Кафедра фундаментальных
и прикладных проблем
физики микромира,
МФТИ/ЛТФ Дубна

Квантовая теория калибровочных полей

Я М Шнир

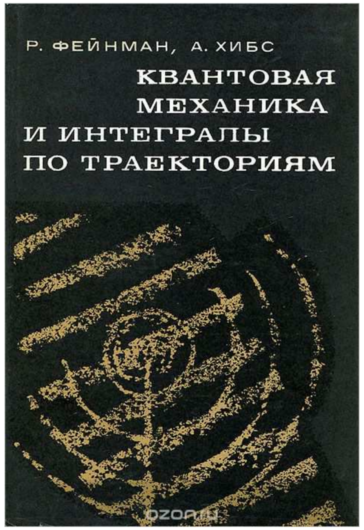
все вопросы, комментарии, замечания и протесты:

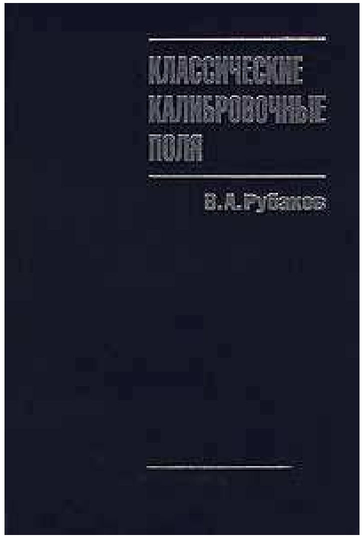
shnir@theor.jinr.ru

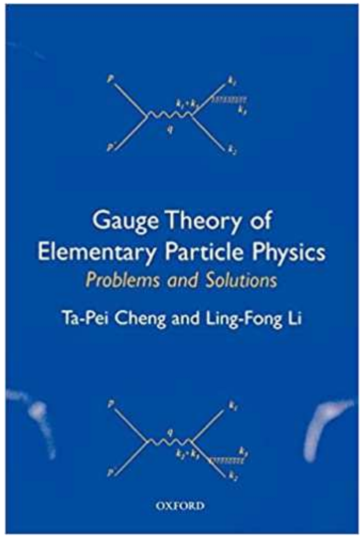
План лекций

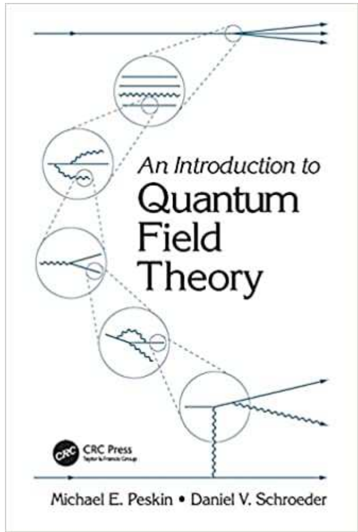
- **Калибровочная симметрия и калибровочные поля**
- **Неабелевы калибровочные теории**
- **Простейшие топологические солитоны, кинки и O(3) lumps. Классическое комплексное скалярное поле, локальная и глобальная калибровочная инвариантность, Q-balls**
- **Взаимодействующие скалярные поля, скалярная электродинамика. Абелева модель Хиггса, вихри**
- **Инстантоны и монополи**
- **Фейнмановская формулировка квантовой механики, основанная на вычислении интегралов по траекториям.**
- **Теория свободного скалярного поля, энергия вакуума.**
- **Теория $\lambda\phi^4$, вычисление эффективного потенциала. Эффект Коулмена-Вайнберга**
- **Регуляризация и перенормировка. Бегущая константа связи**
- **Эффективное действие. Петлевое разложение и диаграммная техника. Разложение по константе связи**
- **Перенормировка**
- **Квантование калибровочных полей методами функционального интегрирования, детерминант Фаддеева-Попова и поля духов**
- **Эффективное действие SU(2) теории Янга-Миллса**
- *… и, если останется время – теории с фермионами (нулевые моды, теорема об индексе, etc, etc)…*

Литература

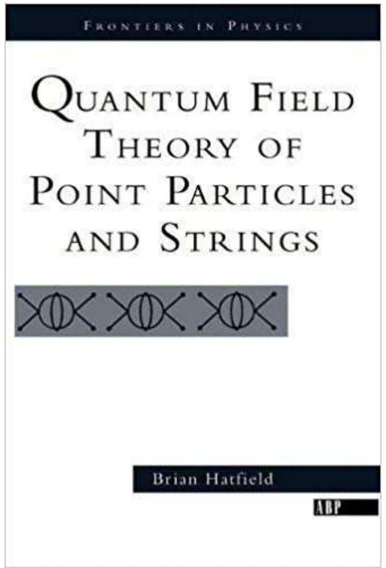

Р. ФЕЙНМАН, А. ХИБС
КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА И ИНТЕГРАЛЫ ПО ТРАЕКТОРИЯМ
ozon.ru

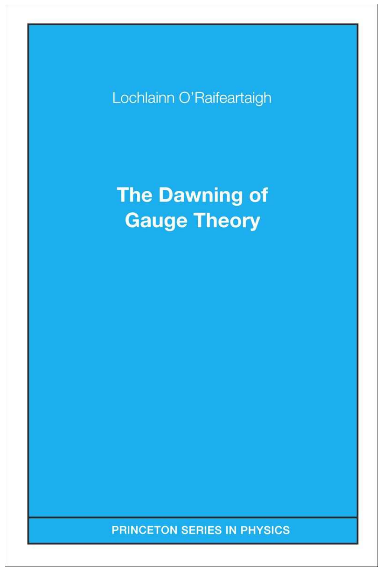

КЛАССИЧЕСКИЕ КАЛИБРОВОЧНЫЕ ПОЛЯ
В.А.Рубаков

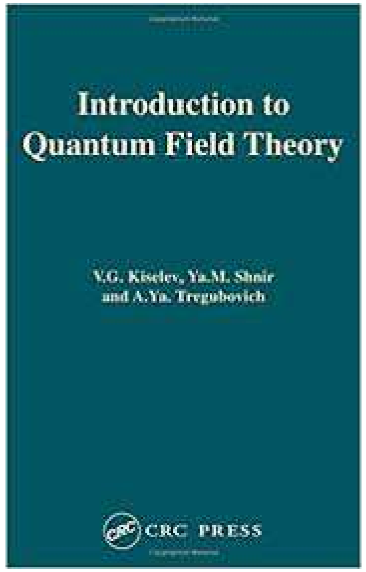

Gauge Theory of Elementary Particle Physics
Problems and Solutions
Ta-Pei Cheng and Ling-Fong Li
OXFORD

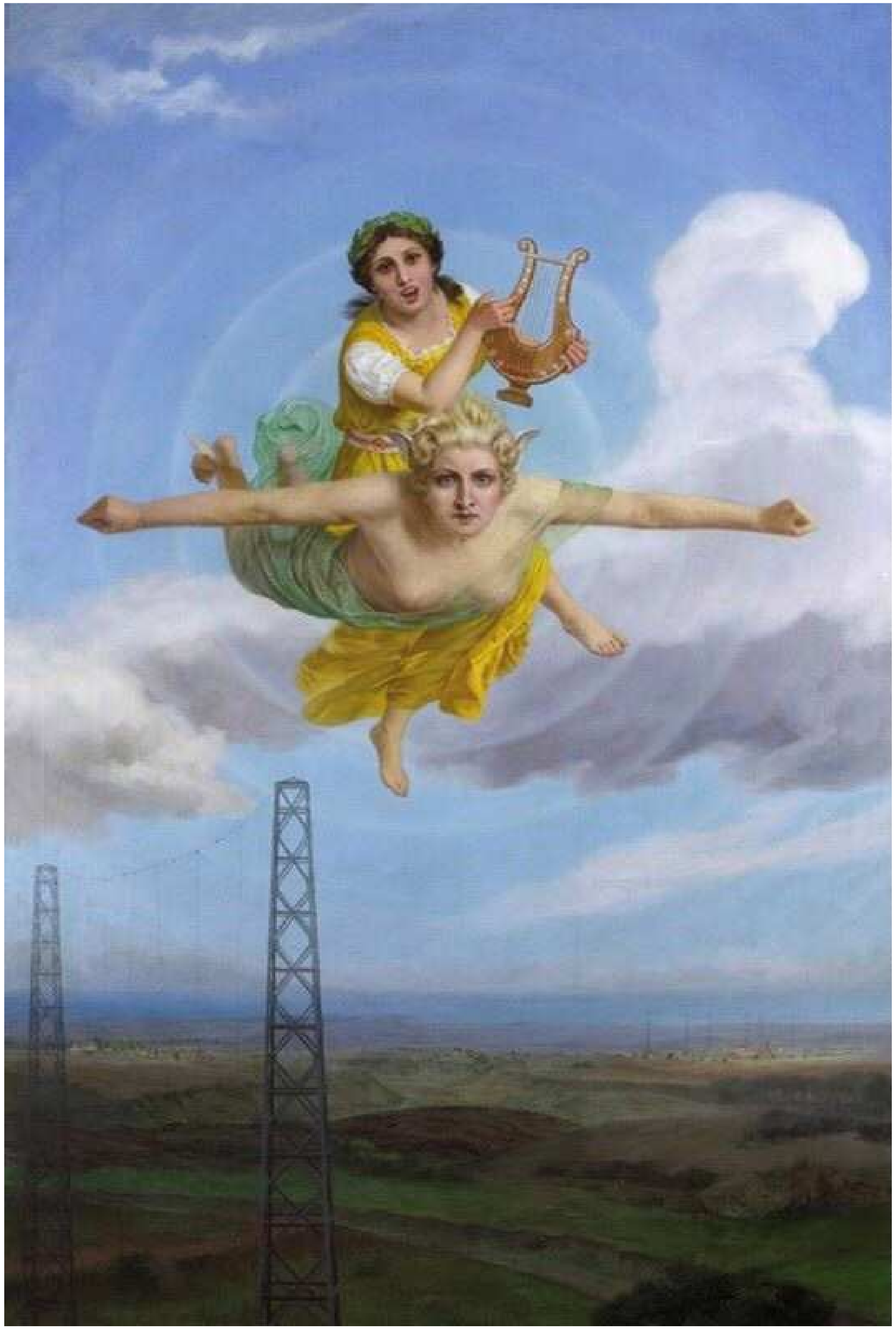

An Introduction to Quantum Field Theory
CRC Press
Michael E. Peskin • Daniel V. Schroeder


А.А.СЛАВНОВ, Л.Д.ФАДДЕЕВ
ВВЕДЕНИЕ В КВАНТОВУЮ ТЕОРИЮ КАЛИБРОВОЧНЫХ ПОЛЕЙ


FRONTIERS IN PHYSICS
QUANTUM FIELD THEORY OF POINT PARTICLES AND STRINGS
Brian Hatfield
ABP


Lochlainn O'Raifeartaigh
The Dawning of Gauge Theory
PRINCETON SERIES IN PHYSICS


Introduction to Quantum Field Theory
V.G. Kiselev, Ya.M. Shnir and A.Ya. Tregubovich
CRC PRESS



$$S = -\frac{1}{4}\int d^4x F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

$$dF = 0\,, \quad \delta\widetilde{F} = 0$$

Allegory of electromagnetic waves

Vittorio Matteo Corcos (1933)

Калибровочная симметрия: Абелева электродинамика

- **Лагранжиан:** $$\boxed{L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = E_k^2 - B_k^2}$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad E_k = F_{0k}, \ B_k = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}F_{jk}$$

- **Уравнения поля:** $$\partial_\mu\left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}\right) = \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \partial_i E_i = 0 \\ \partial_0 E_i = \varepsilon_{ijk}\partial_j B_k \end{cases}$$

- **Тождество Бьянки:** $$\partial_\mu \widetilde{F}^{\mu\nu} \equiv 0; \quad \widetilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\rho\sigma} \Rightarrow \begin{cases} \partial_i B_i = 0 \\ \partial_0 B_i = -\varepsilon_{ijk}\partial_j E_k \end{cases}$$

Замечание: ***лагранжиан электродинамики не содержит зависимости от*** $\partial_0 A_0$ ***. Полевое уравнение для временной компоненты потенциала не является динамическим (закон Гаусса):***

$$\boxed{\nabla\cdot\vec{E} = 0 \Rightarrow \Delta A_0 + \nabla\cdot(\partial_0\vec{A}) = 0}$$

Решение: $$A_0(x) = \int d^3x' \frac{\nabla\cdot(\partial_0\vec{A}(x'))}{4\pi|x - x'|}$$

- **Уравнения для потенциала:** $$\boxed{[\eta_{\mu\nu}(\partial_\rho\partial^\rho) - \partial_\mu\partial_\nu]A^\nu = 0}$$

Электродинамика – это теория со связями

- **Динамические переменные:** компоненты 4-потенциала A_μ

$$L = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \pi^0 = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{A}_0} = 0 \\ \pi^i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{A}_i} = -F^{0i} \equiv E^i \end{cases}$$

$$H = \int d^3x \, \left\{\pi^i \dot{A}_i - L\right\} = \int d^3x \, \left\{(\partial_0 A_i - \partial_i A_0)(\partial_0 A_i) - \frac{1}{2}E_i^2 + \frac{1}{2}B_i^2\right\} =$$

$$\int d^3x \, \left\{E_i^2 + (\partial_i A_0)(\partial_0 A_i) - (\partial_i A_0)^2 - \frac{1}{2}E_i^2 + \frac{1}{2}B_i^2\right\} =$$

$$\int d^3x \, \left\{(\partial_i A_0)[\partial_0 A_i - \partial_i A_0] + \frac{1}{2}E_i^2 + \frac{1}{2}B_i^2\right\} =$$

$$\int d^3x \, \left\{(\partial_i A_0)E_i + \frac{1}{2}E_i^2 + \frac{1}{2}B_i^2\right\} = \int d^3x \, \left\{\frac{1}{2}E_i^2 + \frac{1}{2}B_i^2 - \overbrace{A_0}^{\text{Множитель Лагранжа}} \underbrace{(\partial_i E_i)}_{\text{Закон Гаусса}}\right\}$$

3 варианта:

- **Положить** $A_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad A_{\parallel} = 0$
- **Выразить действие через физические переменные** $A_\perp$
- **Зафиксировать калибровку, например** $\partial_\mu A^\mu = 0$

Калибровочные теории содержат нефизические степени свободы – что делать?

- **Объявить их просто равными нулю**
  → радикальное изменение динамики
  с непростыми и неясными следствиями ☹
- **Переформулировать теорию так, чтобы она содержала только физические переменные**
  → можно, но сложно ☹
- **Зафиксировать соответствующие переменные (фиксация калибровки)**
  → практично и относительно просто ☺

Системы со связями (Гамильтонова механика)

- ***Связь первого рода*: соотношение между координатами и обобщенными импульсами, которое выполняется безотносительно к уравнениям движения**

Пример из классической механики:

$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2}\dot{x}^2$$

- $p_x = \dot{x}, \quad \boxed{p_y = 0} \quad \Rightarrow \quad H = \frac{1}{2}p_x^2$

Связь 1го рода: $C = p_y$

«калибровочная» симметрия: $y \to y + \epsilon(t)$

- ***Дополнительное условие*: связь первого рода не меняется в ходе временной эволюции системы:**

- $$\boxed{\{H, C\} = \frac{\partial C}{\partial t} = 0}$$

$$\{F, G\} = \frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial G}{\partial \pi_i} - \frac{\partial F}{\partial \pi_i}\frac{\partial G}{\partial q_i}$$

- ***Множитель Лагранжа* - способ записать полное действие системы со связями в фазовом пространстве в явном виде:**

$$S(x, y, p_x, p_y) = \int dt \left(p_x\dot{x} + p_y\dot{y} - \frac{1}{2}p_x^2 - \lambda p_y \right)$$

- **«фиксиция калибровки» -** $y \to y' = 0$

Системы со связями (еще один пример)

Действие релятивистской массивной частицы с нулевым спином:

$$S[x_\mu(\tau)] = -m\int d\tau\sqrt{-\dot{x}_\mu\dot{x}^\mu}, \quad \dot{x}_\mu = \frac{\partial x_\mu}{\partial\tau}$$

- ***Канонический импульс:*** $\boxed{p_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = \frac{m\dot{x}_\mu}{\sqrt{-\dot{x}^2}}}$

→ **Связь 1го рода:** $C = p_\mu p^\mu + m^2 = 0$

- ***Классический гамильтониан:*** $H = \frac{1}{2}\left(p_\mu p^\mu + m^2\right) \equiv 0$

Связь 2го рода: $\{C, H\} = 0$

Множитель Лагранжа

Полное действие системы со связями в фазовом пространстве:

$$S[x_\mu(\tau), p_\mu(\tau); \lambda(\tau)] = \int d\tau\left\{p_\mu\dot{x}^\mu - \frac{\lambda}{2}\left(p_\mu p^\mu + m^2\right)\right\}$$

«Калибровочная» симметрия:

$$\begin{cases} x_\mu \to x_\mu + \delta x_\mu, & \delta x_\mu = \{x_\mu, \alpha H\} = \alpha p_\mu \\ p_\mu \to p_\mu + \delta p_\mu, & \delta p_\mu = \{p_\mu, \alpha H\} = 0 \\ \lambda \to \lambda + \delta\lambda, & \delta\lambda = \dot{\alpha} \end{cases}$$

$$\boxed{S = -\frac{1}{4}\int d^4x F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\int d^4x\ A_\mu\{\eta_{\mu\nu}\,\Box - \partial_\mu\partial_\nu\}A_\nu}$$

- **Общее решение свободных уравнений** $[\eta_{\mu\nu}(\partial_\rho\partial^\rho) - \partial_\mu\partial_\nu]A^\nu = 0$

Преобразование Фурье: $A_\mu = \int d^4k\,[a_\mu(k)e^{ikx} + a^*_\mu(k)e^{-ikx}]$

$kx = k_\mu x^\mu = -k_0x_0 + \vec{k}\cdot\vec{x}$

$\Rightarrow$ $\boxed{k^\mu k_\mu a_\nu - k^\mu k_\nu a_\mu = k^2 a_\nu - k_\nu(ka) = 0}$

- $k^2 \neq 0$ $\Rightarrow$ **общее решение:** $a_\nu(k) = k_\nu f(k)$

- $k^2 = 0$ $\Rightarrow$ $k^\mu a_\mu = 0$ $\Rightarrow$ **общее решение:** $a_\nu(k) = k_\nu f(k) + e^{(a)}_\mu g(k)$

Вектора поляризации: $e^{(a)}_0 = 0,\quad e^{(a)}_i k_i = 0,\quad e^{(a)}_i e^{(b)}_i = \delta^{ab}$

- **Потенциал свободной электродинамики:** $A_\mu(x) = A^\perp_\mu(x) + A^\parallel_\mu(x),\quad A^\parallel_\mu(x) = \partial_\mu\alpha(x)$

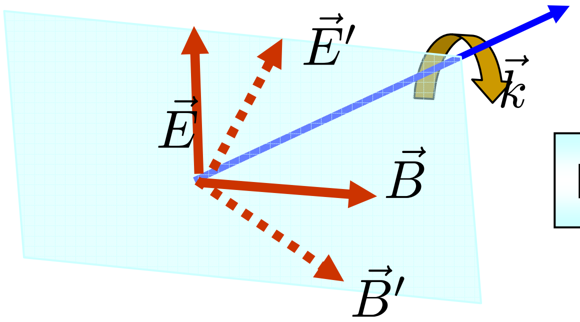
- ***Дуальная инвариантность:*** $E_i \to E_i\cos\theta - B_i\sin\theta;\quad B_i \to E_i\sin\theta + B_i\cos\theta$

- ***Калибровочная инвариантность:*** $A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu\alpha(x)$

$$F_{\mu\nu} \to F'_{\mu\nu} = \partial_\mu(A_\nu + \partial_\nu\alpha) - \partial_\nu(A_\mu + \partial_\mu\alpha) = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = F_{\mu\nu}$$

- **Вопрос: Есть ли законы сохранения, соответствующие этим симметриям?**

Дуальная инвариантность: $A_\mu(x) = e^{ikx} e_\mu^{(1)} f(x)$ (Плоская волна)



$\Rightarrow \vec{k} \times \vec{E} = \vec{B}$

Вектор Пойнтинга $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{B}; \quad \vec{S} \cdot \vec{k} = \text{const}$

$$F_{\mu\nu} \to \widetilde{F}_{\mu\nu}, \quad \widetilde{F}_{\mu\nu} \to -F_{\mu\nu}$$

Дуальный тензор поля: $\widetilde{F}_{\mu\nu} = \dfrac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma}; \quad \partial_\mu \widetilde{F}^{\mu\nu} \equiv 0$

θ - член: $$L_\theta = \frac{\theta}{16\pi^2} \widetilde{F}_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = -\frac{\theta}{4\pi^2}(\vec{E} \cdot \vec{B})$$

$$\Rightarrow S_\theta = \int d^4x L_\theta = \frac{\theta}{8\pi^2} \int d^4x \; \partial_\mu (\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} A_\nu \partial_\rho A_\sigma)$$

- **θ - член является *топологическим*, он зависит только от граничных условий**

Аксионная электродинамика: $$S = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{e^2 \theta(x)}{16\pi^2} \widetilde{F}_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right)$$

- **Уравнения поля:** **?**

Классическая электродинамика: (безмассовое векторное поле)

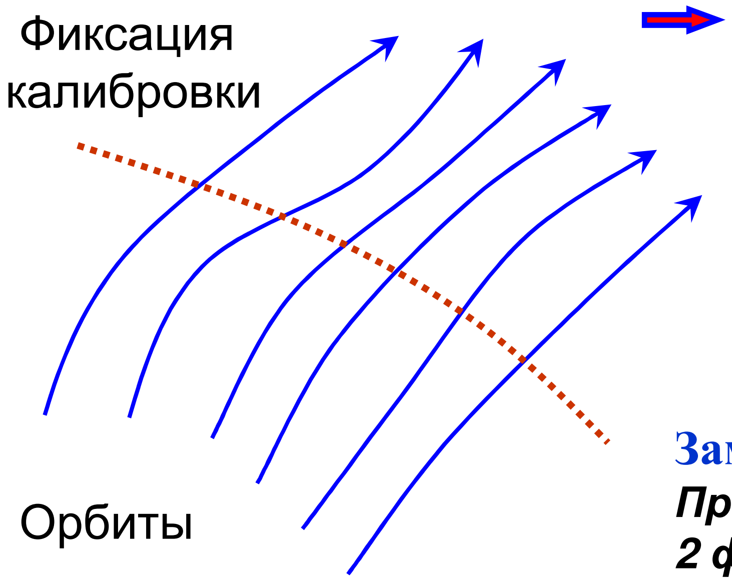
$$L = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

Уравнения поля: $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \Rightarrow [\eta_{\mu\nu}(\partial_\rho \partial^\rho) - \partial_\mu \partial_\nu] A^\nu = 0$

Калибровочная инвариантность: не симметрия а физическое отождествление всех конфигураций типа

$$A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \alpha(x)$$

Калибровка Лоренца: $\partial_\mu A^\mu = 0$



Уравнения поля: $\Box A_\mu = 0, \quad \Box = \partial_\mu \partial^\mu = \partial^2$

Замечание: ***Калибровка Лоренца оставляет остаточные преобразования с произвольной функцией*** $\omega(x), \quad \Box\omega(x) = 0$

Кулоновская калибровка: $\nabla \cdot \vec{A} = 0$

Замечание: ***В кулоновской калибровке*** $A_0 = 0$
При этом кулоновская калибровка явно выделяет 2 физические степени свободы поля $A^\perp$

Электродинамика с источниками

$$L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - ej_\mu A^\mu; \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \partial_\mu F^{\mu\nu} = ej^\nu, \quad \partial_\mu j^\mu \equiv 0 \\ \partial_\mu \widetilde{F}^{\mu\nu} \equiv 0 \end{cases}$$

- **Кулоновское поле точечного заряда:** $j^0 = 4\pi\delta(r) \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \vec{E} = \Delta A_0 = 4\pi e\delta(r)$

Решение: $$A_0(r) = 4\pi e \int d^3r' \frac{\delta(r')}{4\pi|r - r'|} = \frac{e}{r}, \qquad E_r = -\frac{e}{r^2}$$

Замечание : ***дуальная инвариантность свободной электродинамики потеряна, магнитных источников нет. Или?***

$$\vec{B} = g\frac{\vec{r}}{r^3}, \qquad \vec{E} = e\frac{\vec{r}}{r^3}$$

?

Наивный ответ: $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}, \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \vec{B} = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$

- **Потенциал Дирака:**

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r}) = \frac{g}{r}\,\frac{\vec{r} \times \vec{n}}{r - (\vec{r} \cdot \vec{n})}, \qquad \vec{n} = (0, 0, 1)}$$

Задача: ***вычислите компоненты*** $\vec{A}(\vec{r}) = (A_x, A_y, A_z)$

Замечание: *потенциал Дирака можно записать в виде*

$$\vec{A} = A(\theta)(\nabla \vec{e}_\varphi)\,, \qquad A(\theta) = -g(1+\cos\theta) \qquad \vec{e}_\varphi = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)$$

➡ ***Радиальное поле:*** $\vec{r}\cdot\vec{A} = 0$

$$\boxed{\vec{A} = \left(g\frac{1+\cos\theta}{r\sin\theta}\sin\varphi, \; -g\frac{1+\cos\theta}{r\sin\theta}\cos\varphi, \; 0 \right)}$$

$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ ➡ ***Наивный ответ:*** $B_x = -\partial_z A_y = g\;\partial_z\left(\dfrac{x}{r(r-z)}\right) = g\dfrac{x}{r^3}\,, \quad \text{etc}$

- **Кулоновское поле магнитного заряда? Монополь?**
- **Проблема с математикой -** $\operatorname{div}\operatorname{rot} \neq 0$ **!**

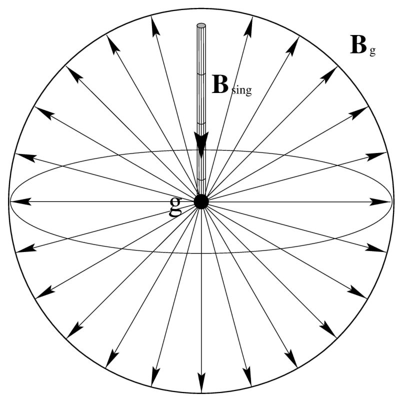
Потенциал Дирака сингулярен вдоль направления $\theta = 0$

➡ **Наивное выражение для магнитного поля** $\vec{B}$ **<u>неверно</u> вдоль полуоси** $z \geq 0$

$$\boxed{\vec{B} = g\frac{\vec{r}}{r^3} - 4g\pi\theta(z)\delta(x)\delta(y)}$$

Задача: *показать, что полный поток*

$$\Phi = \int_{S^2} d\vec{S}\cdot\vec{B} = 0$$



Условие квантования Дирака

$$\vec{B} = g\frac{\vec{r}}{r^3} - 4g\pi\theta(z)\delta(x)\delta(y) = \vec{B}_g + \vec{B}_{sing} \Rightarrow$$ Наблюдаема ли струна Дирака?

- **Калибровочная инвариантность взаимодействия:** $D_k\phi(\vec{r}) = [\partial_k - ieA_k(\vec{r})]\phi(\vec{r})$

$$\phi(\vec{r}) \to U\phi(\vec{r}); \quad A_\mu \to A_\mu + \frac{i}{e}U\partial_\mu U^{-1}, \quad U = e^{ie\alpha(x)} \in U(1)$$

- **Лагранжиан точечной частицы с зарядом *e* во внешнем поле:**

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}_k^2 + \underbrace{e(\dot{x}_k \cdot A_k)}_{L_{int}} \to L + e\dot{x}_k\partial_k\alpha(x) = L + \frac{d}{dt}(e\alpha(x))$$

- **Изменение действия:** $S = \int_0^T dt\ L \to S + e\alpha(x)\Big|_0^T \Rightarrow e\alpha(x) = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$

$$S_{int} = e\int_0^T dt\ (\dot{x}_k \cdot A_k) = e\oint dx_k \cdot A_k = 4\pi eg \equiv 2\pi n \Rightarrow \boxed{eg = \frac{n}{2}}$$

Вклад сингулярного потока: $e\Phi_{str} = -e\int d\vec{S}\cdot\vec{B}_{sing} = -4\pi eg$

$$\boxed{\Phi = \Phi_B + \Phi_{srt} = 4\pi eg - 4\pi eg = 0}$$

Замечание : ***Положение струны Дирака определено с точностью до (сингулярного) калибровочного преобразования, например*** $\vec{A} \to \vec{A} + \frac{i}{e} U \nabla U^{-1}, \quad U = e^{2ieg\varphi}$

$$\frac{i}{e} U \nabla U^{-1} = \frac{2g}{r \sin\theta} \vec{e}_\varphi \quad \Rightarrow \quad \vec{A}' = -\frac{g}{r} \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} \vec{e}_\varphi + \frac{2g}{r\sin\theta} \vec{e}_\varphi = \frac{g}{r} \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} \vec{e}_\varphi$$

Задача: ***к какой форме преобразуется потенциал Дирака после калибровочного преобразования*** $U = e^{ieg\varphi}$ ***?***

Потенциал $\vec{A} = -\frac{g}{r} \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} \vec{e}_\varphi$ сингулярен на полуоси θ=0 $\Rightarrow$ A^S

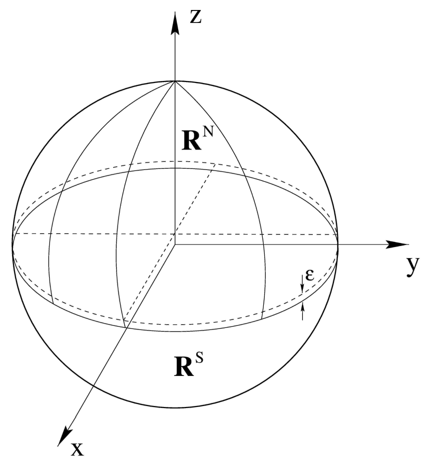
Регулярен в южной полусфере

Потенциал $\vec{A} = \frac{g}{r} \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} \vec{e}_\varphi$ сингулярен на полуоси θ=π $\Rightarrow$ A^N

Регулярен в северной полусфере

Потенциал Ву-Янга:

$$\begin{cases} \mathbf{A}^N = g\dfrac{1-\cos\theta}{r\sin\theta}\hat{\mathbf{e}} \implies 0 \le \theta < \frac{\pi}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \quad : R^N \\ \mathbf{A}^S = -g\dfrac{1+\cos\theta}{r\sin\theta}\hat{\mathbf{e}} \implies \frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2} < \theta \le \pi \quad : R^S \end{cases} \Rightarrow \quad \vec{B} = g\frac{\vec{r}}{r^3}$$



Нет сингулярного вклада струны!

Экспериментальный поиск монополей

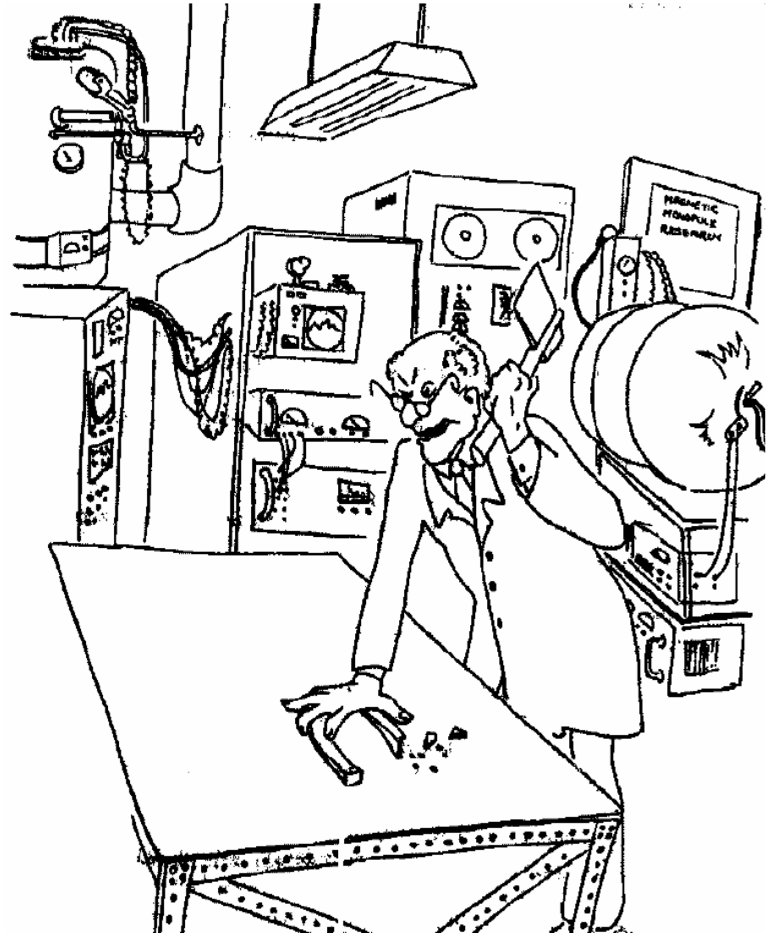
- На ускорителях
  (Fermilab, CERN, DESY…)

- Сверхпроводящие детекторы

- Астрофизика и космология
  (предел Паркера, нейтронные
  звезды…)

- Катализ распада протона
  (Berkeley, Stanford, IBM…)

- Монополи в космических лучах
  (Сцинтилляторы, ионизационные
  детекторы)



No monopole detected yet!

Взаимодействующие поля: скалярная электродинамика

$$L_A = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

$$L_\phi = (\partial_\mu\phi)^*(\partial^\mu\phi) - m^2\phi^*\phi$$

$$A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x)$$

Локальная U(1) инвариантность

$$\phi(x) \to e^{ie\alpha}\phi(x), \quad \phi^*(x) \to e^{-ie\alpha}\phi^*(x)$$

Глобальная U(1) инвариантность

- **Концепция калибровочной инвариантности: перейти от обычной производной скалярного поля $\partial_\mu\phi$ к *ковариантной производной***

$$\boxed{D_\mu\phi \equiv \partial_\mu\phi - ieA_\mu\phi \to e^{ie\alpha(x)}D_\mu\phi}$$

- **Калибровочно-инвариантный лагранжиан:**

$$L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + (D_\mu\phi)^*(D^\mu\phi) - m^2\phi^*\phi$$

- **Уравнения поля:**

$$\begin{cases} \partial^\mu F_{\mu\nu} = ej^\nu, \quad j^\nu = -i[\phi^* D^\nu\phi - (D^\nu\phi)^*\phi] \\ D_\mu D^\nu\phi + m^2\phi = 0 \end{cases}$$

- **Задача:** *проверить, что ток j_μ сохраняется*

- **Сохраняющийся нетеровский заряд:**

$$Q = \int d^3x \; j_0 = i \int d^3x \; \{(\partial_0 \phi^*)\phi - \phi^*(\partial_0 \phi) + 2ieA_0 \phi^* \phi\}$$

- **Задача:** *показать, что* $[D_\mu, D_\nu]\phi \equiv (D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu)\phi = ieF_{\mu\nu}\phi$

- **Задача:** *найти <u>симметричный</u> тензор энергии-импульса* $T_{\mu\nu}$ *скалярной электродинамики*

- **Абелева модель Хиггса:**

$$\boxed{L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(D_\mu\phi)^*(D^\mu\phi) - V(|\phi|)}$$

$$D_\mu\phi \equiv \partial_\mu\phi - ieA_\mu\phi\,, \qquad \phi = \phi_1 + i\phi_2 \qquad \boxed{V(|\phi|) = \lambda(|\phi^2| - a^2)^2}$$

- **Уравнения поля:**

$$\begin{cases} \partial^\mu F_{\mu\nu} = ej_\nu, & j_\nu = -i[\phi^* D_\nu\phi - (D_\nu\phi)^*\phi] \\ D_\mu D^\mu \phi = -\frac{\delta V}{\delta \phi^*} \end{cases}$$

- **Тривиальный вакуум:** $|\phi| = a \quad A_i = 0$

- **Сингулярное решение (*флюксон*):** $\phi = ae^{in\varphi}\,, \quad A_i = n\partial_i\varphi, \quad n \in \mathbb{Z}$

Скалярная КЭД: Вихри Абрикосова-Нильсена-Олесена

- **Сингулярное решение (*флюксон*):** $\phi = a e^{in\varphi}\,, \quad A_i = n\partial_i\varphi, \quad n \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_{ij}F_{ij} = 4\pi n \delta^{(2)}(r), \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4\pi}\oint \varepsilon_{ij}F_{ij} = n$$

- **Замечание:** сингулярное решение генерируется из вакуума калибровочным преобразованием $U = e^{in\varphi}, \quad A_k = iU\partial_k U^{-1}$

- **Уравнения поля:** $D_\mu D^\mu \phi = -\dfrac{\delta V}{\delta \phi^*}$

Чистая калибровка

- **Нетривиальное решение Нильсена-Олесена (1973):**

$$\boxed{\phi = f(r)e^{in\varphi}, \quad A_i = -ig(r)e^{-in\varphi}\partial_i e^{in\varphi}}$$

Регулярность **Вакуум**

$$f(0) = g(0) = 0\,, \quad f(\infty) = a, \quad g(\infty) = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4\pi}\oint \varepsilon_{ij}F_{ij} = n$$

Задача: получить эти решения численно и найти пространственные распределения магнитного поля и полной энергии системы

- **Рескейлинг:**

$$\boxed{L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(D_\mu\phi)^*(D^\mu\phi) - \lambda(|\phi|^2 - a^2)^2}$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \qquad D_\mu\phi = \partial_\mu\phi - ieA_\mu\phi$$

$$\lambda(|\phi|^2 - a^2)^2 \mapsto \lambda a^4(|\phi/a|^2 - 1)^2 = \boxed{a^4\lambda(\tilde{\phi}^2 - 1)^2}, \qquad \boxed{\tilde{\phi} = \phi/a}$$

$$D_\mu\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x_\mu} - ieA_\mu\phi \mapsto a^2\left(\frac{\partial}{a\partial x_\mu}\frac{\phi}{a} - ie\frac{A_\mu}{a}\frac{\phi}{a}\right) = \boxed{a^2\tilde{D}_\mu\tilde{\phi}}$$

$$\boxed{F_{\mu\nu} \mapsto a^2 F_{\mu\nu}} \qquad \boxed{L \mapsto a^4 L} \qquad \boxed{\tilde{A}_\mu = A_\mu/a, \quad \tilde{x}_\mu = a x_\mu}$$

- **Анзац Нильсена-Олесена:** $\boxed{\phi = f(r)e^{in\varphi}, \quad A_i = -ig(r)e^{-in\varphi}\partial_i e^{in\varphi} \quad A_0 = 0}$

$$A_r = 0, \quad A_\varphi = \frac{ng}{r}, \qquad B = B_z = \frac{n}{r}\frac{dg}{dr}$$

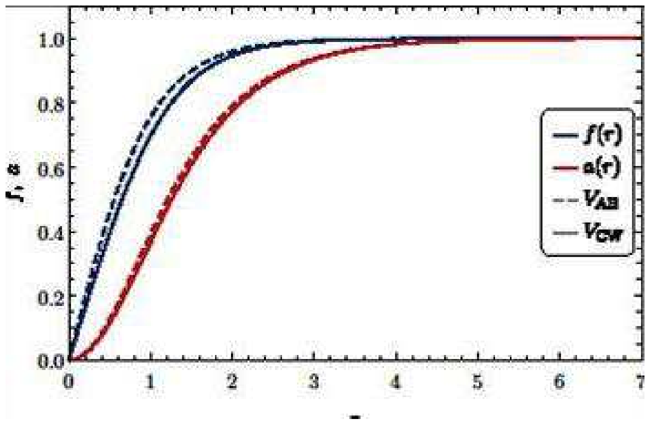
- **Уравнения поля:**

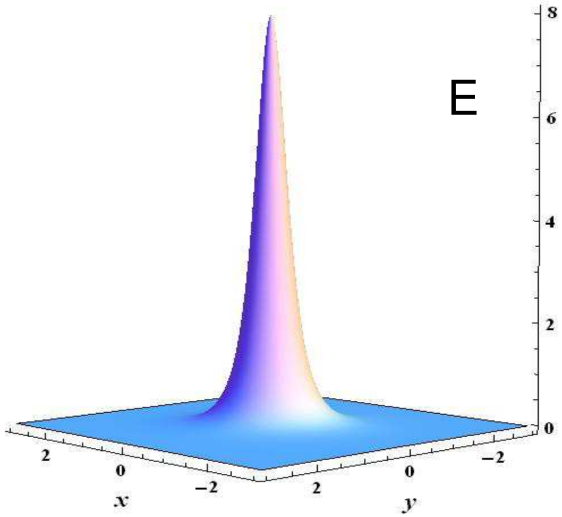
$$D_\mu D^\mu\phi = -\frac{\delta V}{\delta\phi^*} \quad \Rightarrow \quad f'' + \frac{f'}{r} - \frac{n^2e^2}{r^2}g^2 f + 8\lambda f\left(f^2 - 1\right) = 0\,;$$

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = -ie[\phi^* D_\nu\phi - (D_\nu\phi)^*\phi] \quad \Rightarrow \quad g'' - \frac{g'}{r} + e^2 f^2 g = 0$$

Асимптотическое поведение:

$$r \to 0 \begin{cases} f \sim r \\ g \sim O(r^2) \end{cases} \qquad r \to \infty \begin{cases} f \sim 1 + O(e^{-m_s r}) \\ g \sim 1 + re^{-m_v r} \end{cases}$$





- **Линеаризация уравнений поля:**

$$f'' + \frac{f'}{r} - \frac{n^2e^2}{r^2}g^2 f + 8\lambda f\left(f^2 - 1\right) \xrightarrow[r\to\infty]{} f'' - 8\lambda f = 0$$

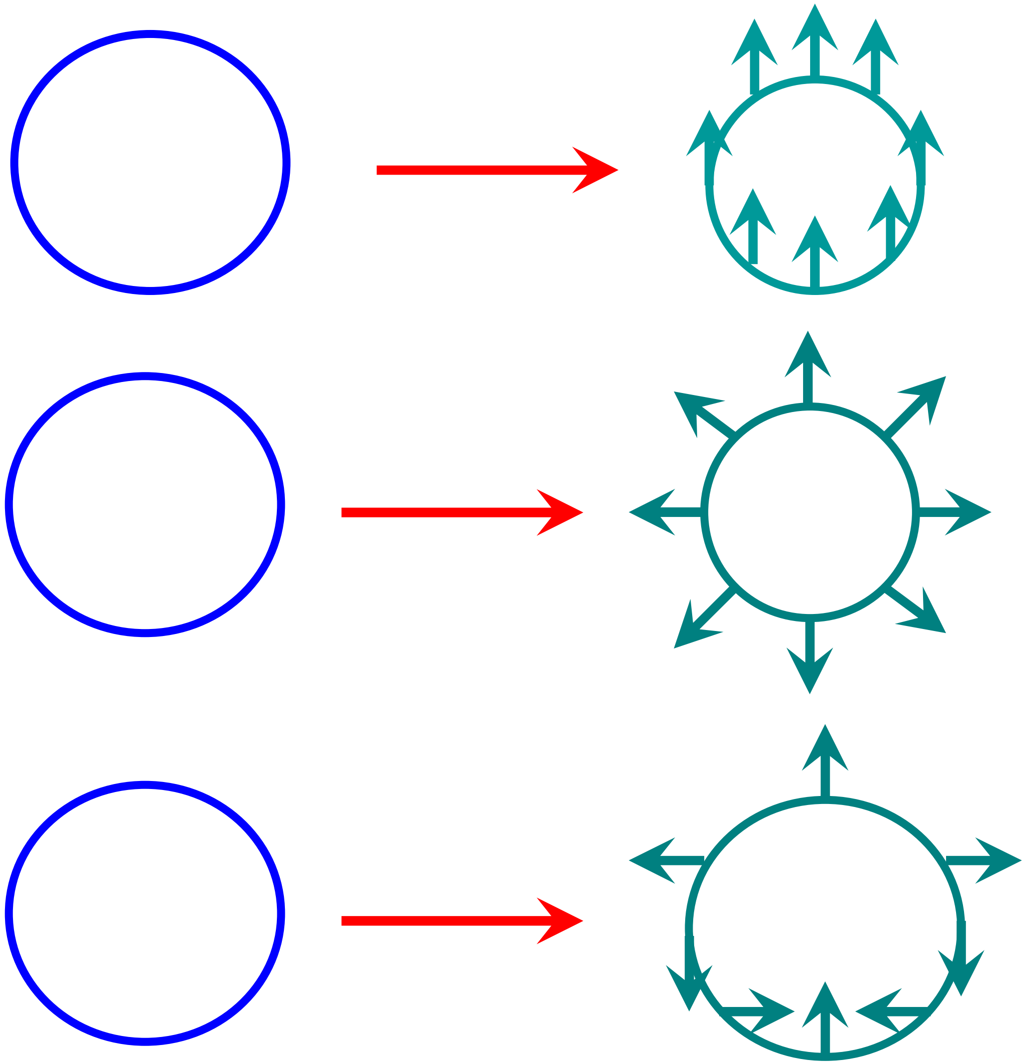
$$g'' - \frac{g'}{r} - e^2 f^2 g \xrightarrow[r\to\infty]{} g'' - e^2 g = 0$$

***Замечание:* под квадратом массы поля понимается коэффициент при линейном члене в линеаризованном уравнении в окрестности вакуума**

$$\boxed{m_s = 2\sqrt{2\lambda}} \qquad \boxed{m_v = e}$$

Вихрь – топологический солитон ($S^1 \to S^1$)

Топологический заряд (индекс отображения окружности на окружность):



<u>Вакуум:</u>

Q=0: $\phi^\alpha = (0,\ 1)$

Q=1: $\phi^\alpha = (\sin\varphi;\ \ \cos\varphi)$

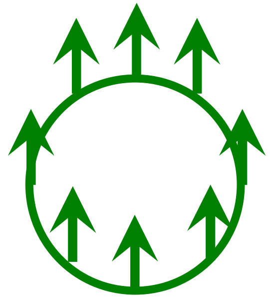
Q=2: $\phi^\alpha = (\sin 2\varphi;\ \ \cos 2\varphi)$

$$i_{x_0} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{S^1} d\alpha \frac{v_1 d_\alpha v_2 - v_2 d_\alpha v_1}{v_1^2 + v_2^2}$$

Индекс векторного поля – это число намотки при обходе вокруг особой точки

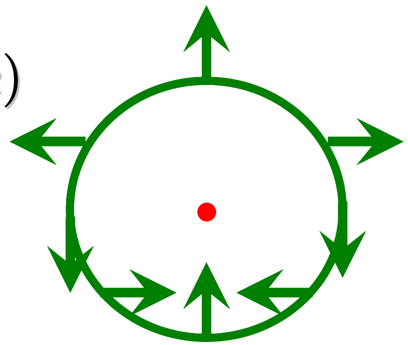
$$i(x_0) = 0$$

$$f = (0, 1)$$



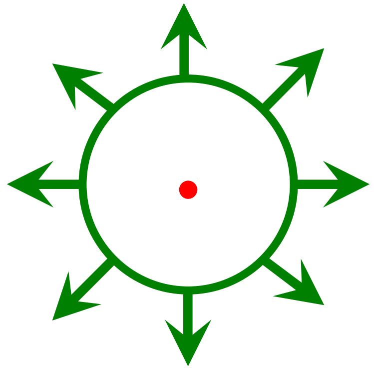
$$i(x_0) = 2$$

$$f = (\cos 2\alpha, \sin 2\alpha)$$



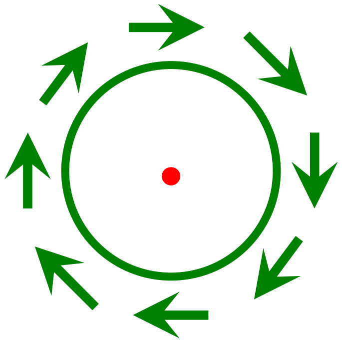
$$i(x_0) = 1$$

$$f = (\cos \alpha, \sin \alpha)$$



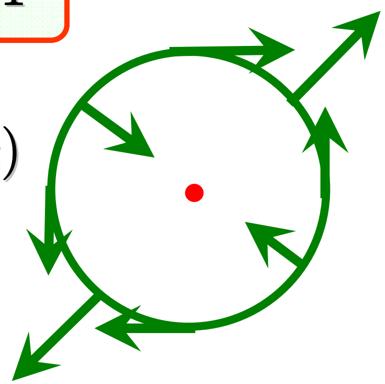
$$i(x_0) = 1$$

$$f = (\sin \alpha, -\cos \alpha)$$



$$i(x_0) = -1$$

$$f = (\sin \alpha, \cos \alpha)$$



Вакуум: $D_\mu\phi = \partial_\mu\phi - ieA_\mu\phi = 0$ $\Rightarrow$ $A_\mu \xrightarrow[r\to\infty]{} -\frac{i}{e}\frac{\partial_\mu\phi}{\phi_\infty}\,, \qquad \phi \xrightarrow[r\to\infty]{} e^{in\varphi}$

- **Поле вихря задает топологическое отображение окружности на окружность**

- **Топологический ток:**

$$j_\mu = \frac{1}{2\pi i}\varepsilon_{\mu\nu\rho}\partial^\nu\hat\phi^*\partial^\rho\hat\phi, \quad \partial^\mu j_\mu \equiv 0, \quad \hat\phi = \phi/|\phi|$$

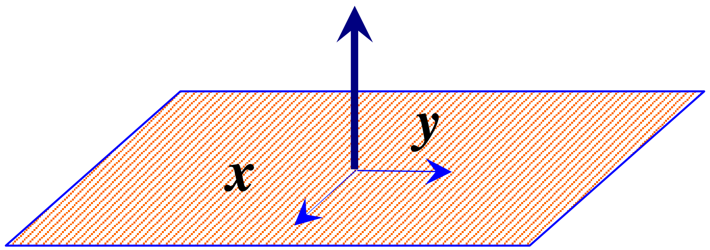
$$j_0 = \frac{1}{2\pi i}\varepsilon_{nm}\partial_n\hat\phi^*\partial_m\hat\phi = \frac{1}{2\pi}\varepsilon_{nm}\varepsilon^{ab}(\partial_n\hat\phi^a)(\partial_m\hat\phi^b)\,, \qquad \phi^a = (\phi_1,\ \phi_2)$$

Топологический заряд (индекс отображения):

$$Q = \int\limits_{R^2} d^2x\, j_0 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{R^2} d^2x\,\varepsilon_{nm}\varepsilon^{ab}(\partial_n\hat\phi^a)(\partial_m\hat\phi^b) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{R^2} d^2x\,\varepsilon_{nm}\varepsilon^{ab}\partial_n(\hat\phi^a\partial_m\hat\phi^b) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi\,\varepsilon_{ab}\frac{d\hat\phi^a}{d\varphi}\hat\phi^b = \frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi\frac{1}{\phi_\infty}\frac{d\phi_\infty}{d\varphi} = n = \frac{e}{2\pi}\oint\limits_{S^1} A_k dx^k = \frac{e}{2\pi}\int\limits_{R^2} d^2x\, B_k\cdot S_k = \frac{e}{2\pi}\Phi$$

$$B_k = (0, 0, B(x,y))$$



Поток магнитного поля квантован

- **Энергия вихря:**

$$E = \int\limits_{R^2} d^2x\,\left\{\frac{1}{2}B^2 + \frac{1}{2}|D_k\phi|^2 + \lambda(|\phi^2| - a^2)^2\right\}$$

Масштабные преобразования: $\phi \to \phi/a, \quad A_k \to A_k/a, \quad x \to eax$

$$E = a^2 \int\limits_{R^2} d^2x \left\{ \frac{1}{4} F_{ij}^2 + \frac{1}{2}(D_k\phi^a)(D_k\phi^a) + \frac{\lambda}{e^2}(\phi^a\phi^a - 1)^2 \right\} =$$

$$a^2 \int\limits_{R^2} d^2x \left\{ \frac{1}{2} F_{12}^2 + \frac{1}{2}\left(|D_1\phi|^2 + |D_2\phi|^2\right) + \frac{\lambda}{e^2}(|\phi|^2 - 1)^2 \right\} =$$

$$a^2 \int\limits_{R^2} d^2x \left\{ \frac{1}{2}\left[F_{12} \pm \frac{\sqrt{2\lambda}}{e}\left(|\phi|^2 - 1\right)\right]^2 + \frac{1}{2}\left(D_1\phi \mp iD_2\phi|^2\right) \right\}$$

$$+ a^2 \int\limits_{R^2} d^2x \left\{ \pm\frac{i}{2}\left[(D_1\phi)^* D_2\phi - D_1\phi(D_2\phi)^*\right] \pm \frac{\sqrt{2\lambda}}{e} F_{12}(|\phi|^2 - 1) \right\}$$

$$= a^2 \int\limits_{R^2} d^2x \left\{ \frac{1}{2}\left[F_{12} \pm \frac{\sqrt{2\lambda}}{e}\left(|\phi|^2 - 1\right)\right]^2 + \frac{1}{2}\left(D_1\phi \mp iD_2\phi|^2\right) \right\} + I_1 + I_2 + I_3$$

$$I_1 = \pm\frac{ia^2}{2} \int\limits_{R^2} d^2x \left(\partial_1\phi^*\partial_2\phi - \partial_2\phi^*\partial_1\phi\right) =$$

$$\boxed{\vec{V} = (\phi^*\partial_1\phi,\ \phi^*\partial_2\phi,\ 0)}$$

$$\pm\frac{ia^2}{2} \int\limits_{R^2} d^2x \left\{\partial_1[\phi^*\partial_2\phi] - \phi^*\partial_1\partial_2\phi - \partial_2[\phi^*\partial_1\phi] + \phi^*\partial_2\partial_1\phi\right\} =$$

$$\pm\frac{ia^2}{2} \int\limits_{R^2} d^2x \left\{\partial_1[\phi^*\partial_2\phi] - \partial_2[\phi^*\partial_1\phi]\right\} = \pm\frac{ia^2}{2} \int\limits_{R^2} d\vec{S}\cdot(\nabla\times\vec{V}) = \pm\frac{ia^2}{2} \oint\limits_{S^1} d\vec{l}\cdot\vec{V}$$

На пространственной асимптотике: $|\phi| \to 1, \quad D_\mu \phi \to 0$

$$\phi \to e^{in\varphi} \Rightarrow \begin{cases} \phi^* \partial_1 \phi \to -\phi^* \left(\dfrac{\sin\varphi}{r} \partial_\varphi \right) \phi = -in \dfrac{\sin\varphi}{r} \\ \phi^* \partial_2 \phi \to \phi^* \left(\dfrac{\cos\varphi}{r} \partial_\varphi \right) \phi = in \dfrac{\cos\varphi}{r} \end{cases} \qquad \begin{cases} A_1 \to -\dfrac{n \sin\varphi}{r} \\ A_2 \to \dfrac{n \cos\varphi}{r} \end{cases}$$

$$\pm \frac{ia^2}{2} \int_{S^1} d\vec{l} \cdot \vec{V} = \pm \frac{ina^2}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \left\{ (-r \sin\varphi)(-\frac{i \sin\varphi}{r}) + (r \cos\varphi)(\frac{i \cos\varphi}{r}) \right\} = \mp \pi n a^2$$

$$I_2 = \pm i \frac{a^2}{2} \int_{R^2} d^2x \, \{ \partial_1 \phi^* (-iA_2 \phi) + (iA_1 \phi^*) \partial_2 \phi - i\phi^* A_2 (\partial_1 \phi) + i(\partial_2 \phi^*) A_1 \phi \}$$

$$= \pm \frac{a^2}{2} \int_{R^2} d^2x \, \{ (\partial_1 \phi^*) A_2 \phi - \phi^* A_1 (\partial_2 \phi) + \phi^* A_2 (\partial_1 \phi) - (\partial_2 \phi^*) A_1 \phi \} =$$

$$= \pm \frac{a^2}{2} \int_{R^2} d^2x \, \{ \partial_1 (|\phi|^2 A_2) - \partial_2 (|\phi|^2 A_1) \} \mp \frac{a^2}{2} \int_{R^2} d^2x \, F_{12} |\phi^2|$$

$$\boxed{\vec{W} = (|\phi|^2 A_1, \; |\phi|^2 A_2, \; 0)}$$

$$\pm \frac{a^2}{2} \int_{R^2} d^2x \, \{ \partial_1 (|\phi|^2 A_2) - \partial_2 (|\phi|^2 A_1) \} = \pm \frac{a^2}{2} \int_{R^2} d\vec{S} \cdot (\nabla \times \vec{W}) = \pm \frac{a^2}{2} \oint_{S^1} d\vec{l} \cdot \vec{W} =$$

$$= \pm \frac{a^2}{2} \oint\limits_{S^1} d\vec{l} \cdot \vec{W} = \pm \frac{na^2}{2} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \left\{ (-r \sin\varphi) \left(-\frac{\sin\varphi}{r} \right) + (r\cos\varphi) \left(\frac{\cos\varphi}{r} \right) \right\} = \pm \pi n a^2$$

$$I_1 + I_2 = \mp n\pi a^2 \pm n\pi a^2 = 0$$

$$I_3 \mp \frac{a^2}{2} \int\limits_{R^2} d^2x\, F_{12} |\phi^2| = \pm \frac{a^2}{2} \int\limits_{R^2} d^2x \frac{2\sqrt{2\lambda}}{e} F_{12}(|\phi|^2 - 1) \mp \frac{a^2}{2} \int\limits_{R^2} d^2x\, F_{12} |\phi^2|$$

$$+ \frac{a^2}{2} \int\limits_{R^2} d^2x\, F_{12} - \frac{a^2}{2} \int\limits_{R^2} d^2x\, F_{12} = \pm \frac{a^2}{2} \int\limits_{R^2} d^2x \left(\frac{2\sqrt{2\lambda}}{e} - 1 \right) F_{12}(|\phi|^2 - 1) \mp \frac{a^2}{2} \int\limits_{R^2} d^2x\, F_{12}$$

$$\int\limits_{R^2} d^2x\, F_{12} = \int\limits_{R^2} d^2x\, B_k \cdot S_k = \oint\limits_{S^1} A_k dx^k = \frac{1}{2\pi} \Phi = a^2 \pi Q$$

Граница Богомольного: $E \geq a^2 \pi |Q|$

Энергия минимальна, если

$$\begin{cases} F_{ij} = \mp \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} (\phi^a \phi^a - 1) \\ D_i \phi^a = \pm \varepsilon^{ab} \varepsilon_{ij} D_j \phi^b \end{cases}$$

$+$

$$\boxed{\frac{8\lambda}{e^2} = \frac{m_s^2}{m_v^2} = 1}$$

$$\frac{8\lambda}{e^2} = \frac{m_s^2}{m_v^2} = 1$$

Критическое условие, вихри не взаимодействуют

$$m_v > m_s, \qquad \frac{8\lambda}{e^2} < 1, \quad E < 0$$

Вихри притягиваются - сверхпроводник первого рода

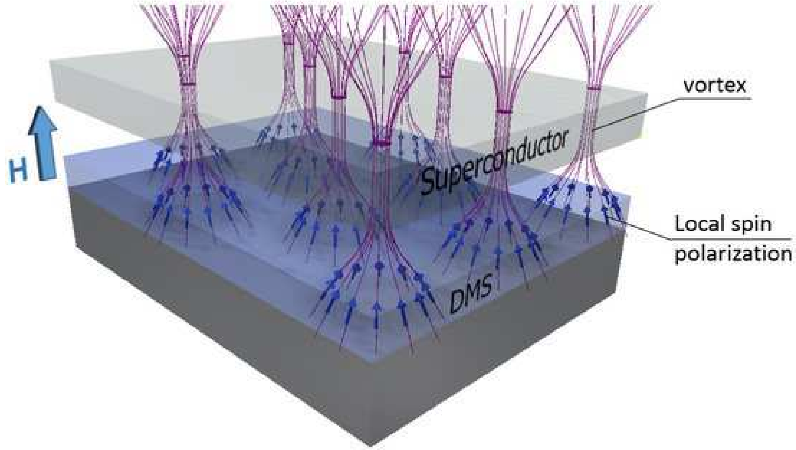
$$m_v < m_s, \qquad \frac{8\lambda}{e^2} > 1, \quad E > 0$$

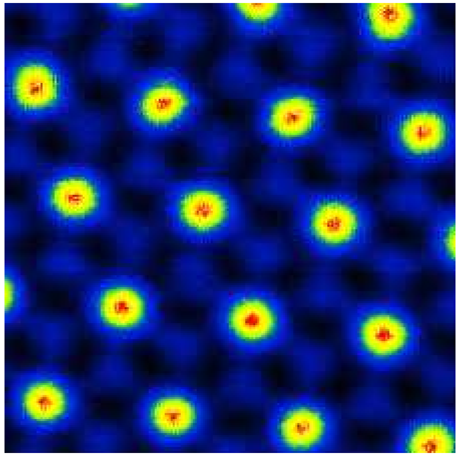
Вихри отталкиваются - сверхпроводник второго рода

Характерные параметры сверхпроводника:

$L = 1/m_v$ - лондоновская глубина проникновения

$\xi = 1/m_s$ - длина когерентности





Вихри в электродинамике Черна-Саймонса

- **Лагранжиан с членом Черна-Саймонса:**

$$\boxed{L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{\mu}{4}\varepsilon_{\mu\nu\rho}F^{\mu\nu}A^{\rho}}$$

$d = 2+1$ $\qquad$ ***μ* - топологическая масса**

- **Уравнения поля:** $\partial_\mu F^{\mu\nu} + \mu\tilde{F}_\nu = 0, \qquad \tilde{F}_\nu = \frac{1}{2}\varepsilon_{\nu\mu\rho}F^{\mu\rho}$

$\Rightarrow$ $\boxed{\Box\tilde{F}_\nu + \mu\tilde{F}_\nu = 0}$ $\qquad$ **Поле $\tilde{F}_\nu$ массивно**

Замечание: ***уравнения поля инвариантны относительно калибровочных преобразований*** $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu\alpha$ ***но лагранжиан – не инвариантен:***

$$L \to L + \frac{\mu}{2}\partial_\nu(\tilde{F}^\nu\alpha)$$ ← полная производная

- **Скалярная электродинамика Черна-Саймонса:**

$$\boxed{L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{\mu}{4}\varepsilon_{\mu\nu\rho}F^{\mu\nu}A^{\rho} + (D_\mu\phi)^*(D^\mu\phi) - V(|\phi|)}$$

- **Уравнения поля:**

$$\begin{cases} \partial_\mu F^{\mu\nu} + \mu\tilde{F}_\nu = j_\nu; \\ D_\mu D^\mu\phi = \dfrac{\delta V}{\delta\phi^*} \end{cases} \qquad j^\nu = -i[\phi^* D^\nu\phi - (D^\nu\phi)^*\phi]$$

Закон Гаусса: $\partial_i F_{i0} + \mu \varepsilon_{ij} F_{ij} = j_0$ ⇒ $\mu \int d^2x\, \varepsilon_{ij} F_{ij} = \int d^2x\, j_0$

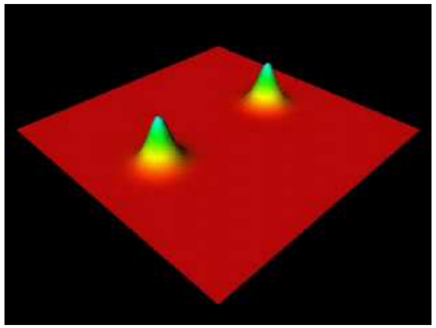
$\boxed{\mu \Phi = Q}$ Электрический заряд пропорционален магнитному потоку

$\Phi = \frac{2\pi n}{e}, \quad Q = \mu \frac{2\pi n}{e}$ ⇒ **Электрический заряд и магнитный поток *квантованы***

Обобщенный вихрь: $\phi = f(r) e^{in\varphi}, \quad A_i = n g(r) \partial_i \varphi, \quad A_0 = a(r)$

Масса возбуждений скалярного и векторного поля:

$$m_s = 2a\sqrt{2\lambda}; \quad m_v = \sqrt{\frac{\mu^2}{4} + e^2 a^2} \pm \frac{\mu}{2}$$



Динамика вихрей может быть очень непростой!

Модель ϕ^4 в 1+1 измерениях: Кинк

$$L = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \lambda(\phi^2 - a^2)^2, \qquad E = \int dx \left\{ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \lambda(\phi^2 - a^2)^2 \right\}$$

Условие минимальной энергии:

$$m^2 = 8\lambda a^2$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \pm\sqrt{2\lambda}(\phi^2 - a^2) \Rightarrow x - x_0 = \pm\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}\int \frac{d\phi}{\phi^2 - a^2} = \pm\frac{2}{m}\text{arctanh}\,\frac{\phi}{a}$$

Кинк (антикинк):

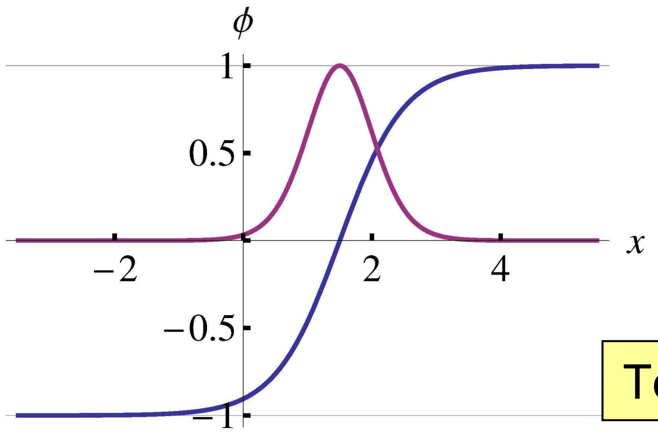
$$\phi_K = a\tanh\frac{1}{2}m(x - x_0); \qquad \phi_{\bar{K}} = -a\tanh\frac{1}{2}m(x - x_0)$$

Плотность энергии:

$$\mathcal{E} = \frac{m^4}{32\lambda}\frac{1}{\cosh^4[\frac{1}{2}m(x - x_0)]}$$

Масса кинка:

$$M = \int \mathcal{E}dx = \frac{m^3}{12\lambda}$$



Топологический заряд:

$$Q = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{1}{2}\left[\phi(\infty) - \phi(-\infty)\right]$$

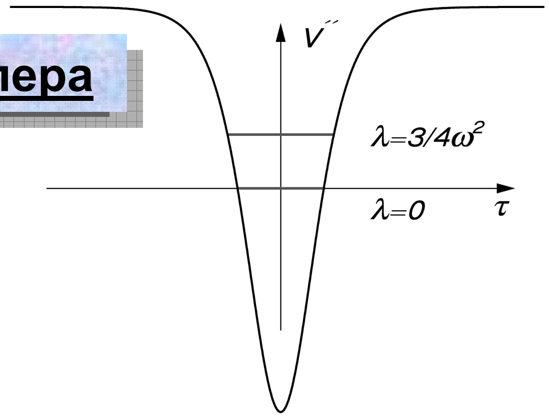
Топологический ток:

$$J_\mu = \frac{1}{2\pi}\varepsilon_{\mu\nu}\partial^\nu \phi, \qquad \partial^\mu J_\mu \equiv 0$$

Возбуждения на фоне ϕ^4 кинка

$$\phi(x,t)=\phi_k(x)+\xi(x)e^{i\omega t}$$

Потенциал Пешль-Теллера



$$\boxed{\left(-\frac{d^2}{dx^2}+4m^2-\frac{6m^2}{\cosh^2\frac{x}{2}}\right)\xi=\omega^2\xi}$$

нулевая мода, $\omega_0=0$:

$$\xi_0^{(n)}(x)=\frac{1}{\cosh^2\left(\frac{m(x-x_0)}{2}\right)}$$

локализованная мода, $\omega_1=\dfrac{\sqrt{3}m}{2}$

$$\xi_1=\frac{\sinh\left(\frac{mx}{2}\right)}{\cosh^2\left(\frac{mx}{2}\right)}$$

непрерывный спектр: $\omega_n=\sqrt{k_n^2+m^2}$

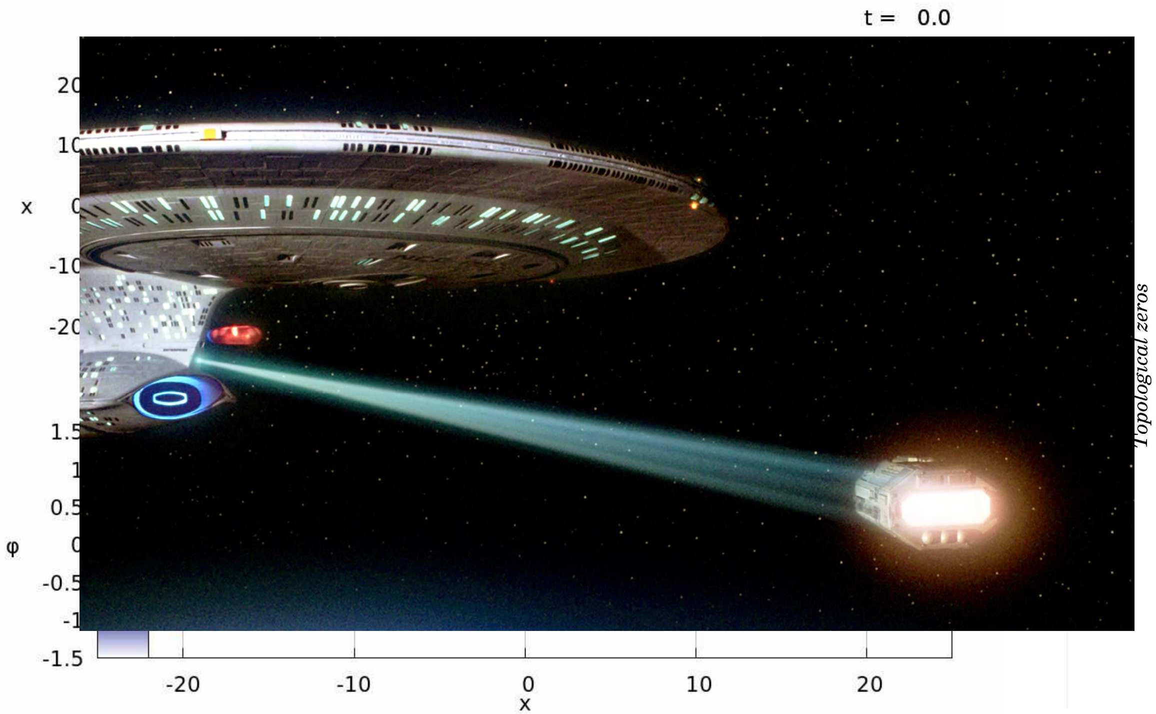
$$\xi_k=e^{ikx}\left\{\frac{3m^2}{2}\tanh^2\frac{mx}{2}-\frac{m^2}{2}-2k^2-3imk\tanh\frac{mx}{2}\right\}$$

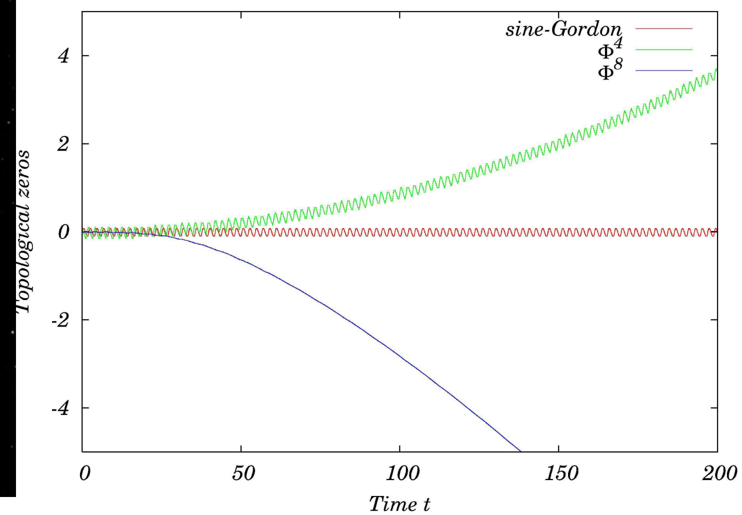
ϕ^4 кинк: взаимодействие

$$\omega^2 = k^2 + 4 \qquad\qquad \xi_k = e^{ikx}\left(3\tanh^2 x - 3ik\tanh x - 1 - k^2\right)$$

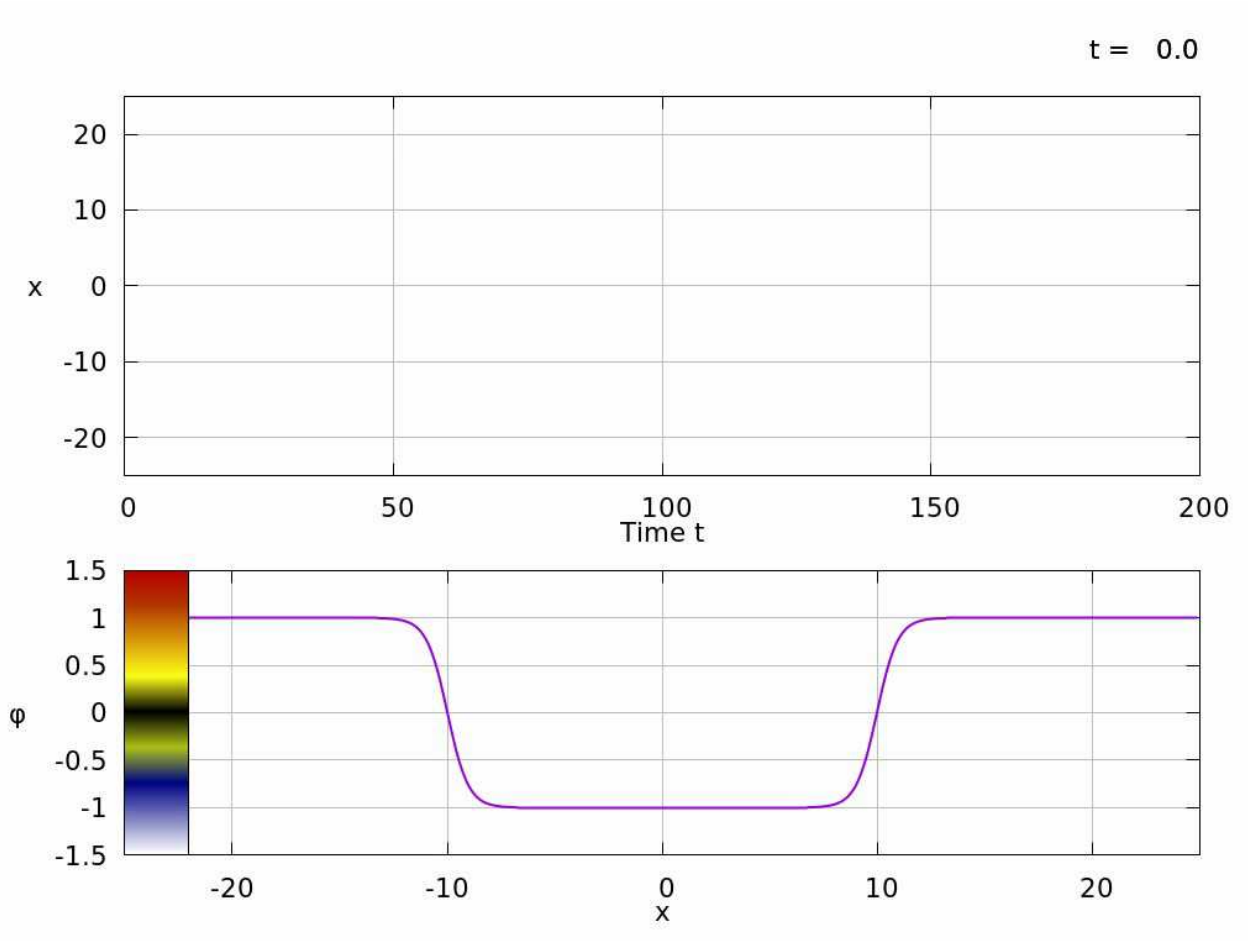
Интеграл перекрытия $\int dx \eta_k \eta_0$

Эффект отрицательного радиационного давления:
ϕ^4 кинк ускоряется в направлении источника падающего на него излучения
(Star Wars Tractor Beam)





Bounce



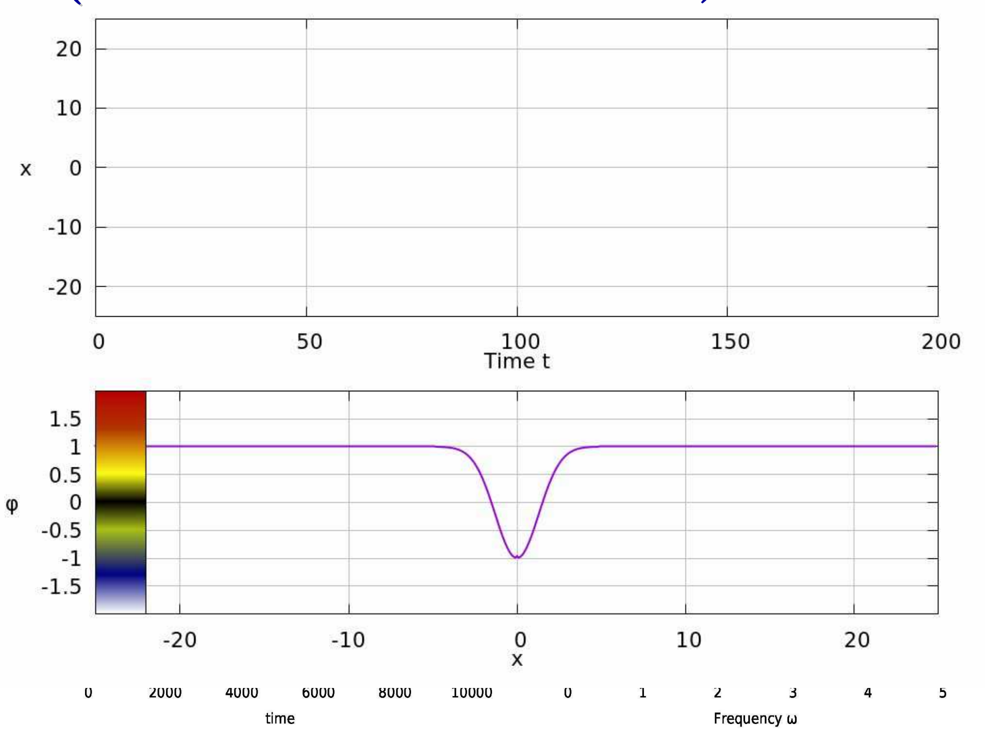
$$K\bar{K} \to K\bar{K}$$
$$v_{in} = 0.24385$$

Резонансы в столкновениях кинков

ϕ^4 осциллон

(I. L. Bogolubsky and V. G. Makhankov *(JETP Lett. 24, 12 (1976))*

Исключительно стабильное и почти не излучающее квазтпериодическое локализованное решение теории ϕ^4 (at least 10 million oscillations!!)



Гауссово приближение:

$$\phi(x,0) = 1 - 0.7e^{-0.205x^2}$$

Амплитуда как коллективная Координата осциллона:

$$\phi(x,t) = 1 - A(t)e^{-\left(\frac{x}{x_0}\right)^2}$$

Ангармонический осциллятор с частотой $\Omega_0 = \sqrt{4 + \frac{1}{3x_0}}$

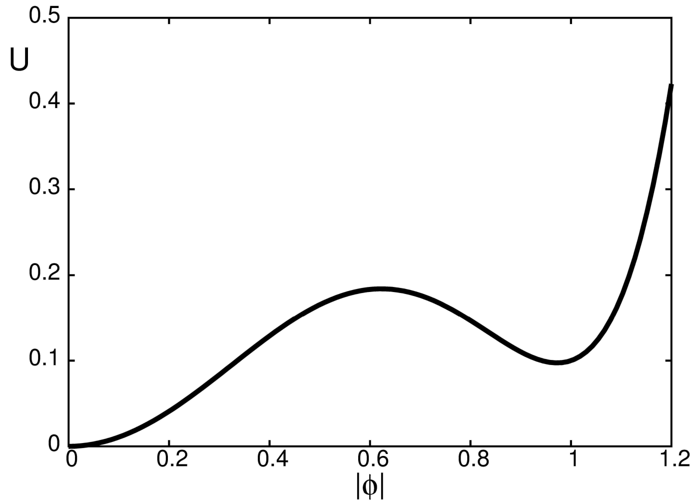
$$L/x_0 = (\dot{A})^2 - \frac{2}{3}A^4 - \pi A^3 - \left(4 + \frac{1}{3x_0^2}\right)A^2$$

Нетривиальный классический вакуум: Q-ball

$$L = |\partial_\mu \phi|^2 - U(|\phi|)$$

Нелинейный потенциал:

$$U = a|\phi|^2 - b|\phi|^4 + |\phi|^6$$



Глобальная U(1) инвариантность:

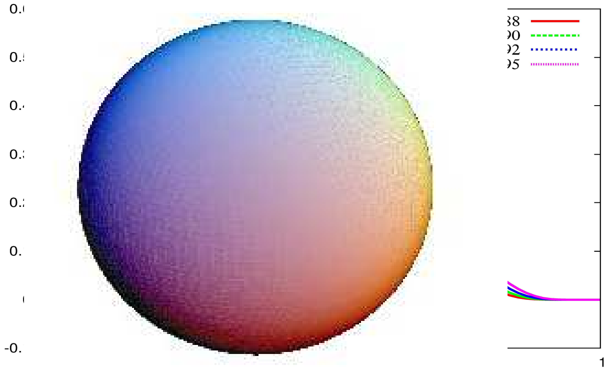
$$\phi(x) \to e^{ie\omega}\phi(x), \quad \phi^*(x) \to e^{-ie\omega}\phi^*(x)$$

$$\partial^\mu j_\mu = 0, \quad j^\mu = -i[\phi^*\partial^\mu\phi - (\partial^\mu\phi)^*\phi]$$

$$\Rightarrow \quad Q = i\int d^3x\,(\phi\partial_t\phi^* - \phi^*\partial_t\phi) = $$

$$= 2\omega\int d^3x\,|\phi|^2 = 2\omega N$$

Сферически симметричный Q-ball: $\phi = f(r)e^{i\omega t}$ $\Rightarrow$ $Q = 8\pi\omega\int\limits_0^\infty dr r^2 f^2$



Уравнения поля:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{2}{r}\frac{df}{dr} + \omega^2 f = \frac{1}{2}\frac{dV}{df}$$

$$f \sim \frac{1}{r}e^{-\sqrt{m^2-\omega^2}\,r}$$

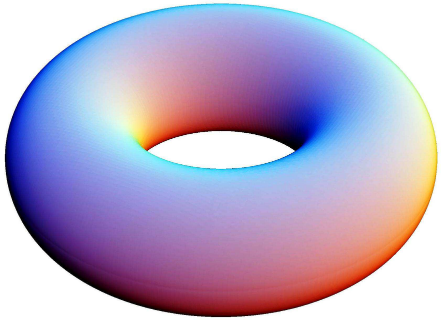
Аксиально-симметричные Q-balls

$$\phi = f(r,\theta)e^{i(\omega t + n\varphi)}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

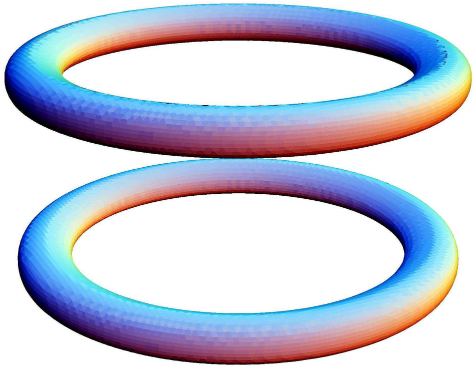
$$J = \int d^3x T^0_\varphi = 2n\omega N = nQ$$

$$\phi(r,\theta,\varphi) \propto \frac{1}{\sqrt{r}} J_{l+1/2}(\omega r) Y_l^n(\theta,\varphi)$$

Нетопологическое квантование углового момента



n=1 P_+



n=1 P_-

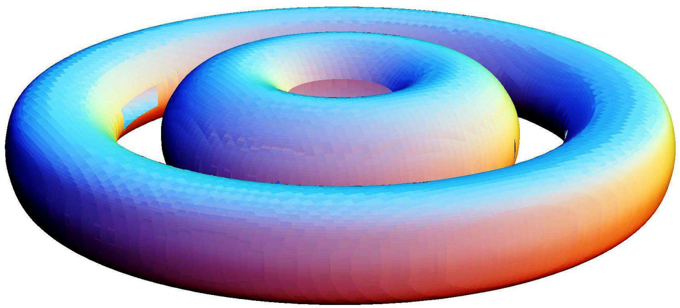
- ***Parity-even solutions:***

$$f(r,\theta) = f(r,\pi-\theta)$$

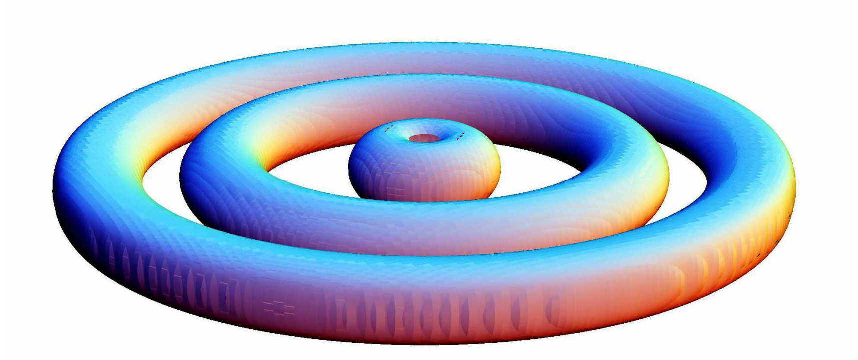
- ***Parity-odd solutions:***

$$f(r,\theta) = -f(r,\pi-\theta)$$

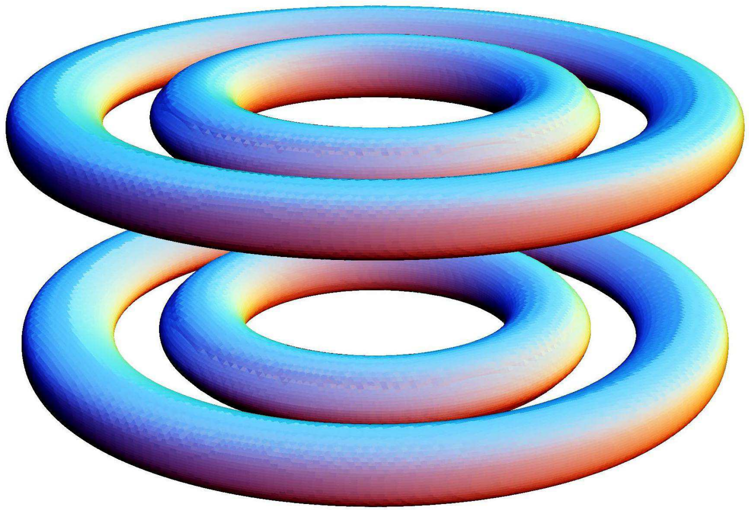
Аксиально-симметричные Q-balls



n=1,k=1 P-even



n=1,k=2 P-even



n=1,k=2 P-odd