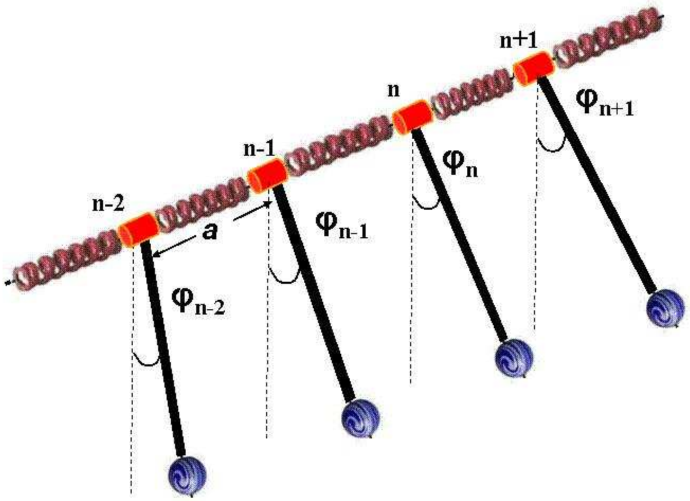
Классические поля



$$T = \frac{I}{2}\sum_n \left(\frac{\partial\phi(x_n,t)}{\partial t}\right)^2$$

$$U = \frac{\alpha}{2}\sum_n [\phi(x_{n+1},t) - \phi(x_n,t)]^2 + \sum_n V[x_n,t]$$

$$V[x_n] = -mgl\,(1-\cos\phi(x_n,t))$$

$$\boxed{\ddot{\phi}_n - \alpha(\phi_{n+1} - 2\phi_n + \phi_{n-1}) = -\sin\phi_n}$$

- **Разложение в ряд:**

$$\begin{cases} \phi(x_{n\pm 1}) \approx \phi(x_n) \pm a\dfrac{\partial u(x_n)}{\partial x} + \dfrac{a^2}{2}\dfrac{\partial^2\phi(x_n)}{\partial x^2} \pm \dfrac{a^3}{3!}\dfrac{\partial^3\phi(x_n)}{\partial x^3} + \dfrac{a^4}{4!}\dfrac{\partial^4\phi(x_n)}{\partial x^4} + \dots \\ \phi(x_{n+1}) - 2\phi(x_n) + \phi(x_{n-1}) \approx a^2\dfrac{\partial^2\phi(x_n)}{\partial x^2} \end{cases}$$

$$\boxed{\phi_{tt} - \alpha a^2\phi_{xx} + mgl\sin\phi = 0}$$

- **Лагранжиан:**

$$\boxed{L = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - U(\phi); \qquad U(\phi) = 1-\cos\phi}$$

Квантование полей

- **Действие свободного поля:** $$S = \int d^3x dt \left[\frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi(\vec{x},t))^2 - \frac{1}{2} m^2 \varphi(\vec{x},t)^2\right]$$

- ***Диагонализация:*** $$\varphi(\vec{x},t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p}\vec{x}} \varphi(\vec{p},t)$$

Масса

Поле φ является действительным, $\varphi(\vec{p},t) = \varphi^*(-\vec{p},t)$

$$S = \frac{1}{2}\int_0^T dt \int_V d^3x \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial \vec{x}}\right)^2 - m^2\varphi^2\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\int dt d^3x \frac{d^3p_1}{(2\pi)^3}\frac{d^3p_2}{(2\pi)^3} e^{i(\vec{p}_1+\vec{p}_2)\vec{x}} \left[\dot{\varphi}(\vec{p}_1,t)\dot{\varphi}(\vec{p}_2,t) + \vec{p}_1\vec{p}_2\varphi(\vec{p}_1,t)\varphi(\vec{p}_2,t) - m^2\varphi(\vec{p}_1,t)\varphi(\vec{p}_2,t)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\int dt \frac{d^3p}{(2\pi)}\left[\dot{\varphi}(\vec{p},t)\dot{\varphi}(-\vec{p},t) - (\vec{p}^2 + m^2)\varphi(\vec{p},t)\varphi(-\vec{p},t)\right]$$

$$\omega^2 = \vec{p}^{\,2} + m^2$$

$$= \frac{1}{2}\int dt \frac{d^3p}{(2\pi)}\left[|\dot{\varphi}(\vec{p},t)|^2 - \omega^2|\varphi(\vec{p},t)|^2\right]$$

Гармонические осцилляторы!

Энергия вакуума и эффект Казимира

- **Энергия нулевых колебаний:**

$$\frac{E_0}{V} = \frac{1}{2}\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\omega(\vec{p}) \to \infty$$

- ***Упрощенная модель в 1+1 измерениях:***

$$S = \frac{1}{2}\int d^2x \left[(\partial_\nu\varphi)(\partial^\nu\varphi) - \cancel{m^2\varphi^2}\right]$$

$$\varphi(0,t) = \varphi(L,t) = 0$$

Вакуум: $\varphi_0 = 0$

Флуктуации над вакуумом: $\varphi = \varphi_0 + \delta\varphi$

$$\Box(\delta\varphi) = (\partial_t^2 - \partial_x^2)\delta\varphi = 0 \Rightarrow \delta\varphi(x,t) = \phi(x)e^{-i\omega t}, \quad \phi(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin k_n x$$

$$k_n = \pi n/L, \quad \omega_n = |k_n|, \quad n \in \mathbb{Z}$$

- **Энергия вакуумных флуктуаций:**

$$E_0 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\omega_n}{2} = \frac{\pi}{2L}\sum_{n=1}^{\infty} n \to \infty$$

Энергия вакуума и эффект Казимира

Трюк: регуляризация

$$E_0 \to E_\alpha = \frac{\pi}{2L}\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-\alpha k_n} = \frac{\pi}{2L}\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-\frac{\alpha\pi n}{L}}$$

$\varepsilon = \alpha\pi/L$ ⟹

$$E_\alpha = \frac{\pi}{2L}\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-\varepsilon n} = \frac{\pi}{2L}\left[-\frac{d}{d\varepsilon}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\varepsilon n}\right] = \frac{\pi}{2L}\left[-\frac{d}{d\varepsilon}\left(\frac{e^{-\varepsilon}}{1-e^{-\varepsilon}}\right)\right]$$

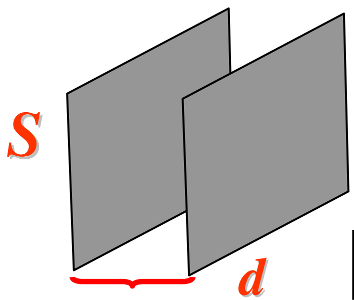
- **Регуляризованная энергия вакуума:**

$$E_\alpha = \frac{\pi}{2L}\frac{e^{\varepsilon}}{(e^{\varepsilon}-1)^2} \approx \frac{\pi}{2L\varepsilon^2} - \frac{\pi}{24L} + O(\varepsilon)$$

- **Энергия Казимира – отклонение от энергии вакуума:**

$$\boxed{\Delta E = -\frac{\pi}{24L}}$$

- **Реалистичная теория в 3d:**



$$\boxed{\Delta E = -\frac{\pi^2 S}{720L^3}}$$

$$\boxed{\Delta E = \frac{0.09235}{2R}}$$

1997 – экспериментальное подтверждение ~ 5%

Энергия вакуума: функциональный интеграл

$$\boxed{S = \frac{1}{2}\int d^2x\,\left[(\partial_\nu\varphi)(\partial^\nu\varphi) - m^2\varphi^2\right]}$$

$$Z = \int D\varphi(x,\tau)\exp\{-S_E\}$$

Евклидово действие: $$S_E = \frac{1}{2}\int_0^T d\tau\int_0^L dx\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + m^2\varphi(x,\tau)^2\right]$$

Вакуум: $\varphi_0 = 0 \Rightarrow S_0 = 0$

Флуктуации над вакуумом: $\varphi = \varphi_0 + \delta\varphi$

Вторая вариация действия описывает вклад вакуумных флуктуаций:

$$\delta^2 S_E = \frac{1}{2}\int_0^T d\tau\int_0^L dx\delta\varphi\; D^{(2)}\;\delta\varphi,$$

$$\boxed{D^{(2)} = -\partial_\tau^2 - \partial_x^2 + m^2}$$

Оператор вторых производных

Задача: найти собственные функции и собственные значения оператора $D^{(2)}$

$$D^{(2)}\psi(x,\tau) = (-\partial_\tau^2 - \partial_x^2 + m^2)\psi(x,\tau) = \lambda\psi(x,\tau)$$

$$D^{(2)}\psi(x,\tau) = (-\partial_\tau^2 - \partial_x^2 + m^2)\psi(x,\tau) = \lambda\psi(x,\tau)$$

Граничные условия: $\psi(x,0) = \psi(x,T) = 0, \quad \psi(0,\tau) = \psi(L,\tau) = 0$

- **Ортонормированные моды:**

$$\psi_{n,l}(x,t) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right)\sqrt{\frac{2}{T}}\sin\left(\frac{\pi l}{T}\tau\right), \quad n,l \in \mathbb{Z}$$

$$\delta\phi = \sum_{n,l} C_{n,l}\psi_{n,l}(\tau)$$

$$\lambda \to \lambda_{n,l} = \frac{\pi^2 l^2}{T^2} + \frac{\pi^2 n^2}{L^2} + m^2$$

$$S_E = \frac{1}{2}\sum_{n,l}^{\infty}\lambda_{n,l}C_{n,l}^2$$

$$Z = N\int\prod_{n,l} dC_{n,l}e^{-\frac{1}{2}\lambda_{n,l}C_{n,l}^2} = N'\prod_{n,l}\sqrt{\frac{1}{\lambda_{n,l}}} = N'(\det D^{(2)})^{-1/2}$$

- **Квантовая поправка :**

$$= N'\prod_{n,l}\left[\frac{\pi^2 l^2}{T^2} + \frac{\pi^2 n^2}{L^2} + m^2\right]^{-1/2}$$

Энергия Казимира

Задача: Вычислить произведение

$$Z = N' \prod_n \left[\prod_l \left(\frac{\pi^2 l^2}{T^2} + \omega_n^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \right]$$

$$\omega_n^2 = \frac{\pi^2 n^2}{L^2} + m^2$$

- **Это выражение ничего не напоминает?**

Евклидова функция Грина гармонического осциллятора:

$$\prod_l \left(\frac{\pi^2 l^2}{T^2} + \omega_n^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \sim \sqrt{\frac{\omega_n}{2\pi \sinh(\omega_n T)}} \sim e^{-\frac{1}{2}\omega_n T}$$

$$Z \sim \prod_n e^{-\frac{1}{2}\omega_n \tau} = e^{-T \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n}$$

E_0

***Замечание:* Ответ уже известен из предыдущего вычисления!**

$$E_0 = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{\pi^2 n^2}{L^2} + m^2}$$

Энергия нулевых колебаний:

Эффективный потенциал модели φ^4

$$S = \int d^4x \left[\frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)^2 - U(\varphi)\right]$$

Вакуум: $\phi_0 = 0$

Задача: найти квантовые поправки к потенциалу

$$U(\varphi) = \frac{1}{2}m^2\varphi^2 + \frac{\lambda}{4!}\varphi^4$$

- **Вопрос:** Как измерить потенциальную энергию поля?

- **Метод источников:**

$$S \to S[J] = \frac{1}{2}\int d^4x \Big[(\partial_\nu \varphi(x,t))(\partial^\nu \varphi(x,t)) - U(\varphi(x,t)) + J\varphi(x,t)\Big]$$

Вакуум: $\phi_0 \Rightarrow U'(\phi_0) = J$

Энергия вакуума: $U(\phi_0) - J\phi_0$ ***?***

***Замечание:* Экспериментально измерима не классическая энергия системы, а сумма ее классической части и квантовых поправок**

- *Евклидов производящий функционал (определение эффективного потенциала):*

$$Z(J) = \int D\varphi(x) e^{-S_E + J\star\varphi} \equiv e^{-VT(U_{eff} - J\langle\varphi\rangle)}$$

$$J\star\varphi \equiv \int d^4x\, J(x)\varphi(x)$$

Вакуумное среднее и эффективный потенциал

- **Вакуумное среднее поля φ:**

$$\langle\varphi\rangle = \frac{1}{Z(J)}\int D\varphi(x,\tau)\varphi(x,\tau)e^{-\int_0^T d\tau\int d^3x\left[\frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2+U(\varphi)-J\varphi\right]} = \frac{1}{VT}\frac{1}{Z(J)}\frac{\partial}{\partial J}Z(J)$$

- ***Флуктуации полей над вакуумом:*** $\varphi = \phi_0 + \delta\varphi\,,\quad \phi_0 = \mathrm{const}$

$$S_E - \int d^4x J\varphi = \int d^4x\left[\frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2 + U(\varphi) - J\varphi\right]$$

$$\approx \int d^4x\left[U(\phi_0) - J\cdot(\phi_0 + \cancel{\delta\varphi})\right] + \cancel{\delta S_E} + \frac{1}{2!}\delta^2 S_E + \cancel{\frac{1}{3!}\delta^3 S_E + \frac{1}{4!}\delta^4 S_E}$$

- **Квазиклассическое приближение:** $\boxed{\delta^3 S_E = \delta^4 S_E = \delta^n S_E = 0, \qquad n > 2}$

Разложение в окрестности вакуума:

- $\delta S_E - J\star\delta\varphi = 0 \Rightarrow J = U'(\phi_0)$

$$Z(J) = e^{-VT(U(\varphi_0)-J\varphi_0)}\int D(\delta\phi)\, e^{-\left[\underbrace{\delta S_E - \int d^4x J\delta\phi}+\frac{1}{2!}\delta^2 S_E\right]}$$

$$\boxed{\approx VT\ \left[U(\phi_0) - J\cdot\phi_0\right] + \frac{1}{2}\delta^2 S_E}$$

$$Z(J) = \int D\varphi(x) e^{-\left(S_E - \int d^4x \; J\varphi\right)} \approx e^{-VT(U(\varphi_0) - J\varphi_0)} \int D(\delta\varphi) \; e^{-\frac{1}{2}\delta^2 S_E}$$

$$\equiv e^{-VT(U_{eff} - J\langle\varphi\rangle)}$$

- **Вклад квантовых поправок :**

$$J = U'(\phi_0)$$

$$\boxed{Z[\delta\varphi] = \int D(\delta\varphi) e^{-\frac{1}{2}\delta^2 S_E} = \mathcal{N}\left[\det\left(-\partial_\mu{}^2 + U''(\phi_0)\right)\right]^{-1/2}}$$

- **Эффективный потенциал модели:**

$$U_{eff} = U(\phi_0) + U'(\phi_0)(\langle\varphi\rangle - \varphi_0) + \frac{1}{2VT} \ln\det\left[-\partial_\mu{}^2 + U''(\phi_0)\right]$$

$$= \boxed{U(\langle\varphi\rangle) + \frac{1}{2VT} \ln\det\left[-\partial_\mu{}^2 + U''(\langle\varphi\rangle)\right]}$$

Замечание: U_{eff} ***зависит от вакуумного среднего поля*** $\langle\varphi\rangle$ ***а не от*** ϕ_0

Задача: найти собственные значения оператора $D^{(2)} = -\partial_\mu{}^2 + U''(\phi_0)$

$$\det\left[-\partial_\mu{}^2 + U''(\phi_0)\right] = \prod_{n_i=1}^{\infty}\left[\frac{\pi^2 n_1^2}{L_1^2} + \frac{\pi^2 n_2^2}{L_2^2} + \frac{\pi^2 n_3^2}{L_3^2} + \frac{\pi^2 n_4^2}{T^2} + U''(\phi_0)\right]$$

Вычисление эффективного потенциала

1: Преобразование Фурье: $k_1 = \pi n_1 / L_1, \ldots$

2: $\ln \prod_{n_i=0}^{\infty} (\ldots) \to \sum_{n_i=0}^{\infty} \ln(\ldots)$

$$\frac{1}{VT} \sum_{n_i=0}^{\infty} \to \int_0^{\infty} \frac{d^4k}{\pi^4} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^4k}{(2\pi)^4}$$

3: $$\frac{1}{2VT} \ln\det\left[-\partial_\mu{}^2 + U''(\langle\varphi\rangle)\right] \to \frac{1}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \ln\left[k^2 + U''(\varphi)\right]$$

4: Гиперсферические координаты:

Вспомогательный интеграл:

$$I_n = \int_{-\infty}^{\infty} d^n k \ \exp\left\{-\sum_{i=1}^{n} k_i^2\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} d^n k \ e^{-k_1^2} e^{-k_2^2} \ldots e^{-k_n^2} = \pi^{n/2}$$

$$I_n == \Omega_n \int_0^{\infty} \exp(-k^2) k^{n-1} dk = \frac{\Omega_n}{2} \, \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$$

$$\Omega_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$$

Телесный угол в n-мерном пространстве

- **Квантовая поправка к потенциалу:**

$$\boxed{\Omega_4 = 2\pi^2}$$

$$\Delta U = \frac{1}{2}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\ln\left[k^2 + U''(\varphi)\right] = \frac{1}{16\pi^2}\int_0^\infty dk k^3\left[\ln U'' + \ln\left(1+\frac{k^2}{U''}\right)\right]$$

$$x = k^2/U''$$

$$\boxed{\Delta U = \frac{(U'')^2}{32\pi^2}\int_0^\infty dx\; x\left(\ln U'' + \ln(1+x)\right)}$$

Проблема: этот интеграл очевидно расходится!

- **Трюк - регуляризация *обрезанием:*** $k_{max} = \Lambda \gg 1$

$$\Delta U = \frac{(U'')^2}{32\pi^2}\left[\int_0^{\Lambda^2/U''} dx\; x\ln(1+x) + \int_0^{\Lambda^2/U''} Dx\; x\ln U''\right]$$

$$= \frac{(U'')^2}{64\pi^2}\left[(x^2-1)\ln(1+x) + x\left(1-\frac{x}{2}\right)\Big|_0^{\Lambda^2/U''} + \quad x^2\ln U''\Big|_0^{\Lambda^2/U''}\right]$$

$$= \frac{(U'')^2}{64\pi^2}\left[\left(\frac{\Lambda^4}{(U'')^2}-1\right)\ln\left(1+\frac{\Lambda^2}{U''}\right) + \frac{\Lambda^2}{U''} - \frac{\Lambda^4}{2(U'')^2} + \frac{\Lambda^4\ln U''}{(U'')^2}\right]$$

$$\Delta U = \frac{(U'')^2}{64\pi^2}\left[\left(\frac{\Lambda^4}{(U'')^2}-1\right)\underline{\ln\left(1+\frac{\Lambda^2}{U''}\right)}+\frac{\Lambda^2}{U''}-\frac{\Lambda^4}{2(U'')^2}+\frac{\Lambda^4\ln U''}{(U'')^2}\right]$$

<u>Разложение логарифма:</u> $\ln(1+x)=\ln x+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\approx \ln x+\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\ldots$

$$\Delta U = \frac{(U'')^2}{2^6\pi^2}\left[\left(\frac{\Lambda^4}{(U'')^2}-1\right)\left(\ln\frac{\Lambda^2}{U''}+\frac{U''}{\Lambda^2}-\frac{(U'')^2}{2\Lambda^4}\right)+\frac{\Lambda^2}{U''}-\frac{\Lambda^4}{2(U'')^2}+\frac{\Lambda^4\ln U''}{(U'')^2}\right]$$

$$\boxed{\approx \frac{1}{2^6\pi^2}\left[\cancel{\Lambda^4\ln\Lambda^2-\frac{1}{2}\Lambda^4}+2\Lambda^2U''-(U'')^2\left(\ln\frac{\Lambda^2}{U''}+\frac{1}{2}\right)\right]+O(\Lambda^{-2})}$$

- **Расходимости: члены** $\Lambda^4\ln\Lambda^2-\frac{1}{2}\Lambda^4$ ***<u>не зависят от поля</u>*** φ **- это энергия вакуума**

Упростим задачу: положим $m=0$ $\Rightarrow$ $U=\frac{1}{4!}\lambda\varphi^4\,,\qquad U''=\frac{1}{2}\lambda\varphi^2$

- **Вопрос: Как тогда интерпретировать член** $\sim\Lambda^2U''=\Lambda^2\frac{\lambda\varphi^2}{2}$ **?**

Перенормировка

- **Линейная модель Клейна-Гордона:**

$$L = \frac{1}{2}\left[(\partial_\mu \varphi)^2 - m^2\varphi^2\right]$$

Уравнения поля: $\partial_\mu \partial^\mu \varphi + m^2 \varphi = 0$ $\Rightarrow$ $\phi \sim e^{i(\vec{p}\cdot\vec{x} - \varepsilon t)}$

- **Масса:** $m^2 = \varepsilon^2 - \vec{p}^{\,2}$ $\Rightarrow$

Масса поля определяется как коэффициент при члене φ^2 в лагранжиане модели

$$m^2 = U''(\varphi)\Big|_{\varphi=0}$$

- **Если мы хотим рассматривать безмассовую теорию, то в квантовом случае недостаточно просто положить $m = 0$ - *<u>все</u>* коэффициенты при φ^2 должны быть равны нулю.**

$m_0, \ \lambda_0$ ***- классические масса и константа связи***

- **Физическая масса:** $m^2 = m_0^2 + \lambda_0 \Lambda^2/(2^6\pi^2) = m_0^2 + \delta m^2$

- ***Идея перенормировки: как m_0, так и δm по отдельности расходятся, но их суммарный вклад в физическую массу конечен.***

Физическая масса: $m^2 = U''_{eff}(\varphi)\Big|_{\varphi=0}$

Безмассовый предел - $m = 0$

Эффективный потенциал безмассовой теории:

$$U_{eff}(\varphi) = \frac{\lambda_0}{4!}\varphi^4 + \frac{(U'')^2}{2^6\pi^2}\left(\ln\frac{U''}{\Lambda^2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{\lambda_0}{4!}\varphi^4 + \frac{\lambda_0^2}{2^8\pi^2}\varphi^4\left(\ln\frac{\lambda_0\varphi^2}{\Lambda^2} - \frac{1}{2}\right)$$

Логарифмическая расходимость

Вопрос: **Как определить физическую константу связи** λ **?**

По аналогии с определением массы: $\lambda \overset{?}{=} \frac{\delta^4}{\delta\varphi^4}U_{eff}(\varphi)\Big|_{\varphi=0}$

Проблема: $\frac{\delta^4}{\delta\varphi^4}\left[\varphi^4\ln\varphi\right] \sim \ln\varphi$ ⇒ ***Расходимость в пределе*** $\varphi \to 0$

Выделим промежуточное значение поля $\varphi = M$ ***- точка нормировки***

$$\boxed{U_{eff} = \frac{1}{4!}\left[\lambda_0 + \frac{3\lambda^2}{2^5\pi^2}\ln\frac{M^2}{\Lambda^2}\right]\varphi^4 + \frac{\lambda^2}{2^8\pi^2}\varphi^4\left(\ln\frac{\varphi^2}{M^2} - \frac{1}{2}\right)}$$

Перенормировка: бегущая константа связи

- **Константа связи приобретает зависимость от масштаба М:**

$$\lambda \to \lambda(M) = \frac{\partial^4}{\partial \varphi^4} U_{eff}\Big|_{\varphi_0 = M} = \lambda_0 + \boxed{}$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi}\left[\varphi^4\left(\ln \frac{\varphi^2}{M^2}) - \frac{1}{2}\right)\right] = \boxed{}$$

Замечание: во втором члене разница между λ и λ_0 пренебрежимо мала

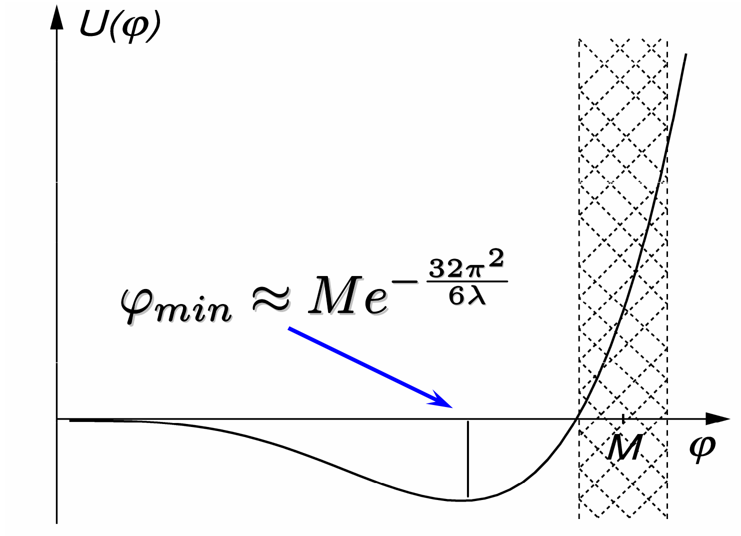
Выразим эффективный потенциал через перенормированную константу:

$$U_{eff} = \frac{1}{4!}\left[\lambda_0 + \frac{3\lambda^2}{2^5\pi^2}\ln\frac{M^2}{\Lambda^2}\right]\varphi^4 + \frac{\lambda^2}{2^8\pi^2}\varphi^4\left(\ln\frac{\varphi^2}{M^2} - \frac{1}{2}\right) \quad + \frac{25}{6} - \frac{25}{6}$$

$$= \frac{\lambda}{4!}\varphi^4 + \frac{\lambda^2}{2^8\pi^2}\varphi^4\left(\ln\frac{\varphi^2}{M^2} - \frac{25}{6}\right)$$

Эффективный потенциал модели φ^4 :

Отсутствует зависимость от Λ но появилась зависимость от выбора точки нормировки M



$$U_{eff} = \frac{\lambda}{4!}\varphi^4 + \frac{\lambda^2}{2^8\pi^2}\varphi^4\left(\ln\frac{\varphi^2}{M^2} - \frac{25}{6}\right)$$

$$U'_{eff} = 0, \Rightarrow \lambda \ln\frac{\varphi^2_{min}}{M^2} = -\frac{32\pi^2}{3} + \frac{11\lambda}{3}$$

Квантовые поправки индуцируют нетривиальный минимум потенциала?

Условие применимости полученного выражения: $|\,\lambda\ln(\varphi/M)\,| \ll 1$

Вопрос: **Как меняется константа связи при изменении точки нормировки?**

$$M \to M' \Rightarrow \lambda' = \lambda(M'), \quad U_{eff}(\varphi;\lambda',M') = U_{eff}(\varphi;\lambda,M)$$

$$U_{eff}(\varphi;\lambda,M) = \frac{\lambda}{4!}\varphi^4 + \frac{\lambda^2}{2^8\pi^2}\varphi^4\left(\ln\frac{\varphi^2}{M^2} - \frac{25}{6}\right) = \frac{\lambda}{4!}\varphi^4 + \frac{\lambda^2}{2^8\pi^2}\varphi^4\left(\ln\frac{\varphi^2}{M'^2} + \ln\frac{M'^2}{M^2} - \frac{25}{6}\right)$$

$$\left.\frac{\delta^4}{\delta\varphi^4}U_{eff}(\varphi)\right|_{\varphi=M'} \Rightarrow \boxed{\lambda(M') = \lambda(M) + \frac{3\lambda^2}{2^5\pi^2}\ln\frac{M'^2}{M^2}}$$

Бегущая константа связи

$$\boxed{\lambda(M') = \lambda(M) + \frac{3\lambda^2}{2^5\pi^2}\ln\frac{M'^2}{M^2}}$$

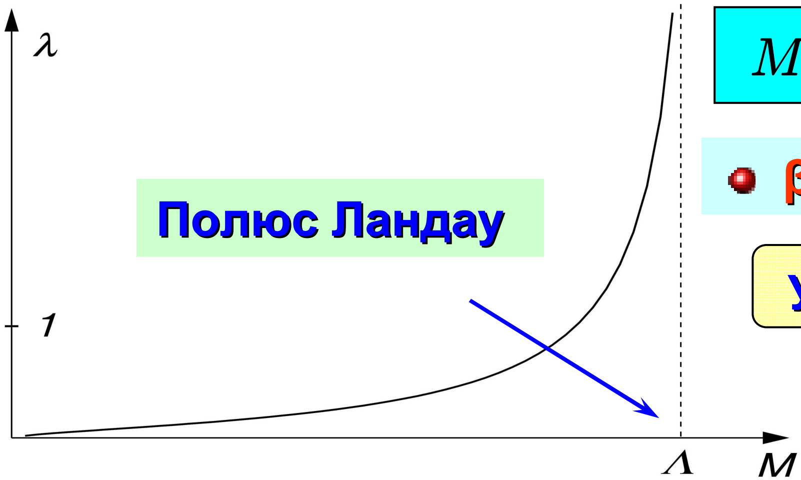
$$\Downarrow$$

$$-\lambda(M') + \frac{3\lambda^2}{2^5\pi^2}\ln M'^2 = -\lambda(M) + \frac{3\lambda^2}{2^5\pi^2}\ln M^2 = \mathrm{const}$$

Размерная трансмутация: Возникает новая константа с размерностью массы!

- **Инфинитезимальное изменение масштаба:** $M \to M + dM$

$$\lambda(M') = \lambda(M + dM) = \lambda(M) + \frac{3\lambda^2(M)}{16\pi^2}\ln\frac{M'}{M} \approx \frac{\lambda(M)}{1 - \frac{3\lambda^2(M)}{16\pi^2}\ln\frac{M'}{M}}$$



Полюс Ландау

$$M' \to 0 \Longrightarrow \lambda(0) \to 0$$

- **β-функция теории:** $\beta(\lambda) = \dfrac{3\lambda^2}{16\pi^2}$

Уравнение ренормгруппы:

$$\frac{d\lambda}{dt} = \beta(\lambda), \quad t = \ln(M'/M)$$

- **Бегущая константа связи КЭД:**

$e(m_e) = 1/137, \quad e(m_W) = 1/128$

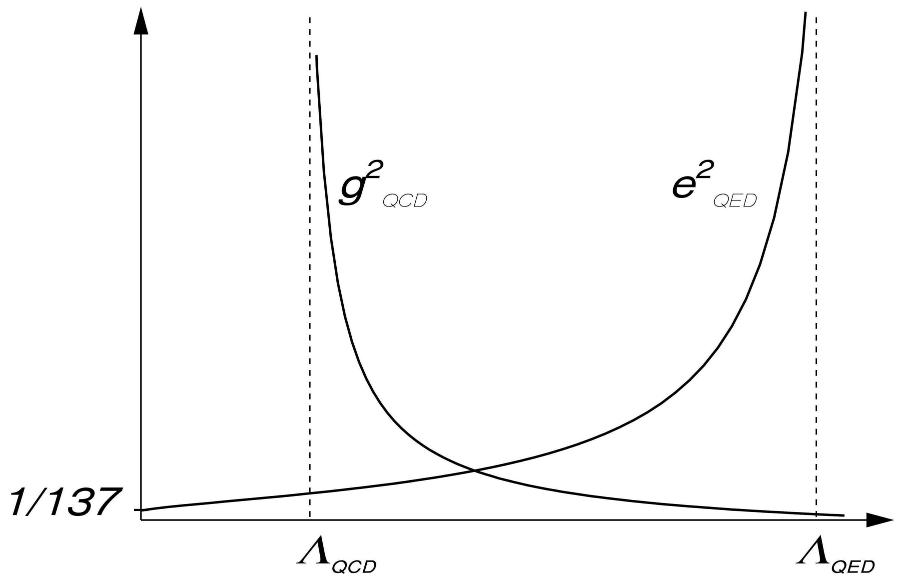
$$e^2(M') = \frac{e^2(M)}{1 - \frac{e^2(M)}{6\pi^2}\ln\frac{M'}{M}}$$

$$\Lambda_{QED} = m_e \exp\left(\frac{6\pi^2}{e^2(m_e)}\right) \approx Me^{645}$$

- **Бегущая константа связи КХД:**

$$g^2(M') = \frac{g^2(M)}{1 + \frac{7g^2(M)}{16\pi^2}\ln\frac{M'}{M}}$$

$$\Lambda_{QCD} \approx 180 \text{ MeV}.$$



- **Выход константы связи на непертурбативный режим сигнализирует о приближении к границам применимости теории**

Λ_{QSB} ~ 1 GeV

Λ_{QCD} ~ 180 MeV

Пертурбативная КХД (кварки & глюоны)

Низкоэнергетическая эффективная теория

Ядерная физика

Аномальная размерность

- **Замечание:** Классическое действие теории φ^4

$$S[\varphi(x,t)] = \int d^4x \left(\frac{1}{2}(\partial_\nu \varphi)^2 + \frac{\lambda}{4!}\varphi^4 \right)$$

инвариантно относительно масштабных преобразований:

$$x_\nu \to \frac{x_\nu}{s}, \qquad \varphi \to s\varphi, \qquad \lambda \to \lambda$$

- **В квантовой теории** $\varphi \to \varphi' = s\varphi$

$$\Rightarrow \lambda(\varphi) \to \lambda(s\varphi) = \frac{\lambda(\varphi)}{1 - \frac{3\lambda(\varphi)}{16\pi^2}\ln\frac{s\varphi}{\varphi}} \approx \lambda(\varphi)\left(1 + \frac{3\lambda(\varphi)}{16\pi^2}\ln s\right)$$

$$\approx \lambda(\varphi)\exp\left(\frac{3\lambda(\varphi)}{16\pi^2}\ln s\right) = s^\gamma\ \lambda(\varphi),$$

$$\boxed{\gamma = 3\lambda/(16\pi^2)}$$

Аномальная размерность

Аномалия: Нарушение симметрии классического действия квантовыми поправками, вычисленными с использованием этого же самого действия

Задача: Вычислить эффективный потенциал массивной теории φ^4