = -\frac{1}{16\pi^2} \int_0^1 dx \ln \frac{k^2 x(1-x) + m^2}{\Lambda^2} = -\frac{1}{16\pi^2} \int_0^1 dx \left\{ \ln \frac{m^2}{\Lambda^2} + \ln \frac{k^2}{4m^2} + \ln \left[4x(1-x) + \frac{4m^2}{k^2} \right] \right\}$$

$$-\frac{1}{16\pi^2} \int_0^1 dx \left(\ln \frac{m^2}{\Lambda^2} + \ln \frac{k^2}{4m^2} \right) - \frac{1}{16\pi^2} \int_0^1 dx \ln \left[4x(1-x) + \frac{4m^2}{k^2} \right]$$

$$-\frac{1}{16\pi^2} \left(\ln \frac{m^2}{\Lambda^2} + \ln \frac{k^2}{4m^2} \right)$$

$$\int_0^1 dt \ln(a^2 - t^2) = -2 + \ln(a^2 - 1) + a \ln \frac{a+1}{a-1}$$

$$t = 2x - 1; \quad \int_{-1}^1 \rightarrow 2 \int_0^1$$

$$a^2 = 1 + 4m^2/k^2 > 0$$

$$-\frac{1}{16\pi^2} \left(-2 + \ln \frac{4m^2}{k^2} + \sqrt{1 + \frac{4m^2}{k^2}} \ln \frac{\sqrt{1 + \frac{4m^2}{k^2}} + 1}{\sqrt{1 + \frac{4m^2}{k^2}} - 1} \right)$$

● Вклад «рыбы»:

$$\Sigma^{(2)} = \frac{\lambda^2 a^2}{32\pi^2} \left[\ln \frac{m^2}{\Lambda^2} - 2 + \sqrt{1 + \frac{4m^2}{k^2}} \ln \frac{\sqrt{1 + \frac{4m^2}{k^2}} + 1}{\sqrt{1 + \frac{4m^2}{k^2}} - 1} \right]$$

● **Напомним:**

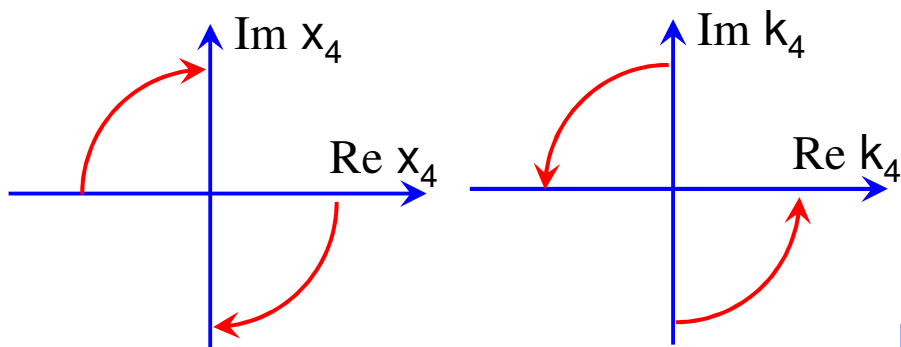
$$\Gamma^{(2)}[\phi_0] = G^{-1}(k) + \Sigma^{(1)} + \Sigma^{(2)} + \dots = k^2 + m_0^2 + \frac{\lambda}{2} A^{(1)} - \frac{a^2 \lambda^2}{2} A^{(2)}(k) + \dots$$

● **Физическая регуляризованная масса (в Евклидовом пространстве \mathbb{R}^4):**

$$m_{phys}^2 = m_0^2 + \frac{\lambda m^2}{32\pi^2} \ln \frac{m^2}{\Lambda^2} + \frac{\lambda^2 a^2}{32\pi^2} \left[\ln \frac{m^2}{\Lambda^2} - 2 + \sqrt{1 + \frac{4m^2}{k^2}} \ln \frac{\sqrt{1 + \frac{4m^2}{k^2}} + 1}{\sqrt{1 + \frac{4m^2}{k^2}} - 1} \right]$$

● **Задача – перейти из \mathbb{R}^4 в \mathbb{M}^4 :** $x_4 = it, \quad x_\mu x^\mu = -t^2 + x_i^2 \rightarrow x_4^2 + x_i^2$

● **Аналитическое продолжение:** $x_4 \rightarrow |x_4|e^{i\alpha}, \quad k_4 \rightarrow |k_4|e^{-i\alpha}$



$$d^4 x \rightarrow id^4 x_E; \quad d^4 k \rightarrow id^4 k_E$$

$$k_\mu = (k_4, \vec{k}); \quad k_4 = -ik_0$$

$$k_\mu k^\mu = -k_0^2 + \vec{k}^2 \rightarrow k_4^2 + \vec{k}^2$$

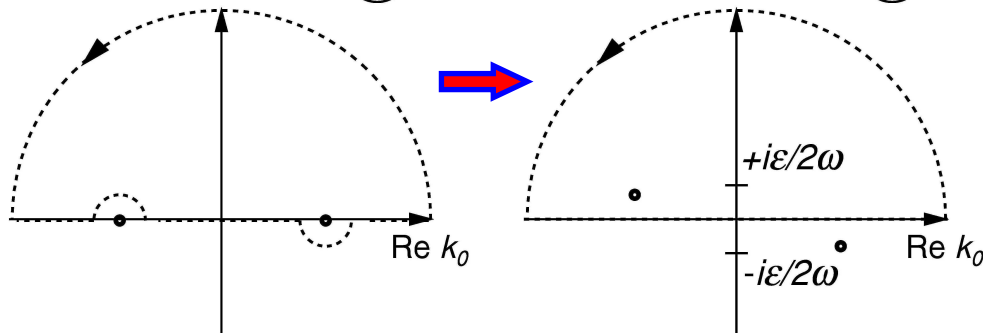
$$k_4 x_4 \rightarrow k_0 t; \quad e^{ik_\mu x^\mu} \rightarrow e^{ik_\mu x^\mu}$$

Замечание:

Преобразование Фурье инвариантно относительно поворота Вика

Евклидов пропагатор:

$$G_E(x) = \int_{\text{Im } k_0} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik_\mu x^\mu}}{k^2 + m^2}$$



Пропагатор в M^4:

$$\rightarrow -i \int_{k_0} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik_\mu x^\mu}}{-k_0^2 + \vec{k}^2 + m^2}$$

Pole at: $k_0 = \pm \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$

$$G(x) = -i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik_\mu x^\mu}}{k_0^2 + \vec{k}^2 + m^2 - i\epsilon}$$

При $t > 0$ простой вычет в $k_0 \equiv \omega = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$

$$\rightarrow G(x) = -\frac{1}{2\omega(2\pi)^3} \int d^3 \vec{k} e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)}$$

Однопетлевая поправка в M^4:

$$k^2 = |k^2| e^{-i\pi}$$

$$\alpha = \arctan \sqrt{\frac{4m^2}{|k^2|} - 1}$$

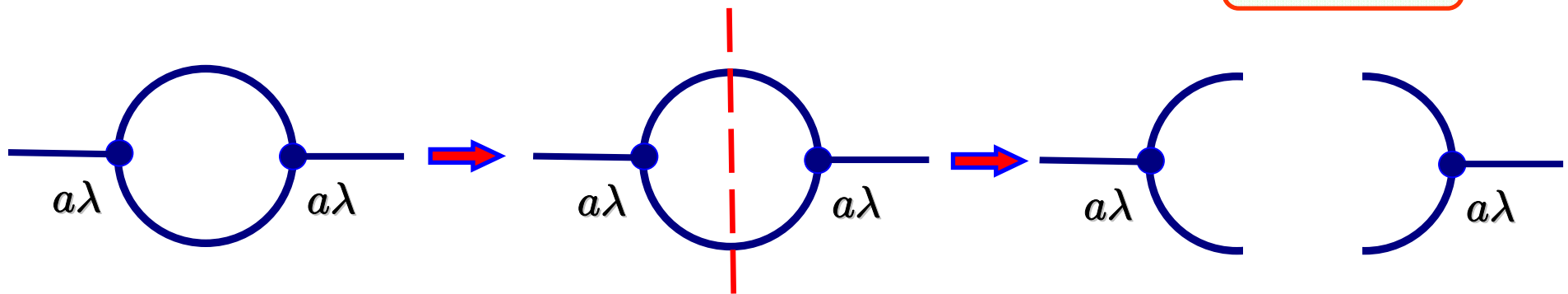
$$\ln \frac{\sqrt{1 + \frac{4m^2}{k^2}} + 1}{\sqrt{1 + \frac{4m^2}{k^2}} - 1} \rightarrow \ln \frac{i\sqrt{\frac{4m^2}{|k^2|} - 1} + 1}{i\sqrt{\frac{4m^2}{|k^2|} - 1} - 1} = \ln(-e^{2i\alpha}) = -i\pi + 2i\alpha$$

● **Физический регуляризованный пропагатор (в пространстве M^4):**

$$\mathcal{G}^{-1}(k^2) = -|k^2| + m_0^2 + \frac{\lambda m^2}{32\pi^2} \ln \frac{m^2}{\Lambda^2} + \frac{\lambda^2 a^2}{32\pi^2} \left\{ \ln \frac{m^2}{\Lambda^2} - 2 + \pi \sqrt{\frac{4m^2}{|k^2|} - 1} - 1 - 2 \sqrt{\frac{4m^2}{|k^2|} - 1} \arctan \sqrt{\frac{4m^2}{|k^2|} - 1} \right\} = -|k^2| + m_0^2 + \Sigma^{(1)} + \Sigma^{(2)}(k^2)$$

Замечание:

● **Пропагатор остается действительным при условии** $|k^2| < 4m^2$



● **Порог рождения (аннигиляции):** $k = 2m$

Перенормировка

• **Замечание:** Физическая масса соответствует полюсу пропагатора:

$$-m^2 + m_0^2 + \Sigma^{(1)} + \Sigma^{(2)}(-m^2) = 0 \rightarrow \mathcal{G}^{-1}(k^2) = k^2 + m_0^2 + \Sigma^{(1)} + \Sigma^{(2)}(k^2)$$



• Перенормированный обратный пропагатор:

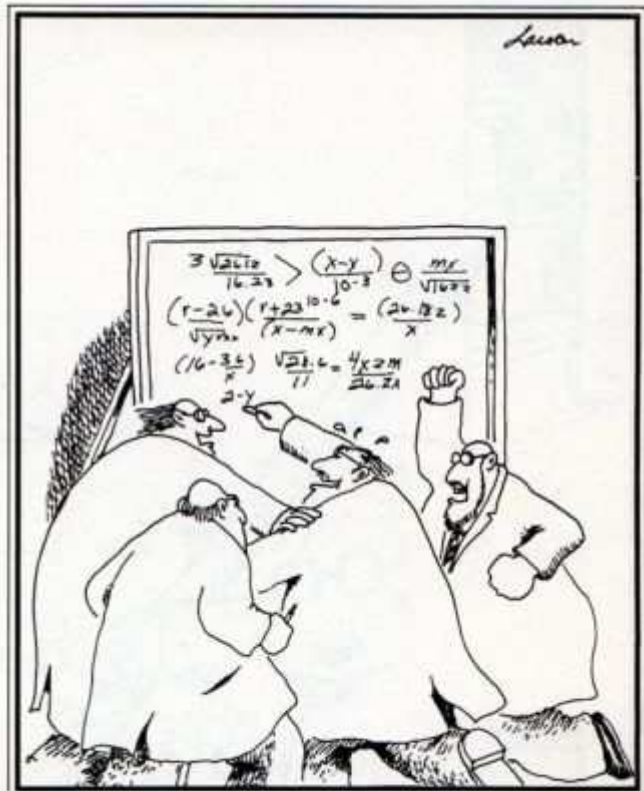
$$\mathcal{G}^{-1}(k^2) = k^2 + m^2 + \Sigma^{(2)}(k^2) - \Sigma^{(2)}(-m^2)$$

Конечная часть:

$$\Sigma(k^2) = \Sigma(-m^2) + \left. \frac{\partial \Sigma(k^2)}{\partial k^2} \right|_{k^2=-m^2} (k^2 + m^2) + \dots$$

$$\mathcal{G}^{-1}(k^2) = \left(1 + \left. \frac{\partial \Sigma(k^2)}{\partial k^2} \right|_{k^2=-m^2} + \dots \right) (k^2 + m^2) = Z(k^2 + m^2)$$

• **Мультипликативная перенормировка:** $(k^2 + m^2) \rightarrow Z(k^2 + m^2)$

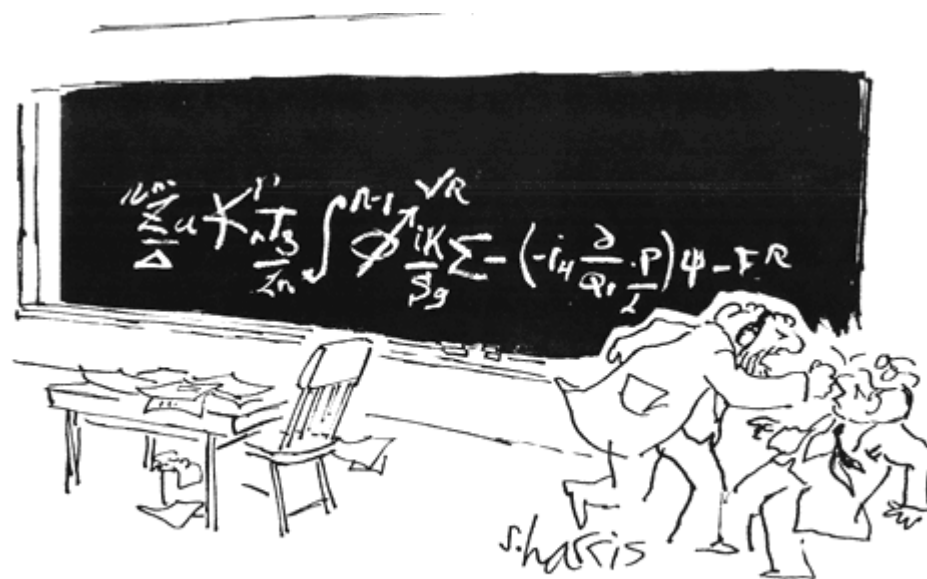


"Go for it, Sidney! You've got it! You've got it! Good hands! Don't choke!"

Work in progress,
more quantum theory around!

**Part II: квантовая теория фермионов, суперсимметрия
квантование калибровочных полей**

Надеюсь, все вам теперь стало все понятно?
Объяснить еще раз?



"You want proof? I'll give you proof!"