Калибровочная симметрия: Неабелевы теории

$$[T^a,\, T^b] = f_{abc} T^c$$

Алгебра g компактной группы Ли G размерности d и ранга k

Генераторы T^a антиэрмитовы: $(T^a)^\dagger = -T^a$

- **Наиболее важные примеры групп Ли:**

(f – размерность минимального представления)

G	*d*	*f*
SU(N)	*N²-1*	*N*
SO(N)	*½N(N-1)*	*N*
Sp(N)	*N(2N+1)*	*2N*
E_6	*78*	*27*
E_7	*133*	*56*
E_8	*248*	*248*
F_4	*52*	*6*
G_2	*14*	*7*

- **Для фундаментального представления:**

$$\mathrm{Tr}\, T^a T^b = -\tfrac{1}{2}\delta^{ab}$$

- **Физические поля принимают значения в алгебре Ли:** $\Phi = \phi^a T^a,\ A_\mu = A^a_\mu T^a$

$$F_{\mu\nu} = F^a_{\mu\nu} T^a = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu,\, A_\nu]$$

$$D_\mu \Phi = \partial_\mu \Phi + [A_\mu,\, \Phi]$$

Калибровочные преобразования

Поле и ковариантная производная преобразуются одинаково:

$$\boxed{\Phi \to \Phi' = U(x)\Phi, \quad D_\mu \Phi = \partial_\mu \Phi + A_\mu \Phi \to D_\mu \Phi' = U(D_\mu \Phi)}$$

$$\begin{cases} \partial_\mu \Phi \to U(x)(\partial_\mu \Phi) + (\partial_\mu U(x))\Phi \\ D_\mu \Phi' = U(x)(\partial_\mu \Phi) + (\partial_\mu U(x))\Phi + A'_\mu U \Phi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad U A_\mu = \partial_\mu U + A'_\mu U; \qquad \boxed{A_\mu \to A'_\mu = U A_\mu U^{-1} + U \partial_\mu U^{-1}}$$

Задача 1: **Проверьте, что при этом** $F_{\mu\nu} \to F'_{\mu\nu} = U F_{\mu\nu} U^{-1}$

Подсказка: **используйте тождества** $U(\partial_\mu U^{-1}) + (\partial_\mu U)U^{-1} = 0$

и $U(\partial_\mu U^{-1})U = -(\partial_\mu U)U^{-1}U = -(\partial_\mu U)$

$$U(\partial_\mu U^{-1})U(\partial_\nu U^{-1}) = -UU^{-1}(\partial_\mu U)(\partial_\nu U^{-1}) = -(\partial_\mu U)(\partial_\nu U^{-1})$$

Задача 2: **Проверьте, что** $[D_\mu, D_\nu] = D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu = F_{\mu\nu}$

Калибровочно инвариантные величины: $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad \Phi^\dagger \Phi, \quad (D_\mu \Phi)^\dagger (D_\mu \Phi)$

SU(2) теория Янга-Миллса

Базис алгебры su(2) – операторы, связанные с матрицами Паули :

$$T_i = -\frac{i}{2}\sigma_i, \quad [T_i, T_j] = i\varepsilon_{ijk}T_k$$

$$\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij}\mathbb{I} + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k, \quad \{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}\mathbb{I} \qquad T_iT_j = \frac{1}{2}[T_i, T_j] + \frac{1}{2}\{T_i, T_j\}$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- **Поле Янга-Миллса:** $A_\mu = -ig\frac{\sigma^a}{2}A^a_\mu, \quad D_\mu = \partial_\mu - igA^a_\mu\frac{\sigma^a}{2}$

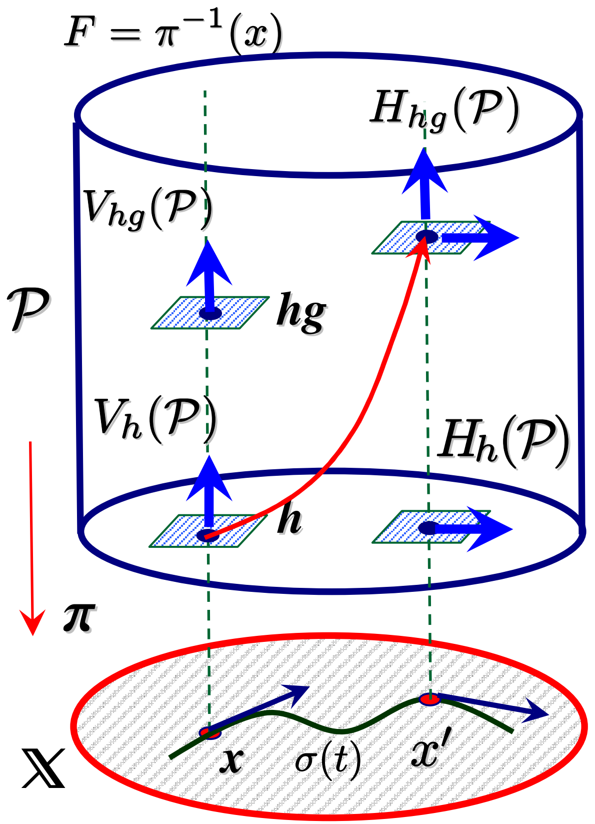
Задача 3: **Проверьте, что** $F_{\mu\nu} = -ig\frac{\sigma^a}{2}\left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + g\varepsilon_{abc}A^b_\mu A^c_\nu\right) \equiv F^a_{\mu\nu}T^a$

- **Лагранжиан SU(2) теории Янга-Миллса:**

$$L = \frac{1}{2g^2}\mathrm{Tr}\left(F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right) = \frac{1}{2g^2}F^a_{\mu\nu}F^b_{\mu\nu}(-ig)^2\mathrm{Tr}\left(\frac{\sigma^a}{2}\frac{\sigma^b}{2}\right) = -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^a_{\mu\nu}$$

Замечание: **теория Янга-Миллса нелинейна:** $L \sim \mathrm{Tr}\left(\partial_\mu A_\nu\right)A^\mu A^\nu, \quad \mathrm{Tr}\left(A_\nu\right)A_\mu A^\nu A^\mu$

Потенциал как связность и петля Вильсона



Геометрически, связность задает «горизонтальное» направление в расслоении (правило <u>связи</u> касательных к нему пространств)

$$A_\mu(x) = A^a_\mu(x)T^a \in G \equiv H$$

Действие калибровочной группы G задает «вертикальное» движение вдоль слоя

Параллельный перенос вектора $\vec{v} \in \mathrm{Rep_d}\, G$ **вдоль мировой линии** $x_\mu(t)$ **:**

$$i\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{dx_\mu}{dt} A_\mu \vec{v}(t)$$

$$v(t) = \mathcal{P}\exp\left(i\int_0^T dt \frac{dx_\mu}{dt} A_\mu(x(t))\right) = \mathcal{P}\exp\left(i\int_{x_0}^{x_T} dx^\mu A_\mu(x)\right) := \lim_{n\to\infty} v(x_T, x_n) v(x, x_{n-1}) \dots v(x_1, x_0)$$

- **Оператор петли Вильсона:** $\boxed{W[C] = \mathrm{Tr}\, \mathcal{P}\exp\left(i\oint_C dx^\mu A_\mu\right)}$

- **Уравнения поля:** $\partial_\mu \left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu A^a_\nu)} \right) = \partial^\mu F^a_{\mu\nu} + g\varepsilon_{abc} A^{\mu b} F^c_{\mu\nu} \equiv (D^\mu F_{\mu\nu})^a = 0$
- **Тождество Бьянки:** $\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}(D^\mu F^{\rho\sigma})^a \equiv (D^\mu \tilde{F}^{\mu\nu})^a = 0$
- **Закон Гаусса:** $D_k E^a_k = \partial_k E^a_k + \varepsilon_{abc} A^b_k E^c_k = 0, \qquad E^a_k \equiv F^a_{0k}$

Замечание: по аналогии с абелевой электродинамикой, теория Янга-Миллса может включать топологический член: $\theta \in [0,\, 2\pi]$

$$L_\theta = \frac{\theta}{16\pi^2}\int d^4x\, \mathrm{Tr}\, F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{\theta}{8\pi^2}\int d^4x\, \partial_\mu K^\mu; \quad \boxed{K_\mu = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{Tr}\,(A_\nu\partial_\rho A_\sigma + \frac{2}{3}A_\nu A_\rho A_\sigma)}$$

проверка:

$$\mathrm{Tr}\, F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} = \mathrm{Tr}\,\left\{(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)\tilde{F}^{\mu\nu} + (A_\mu A_\nu - A_\nu A_\mu)\right\}\tilde{F}^{\mu\nu} =$$

$$= \mathrm{Tr}\,\left\{(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)\tilde{F}^{\mu\nu} + A_\mu[A_\nu,\, \tilde{F}^{\mu\nu}]\right\} = \mathrm{Tr}\,\left\{(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)\tilde{F}^{\mu\nu} - A_\mu \partial_\nu \tilde{F}^{\mu\nu}\right\} =$$

$$\boxed{D_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} + [A_\mu,\, \tilde{F}^{\mu\nu}] \equiv 0}$$

$$= \mathrm{Tr}\,\left\{\partial_\mu A_\nu\, \tilde{F}^{\mu\nu} - \partial_\nu(A_\mu \tilde{F}^{\mu\nu})\right\} =$$

$$= \mathrm{Tr}\,\{\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\mu A_\nu(\partial_\rho A_\sigma + A_\rho A_\sigma)$$
$$-\partial_\nu(A_\mu \partial_\rho A_\sigma + A_\mu A_\rho A_\sigma)$$

$$\boxed{\tilde{F}^{\mu\nu} = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}(\partial_\rho A_\sigma + A_\rho A_\sigma)}$$

Очень Полезная Формула: $\mathrm{Tr}\,[\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}(\partial_\mu A_\nu)A_\rho A_\sigma] = \frac{1}{3}\mathrm{Tr}\,[\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\mu(A_\nu A_\rho A_\sigma)]$

$$\mathrm{Tr}\,F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} = \mathrm{Tr}\,\{\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\mu A_\nu(\partial_\rho A_\sigma + A_\rho A_\sigma) - \partial_\nu(A_\mu\partial_\rho A_\sigma + A_\mu A_\rho A_\sigma)]$$

$$= \mathrm{Tr}\,\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\left[2\partial_\mu\left(A_\nu\partial_\rho A_\sigma + \frac{2}{3}A_\nu A_\rho A_\sigma\right)\right] = 2\partial^\mu K_\mu$$

Q.E.D

- **Кулоновская калибровка:** $A_0^a = 0$

$$L = \frac{1}{2g^2}\mathrm{Tr}\,F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{\theta}{16\pi^2}\mathrm{Tr}\,F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{g^2}\mathrm{Tr}\,\left(\dot{A}_k^2 - B_k^2\right) + \frac{\theta}{4\pi^2}\mathrm{Tr}\,\left(\dot{A}_k \cdot B_k\right)$$

θ-член не меняет уравнения поля, но меняет импульсы:

$$\boxed{\pi_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{A}_k} = \frac{1}{g^2}E_k + \frac{\theta}{8\pi^2}B_k}$$

- **Инфинитезимальные преобразования:** $U = e^{\alpha^a T^a} \approx \mathbb{I} + \alpha^a T^a + \dots$

$$\delta A_\mu = \partial_\mu\alpha + [A_\mu,\,\alpha] + \cdots = D_\mu\alpha, \qquad \delta F_{\mu\nu} = [F_{\mu\nu},\,\alpha]$$

Остаточные степени свободы: $A_k \to A'_k = U(\vec{x})A_k U^{-1}(\vec{x}) + U(\vec{x})\nabla_k U^{-1}(\vec{x})$

Глобальные («большие») калибровочные преобразования: $U(\vec{x}) \xrightarrow[\vec{x}\to\infty]{} \mathrm{const}$

Каноническое квантование поля Янга-Миллса

- **Напомним:** в абелевой электродинамике

$$\partial_k E_k = e j_0 \Rightarrow Q = \frac{1}{4e\pi}\int d^3x(\partial_k E_k)$$

Генератор U(1) преобразований

Закон Гаусса

- **Лагранжиан Янга-Миллса в кулоновской калибровке:** $L = \frac{1}{g^2}\mathrm{Tr}\left(\dot{A}_k^2 - B_k^2\right)$

Неабелево магнитное поле: $B_k = \frac{1}{2}\varepsilon_{kij}F_{ij} = \varepsilon_{kij}D_i A_j$

- **Канонические координаты и импульсы:**

$$\boxed{A_k, \quad \pi_k = \frac{\delta L}{\delta \dot{A}_k} = \dot{A}_k = E_k}$$

$\Rightarrow$ **Гамильтониан:** $H = \pi_k \dot{A}_k - L = \frac{1}{g^2}\mathrm{Tr}\left(E_k^2 + B_k^2\right)$

- **Генератор калибровочных преобразований (заряд):**

$$Q(\omega) = \int d^3x\,\mathrm{Tr}\left(\frac{\delta L}{\delta \dot{A}_k}\delta A\right) = \frac{1}{g^2}\int d^3x\,\mathrm{Tr}\left(E_k(D_k\omega)\right) = -\frac{1}{g^2}\int d^3x\,\mathrm{Tr}\left((D_k E_k)\omega\right)$$

Глобальные преобразования являются нетеровскими генераторами симметрии

Напомним: в U(1) электродинамике закон Гаусса эквивалентен условию $\nabla \cdot A = 0$ (кулоновская калибровка)

$$A_\mu = \int d^4k \left[a_\mu(k)e^{ikx} + a^*_\mu(k)e^{-ikx}\right] = A^\perp_\mu(x) + A^\parallel_\mu(x) \Rightarrow A^\parallel_k(x) = 0$$

(2 физические степени свободы, связанные с поперечной поляризацией)

Закон Гаусса в теории Янга-Миллса: $D_k E^a_k = \partial_k E^a_k + \varepsilon_{abc} A^b_k E^c_k = 0$

Канонические коммутационные соотношения в теории Янга-Миллса:

$$\pi_k \to E^a_k \qquad q_k \to A^a_k \Rightarrow \boxed{\left\{A^a_i(x,t),\, E^b_j(y,t)\right\} = \delta_{ab}\delta_{ij}\delta^{(3)}(x-y)}$$

Скобка Пуассона: $\{F(x), G(y)\} = \int d^4z \left(\frac{\delta F(x)}{\delta q(z)}\frac{\delta G(y)}{\delta \pi(z)} - \frac{\delta F(x)}{\delta \pi(z)}\frac{\delta G(y)}{\delta q(z)}\right)$

$$\Rightarrow \left\{B^a_i(x,t),\, E^b_j(y,t)\right\} = \varepsilon_{ijk}\left(\delta_{ab}\frac{\partial}{\partial x_k}\delta^{(3)}(x-y) - \varepsilon_{abc}A^c_k\delta^{(3)}(x-y)\right)$$

Уравнения движения:

$$\begin{cases} \dot{A}^a_i(x) = \{A^a_i(x),\, H\} = \int d^3y \left\{A^a_i(x),\, E^b_j(y)\right\} E^b_j(y) = E^a_i(x) \\ \dot{E}^a_i(x) = \{E^a_i(x),\, H\} = \varepsilon_{ijk}\left(\partial_j B^a_k(x) + \varepsilon_{abc}A^b_j B^c_k\right) = \varepsilon_{ijk} D_j B^a_k \end{cases}$$

Теория Янга-Миллса: Евклидова формулировка

$\boxed{t = -i\tau}$ $\Rightarrow$ $F^a_{0i} = \partial_0 A_i - \partial_i A_0 + g\varepsilon_{abc} A^b_0 A^c_i \quad \to \quad i\partial_\tau A^a_i - \partial_i A_0 + g\varepsilon_{abc} A^b_0 A^c_i$

$\boxed{t = -i\tau, \quad A_0 = iA_0}$ $\quad F^a_{0i} \to \quad i(\partial_\tau A^a_i - \partial_i A_0 + g\varepsilon_{abc} A^b_0 A^c_i)$ **?**

- **Евклидово действие Янга-Миллса:**

$$S = \frac{1}{4}\int d^3x dt\, F^a_{\mu\nu} F^a_{\mu\nu} = \int d^3x dt \left\{ -\frac{1}{2} F^a_{0i} F^a_{0i} + \frac{1}{4} F^a_{ij} F^a_{ij} \right\} \quad \to \quad -iS_E$$

$$\boxed{S_E = \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} F^a_{0i} F^a_{0i} + \frac{1}{4} F^a_{ij} F^a_{ij} \right\} = \frac{1}{4}\int d^4x F^a_{\mu\nu} F^a_{\mu\nu}}$$

Замечание: *в калибровке* $A^a_0 = 0$ *действие имеет канонический вид:*

$$S = \int d^3x dt \left\{ -\frac{1}{2}(\partial_0 A_i)^2 + \frac{1}{4} F^a_{ij} F^a_{ij} \right\} \quad \to \quad S_E = \int d^4x \left\{ \frac{1}{2}(\partial_0 A_i)^2 + \frac{1}{4} F^a_{ij} F^a_{ij} \right\}$$

θ-член и инстантоны

- **Лагранжиан SU(2) теории Янга-Миллса:** $L = -\frac{1}{2g^2}\mathrm{Tr}\left(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right)$

- **Топологический член:**

$$L_\theta = \frac{\theta}{16\pi^2}\int d^4x\,\mathrm{Tr}\,\tilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \frac{\theta}{8\pi^2}\int d^4x\,\partial_\mu K^\mu; \qquad K_\mu = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{Tr}\left(A_\nu\partial_\rho A_\sigma + \frac{2}{3}A_\nu A_\rho A_\sigma\right)$$

- **Вакуум на асимптотике:** $A_\mu(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$ ☹ — *Тривиальный вакуум*

$$A_\mu(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} U\partial_\mu U^{-1}, \quad U \in SU(2)$$ ☺ — *Чистая калибровка*

$$F_{\mu\nu} = 0, \quad \Rightarrow \quad \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\rho A_\sigma = -\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}A_\rho A_\sigma$$

$$L_\theta = \frac{\theta}{8\pi^2}\int d^4x\,\partial_\mu K^\mu = \frac{\theta}{8\pi^2}\oint_{S^3} d\sigma_\mu\,K^\mu = \frac{\theta}{24\pi^2}\oint_{S^3} d\sigma_\mu\,\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\,\mathrm{Tr}\left[A_\nu A_\rho A_\sigma\right]$$

$$= -\frac{\theta}{24\pi^2}\oint_{S^3} d\sigma_\mu\,\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\,\mathrm{Tr}\,\left[(\partial_\nu U)U^{-1}(\partial_\rho U)U^{-1}(\partial_\sigma U)U^{-1}\right]$$

- **Индекс отображения $S^3 \to S^3$ (топологический заряд):**

$$\pi_3(S^3) = Q = -\frac{1}{24\pi^2}\oint_{S^3} d\sigma_\mu\,\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\,\mathrm{Tr}\,\left[(\partial_\nu U)U^{-1}(\partial_\rho U)U^{-1}(\partial_\sigma U)U^{-1}\right]$$

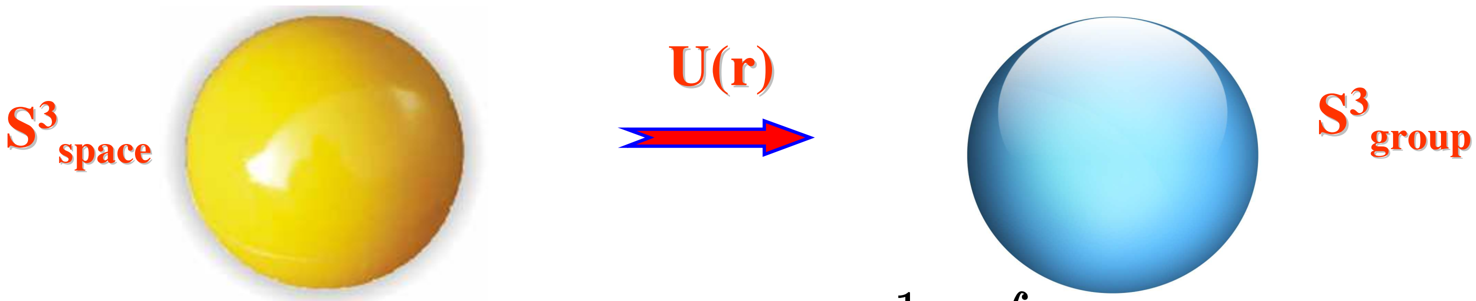
$$Q = -\frac{1}{24\pi^2}\oint_{S^3} d\sigma_\mu\, \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\,\mathrm{Tr}\,\left[(\partial_\nu U)U^{-1}(\partial_\rho U)U^{-1}(\partial_\sigma U)U^{-1}\right]$$

$$SU(2) \quad \Rightarrow \quad U(\vec{x}) = e^{i\omega(r)\frac{\sigma_i \hat{r}_i}{2}} = \cos\frac{\omega}{2} + i(\sigma_i \hat{r}_i)\sin\frac{\omega}{2}$$

Единичный вектор в $\mathbb{R}^3$ **:** $\hat{r}_i = (\sin\theta\cos\varphi,\ \sin\theta\sin\varphi,\ \cos\theta)$

$$\omega(r) = \begin{cases} 0, & r \to 0 \\ 4\pi n, & r \to \infty \end{cases}, \qquad n \in \mathbb{Z} \qquad U(\infty) = e^{2\pi n(\sigma_i \cdot \hat{r}_i)} = \mathbb{I}_2$$

Калибровочная функция $U(r)$ принимает единичное значение n раз пока радиальная переменная r изменяется от 0 до ∞



Задача 1: **Проверьте, что для SU(2)** $Q = \frac{1}{32\pi^2}\int_{S^3} d^3x\, \varepsilon^{abcd}\varepsilon_{\mu\nu\rho}\hat{r}^a\partial_\mu \hat{r}^b \partial_\nu \hat{r}^c \partial_\rho \hat{r}^d$

Задача 2: **Проверьте, что для SU(2)** $\boxed{Q = n}$

SU(2) инстантон Белавина-Полякова-Шварца-Тюпкина

- **Действие SU(2) теории Янга-Миллса в E⁴:**

$$S_E = \frac{1}{2g^2}\int d^4x\,\mathrm{Tr}\,(F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}) = \frac{1}{4g^2}\int d^4x\,\mathrm{Tr}\,\left[(F_{\mu\nu}-\widetilde{F}_{\mu\nu})(F_{\mu\nu}-\widetilde{F}_{\mu\nu})\right]$$

$$+\frac{1}{2g^2}\int d^4x\,\mathrm{Tr}\,\left[F_{\mu\nu}\widetilde{F}_{\mu\nu}\right] = \frac{1}{4g^2}\int d^4x\,\mathrm{Tr}\,\left[(F_{\mu\nu}-\widetilde{F}_{\mu\nu})(F_{\mu\nu}-\widetilde{F}_{\mu\nu})\right] + \frac{8\pi^2 n}{g^2}$$

$$\boxed{S_E \geq \frac{8\pi^2 n}{g^2}}$$

Конфигурации с минимальным действием удовлетворяют уравнениям *самодуальности:*

$$\boxed{F_{\mu\nu} = \widetilde{F}_{\mu\nu}}$$

Замечание: **для таких решений *(инстантонов)* уравнения поля имеют вид** $D_\mu F_{\mu\nu} = 0$

Задача: **Проверьте, что для SU(2) инстантонов** $T_{\mu\nu} = -\frac{2}{g^2}\mathrm{Tr}\left[F_{\mu\rho}F_{\nu\rho} - \frac{1}{4}\delta_{\mu\nu}F_{\sigma\rho}F_{\sigma\rho}\right] \equiv 0$

- ***Замечание:*** **любой самодуальный антисимметричный тензор может быть записан в виде** $F^a_{\mu\nu} = \eta^a_{\mu\nu} f(x)$ **, где**

$$\boxed{\eta^a_{00} = 0, \quad \eta^a_{ij} = \varepsilon_{aij}, \quad \eta^a_{0i} = \delta_{ai}, \quad \eta^a_{i0} = -\delta_{ai}}$$

Тензор т`Хофта

$$\eta^a_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\eta^a_{\rho\sigma}$$

$$\eta^a_{\mu\nu} = \varepsilon_{a\mu\nu 0} + \delta_{a\mu}\delta_{\nu 0} - \delta_{a\nu}\delta_{\mu 0}$$

Самодуальность

В явном виде:

$$\eta^1_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \eta^2_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \eta^3_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Задача: Вычислите $\varepsilon_{abc}\eta^b_{\mu\rho}\eta^c_{\nu\sigma} = \boxed{}$ $\quad \eta^a_{\mu\nu}\eta^a_{\mu\nu} = \boxed{}$

- **Анти-самодуальный тензор т\`Хофта** $\boxed{\bar{\eta}^a_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\bar{\eta}^a_{\rho\sigma}}$

$$\bar{\eta}^1_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{\eta}^2_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{\eta}^3_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Уравнения *анти-самодуальности:* $F_{\mu\nu} = -\widetilde{F}_{\mu\nu}$

Задача: Покажите, что для анти-самодуальных полей действие принимает такое же минимальное значение, как и для самодуальных полей,

$$S_E = \frac{8\pi^2\,|n|}{g^2}$$

- **Асимптотика:** $$A_\mu(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} U\partial_\mu U^{-1}, \quad U \in SU(2)$$

- **Анзац для потенциала:** $$\sigma^\dagger_\alpha = (\mathbb{I}_2, i\vec{\tau})$$

$$A_\mu = f(r) U\partial_\mu U^{-1}, \; U = n_\alpha \sigma_\alpha \in SU(2), \; \sigma_\alpha = (\mathbb{I}_2, -i\vec{\tau}), \quad n_\mu = x_\mu / r, \; r = \sqrt{x_\mu x_\mu}$$

$$\Rightarrow \quad U\partial_\mu U^{-1} = \sigma_\alpha \sigma^\dagger_\beta n_\alpha \frac{\delta_{\mu\beta} - n_\mu n_\beta}{r}$$

Проверьте! $$\partial_\mu \left(\frac{x_\nu}{r}\right) = \frac{\delta_{\mu\nu} - n_\mu n_\nu}{r}$$

Замечание: $$\sigma_\alpha \sigma^\dagger_\beta = \delta_{\alpha\beta} + i\eta^a_{\alpha\beta}\, \tau^a \;\Rightarrow\; U\partial_\mu U^{-1} = -i\eta^a_{\mu\nu} \frac{n_\nu}{r}\tau^a = -i\eta^a_{\mu\nu} \frac{x_\nu}{r^2}\tau^a$$

$$\boxed{A_\mu = -if(r)\eta^a_{\mu\nu} \frac{n_\nu}{r}\tau^a} \;\Rightarrow\; F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu,\, A_\nu]$$

$$= 2i\eta^a_{\mu\nu} \frac{f(1-f)}{r^2}\tau^a + i \underbrace{\left(\frac{2f(1-f)}{r^2} - \frac{f'}{r}\right)}_{=0} (\eta^a_{\nu\alpha}\, n_\mu n_\alpha - \eta^a_{\mu\alpha}\, n_\nu n_\alpha)\tau^a$$

Самодуальный член

$$\Rightarrow \quad \boxed{f' = \frac{2}{r} f(1-f)}$$

Одноинстантонное решение: $$f(r) = \frac{r^2}{r^2 + a^2}, \quad \boxed{A_\mu = -i\eta^a_{\mu\nu} \frac{x_\nu}{r^2 + a^2}\tau^a}$$

$$A_\mu = -i\frac{\tau^a}{2} A^a_\mu \;\Rightarrow\; A^a_\mu = \frac{2\eta^a_{\mu\nu}\, x_\nu}{r^2 + a^2}$$

- **Анзац:** $A^a_\mu = \eta^a_{\mu\nu}\,\partial_\nu \ln\phi(x)$, $\phi(x) = 1 + \dfrac{r^2}{a^2}$, $r = \sqrt{x_\mu x_\mu}$

$$\Rightarrow \quad A^a_\mu = \frac{2\eta^a_{\mu\nu}x_\nu}{r^2+a^2}, \qquad F^a_{\mu\nu} = -\frac{4a^2\eta^a_{\mu\nu}}{(r^2+a^2)^2}$$

Одноинстантонное решение

a – параметр решения, «размер» инстантона – классическая d=4 теория Янга-Миллса обладает масштабной инвариантностью

- **Действие (проверка):**

$$x = \frac{r^2}{a^2}$$

$$S_E = \frac{1}{4g^2}\int d^4x\, F^a_{\mu\nu}F^a_{\mu\nu} = \frac{2\pi^2}{4g^2}\int r^3 dr \frac{16a^4\eta^a_{\mu\nu}\eta^a_{\mu\nu}}{(r^2+a^2)^4} = \frac{\pi^2}{2g^2}\int r^2 dr^2 \frac{8\cdot 12 a^4}{a^8\left(1+\frac{r^2}{a^2}\right)^4} =$$

$$= \frac{48\pi^2}{g^2}\int \frac{x\,dx}{(1+x)^4} = \frac{48\pi^2}{g^2}\cdot\frac{1}{6} = \frac{8\pi^2}{g^2}$$

Задача 1: **Проверьте, что калибровочное преобразование** $U = n_\alpha\sigma_\alpha = n_0 - i n_i\tau_i$ **переводит потенциал инстантона в следующий вид *(сингулярная калибровка)***

$$A^a_\mu = \frac{2a^2\bar\eta^a_{\mu\nu}x_\nu}{r^2(r^2+a^2)}$$

антисамодуальный тензор $\bar\eta^a_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\bar\eta^a_{\rho\sigma}$

Задача 2: **Проверьте, что в сингулярной калибровке**

$$F^a_{\mu\nu} = -\frac{4a^2}{(r^2+a^2)^2}\left\{\bar\eta^a_{\mu\nu} - 2\bar\eta^a_{\mu\rho}n_\rho n_\nu + 2\bar\eta^a_{\nu\rho}n_\rho n_\mu\right\}$$

- **Антиинстантон:** $A_\mu^a = \bar\eta_{\mu\nu}^a\,\partial_\nu \ln\phi(x),\qquad \phi(x) = 1 + \frac{r^2}{a^2},\quad r = \sqrt{x_\mu x_\mu}$

$$\Rightarrow\quad A_\mu^a = \frac{2\bar\eta_{\mu\nu}^a x_\nu}{r^2 + a^2},\quad F_{\mu\nu}^a = -\frac{4a^2\bar\eta_{\mu\nu}^a}{(r^2+a^2)^2},\qquad F_{\mu\nu}^a = -F_{\mu\nu}^a,\quad Q = -1$$

- **Анзац т Хуфта** *(Мультиинстантонное решение):*

$$A_\mu^a = -\bar\eta_{\mu\nu}^a\,\partial_\nu \ln\phi(x),\qquad \phi(x) = 1 + \sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{\left(r - r_0^i\right)^2},\quad Q = n$$

Коллективные координаты инстантона:

- 4 трансляционные моды $x_\mu \to x_\mu + X_\mu$
- Размер инстантона (scale invariance) $a \to a'$
- Остаточные 3 калибровочные степени свободы – физические симметрии

= 8 нулевых мод на каждом инстантоне

$$\delta_\alpha A_\mu = \frac{\partial A_\mu}{\partial X_\alpha} + D_\mu \omega_\alpha$$

Пространство модулей $\mathcal{M}$: **пространство параметров n-инстантонного решения уравнений самодуальности**

- **Метрика на** $\mathcal{M}$: $g_{\alpha\beta}^{(\mathcal{M})} = \frac{1}{2g^2}\int d^4x\,\mathrm{Tr}\,(\delta_\alpha A_\mu)(\delta_\beta A_\mu)$

Многоинстантонные решения с SO(3) симметрией *(Виттен,1978)*

$$\begin{cases} A_0^a = a_0 \dfrac{x^a}{r} \\ A_i^a = \dfrac{1+\phi_2}{r^2}\varepsilon_{iak}x_k + \dfrac{\phi_1}{r^3}(\delta_{ia}r^2 - x_i x_a) + a_r \dfrac{x_i x_a}{r^2} \end{cases}$$

$$\boxed{a_0(r,x_0),\ a_r(r,x_0),\ \phi_1(r,x_0),\ \phi_2(r,x_0)}$$

$$r = \sqrt{x_i x_i} \in \mathbb{R}^3$$

$$\hat{x}_i = x_i / r$$

- **Остаточная U(1) симметрия:** $U = e^{iF(r,x_0)\,\vec{x}\cdot\tau}$

$$E_i^a = (\partial_0\phi_2 - a_0\phi_1)\tfrac{\varepsilon_{iak}\hat{x}_k}{r} + (\partial_0\phi_1 + a_0\phi_2)\tfrac{\delta_{ai}-\hat{x}_a\hat{x}_i}{r} + (\partial_0 a_1 - \partial_r a_0)\hat{x}_a\hat{x}_i$$

$$B_i^a = -(\partial_r\phi_1 + a_r\phi_2)\tfrac{\varepsilon_{iak}\hat{x}_k}{r} + (\partial_r\phi_2 - a_r\phi_1)\tfrac{\delta_{ai}-\hat{x}_a\hat{x}_i}{r} + (1-\phi_1^2-\phi_2^2)\tfrac{\hat{x}_i\hat{x}_a}{r^2}$$

$$\tfrac{1}{2g^2}\int d^4x \operatorname{Tr} F_{\mu\nu}^2 \Rightarrow 8\pi \int dx_0 dr\, L_{eff}$$

$$\boxed{g_{\mu\nu} = r^2\delta_{\mu\nu}}$$

$$L_{eff} = \frac{r^2}{8}f_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2}(D_\mu\phi_a)^2 + \frac{1}{4r^2}(\phi_a\phi_a - 1)^2 =$$

$$= \frac{1}{8}\sqrt{g}\left(g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}f_{\mu\nu}f_{\nu\beta} + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}D_\mu\phi_a D_\nu\phi_a + \frac{1}{4}(\phi_a\phi_a - 1)^2\right)$$

Абелева модель Хиггса
на гиперболической плоскости

$$D_0\phi^a - iD_r\phi^a = 0;$$
$$B = \tfrac{1}{r^2}(1 - \phi^a\phi^a)$$

$$D_i\phi_a = \partial_i\phi^a + \varepsilon_{ab}a_i\phi^b$$
$$B = f_{0r} = \partial_0 a_r - \partial_r a_\tau$$

$$Q = \frac{1}{16\pi^2}\int d^4x \operatorname{Tr} \tilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \quad \mapsto \quad \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{H}} d^2x\sqrt{-|g|}\,|B|$$

SU(2) инстантон как тунельный процесс

$$A_\mu^{(n=1)} = -i\eta^a_{\mu\nu}\tau^a x_\nu \frac{1}{r^2+a^2}$$

Одноинстантонное решение

$$A_0^{(n=1)} = -ix^a\tau^a \frac{1}{x_0^2+|\vec{x}|^2+a^2}, \quad A_i^{(n=1)} = i\tau^a\left[\delta_{ia}\frac{x_0}{x_0^2+|\vec{x}|^2+a^2} - \varepsilon_{ija}\frac{x_j}{x_0^2+|\vec{x}|^2+a^2}\right]$$

$x_0 \to -\infty \quad \to \quad A_i^{(n=1)} \downarrow$

$x_0 \to \infty \quad \to \quad A_i^{(n=1)} \uparrow$

- **Фиксация калибровки:**

$$A_0 = 0 = UA_0^{(n=1)}U^{-1} + U\partial_0 U^{-1}, \quad \Rightarrow \quad U^{-1}\partial_0 U = A_0^{(n=1)} = -ix^a\tau^a\frac{1}{x_0^2+|\vec{x}|^2+a^2}$$

Так как $F_{ij}^{(n=1)} \to 0$ при $x_0 \to \pm\infty$, зафиксируем остаточную калибровку как

$A_i \to 0$ при $x_0 \to -\infty, \quad \partial_i U(\vec{x}, x_0 \to -\infty) = 0, \quad U(\vec{x}, x_0 \to -\infty) = \mathbb{I}$

$$\Rightarrow \quad U = e^{-i\tau^a\hat{x}^a F(|\vec{x}|, x_0)}, \quad \hat{x}^a = \frac{x^a}{|\vec{x}|} \in \mathbb{R}^3$$

$$\boxed{F(|\vec{x}|, x_0) = \frac{|\vec{x}|}{\sqrt{|\vec{x}|^2+a^2}}\left(\operatorname{arctg}\frac{x_0}{\sqrt{|\vec{x}|^2+a^2}} + \frac{\pi}{2}\right)}$$

В пределе $x_0 \to \infty$:

$$A_i(\vec{x}, x_0 \to \infty) = U_1\partial_i U_1^{-1}, \quad U_1(\vec{x}) = e^{-i\tau^a\hat{x}^a F(|\vec{x}|)}$$

$$F(|\vec{x}|) = \pi\frac{|\vec{x}|}{\sqrt{|\vec{x}|^2+a^2}}$$

Инстантон – это переход из вакуума A_i=0 при $x_0 \to -\infty$
в вакуум $A_i = U\partial_i U^{-1}$ при $x_0 \to \infty$

SU(2) Модель Янга-Миллса-Хиггса

$$\boxed{L = \frac{1}{2g^2}\mathrm{Tr}\,(F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}) - \frac{1}{g^2}\mathrm{Tr}\,(D_\mu\Phi)^2 + V(\Phi) =}$$

$$T_i = -\frac{i}{2}\sigma_i, \quad [T_i, T_j] = i\varepsilon_{ijk}T_k$$

$$D_\mu = \partial_\mu - igA^a_\mu\frac{\sigma^a}{2}$$

$$= -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu} + \frac{1}{2}(D_\mu\Phi^a)(D^\mu\Phi^a) + V(\Phi)$$

$$A_\mu = -ig\frac{\sigma^a}{2}A^a_\mu = A^a_\mu T^a \in su(2), \quad F_{\mu\nu} = F^a_{\mu\nu}T^a \in su(2), \quad \Phi = \Phi^a T^a \in su(2)$$

$$\boxed{F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + g\varepsilon_{abc}A^b_\mu A^c_\nu, \quad D_\mu\Phi^a = \partial_\mu\Phi^a + g\varepsilon_{abc}A^b_\mu\Phi^c}$$

- **Потенциал Хиггса:** $\boxed{V(\Phi) = \frac{\lambda}{4}(\Phi^a\Phi^a - a^2)^2}$

- **Уравнения поля:** $D^\mu F^a_{\mu\nu} = g\varepsilon_{abc}\Phi^b D_\nu\Phi^c, \quad D^\mu D_\mu\Phi^a = \lambda\Phi^a(\Phi^b\Phi^b - a^2)$

- **Тождества Бианки:** $D^\mu \widetilde{F}^a_{\mu\nu} \equiv 0$

Задача: **Проверьте!**

- **Тензор энергии-импульса:** $T_{\mu\nu} = F^a_{\mu\rho}F^{a\rho}_\nu + (D_\mu\Phi^a)(D_\nu\Phi^a) - g_{\mu\nu}L$

- **Энергия:** $E = \int d^3x\, T_{00} = \int d^3x \left[\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu} + \frac{1}{2}(D_\mu\Phi^a)(D^\mu\Phi^a) + \frac{\lambda}{4}(\Phi^a\Phi^a - a^2)^2\right]$

Задача: Покажите, что закон Гаусса в модели Янга-Миллса-Хиггса имеет вид:

$$\boxed{D_n E_n - ig\left[\Phi, D_0\Phi\right] = 0, \quad E_n = F_{0n}}$$

- **Вакуум Хиггса:** $\Phi^a\Phi^a = a^2, \quad F^a_{\mu\nu} = 0, \quad D_\mu\Phi^a = 0$

1. Поле Хиггса постоянно в вакууме: $\Phi_{vac} = -\frac{i}{2}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} = aT^3$

2. В вакууме симметрия теории нарушена: $SU(2) \to U(1)$

Флуктуации скалярного поля на фоне вакуума: $\Phi^a = (0,\, 0,\, a+\xi)$

$$\Rightarrow (D_\mu\Phi^a)(D^\mu\Phi^a) \approx (\partial_\mu\xi)(\partial^\mu\xi) + \underbrace{g^2a^2\left[(A^1_\mu)^2 + (A^2_\mu)^2\right]}_{\text{Массовый член калибровочного поля}}, \quad V(\Phi) \approx \underbrace{\frac{\lambda}{2}a^2\xi^2}_{\text{Массовый член скалярного поля}}$$

$$A^\pm_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(A^1_\mu \pm A^2_\mu) \Rightarrow m_v = ga, \quad A^3_\mu \Rightarrow m = 0 \qquad m_s = a\sqrt{\lambda}$$

Замечание: ***ненарушенная вакуумная симметрия U(1), ассоциированная с вращениями вокруг вектора*** Φ^aT^a ***, может быть сопоставлена электромагнитной подгруппе*** $A^{em}_\mu = A^a_\mu\Phi^a/a$

- **Генератор электрического заряда:** $Q = \frac{g}{a}(\Phi^aT^a)$

Собственные значения Q: $q = \pm\frac{g}{2}$

Монополь т Хуфта-Полякова

$$D_n\Phi^a = \partial_n\Phi^a + g\varepsilon_{abc}A_n^b\Phi^c \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \hat{\Phi}^a\hat{\Phi}^a \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} 1 \quad \Rightarrow \quad \hat{\Phi}^a \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} \hat{r}^a = \frac{r^a}{r}$$

$$\partial_n\left(\frac{r_a}{r}\right) = \frac{r^2\delta_{an} - r_a r_n}{r^3} = (\delta_{an}\delta_{ck} - \delta_{ak}\delta_{nc})\frac{r_c r_k}{r^3} = \varepsilon_{abc}\varepsilon_{bkn}\frac{r_c r_k}{r^3}$$

«Еж»

$$\Rightarrow \quad \boxed{A_k^a(r) \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{g}\varepsilon_{akn}\frac{r_n}{r^2}, \qquad B_n^a = \frac{1}{2}\varepsilon_{nmk}F_{mk}^a \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} \frac{r_n r_a}{g r^4}}$$

$$\underline{SO(3)\times SO(3) \to SO(3)}$$

- **Электромагнитная подгруппа:** $F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^a\hat{\Phi}^a, \quad B_n \underset{r\to\infty}{\rightarrow} \dfrac{r_n}{g r^3}$

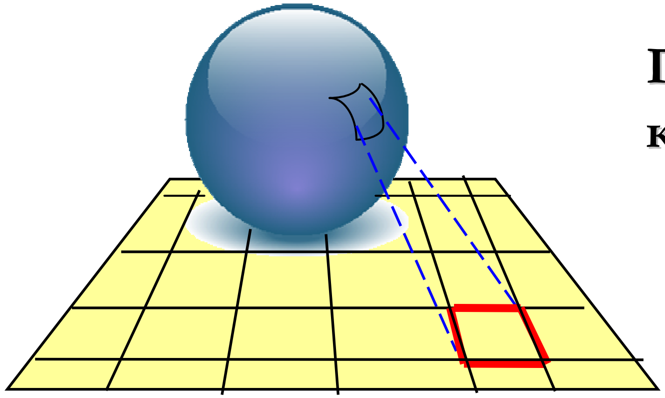
Модель Янга-Миллса-Хиггса допускает существование классических решений с кулоновской асимптотикой магнитного поля - монополей

- **Топология:** $S^2_{vac} := \left\{\Phi : \Phi^a\Phi^a = a^2\right\}, \quad \Phi : S^2_\infty \mapsto S^2_{vac}, \qquad \Pi_2(S^2) = \mathbb{Z}$

- **Топологический ток:** $k_\mu = \dfrac{1}{2ga^3}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{abc}\partial^\nu\Phi^a\partial^\rho\Phi^b\partial^\sigma\Phi^c, \quad \partial^\mu k_\mu \equiv 0$

Индекс отображения: $Q = \displaystyle\int d^3x\, k_0 = \frac{1}{2ga^3}\int d^3x\,\varepsilon_{abc}\varepsilon_{mnk}\partial_m(\Phi^a\partial_n\Phi^b\partial_k\Phi^c) =$

$$= \frac{1}{2ga^3}\int d^2S_n\,\varepsilon_{abc}\varepsilon_{mnk}\Phi^a\partial_n\Phi^b\partial_k\Phi^c$$



Переход от координат $r_n = (x, y, z)$ к локальным координатам ξ^α на сфере $\mathbf{S}^2_{\text{vac}}$:

$$\partial_n \Phi^a = \frac{\partial \Phi^a}{\partial \xi^\alpha}\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial r_n}, \quad d^2 S_n = \frac{1}{2}\varepsilon_{nmk}\varepsilon_{\alpha\beta}\frac{\partial r^m}{\partial \xi^\alpha}\frac{\partial r^k}{\partial \xi^\beta}d^2\xi$$

$$Q = \frac{1}{2ga^3}\int d^2 S_n\, \varepsilon_{abc}\varepsilon_{mnk}\Phi^a\partial_n\Phi^b\partial_k\Phi^c = \frac{1}{g}\int d^2\xi\sqrt{\mathbf{g}} =$$

$$= \frac{4\pi n}{g}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\mathbf{g} = \det\left(\partial_\alpha \hat{\Phi}^a,\ \partial_\beta \hat{\Phi}^a\right)$$

- **Анзац т´Хуфта-Полякова:**

$$\boxed{\Phi^a = \frac{r^a}{gr^2}H(r), \quad A_n^a = \varepsilon_{amn}\frac{r^m}{gr^2}[1 - K(r)], \quad A_0^a = 0}$$

$$r \to \zeta = gar$$

$$E = \frac{4\pi a}{g}\int \frac{d\zeta}{\zeta^2}\left[\zeta^2\left(\frac{dK}{d\zeta}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{dH}{d\zeta} - H\right)^2 + \frac{1}{2}(K^2-1)^2 + k^2H^2 + \frac{\lambda}{4g^2}(H^2-\zeta^2)\right]$$

- **Уравнения поля:**

$$\frac{d^2K}{d\zeta^2} = KH^2 + K(K^2-1), \quad \zeta^2\frac{d^2H}{d\zeta^2} = 2K^2H + \frac{\lambda}{g^2}H(H^2-\zeta^2)$$

$$D_n\Phi^a = \frac{\delta_{an}}{gr^2}KH + \frac{r^a r^n}{gr^4}\left(\zeta\frac{dH}{d\zeta} - H - KH\right), \quad B_n^a = \frac{r_n r^a}{gr^4}\left(1 - K^2 + \zeta\frac{dK}{d\zeta}\right) - \frac{\delta_{an}}{gr^2}\zeta\frac{dK}{d\zeta}$$

Граничные условия:

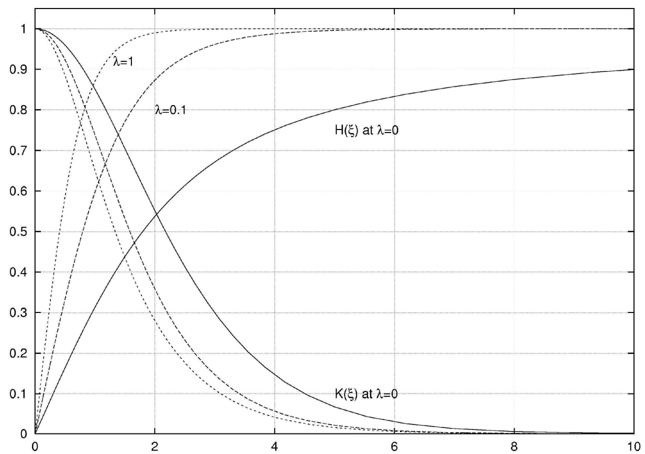
$$K(\zeta) \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 1, \quad H(\zeta) \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0, \qquad K(\zeta) \underset{r\to \infty}{\longrightarrow} 0, \quad H(\zeta) \underset{r\to \infty}{\longrightarrow} \zeta$$

Магнитный заряд:

Тождество Бианки: $D_n B_n^a \equiv 0$

$$Q_{mag} = \frac{1}{a}\int d^2 S_n B_n = \frac{1}{a}\int d^2 S_n B_n^a \Phi^a = \frac{1}{a}\int d^3 x B_n^a D_n \Phi^a =$$

$$= \frac{4\pi}{g}\int_0^\infty \frac{d\zeta}{\zeta^2}\left\{(K^2-1)(H-\zeta H') - 2\zeta K' K H\right\} = \frac{4\pi}{g}\int_0^\infty d\zeta \frac{d}{d\zeta}\left\{\frac{1-K^2}{\zeta}\right\} = \frac{4\pi}{g}$$



Дион:

$A_0^a = 0 \to A_0^a = \frac{r^a}{gr^2} J(r), \quad E_n^a = F_{0n}^a$

$$Q_{el} = \frac{1}{a}\int dS_n E_n = \frac{1}{a}\int dS_n E_n^a \Phi^a = \frac{1}{a}\int d^3 x E_n^a D_n \Phi^a$$

$$\begin{cases} \zeta^2 K'' = K(H^2 - J^2) + K(K^2-1) \\ \zeta^2 H'' = 2K^2 H + \frac{\lambda}{g^2} H(H^2 - \zeta^2) \\ \zeta^2 J'' = 2K^2 J \end{cases}$$

$$J(r) \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0, \quad J(r) \underset{r\to \infty}{\longrightarrow} Cr$$

Электрический заряд:

$$Q_{el} = \frac{4\pi}{g}\int_0^\infty \frac{d\zeta}{\zeta^2}\left\{2JHK^2 + \zeta^2 J' H' + JH - \zeta(J'H + H'J)\right\} = \frac{4\pi}{g}\int_0^\infty d\zeta \frac{d}{d\zeta}\left\{\zeta H \frac{d}{d\zeta}\left(\frac{JH}{\zeta}\right)\right\} = \frac{4\pi C}{g}$$

Монополь Богомольного-Прасада-Зоммерфельда

- **Энергия статической конфигурации:**

$$E = \int d^3x \left[\frac{1}{2} B_n^a B_n^a + \frac{1}{2}(D_n\Phi^a)(D_n\Phi^a) + \frac{\lambda}{4}(\Phi^a\Phi^a - a^2)^2\right]$$

- **Предел Богомольного:** $\lambda \to 0,$ **но по прежнему** $\hat{\Phi}^a \underset{r\to\infty}{\to} \hat{r}^a$

$$E = \frac{1}{2}\int d^3x \, [B_n^a \pm D_n\Phi^a]^2 \mp \int d^3x \, B_n^a D_n \Phi^a = \frac{1}{2}\int d^3x \, [B_n^a \pm D_n\Phi^a]^2 \mp \underbrace{\boxed{\frac{4\pi a}{g}}}_{Q_{mag}}$$

- **Условие минимума энергии (уравнения BPS):** $B_n^a = \pm D_n \Phi^a$

$$\Rightarrow \quad \zeta\frac{dK}{d\zeta} = -KH\,, \qquad \zeta\frac{dH}{d\zeta} = H + (1 - K^2)$$

$$\boxed{K = \frac{\zeta}{\sinh\zeta}\,, \qquad H = \zeta\coth\zeta - 1}$$

Задача: **покажите, что энергия монополя в пределе БПС полностью определяется вкладом поля Хиггса:**

$$B_n^a = \pm D_n\Phi^a \;\Rightarrow\; D_n\Phi^a D_n\Phi^a = (\partial_n\Phi^a)(\partial_n\Phi^a) + \Phi^a(\partial_n\partial_n\Phi^a) = \frac{1}{2}\partial_n\partial_n(\Phi^a\Phi^a)$$

Подсказка: **используйте определение неабелева магнитного поля** $B_n^a = \frac{1}{2}\varepsilon_{nmk}F_{mk}^a$ **и тождество Бианки** $D_n D_n \Phi^a = 0$

Проверка:

$$E=\frac{1}{2}\int d^3x\,\partial_n\partial_n(\Phi^a\Phi^a)=\frac{4\pi a}{g}\int_0^\infty d\zeta\frac{d}{d\zeta}\left[\zeta H\frac{d}{d\zeta}\left(\frac{H}{\zeta}\right)\right]=$$

$$=\frac{4\pi a}{g}\left(\coth\zeta-\frac{1}{\zeta}\right)\left(1-\frac{\zeta^2}{\sinh^2\zeta}\right)\Big|_0^\infty=\boxed{\frac{4\pi a}{g}}$$

Масса BPS монополя

● **причесывание ежа (*на сфере* S^2)**

$$U=\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2} & \sin\frac{\theta}{2}e^{-i\varphi}\\ -\sin\frac{\theta}{2}e^{i\varphi} & \cos\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}\in SU(2)$$

$$\sigma^a\cdot\hat{r}^a=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta e^{-i\varphi}\\ \sin\theta e^{i\varphi} & -\cos\theta\end{pmatrix}\to U^{-1}\sigma_3 U$$

$$\Phi=\Phi^a\frac{\sigma^a}{2}=\frac{r^a\cdot\sigma^a}{2gr^2}H(r)\quad\to\frac{H(r)}{2gr}\sigma_3$$

Регулярная калибровка

Сингулярная калибровка

$$r\to\infty:\qquad A_n\to\varepsilon_{amn}\frac{r_m}{gr^2}\frac{\sigma^a}{2}\to U^{-1}A_nU-iU^{-1}\partial_nU=\boxed{\frac{1}{2gr}\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}e_{\varphi_n}\sigma_3}$$

Потенциал абелева монополя Дирака, вложенный в подалгебру Картана SU(2)

Калибровочная нулевая мода монополя

Замечание 1: *анзац т´Хуфта-Полякова статичен и* $A_0 = 0$

Замечание 2: *ненарушенная вакуумная симметрия U(1), ассоциированная с вращениями вокруг вектора* $\Phi^a T^a$*, соответствует* *электромагнитной подгруппе*

Замечание 3: *Калибровочные пеобразования могут зависеть от времени*

Периодические по времени калибровочные преобразования $U(\mathbf{r},t) = e^{ig\alpha(\mathbf{r})t}$ **:**

$$A_n(\mathbf{r},0) \to A_n(\mathbf{r},t) = U(\mathbf{r},t)A_n(\mathbf{r},0)U^{-1}(\mathbf{r},t) - \frac{i}{g}U(\mathbf{r},t)\partial_n U^{-1}(\mathbf{r},t)$$

$$\Phi(\mathbf{r},0) \to \Phi(\mathbf{r},t) = U(\mathbf{r},t)\Phi(\mathbf{r},0)U^{-1}(\mathbf{r},t)$$

Чистая калибровка

$$A_0(\mathbf{r},0) = 0 \to A_0(\mathbf{r},t) = -\frac{i}{g}U(\mathbf{r},t)\partial_0 U^{-1}(\mathbf{r},t) = -\alpha(\mathbf{r})$$

Инфинитезимальные преобразования:

$$U(\mathbf{r},t) \approx \mathbb{I} + ig\alpha(\mathbf{r})\delta t \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A_n(\mathbf{r},\delta t) \approx A_n(\mathbf{r}) + (ig[\alpha, A_n(\mathbf{r})] - \partial_n\alpha)\,\delta t \\ \Phi(\mathbf{r},\delta t) \approx \Phi(\mathbf{r}) + ig[\alpha, \Phi(\mathbf{r})]\delta t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \partial_0 A_n = ig[\alpha, A_n(\mathbf{r})] - \partial_n\alpha = -D_n\alpha, \qquad \partial_0\Phi = ig\,[\alpha, \Phi]$$

- **Параметр преобразования $\alpha(\mathbf{r})$ задает калибровочную *нулевую моду:*** $\begin{pmatrix} \partial_0 A_n \\ \partial_0 \Phi \end{pmatrix}$

Замечание: **калибровочные преобразования не меняют поля и производные:**

$$E_n^a = \partial_0 A_n - D_n A_0 = -D_n \alpha + D_n \alpha \equiv 0$$

$$D_0 \Phi = \partial_0 \Phi + ig[A_0, \Phi] = ig\,[\alpha, \Phi] - ig\,[\alpha, \Phi] \equiv 0$$

- **«Кинетическая энергия» монополя:** $\int d^3x \, \mathrm{Tr}\left(E_n E_n + D_0 \Phi D_0 \Phi\right) = 0$
- **Закон Гаусса:** $D_n E_n - ig\,[\Phi, D_0 \Phi] = 0$

?

Тривиальное решение: $E_n = D_0 \Phi = 0$

Дополнительное условие на нулевую моду монополя: ***<u>фоновая калибровка</u>***

$$\boxed{D_n(\partial_0 A_n) - ig\,[\Phi, (\partial_0 \Phi)] = 0}$$

Уравнения Богомольного выполняются и для флуктуаций полей

Нетривиальное решение: $\alpha = \dot{\Upsilon}(t)\Phi$

$$U(\mathbf{r}, t) = \exp\{ig\dot{\Upsilon}(t)\Phi(\mathbf{r})\,t\} \approx \mathbb{I} + ig\dot{\Upsilon}\Phi\,\delta t$$

$\Rightarrow$ $\partial_0 A_n = \dot{\Upsilon} D_n \Phi, \quad \partial_0 \Phi = 0$ $\Rightarrow$ $E_n = \partial_0 A_n = \dot{\Upsilon}(t) D_n \Phi = \dot{\Upsilon}(t) B_n, \quad D_0 \Phi = 0$

BPS монополь

- **«Кинетическая энергия» монополя:**

$$\frac{1}{2}\dot{\Upsilon}^2 \int d^3x \, D_n \Phi^a D_n \Phi^a = \frac{\dot{\Upsilon}^2}{2} \int d^3x \, B_n^a B_n^a = \frac{2\pi a}{g}\dot{\Upsilon}^2 = \boxed{\frac{1}{2} M \dot{\Upsilon}^2}$$