Киральная симметрия

- **КЭД в d=3+1:** $$\boxed{L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}\left(i\gamma^\mu\partial_\mu + e\gamma^\mu A_\mu - m\right)\psi}$$

Токи: $j_\mu = \bar{\psi}\gamma_\mu\psi, \quad j^5_\mu = \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi, \quad \{\gamma_\mu, \gamma_5\} = 0, \quad \gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$

- **Уравнения поля:**

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu + e\gamma^\mu A_\mu - m)\psi = 0; \quad \bar{\psi}(i\gamma^\mu\overleftarrow{\partial_\mu} - e\gamma^\mu A_\mu + m) = 0; \quad \partial^\mu F_{\mu\nu} = j_\nu$$

$$\Rightarrow \quad \partial^\mu j_\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\overleftarrow{\partial_\mu}\psi + \bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi = i\bar{\psi}(m - e\gamma^\mu A_\mu)\psi + i\bar{\psi}(-m + e\gamma^\mu A_\mu)\psi = 0$$

$$\partial^\mu j^5_\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\overleftarrow{\partial_\mu}\psi + \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\partial_\mu\psi = i\bar{\psi}(m - e\gamma^\mu A_\mu)\gamma_5\psi - i\bar{\psi}\gamma_5(-m + e\gamma^\mu A_\mu)\psi = \boxed{2im\bar{\psi}\gamma_5\psi}$$

Замечание: **киральный ток сохраняется если m=0**

- **Калибровочная U(1) симметрия:** $\psi \to \psi e^{i\alpha}, \quad A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu\alpha$
- **Киральная (аксиальная) U(1) симметрия:** $\psi \to \psi e^{i\beta\gamma_5}$
- **Проектор:** $P_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5), \quad P_\pm^2 = P_\pm, \quad P_+P_- = 0, \quad P_+ + P_- = 1$

$$\psi_\pm \equiv \psi_{L,R} = P_\pm\psi, \quad \gamma_5\psi_\pm = \pm\psi_\pm, \quad j_\mu = j^L_\mu + j^R_\mu$$

Безмассовые фермионы в d=3+1

$$S = \int d^4x \; i\bar{\psi}\not{D}\psi = \int d^4x [\; i\psi_+^\dagger \bar{\sigma}^\mu D_\mu \psi_+ + i\psi_-^\dagger \sigma^\mu D_\mu \psi_-]$$

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix}, \quad \sigma^\mu = (1, \sigma^k), \quad \bar{\sigma}^\mu = (1, -\sigma^k), \quad D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$$

- **Калибровка** $A_0 = 0,$ $\Longrightarrow$ **уравнение Вейля** $i\partial_t \psi_+ = i\sigma^k D_k \psi_+$
- **Гамильтониан Дирака:** $H = -i\sigma_k D_k = (-i\partial_k - eA_k)\sigma_k = (\vec{p} - e\vec{A}) \cdot \vec{\sigma}$

Оператор спина $\vec{S} = \frac{1}{2}\vec{\sigma}, \quad \sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk}\sigma^k$ $\Longrightarrow$ $H^2 = (\vec{p} - e\vec{A})^2 - 2e\vec{S} \cdot \vec{B}$

Внешнее магнитное поле: $\vec{B} = (0, 0, B), \quad \vec{A} = (0, Bx, 0)$

$$H^2 = p_x^2 + (p_y - eBx)^2 + p_z^2 - 2eBS_z$$ $\Longleftarrow$ **Уровни Ландау в плоскости (x,y)**

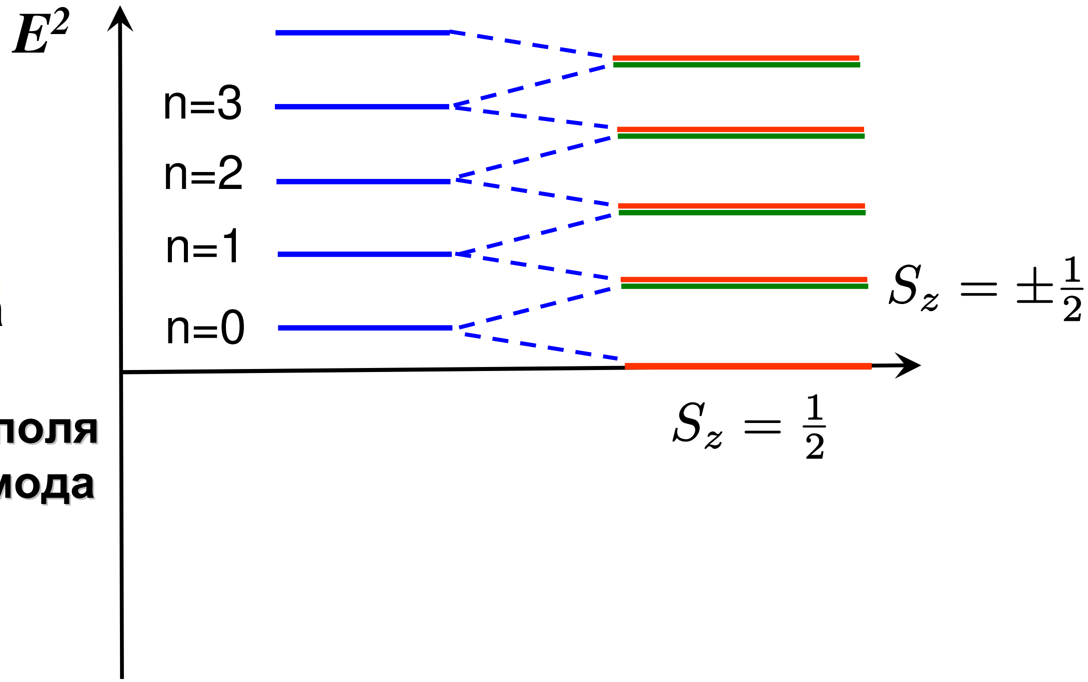
$$E^2 = (2n+1)eB + p_z^2 - 2eBS_z$$

Вырождение по квантовому числу p_y – на диске площадью A имеется $\frac{eB}{2\pi}A$ состояний

Расщепление спектра

$$E^2 = (2n+1)eB + p_z^2 - 2eBS_z$$

$n = 0, \quad S_z = \frac{1}{2}$ **- нулевая мода**



Замечание: **в пределе сильного поля $B \to \infty$ остается только нулевая мода**

$$\psi_0 = \begin{pmatrix} \psi_+(z,t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

- **Эффективная теория в d=1+1:** $S = \int d^4x\, i\bar{\psi}\not{D}\psi \to i\int dtdz\; \bar{\psi}_+(\partial_t - \partial_z)\psi_+$

$$\Rightarrow \Delta N_+ = \boxed{\frac{eB}{2\pi}}\frac{L\mu}{2\pi} = \frac{eB}{2\pi}\frac{e}{2\pi}\int dtdx\, E = \frac{e^2}{(2\pi)^2}\int dtdx\, \vec{E}\cdot\vec{B} = \frac{e^2}{8\pi^2}\int d^4x F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$$

Число состояний на единицу площади

Топологический член

- **Киральная аномалия:**

$$\boxed{\partial^\mu j_\mu^5 = \frac{e^2}{16\pi^2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\mu\nu}F^{\rho\sigma}}$$

Теорема Нетер: $\phi \to \phi' = \phi + \delta\phi, \quad \delta\phi = \alpha(x)X(\phi)$

$$\Rightarrow \quad L \to L + \delta L, \quad \delta L = \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi)}\partial_\mu(\alpha X(\phi)) + \frac{\partial L}{\partial \phi}\alpha X(\phi) =$$

$$= (\partial_\mu \alpha)\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi)}X(\phi) + \alpha\left[\cancel{\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi)}\partial_\mu X(\phi) + \frac{\partial L}{\partial \phi}X(\phi)}\right]$$

$$\delta L = (\partial_\mu \alpha) j^\mu, \quad j^\mu = \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi)}X(\phi)$$

Сохраняющийся ток

- $$\delta S = \int d^4x (\partial_\mu \alpha) j^\mu = -\int d^4x\, \alpha\, (\partial_\mu j^\mu), \quad \delta S = 0 \to (\partial_\mu j^\mu) = 0$$

- **Производящий функционал:** $Z(J) = \int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi] + J\star\phi} \to \int \mathcal{D}\phi' e^{-S[\phi'] + J\star\phi'}$

$$\int \mathcal{D}\phi' e^{-S[\phi'] + J\star\phi'} = \int \mathcal{D}\phi' e^{-S[\phi] + J\star\phi}\, e^{-\int d^4x\, \alpha(\partial_\mu j^\mu) - J(x)X(\phi)} \approx$$

- $\mathcal{D}\phi' = \mathcal{D}\phi$

$$\approx \int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi] + J\star\phi}\left(1 - \int d^4x\, \alpha[\partial_\mu j^\mu - J(x)X(\phi)]\right)$$

$$\Rightarrow \quad \delta Z = 0 \to \int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi] + J\star\phi}\, (\partial_\mu j^\mu - J(x)X(\phi)) = 0$$

Тождества Уорда: $J = 0 \to \partial_\mu j^\mu = 0$

Аксиальная аномалия (более строгий вывод)

- **две симметрии безмассовой теории** $S = \int d^4x\, i\bar{\psi}\not{D}\,\psi$:

Векторная $\quad \psi \to \psi e^{i\alpha},\quad \delta\psi = i\alpha\psi,\quad \delta\bar{\psi} = -i\alpha\bar{\psi},\quad j_\mu = \bar{\psi}\gamma_\mu\psi,\quad \partial^\mu j_\mu = 0$

Псевдо-векторная (аксиальная) $\quad \psi \to \psi e^{i\gamma_5\beta},\quad \delta\psi = i\gamma_5\beta\psi,\quad \delta\bar{\psi} = i\beta\bar{\psi}\gamma_5,\quad j^5_\mu = \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi,\quad \partial^\mu j^5_\mu = 0$?

$$Z[\bar{\psi},\psi] = \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi e^{-S[\bar{\psi},\psi]} \to Z[\bar{\psi}+\delta\bar{\psi},\psi+\delta\psi] = \int \underbrace{\mathcal{D}(\bar{\psi}+\delta\bar{\psi})\mathcal{D}(\psi+\delta\psi)}_{\text{Вариация меры функционального интеграла}} e^{-S[\bar{\psi},\psi]}$$

Вариация меры функционального интеграла

Собственные функции оператора Дирака во внешнем поле: $\quad i\not{D}\,\phi_n = \lambda_n\phi_n$

$$\psi(x) = \sum_n C_n\phi_n(x) \qquad \bar{\psi}(x) = \sum_n \bar{C}_n\bar{\phi}_n(x) \qquad \int d^4x\ \bar{\phi}_n\phi_m = \delta_{nm}$$

***Замечание:* φ_n – 4^x компонентный с-числовый спинор, C_n – грассмановы числа**

$$\Rightarrow\quad S = \int d^4x\, i\bar{\psi}\not{D}\,\psi = \sum_n \lambda_n\bar{C}_nC_n, \qquad \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi = \prod_n \int d\bar{C}_n dC_n$$

Аномалия – не баг а фича

Мера функционального интеграла: $$\mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi = \prod_n \int d\bar{C}_n dC_n$$

Напомним: $\int d\bar{C}_n = \int dC_n = 0; \quad \int d\bar{C}_n \bar{C}_n = \int dC_n C_n = 1$

$$Z[\bar{\psi},\psi] = \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi e^{-S[\bar{\psi},\psi]} = \prod_n \int d\bar{C}_n dC_n e^{-\sum_n \lambda_n \bar{C}_n C_n} = \prod_n \lambda_n = \mathrm{Det}(i\not{D})$$

- **Локальные киральные вращения:**

$$\psi(x) = \sum_n C_n \phi_n(x), \quad \delta\psi = i\beta(x)\gamma_5\psi, \quad \to \quad \sum_n \delta C_n \phi_n = i\beta(x) \sum_n C_n \gamma_5 \phi_n$$

Используя условие ортогональности $\int d^4x \bar{\phi}_n \phi_m = \delta_{nm}$, получим

$$\boxed{\delta C_n = M_{nm} C_m, \quad M_{nm} = i \int d^4x \; \beta(x) \bar{\phi}_n \gamma_5 \phi_m}$$

Задача: **вычислить якобиан** ***<u>линейного</u>*** **преобразования** $C_n \to C_n + M_{nm} C_m$

Если бы C_n **были бы обычные с-числа, то** $J = \det\,(\mathbb{I} + M) = \det\,(\delta_{nm} + M_{nm})$

Для грассмановых переменных $\underline{J = \det^{-1}(\delta_{nm} + M_{nm})}$

Замечание: ***при киральных преобразованиях*** $\delta\psi = i\gamma_5\beta\psi, \quad \delta\bar{\psi} = i\beta\bar{\psi}\gamma_5$

➡ ***якобиан преобразований*** ψ ***и*** $\bar{\psi}$ ***один и тот же***

$$\boxed{\prod_n \int d\bar{C}_n dC_n \to \prod_n \int d\bar{C}'_n C'_n J^2}$$

При векторных поворотах: $\delta\psi = i\alpha\psi, \quad \delta\bar{\psi} = -i\alpha\bar{\psi}$

$$\delta C_n = N_{nm} C_m, \quad N_{nm} = i\int d^4x \; \alpha(x)\bar{\phi}_n\phi_m$$

якобианы преобразований ψ ***и*** $\bar{\psi}$ ➡ $\det^{-1}(\mathbb{I}+N)$ ***и*** $\det^{-1}(\mathbb{I}-N)$

В лидирующем порядке по α ***,*** $\det^{-1}(\mathbb{I}+N)\det^{-1}(\mathbb{I}-N) \approx \mathbb{I}$

$$\boxed{\prod_n \int d\bar{C}_n dC_n \to \prod_n \int d\bar{C}'_n C'_n}$$

В том же порядке по α ***:*** $J = \det^{-1}(\mathbb{I}+M) \approx \det(\mathbb{I}-M) \approx \det e^{-M} = e^{-\mathrm{Tr}\, M}$

- **В явном виде:** $$\boxed{J = e^{-i\int d^4x\, \beta(x) \sum_n \bar{\phi}_n \gamma_5 \phi_n}}$$

Вычисление кирального якобиана

$$\boxed{J = e^{-\mathrm{Tr}\, M} = e^{-i\int d^4x\, \beta(x) \sum_n \bar{\phi}_n \gamma_5 \phi_n}}$$

Замечание: *обозначение $\mathrm{Tr}\, M$ включает сумму по спинорным индексам поля ф*

- *Расходится ли сумма по бесконечному числу мод ϕ_n ?* $\Longrightarrow$ $J \to \infty$ **?**

Напомним: **трюк регуляризации расходящихся сумм (см эффект Казимира)** $\sum_{n=1}^{\infty} n \to \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-\alpha n}$

$$\boxed{i\not{D}\, \phi_n = \lambda_n \phi_n}$$

$$\int d^4x\, \beta(x) \sum_n \bar{\phi}_n \gamma_5 \phi_n \to \lim_{\Lambda\to\infty} \int d^4x \beta(x) \sum_n \bar{\phi}_n \gamma_5 \phi_n e^{-\lambda_n^2/\Lambda^2} =$$

$$= \lim_{\Lambda\to\infty} \int d^4x \beta(x) \sum_n \bar{\phi}_n \gamma_5 e^{-(i\not{D})^2/\Lambda^2} \phi_n$$

- **Регуляризация одновременно включает оператор $\not{D} = D_\mu \gamma^\mu$, J уже не зависит непосредственно от $\mathrm{Tr}\, \gamma_5$, но**

$$\mathrm{tr}\, \gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma = 4\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}; \quad \mathrm{tr}\, \gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu = 0$$

- **обозначение $\mathrm{Tr}\, M$ включает функциональный след в базисе функций ф. Замена базиса** $\phi_n \to e^{ik\cdot x}, \quad \bar{\phi}_n \to e^{-ik\cdot x}$ **не меняет след**

Аналогия с квантовой механикой: замена ортогонального базиса функций ϕ_n :

$$\langle O\rangle = \sum_n \phi^\dagger(x)\hat{O}\phi_n = \sum_n \langle\phi_n|x\rangle\langle x|O|\phi_n\rangle = \langle x|O|x\rangle =$$

$$= \int\frac{dk}{2\pi}\langle k|x\rangle\langle x|O|k\rangle = \int\frac{dk}{2\pi}e^{-ikx}Oe^{ikx}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_n \bar{\phi}_n(x)\gamma_5 e^{-(i\not{D})^2/\Lambda^2}\phi_n(x) = \int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\mathrm{tr}\,\left(\gamma_5 e^{-ik\cdot x}e^{-(i\not{D})^2/\Lambda^2}e^{ik\cdot x}\right)$$

- $$(\not{D})^2 = \gamma^\mu\gamma^\nu D_\mu D_\nu = \frac{1}{2}\{\gamma^\mu,\,\gamma^\nu\}D_\mu D_\nu + \frac{1}{2}[\gamma^\mu,\,\gamma^\nu]D_\mu D_\nu =$$

$$\boxed{\{\gamma_\mu,\gamma_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu}}$$

$$= D^2 + \frac{1}{4}[\gamma^\mu,\,\gamma^\nu][D_\mu,\,D_\nu] = \boxed{D^2 - \frac{ie}{2}\gamma^\mu\gamma^\nu F_{\mu\nu}}$$

- $$\boxed{e^{-ik\cdot x}D_\mu e^{ik\cdot x} = D_\mu + ik_\mu}$$

$$\Rightarrow \quad e^{-ik\cdot x}e^{-(i\not{D})^2/\Lambda^2}e^{ik\cdot x} = e^{-ik\cdot x}\left[e^{D^2/\Lambda^2-\frac{ie}{2}\gamma^\mu\gamma^\nu F_{\mu\nu}/\Lambda^2}\right]e^{ik\cdot x} =$$

$$= e^{(D_\mu+ik_\mu)^2/\Lambda^2-\frac{ie}{2}\gamma^\mu\gamma^\nu F_{\mu\nu}/\Lambda^2} = e^{(D_\mu+ik_\mu)^2/\Lambda^2}e^{-\frac{ie}{2}\gamma^\mu\gamma^\nu F_{\mu\nu}/\Lambda^2}e^{\cdots}$$

Бейкер - Кэмпбелл – Хаусдорф: $e^Ae^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\ldots}$

Знай свою меру!

Разложение в ряд: $e^{-\frac{ie}{2}\gamma^\mu\gamma^\nu F_{\mu\nu}/\Lambda^2} = 1 - \frac{ie}{2}\gamma^\mu\gamma^\nu F_{\mu\nu}\frac{1}{\Lambda^2} - \frac{e^2}{8}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}\frac{1}{\Lambda^4} + \ldots$

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\mathrm{tr}\left\{\gamma_5 e^{-\frac{ie}{2}\gamma^\mu\gamma^\nu F_{\mu\nu}/\Lambda^2}\right\} \approx$$

(аналогично - $e^{(D_\mu + ik_\mu)^2/\Lambda^2}$)

$$\approx \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\mathrm{tr}\left\{\gamma_5\left(\cancel{1} - \frac{ie}{2}\cancel{\gamma^\mu\gamma^\nu} F_{\mu\nu}\frac{1}{\Lambda^2} - \frac{e^2}{8}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}\frac{1}{\Lambda^4} + \ldots\right)\right\}$$

Напомним: $\mathrm{tr}\,\gamma_5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma = 4\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma};\quad \mathrm{tr}\,\gamma_5 = \mathrm{tr}\,\gamma_5\gamma^\mu\gamma^\nu = 0,\quad \int d^4k \sim \Lambda^4$

$$\Rightarrow \sum_n \bar\phi_n\gamma_5\phi_n = \lim_{\Lambda\to\infty}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\mathrm{tr}\left(\gamma_5 e^{-ik\cdot x}e^{\not{D}^2/\Lambda^2}e^{ik\cdot x}\right) =$$

$$= \lim_{\Lambda\to\infty}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,e^{-k^2/\Lambda^2}\left(\frac{e^2}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}\frac{1}{\Lambda^4} + \ldots\right) = \boxed{\frac{e^2}{32\pi^2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}}$$

- **Окончательно: при киральных преобразованиях** $\delta\psi = i\gamma_5\beta(x)\psi,\quad \delta\bar\psi = i\beta(x)\bar\psi\gamma_5$

$$\int \mathcal{D}\bar\psi\mathcal{D}\psi \to \int \mathcal{D}\bar\psi\mathcal{D}\psi\, e^{-\frac{ie^2}{16\pi^2}\int d^4x\,\beta(x)\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}}$$

Аномалия в условии сохранения аксиального тока: $\partial^\mu j^5_\mu = \frac{e^2}{16\pi^2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\mu\nu}F^{\rho\sigma}$

Задача: проверьте, что в d=1+1 аксиальная аномалия имеет вид

$$\partial^\mu j^5_\mu = \frac{e}{2\pi}\varepsilon_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

(подсказка: в этом случае $\mathrm{tr}\,\gamma_5\gamma^\mu\gamma^\nu = 2i\varepsilon^{\mu\nu}$)

Замечание 1:

$$\partial^\mu j^5_\mu = \frac{e^2}{16\pi^2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\mu\nu}F^{\rho\sigma} = \frac{e^2}{4\pi^2}\partial^\mu(\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}A^\nu\partial^\rho A^\sigma), \qquad \partial^\mu\left(j^5_\mu - \frac{e^2}{4\pi^2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}A^\nu\partial^\rho A^\sigma)\right) = 0$$

Что не так с сохраняющимся новым током?

***Замечание 2:* для массивных фермионов**

$$\partial^\mu j^5_\mu = -2im\bar\psi\gamma_5\psi + \frac{e^2}{16\pi^2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\mu\nu}F^{\rho\sigma}$$

- **Евклидов оператор Дирака для фермионов в фоновом поле A_μ :**

$$i\not{D}\,\phi_n = \lambda_n\phi_n$$

Замечание: *если ϕ_n - собственная функция, то и $\gamma_5\phi_n$ тоже собственная функция*

$$\gamma_\mu\gamma_5 = -\gamma_5\gamma_\mu, \qquad i\not{D}\,(\gamma_5\phi_n) = -i\gamma_5\not{D}\,\phi_n = -\lambda_n\gamma_5\phi_n$$

1. *Ненулевые собственные значения попарны:* $\lambda_n \leftrightarrow -\lambda_n$
2. *Собственные функции* ϕ_n *и* $\gamma_5\phi_n$ *ортогональны*
3. *А как нулевая мода?* $i\not{D}\phi_0 = 0$ *?* *Чем отличаются тогда* ϕ_n *и* $\gamma_5\phi_n$ *?*

Собственные значения $\gamma_5 = \pm 1$, n_+- число мод с +1, n_- - число мод с -1

Теорема об индексе: $\mathrm{Index}\,(i\not{D}) = n_+ - n_-$

Напомним:

$$\sum_n \bar{\phi}_n \gamma_5 \phi_n = \frac{e^2}{32\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} \to \int d^4x \sum_n \bar{\phi}_n \gamma_5 \phi_n = \frac{e^2}{32\pi^2} \int d^4x \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}$$

- **Функции ϕ_n и $\gamma_5 \phi_n$ ортогональны:**

$$\int d^4x \sum_n \bar{\phi}_n \gamma_5 \phi_n = \int d^4x \sum_{zero\ modes} \bar{\phi}_n \gamma_5 \phi_n = n_+ - n_-$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\mathrm{Index}\,(i\not{D}) = \frac{e^2}{32\pi^2} \int d^4x \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}}$$

Следствие 1: Аксиальная аномалия непосредственно связана с топологией
Следствие 2: Нулевые фермионные моды всегда локализованы на топологическом солитоне (вихре, монополе, инстантоне и пр)

Пример: Фермионная мода монополя

$$\boxed{L_{YMH} = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right) - \mathrm{Tr}\left(D_\mu \Phi\right)^2 + \lambda \mathrm{Tr}\left(\Phi^2 - a^2\right)^2} \qquad D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu^a \frac{\sigma^a}{2}$$

- **Монополь т Хуфта-Полякова:** $\Phi : S^2_\infty \mapsto S^2_{vac}, \quad \Pi_2(S^2) = \mathbb{Z} \qquad \Phi = \phi^a \sigma^a$

$$\boxed{\phi^a = \frac{r^a}{gr^2} H(r), \quad A_n^a = \varepsilon_{amn}\frac{r^m}{gr^2}[1 - W(r)], \quad A_0^a = 0}$$

+ фермионы:

$$\boxed{L_{\rm sp} = \frac{i}{2}\left((\hat{\not D}\bar\psi)\psi - \bar\psi \hat{\not D}\psi\right) - m\bar\psi\psi - \frac{i}{2}h\bar\psi\gamma^5\phi\psi}$$

$$\left\{\begin{aligned} &D_\nu F^{a\nu\mu} = -e\epsilon^{abc}\phi^b D^\mu \phi^c - \frac{e}{2}\bar\psi\gamma^\mu\sigma^a\psi\,, \\ &D_\mu D^\mu \phi^a + \lambda\phi^a\left(\phi^2 - 1\right) + ih\bar\psi\gamma^5\sigma^a\psi = 0\,, \\ &i\hat{\not D}\psi - i\frac{h}{2}\gamma^5\sigma^a\phi^a\psi - m\psi = 0 \end{aligned}\right.$$

- **спин-изоспин фермион:**

$$\psi = e^{-i\omega t}\begin{pmatrix}\chi \\ \eta\end{pmatrix}$$

$$\int d^3x \psi^\dagger\psi = 1$$

$$\chi = \frac{u(r)}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \eta = i\frac{v(r)}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \sin\theta e^{-i\varphi} & -\cos\theta \\ -\cos\theta & -\sin\theta e^{i\varphi} \end{pmatrix}.$$

Безразмерные параметры модели:

$$\beta = \frac{M_s}{M_v}, \quad h = \frac{2M_f}{M_v}$$

- **m=0** $$u' + u\left(\frac{1-W}{x} - \frac{h}{2}H\right) = 0, \quad v' + v\left(\frac{1+W}{x} + \frac{h}{2}H\right) = 0$$

- **BPS limit:** $\beta \to 0, \quad \hat{\phi}^a \underset{r\to\infty}{\to} \hat{r}^a \Rightarrow W = \frac{x}{\sinh x}, \quad H = \coth x - \frac{1}{x}, \quad x = agr$

Обобщенный угловой момент: $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} + \vec{T} = \vec{L} + \vec{\sigma} \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes \vec{\tau}$

Сферическая симметрия: $\vec{S} + \vec{T} = 0$

$$v = 0\,, \quad u \sim e^{-\int dx\left[\frac{1-W(x)}{x} - \frac{h}{2}H(x)\right]}$$

Фермионная нулевая мода (ω=0)

- **BPS limit:** $v = 0\,, \quad u = \frac{1}{\cosh^2(x/2)} \qquad (h = -2)$

Фермионная моды инстантона

Напомним: инстантон – это самодуальное решение евклидовой теории Янга-Миллса с конечным действием $S = -\frac{1}{2g^2}\int d^4x \mathrm{Tr}\left(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right)$ и ненулевым топзарядом,

$$L_\theta = \frac{\theta}{16\pi^2}\int d^4x\,\mathrm{Tr}\,\tilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \frac{\theta}{8\pi^2}\int d^4x\,\partial_\mu K^\mu; \quad K_\mu = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{Tr}\left(A_\nu\partial_\rho A_\sigma + \frac{2}{3}A_\nu A_\rho A_\sigma\right)$$

1. Несохранение аксиального тока автоматически возникает в неабелевой теории

$$\langle n|n+m\rangle \sim \int \mathcal{D}A\mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi e^{-\frac{1}{2g^2}\int d^4x \mathrm{Tr}\left(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right) + i\bar{\psi}\not{D}\psi} \sim$$

$$\sim \int \mathcal{D}A \det\left(i\not{D}\right) e^{-\frac{1}{2g^2}\int d^4x \mathrm{Tr}\left(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right)} = 0$$

2. Фермионная нулевая мода подавляет туннелирование между секторами с различными топзарядами

$$\psi(x) = \sum_n C_n\phi_n(x) \qquad \bar{\psi}(x) = \sum_n \bar{C}_n\bar{\phi}_n(x)$$

$$Z[\bar{\psi},\psi] = \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi e^{-S[\bar{\psi},\psi]} = \prod_n \int d\bar{C}_n dC_n e^{-\sum\limits_m \lambda_m \bar{C}_m C_m} =$$

$$= \prod_n \int d\bar{C}_n dC_n \prod_m \left(1 + \lambda_m \bar{C}_m C_m\right)$$

$$\boxed{\lambda_0 = 0 \to Z[\bar{\psi},\psi] = 0}$$

$$\boxed{\int dC = 0; \quad \int C\,dC = 1}$$

$$\psi_\pm \equiv \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5)\psi, \quad \gamma_5\psi_\pm = \pm\psi_\pm \qquad \psi(x) = \sum_n C_n\phi_n(x) \qquad \bar\psi(x) = \sum_n \bar C_n\bar\phi_n(x)$$

$$\bar\psi_-\psi_+ = \frac{1}{2}\sum_{n,m}\bar C_n C_m\bar\phi_n(1+\gamma_5)\phi_m$$

- **Киральный конденсат:**

$$\langle\bar\psi_+\,\psi_-\rangle = \int \mathcal{D}\bar\psi\mathcal{D}\psi\,\bar\psi_-\psi_+\,e^{-S[\bar\psi,\psi]} =$$

$$= \prod_n\int d\bar C_n dC_n \prod_m(1+\lambda_m\bar C_m C_m)\,\frac{1}{2}\sum_{k,l}\bar C_k C_l\bar\phi_k(1+\gamma_5)\phi_l =$$

$$= \left(\prod_n\lambda_n\right)\frac{1}{2}\left(\sum_m\frac{1}{\lambda_m}\bar\phi_m(1+\gamma_5)\phi_m\right)$$

Нет инстантона $\rightarrow$ нет нулевой моды, $\forall n \quad \lambda_n \neq 0, \quad \prod_n\lambda_n \neq 0$

Однако, ненулевые собственные значения появляются попарно как $\pm\lambda_n$

$\Rightarrow$ $$\sum_m\frac{1}{\lambda_m}\bar\phi_m(1+\gamma_5)\phi_m = 0, \qquad \langle\bar\psi_+\,\psi_-\rangle_{Q=0} = 0$$

Киральный конденсат отсутствует если вакуум тривиален и нет нулевой моды

Киральный конденсат на фоне инстантона (Q=1)

$$\boxed{\langle\bar\psi_+\psi_-\rangle_{Q=1} = \left(\prod_n \lambda_n\right)\frac{1}{2}\left(\sum_m \frac{1}{\lambda_m}\bar\phi_m(1+\gamma_5)\phi_m\right)}$$

- **Одна нулевая мода:** $\lambda_0 = 0, \quad \gamma_5\phi_0 = \phi_0$ **- сокращение** λ_0 **и** $\dfrac{1}{\lambda_0}$ **!**

$$\langle\bar\psi_+\psi_-\rangle_{Q=1} = \det{}'(i\not{D})\,\bar\phi_0\phi_0, \qquad \det{}'(i\not{D}) = \prod_{n\neq 0}\lambda_n$$

- ***Замечание 1:*** **Аксиальная аномалия в неабелевой калибровочной теории:**

$$L_f = i\bar\psi\gamma^\mu(\partial_\mu - igA_\mu)\psi, \qquad \partial^\mu j^5_\mu = \frac{1}{16\pi^2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{Tr}\,F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}$$

- ***Замечание 2:*** **Аксиальная аномалия в гравитационном поле:**

Тетрадный формализм $\quad ds^2 = \eta_{ab}(\mathbf{e}^a_\mu dx^\mu)(\mathbf{e}^b_\nu dx^\nu) \qquad \gamma^\alpha = \mathbf{e}^\alpha_\mu\gamma^\mu$

Спиновая связность

$$D_\mu\mathbf{e}^a_\nu \equiv \partial_\mu\mathbf{e}^a_\nu - \Gamma^\rho_{\mu\nu}\mathbf{e}^a_\rho + \omega^{ab}_\mu\mathbf{e}^b_\nu \qquad \omega^{ab}_\mu = \mathbf{e}^a_\nu\Gamma^\nu_{\sigma\mu}\mathbf{e}^{b\sigma} + \mathbf{e}^a_\nu\partial_\mu\mathbf{e}^{\nu b}$$

$$(R_{\mu\nu})^a_b = \partial_\mu\omega^a_{\nu b} - \partial_\nu\omega^a_{\mu b} + [\omega_\mu,\,\omega_\nu]^a_b$$

$$\Rightarrow \quad \partial^\mu j^5_\mu = \frac{1}{384\pi^2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\lambda\tau}R^{\rho\sigma}_{\lambda\tau}$$

Аксиальная аномалия в ОТО!

Киральная симметрия и ее нарушение в КХД

- **Лагранжиан SU(N) теории Янга-Миллса с N_f безмассовыми фермионами (КХД):**

$$L = -\frac{1}{2g^2}\,\mathrm{Tr}\,F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \sum_{i=1}^{N_f} i\bar{\psi}_i \not{D}\psi_i, \qquad \not{D}\psi_i \equiv \not{\partial}\psi_i - i\gamma^\mu A_\mu \psi_i$$

- **Киральная декомпозиция:** $\psi_i = \begin{pmatrix} \psi_{+i} \\ \psi_{-i} \end{pmatrix}, \quad \sigma^\mu = (1, \sigma^k), \quad \bar{\sigma}^\mu = (1, -\sigma^k)$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{N_f} i\bar{\psi}_i \not{D}\psi_i \equiv \sum_{i=1}^{N_f} \left\{ i\psi^\dagger_{+i}\bar{\sigma}^\mu D_\mu \psi_{+i} + i\psi^\dagger_{-i}\sigma^\mu D_\mu \psi_{-i} \right\}}$$

- **Глобальная симметрия**

$$G_f = U_L \times U_R, \qquad U_L : \psi_{-i} = L_{ij}\psi_{-j}, \quad U_R : \psi_{+i} = R_{ij}\psi_{+j}$$

- $U(1)_V : \quad \psi_{\pm,i} \to e^{i\alpha}\psi_{\pm,i}; \qquad \cancel{U(1)}_A : \quad \psi_{\pm,i} \to e^{\pm i\beta}\psi_{\pm,i}$ **Аномалия!**

$\Rightarrow$ $G_f = U(1)_V \times SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R \quad + \quad SU(N_c)$

- **Конденсат:** $\langle \bar{\psi}_{-i}\,\psi_{+j} \rangle = 0$ **(слабая связь)** $\langle \bar{\psi}_{-i}\,\psi_{+j} \rangle = \sigma\delta_{ij}$ **(сильная связь)**

Пертурбативная КХД **Непертурбативная КХД**

Эффективная КХД при низких энергиях ($ 1000000 Problem)

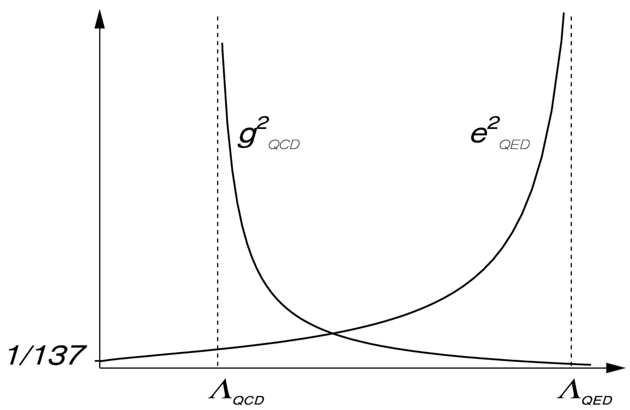
$\Lambda_{\chi sb} \sim 1$ GeV $\qquad\qquad$ $\Lambda_{QCD} \sim 180$ MeV

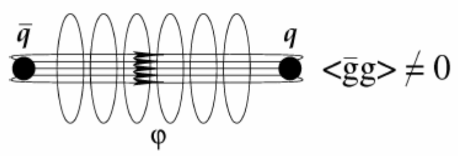
Пертурбативная КХД (Кварки & глюоны) $\qquad$ *Low-energy effective theory (Непертурбативная КХД)* $\qquad$ *Адроны*

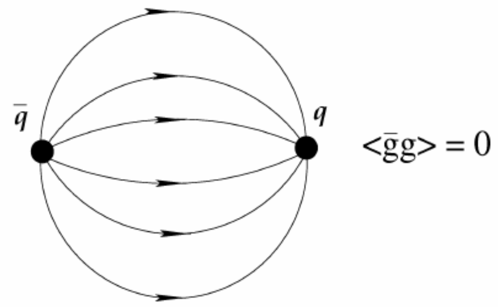
- **Конфайнмент:**

Слабое определение – в физическом спектре нет цветных состояний

Сильное определение – кварки в адронах связаны линейным потенциалом







Замечание: **ненулевой киральный конденсат нарушает симметрию:**

$$\psi_{-i} \to L_{ij}\psi_{-j}, \quad \psi_{+i} \to R_{ij}\psi_{+j}, \quad \langle \bar{\psi}_{-i}\, \psi_{+j} \rangle \to \sigma\, U_{ij}, \quad U \in SU(N_f)$$

$$\Rightarrow \quad G_f = U(1)_V \times SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R \mapsto U(1)_V \times SU(N_f)_V$$

$$SU(N_f)_V \in SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R$$

Диагональная подгруппа

- **Безмассовые возбуждения над кварковым конденсатом (π^a – ‚пионы‘) :**

$$U(x) = e^{\frac{2i}{f_\pi}\pi^a T^a} \in SU(N_f), \quad [T^a, T^b] = f_{abc}T^c, \quad \mathrm{Tr}\, U^\dagger U = 1$$

- **Киральные преобразования пионного поля** $U(x) \to L^\dagger\, U(x)\, R$

Лагранжиан кирального поля?

$$\cancel{(\mathrm{Tr}\, U^\dagger \partial_\mu U)^2} \ ? \qquad \mathrm{Tr}\,(\partial^\mu U^\dagger \partial_\mu U) = \mathrm{Tr}\,(U^\dagger \partial_\mu U)^2 \ ?$$

$$U^\dagger \partial_\mu U = -(\partial_\mu U^\dagger) U \Rightarrow (U^\dagger \partial_\mu U)^2 = -(\partial_\mu U^\dagger) U U^\dagger \partial_\mu U = \partial^\mu U^\dagger \partial_\mu U$$

- **Сигма-модель:**

$$\boxed{L = \frac{f_\pi^2}{4}\,\mathrm{Tr}\,(\partial^\mu U^\dagger\, \partial_\mu U)}$$

Гелл-Ман & Леви (1960)

Замечание 1: $U(x) = \sigma(x)\cdot\mathbb{I} + i\pi^i(x)\cdot\tau^i, \quad \sigma^2 + \pi^i\cdot\pi^i = 1, \quad \phi^a = (\sigma, \pi^i)$

SU(2): $U = \begin{pmatrix} \sigma + i\pi_3 & \pi_2 + i\pi_1 \\ i\pi_1 - \pi_2 & \sigma - i\pi_3 \end{pmatrix}$ $\qquad L = \frac{f_\pi^2}{4}\,\mathrm{Tr}\,(\partial^\mu U^\dagger\,\partial_\mu U) = \frac{f_\pi^2}{2}(\partial^\mu\phi^a\,\partial_\mu\phi^a)$

Замечание 2: **Сигма-модель – это эффективная теория**

$$L_{QCD} = -\frac{1}{2g^2}\,\mathrm{Tr}\,F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \sum_{i=1}^{N_f} i\bar{\psi}_i \not{D}\psi_i \quad \Longleftrightarrow \quad L_\sigma = \frac{f_\pi^2}{4}\,\mathrm{Tr}\,(\partial^\mu U^\dagger\,\partial_\mu U)$$

- **Взаимодействие пионов:** $U = e^{\frac{i\pi}{f_\pi}} \approx \mathbb{I} + \frac{i\pi}{f_\pi} - \frac{\pi^2}{f_\pi^2} + \ldots$

$$\Rightarrow \quad L = \frac{f_\pi^2}{4}\,\mathrm{Tr}\,(\partial^\mu U^\dagger\,\partial_\mu U) \approx \mathrm{Tr}\,(\partial^\mu\pi\partial_\mu\pi) - \frac{2}{3f_\pi^2}\mathrm{Tr}\,(\pi^2(\partial^\mu\pi\partial_\mu\pi) - (\pi\partial_\mu\pi)^2) + \ldots$$

Эксперимент: $f_\pi = 93\ MeV$

- **Левые и правые вращения кирального поля:** $U \to L^\dagger U, \quad U \to UR$

- **Сохраняющиеся токи:** $R_\mu = (\partial_\mu U)U^\dagger; \qquad L_\mu = (\partial_\mu U^\dagger)U$

Задача: **Проверьте, используя инфинитезимальные киральные преобразования поля U, что эти токи сохраняются по теореме Нетер**

Модель Скирма

$$U \in SU(2)$$

$$L = \frac{f_\pi^2}{4}\mathrm{Tr}\ \left(\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger\right) + \frac{1}{32e^2}\mathrm{Tr}\ \left(\left[U^\dagger\partial_\mu U, U^\dagger\partial_\nu U\right]^2\right) + \frac{m_\pi^2 f_\pi^2}{8}\mathrm{Tr}\ \left(U - \mathbb{I}\right)$$

Сигма-модель

Член Скирма

Потенциал

Tony Hilton Royle Skyrme

- **Поле Скирма:** $U(\vec{r}, t) \xrightarrow[r\to\infty]{} \mathbb{I}$ $\quad U: \ S^3 \mapsto S^3 \quad e = 4.84, \quad m_\pi = 138\ MeV$

- **Индекс отображения (топологический заряд):**

$$\boxed{Q = \frac{1}{24\pi^2}\varepsilon_{ijk}\int d^3x \mathrm{Tr}\ \left[(U^\dagger\partial^i U)(U^\dagger\partial^j U)(U^\dagger\partial^k U)\right]}$$

Rescaling: $\quad x_\mu \to 2x_\mu/(ef_\pi); \quad m = 2m_\pi/(f_\pi e), \quad U = \sigma + i\pi^i \cdot \tau^i, \quad \phi^a = (\sigma, \pi^i)$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi^a)^2 - \frac{1}{4}[(\partial_\mu\phi^a\partial_\nu\phi^a)^2 - (\partial_\mu\phi^a)^4] + m^2\ (1 - \phi^3)$$

- Фермионы и бозоны рассматриваются с единой точки зрения (no SUSY!)
- Локализованные полевые конфигурации как модель частиц (барионов)
- Кварки не возникают как фундаментальные степени свободы

Еще один ежовый анзац

- **Сферически симметричная параметризация:**

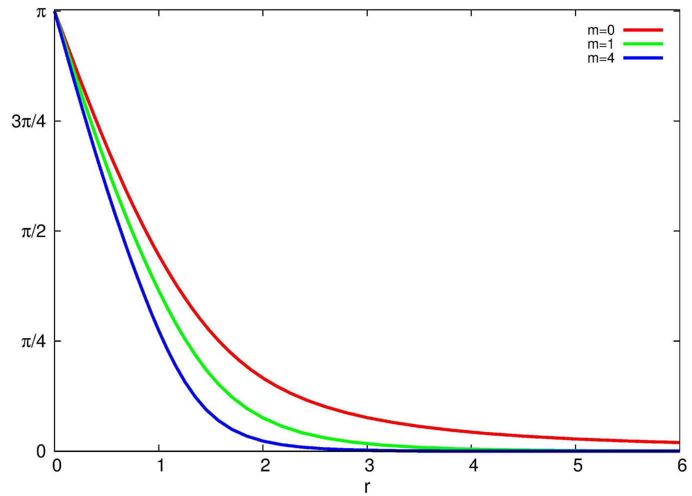
$$\boxed{U(r) = \exp\left[i\tau^a \hat{r}^a F(r)\right]}$$

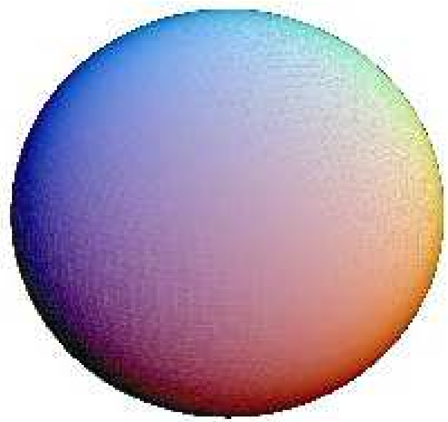
$$U(r) = \sigma + \pi^a \cdot \tau^a = \cos F(r) + i\hat{\mathbf{n}} \cdot \tau \sin F(r)$$

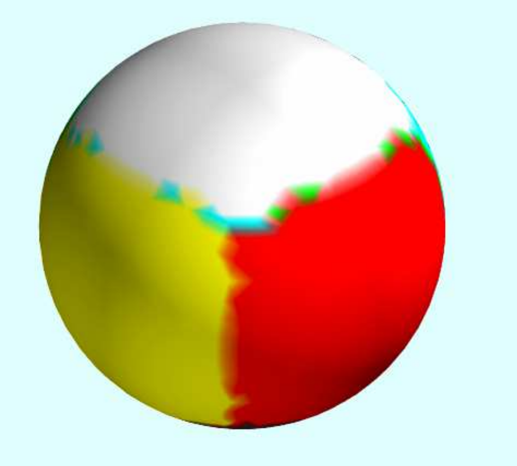
$$Q = \frac{1}{\pi}\left[F(r) - \frac{\sin 2F(r)}{2}\right]_0^\infty$$

Граничные условия

$$F(0) = \pi, \;\; F(\infty) = 0 \;\; \Rightarrow \;\; Q = 1$$







$$E = 4\pi \int_0^\infty dr \left(r^2 (F')^2 + 2\sin^2 F (1 + (F')^2) + \frac{\sin^4 F}{r^2} + m^2 (1 - \cos F) \right)$$

Задача: Проверьте это!

Вращающийся скирмион

Симметрии модели Скирма:

$$U(\vec{r},t) \xrightarrow[r\to\infty]{} \mathbb{I}$$

- **Группа Пуанкаре** $\mathbb{R}^{1,3} \times SO(3,1)$
- **SO(4) киральная симметрия** $SO(4) \cong \dfrac{SU(2)\times SU(2)}{\mathbb{Z}_2} \Rightarrow SO(3)$

Уравнения Эйлера-Лагранжа:

$$R_\mu = (\partial_\mu U)U^\dagger; \qquad L_\mu = (\partial_\mu U^\dagger)U$$

$$\partial^\mu \bar{R}_\mu \equiv \partial^\mu R_\mu + \frac{1}{4}[R_\nu,[R^\nu,R_\mu]] = 0 \qquad \partial^\mu \bar{L}_\mu \equiv \partial^\mu L_\mu + \frac{1}{4}[L_\nu,[L^\nu,L_\mu]] = 0$$

Замечание: токи R_μ, L_μ удовлетворяют условиям нулевой кривизны

$$\partial_\mu R_\nu - \partial_\nu R_\mu + [R_\mu, R_\nu] = 0 \qquad \partial_\mu L_\nu - \partial_\nu L_\mu + [L_\mu, L_\nu] = 0$$

- **Коллективные координаты:**
  (Изовращения скирмиона) $U(r,t) = A(t)U(r)A^\dagger(t); \qquad A(t) \in SU(2)$
- **Пространственные вращения скирмиона:** $\vec{r} \to O(t)\vec{r}; \qquad O(t) \in SO(3)$

Вращающийся скирмион

Угловые скорости

$$\Omega_k = -i\mathrm{Tr}\,(\tau_k \dot{O} O^\dagger); \qquad \omega_k = -i\mathrm{Tr}\,(\tau_k \dot{A} A^\dagger)$$

Пространственные вращения

Изовращения

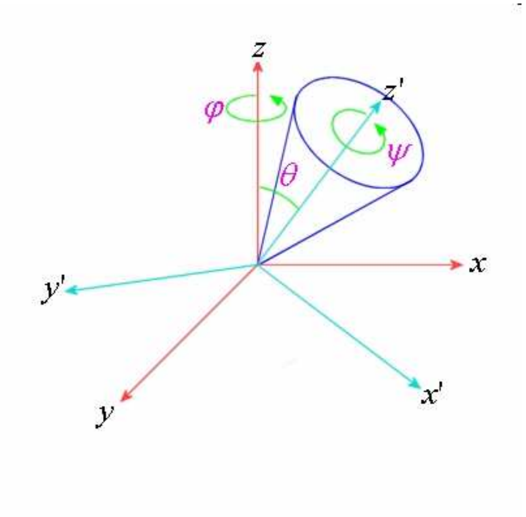
Эффективный лагранжиан

$$L = \frac{1}{2}\omega_i U_{ij}\omega_j + \frac{1}{2}\Omega_i V_{ij}\Omega_j - \omega_i W_{ij}\Omega_j - M$$

Моменты инерции

The body-fixed spin and isospin angular momenta

$$L_i = -W_{ij}\omega_j + V_{ij}\Omega_j; \qquad K_i = U_{ij}\omega_j - W_{ij}\Omega_j$$



$$J_i = -O^\dagger_{ij} L_j; \qquad I_i = -A_{ij} K_j$$

The space-fixed spin and isospin angular momenta

Интегралы движения

Так как $O_{ij} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}(A\tau_i A^\dagger \tau_j)$, то для ежового анзаца скирмиона его пространственные вращения эквивалентны изовращениям

Вращающийся скирмион

Q=1

$$U(r) = \exp\left[i\tau^a \hat{r}^a F(r)\right]$$

Вращения в координатном пространстве могут быть скомпенсированы изовращениями:

$$U(r) \to A(t)U(Or)A^\dagger(t) = \widetilde{A}(t)U(r)\widetilde{A}(t) \qquad \widetilde{A} = OA \in SU(2)$$

Угловые скорости

$$\Omega_L^a = i\,\mathrm{Tr}(A^\dagger \dot{A}\tau^a) \qquad \Omega_R^a = i\,\mathrm{Tr}\dot{A}A^\dagger\tau^a)$$

Эффективный лагранжиан: $L = M + \frac{I}{2}\Omega_L^2 = M + \frac{I}{2}\Omega_R^2 = M + I\,\mathrm{Tr}\,\dot{A}^\dagger\dot{A}$

$$I = \frac{8\pi}{3}\int_0^\infty r^2 dr \sin^2 f(r)\left[\frac{F_\pi^2}{4} + \frac{1}{e^2}\left(f'(r)^2 + \frac{\sin^2 f(r)}{r^2}\right)\right]$$

Вращения волчка

Момент инерции вращения скирмиона

Каноническое квантование: **имеется два угловых момента, J_L (канонически сопряженный частоте Ω_L) и J_R (сопряженный частоте Ω_R).**

$$\boxed{J_{L,R} = I\,\Omega_{L,R}}$$

Скирмион как барион

$$I = \text{const} \quad \Rightarrow \quad H = M + \frac{J^2}{2I} = M + \frac{j(j+1)}{2I}$$

$$[J_i, J_j] = \varepsilon_{ijk} J_k$$

Для ежового анзаца спин = изоспин

- **J=1/2, S=1/2: Нейтрон**

$$m_n = 939\ MeV$$

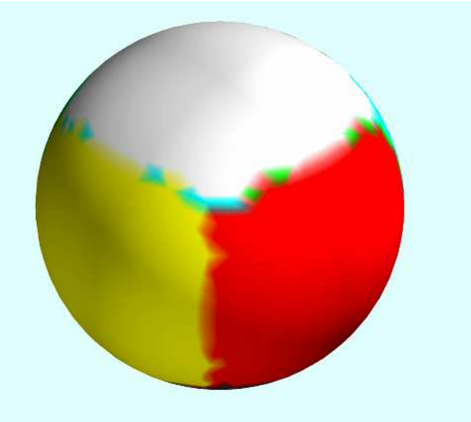
- **J=3/2, S=3/2: Δ-резонанс**

$$m_\Delta = 1232\ MeV$$

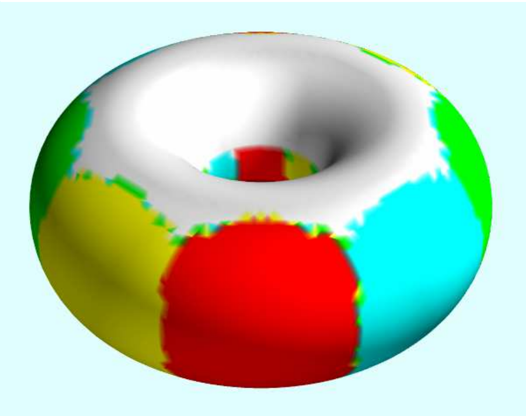
Подход Скирма:

- **Модель Скирма рассматривается как приближение к низкоэнергетической КХД**
- **Солитоны отождествляются с барионами а их топологический заряд с барионным числом**
- **Стабильность нуклонов связана с их топологическими свойствами**
- **Линеаризованные возмущения поля Скирма отождествляются с мезонами**

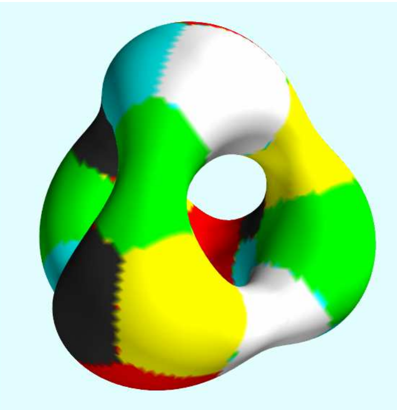
Скирмионы



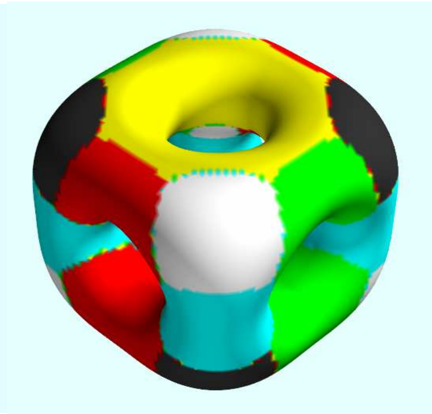
Q=1



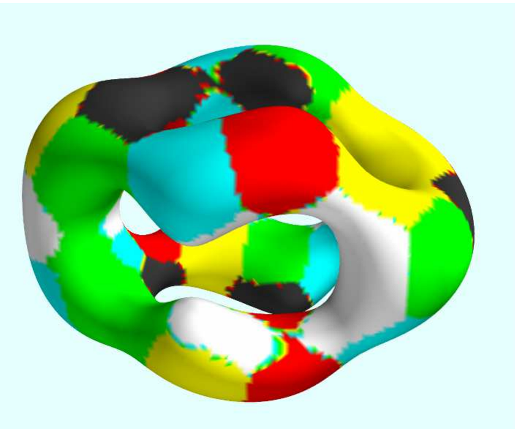
Q=2



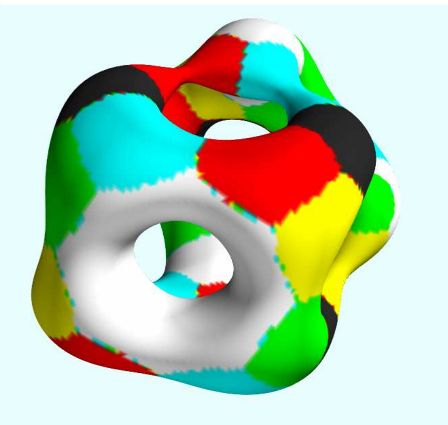
Q=3



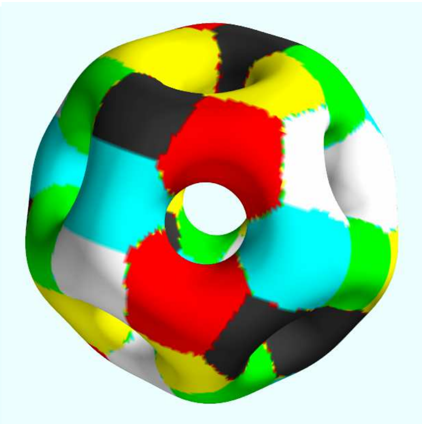
Q=4



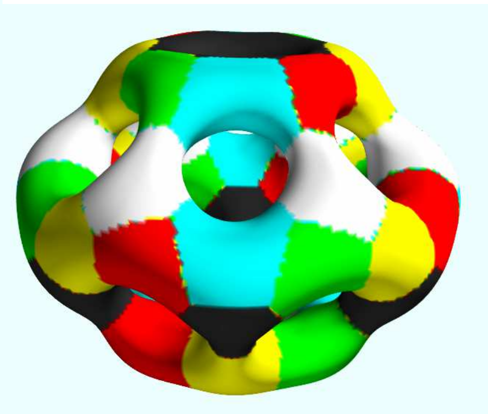
Q=5



Q=6

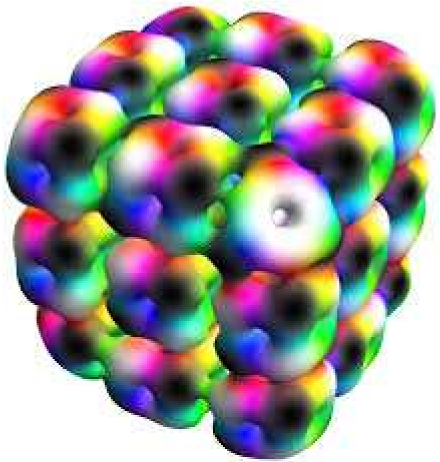
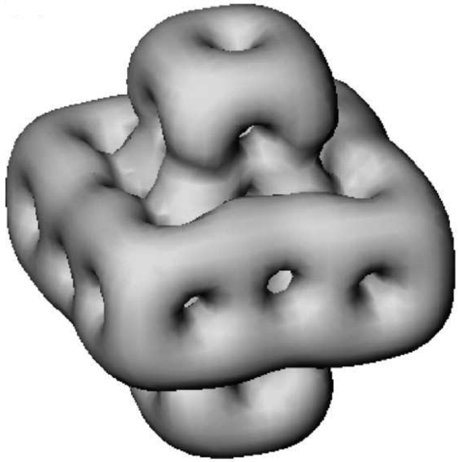
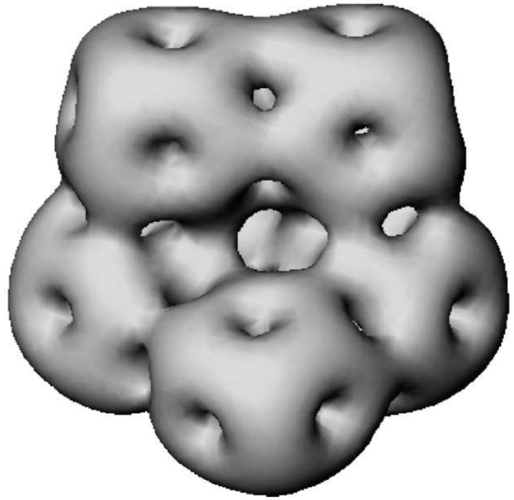
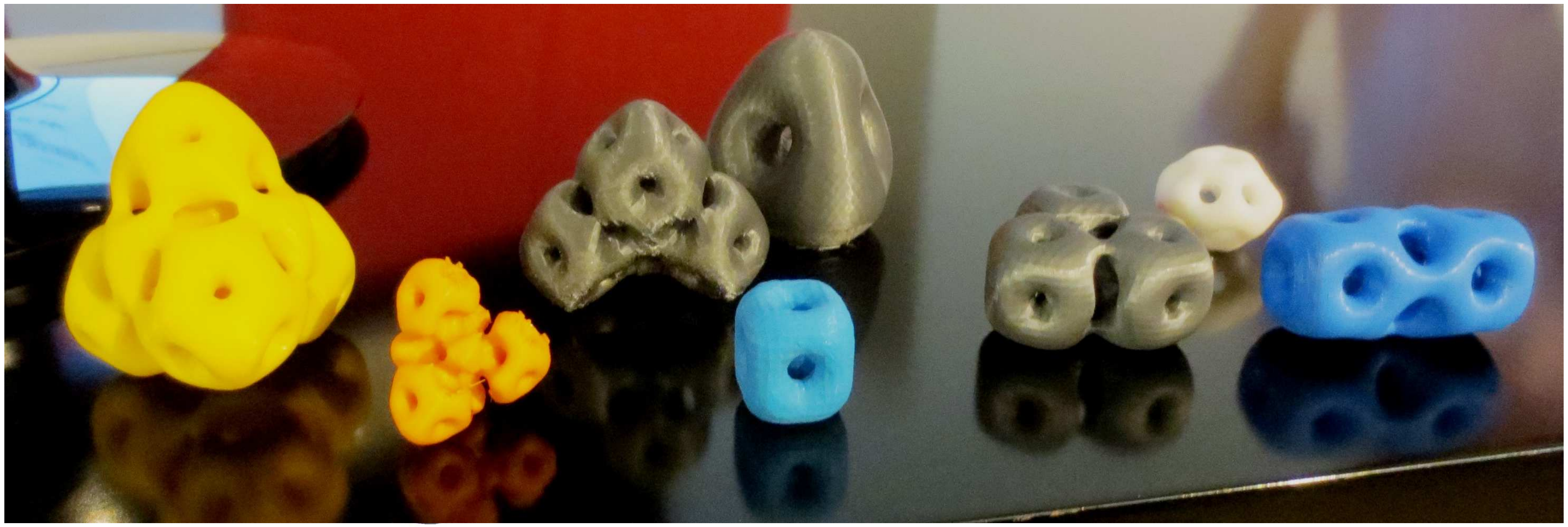


Q=7

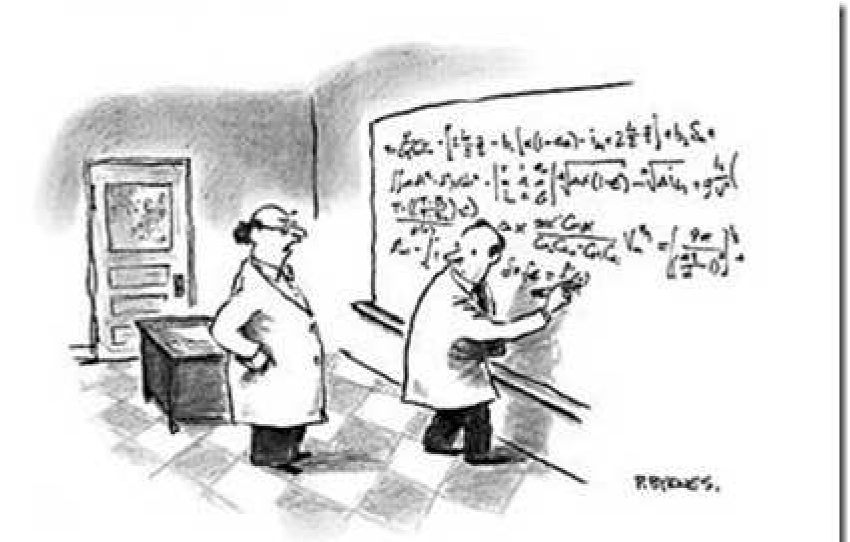


Q=8

Скирмионы

Удачи на зачете!



"Duh!"