Кафедра теоретической физики и астрофизики
Физический факультет, БГУ Минск

Функциональное интегрирование в квантовой теории поля

Я М Шнир

все вопросы, комментарии, замечания и протесты:

shnir@maths.tcd.ie

Функциональное интегрирование по фермионам

Напомним: **Классический осциллятор:** $H = \frac{1}{2}\left(p^2 + x^2\right)$

Квантовый осциллятор:

$$\boxed{a = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + ip)\,; \quad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - ip)}$$

$$\begin{cases} a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \\ a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \end{cases}$$

$$H = \frac{1}{2}\left(a^\dagger a + a a^\dagger\right) \equiv \{a, a^\dagger\} = N + \frac{1}{2}; \qquad N = a^\dagger a; \qquad N|n\rangle = n|n\rangle$$

Коммутационные соотношения: $[a, a^\dagger] = aa^\dagger - a^\dagger a = 1, \quad [a, a] = [a^\dagger, a^\dagger] = 0$

Антикоммутационные соотношения: $\{\theta, \theta^\dagger\} = \theta\theta^\dagger + \theta^\dagger\theta = 1, \quad \{\theta, \theta\} = \{\theta^\dagger, \theta^\dagger\} = 0$

Замечание: *антикоммутирующие операторы* ***нильпотентны****:* $\theta^2 = \left(\theta^\dagger\right)^2 = 0$

Грассманова алгебра: $\theta_i\theta_j + \theta_j\theta_i = 0\,, \quad i, j = 1, 2\ldots$

Суперчисла: $x = x_0 + x_i\theta^i + \frac{1}{2}x_{ij}\theta^i\theta^j + \ldots$

Грассмановы переменные

- **Разложение в ряд:**

- **Дифференцирование:** $$\frac{\partial}{\partial\theta_i}\frac{\partial}{\partial\theta_j}+\frac{\partial}{\partial\theta_j}\frac{\partial}{\partial\theta_i}=0$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial_L}{\partial\theta_1}f(\theta_1,\theta_2)=f_1+f_{12}\theta_2\\ \dfrac{\partial_R}{\partial\theta_1}f(\theta_1,\theta_2)=f_1-f_{12}\theta_2\end{cases}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial\theta_i}\right)^2=0,\qquad \left\{\frac{\partial}{\partial\theta_i},\theta_j\right\}\equiv\frac{\partial}{\partial\theta_i}\theta_j+\theta_j\frac{\partial}{\partial\theta_i}=\delta_{ij}$$

- **Вариация функции:** $$\delta f(\theta)=\delta\theta\frac{\partial_L f}{\partial\theta}=\delta\theta\frac{\partial_R f}{\partial\theta}\delta\theta$$

- **Интегрирование = дифференцирование:**

$$\int d\theta\equiv\frac{\partial}{\partial\theta}\quad\Rightarrow\quad\int d\theta\int d\theta=0$$

$$\int d\theta=0;\qquad\int\theta d\theta=1$$

$$\int d\theta\ f(\theta+\eta)=\int d\theta\ f(\theta)$$

- **Комплексные грассмановы переменные:**

$$\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}(\theta_1+i\theta_2);\qquad\bar\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}(\theta_1-i\theta_2)$$

$$\overline{\theta\eta}=\bar\eta\bar\theta=-\bar\theta\bar\eta$$

Фермионный осциллятор в 0+1 dim

$$\boxed{L = \frac{i}{2}\left(\bar\psi\dot\psi - \dot{\bar\psi}\psi\right) - \frac{\omega}{2}[\bar\psi,\psi]} \Rightarrow P_\psi = \frac{\partial L}{\partial\dot\psi} = -\frac{i}{2}\bar\psi, \quad P_{\bar\psi} = \frac{\partial L}{\partial\dot{\bar\psi}} = -\frac{i}{2}\psi$$

- **Классический гамильтониан:** $H = \dot\psi P_\psi + \dot{\bar\psi} P_{\dot{\bar\psi}} - L \boxed{= \frac{\omega}{2}[\bar\psi,\psi]}$

Уравнения движения:

$$\frac{\partial L}{\partial\psi} = \frac{i}{2}\dot{\bar\psi} + \omega\bar\psi \qquad \frac{\partial L}{\partial\bar\psi} = \frac{i}{2}\dot\psi - \omega\psi \Rightarrow \dot{\bar\psi} + i\omega\bar\psi = 0 \qquad \dot\psi - i\omega\psi = 0 \Rightarrow \boxed{\bar\psi = \bar\theta e^{-i\omega t} \qquad \psi = \theta e^{i\omega t}}$$

Раскладывая поля по операторам:

$$\boxed{H_B = \frac{1}{2}\left(a^\dagger a + a a^\dagger\right) \equiv \{a, a^\dagger\}} \Leftrightarrow \boxed{H_F = \frac{1}{2}\left(\theta^\dagger\theta - \theta\theta^\dagger\right) \equiv [\theta^\dagger,\theta]}$$

$$N_B = a^\dagger a; \qquad N_F = \theta^\dagger\theta \Leftrightarrow N_f^2 = \theta^\dagger\theta\theta^\dagger\theta = \theta^\dagger(1-\theta^\dagger\theta)\theta = \theta^\dagger\theta = N_f$$

Замечание: ***Как бозонный, так и фермионный осциллятор рассматриваются в качестве классических моделей.***

Гауссовы интегралы по фермионам

$$\int d\theta\delta(\theta) = \int d\theta\theta = 1 \Longrightarrow \delta(\theta) = \theta$$

$$e^{a\theta} = 1 + a\theta; \quad e^{\bar\theta a\theta} = 1 + \bar\theta a\theta$$

$$\int d\theta e^{a\theta} = \int d\theta(1 + a\theta) = a$$

$$\int d\bar\theta d\theta e^{\bar\theta a\theta} = \int d\bar\theta d\theta(1 + \bar\theta a\theta) = a \equiv e^{\ln a}$$

- **d=2:** $\theta = (\theta_1, \theta_2), \quad \bar\theta\theta = (\bar\theta_1\theta_1 + \bar\theta_2\theta_2), \quad (\bar\theta\theta)^2 = 2\bar\theta_1\theta_1\bar\theta_2\theta_2$

$$\overline{\theta_1\theta_2} = \bar\theta_2\bar\theta_1 = -\bar\theta_1\bar\theta_2 \qquad \int d\theta = \int d\theta_2 \int d\theta_1; \quad \int d\bar\theta = \int d\bar\theta_1 \int d\bar\theta_2$$

- $$\int d\bar\theta \int d\theta e^{\bar\theta\theta} = \int d\bar\theta_1 \int d\bar\theta_2 \int d\theta_2 \int d\theta_1 e^{\bar\theta_1\theta_1} e^{\bar\theta_2\theta_2} =$$

$$\int d\bar\theta_1 \int d\bar\theta_2 \int d\theta_2 \int d\theta_1 (1+\bar\theta_1\theta_1)(1+\bar\theta_2\theta_2) = \int d\bar\theta_1 \int d\bar\theta_2 \int d\theta_2 \int d\theta_1 \, \bar\theta_1\theta_1\bar\theta_2\theta_2 = 1$$

- $$\int d\bar\theta_1 \int d\bar\theta_2 \int d\theta_2 \int d\theta_1 e^{\bar\theta_1 a_1\theta_1} e^{\bar\theta_2 a_2\theta_2} = \int d\bar\theta_1 \int d\theta_1 e^{\bar\theta_1 a_1\theta_1} \int d\bar\theta_2 \int d\theta_2 e^{\bar\theta_2 a_2\theta_2} =$$

$$= a_1 a_2 = e^{\ln a_1 + \ln a_2}$$

$$\int d\bar\theta_1 d\theta_1 d\bar\theta_2 d\theta_2 e^{\bar\theta_1 M_{11}\theta_1+\bar\theta_1 M_{12}\theta_2+\bar\theta_2 M_{21}\theta_1+\bar\theta_2 M_{22}\theta_2}$$

$$= M_{11}M_{22} - M_{12}M_{21} = \det\ M = e^{\ln\det\ M}$$

- **Гауссов интеграл:**

$$\boxed{I_F = \int d\bar\theta d\theta e^{\bar\theta_i M_{ij}\theta_j} = \det\ M}$$

Напомним:

$$\boxed{I_B = \int d^n z^* d^n z\ e^{z_i^* M_{ij} z_j} = \frac{(2\pi)^n}{\det\ M}}$$

- **Гауссов интеграл с источниками:**

$$\boxed{I_F[\bar\eta,\eta] = \int d\bar\theta d\theta e^{\bar\theta_i M_{ij}\theta_j+\bar\theta_i\eta_i+\bar\eta_i\theta_i}}$$

Сдвиг переменных: $\theta_i \to \theta_i + M^{-1}_{ik}\eta_k; \qquad \bar\theta_i \to \bar\theta_i + \bar\eta_k M^{-1}_{ki}$

$$\Rightarrow\quad I_F[\bar\eta,\eta] = \int d\bar\theta d\theta e^{(\bar\theta+\bar\eta M^{-1})M(\theta+M^{-1}\eta)+\bar\eta M^{-1}\eta} = \boxed{\det\ M\ e^{\bar\eta M^{-1}\eta}}$$

Напомним:

$$\boxed{I_B[J^*,J] = \int d^n z^* d^n z\ e^{z_i^* M_{ij} z_j + J_i^* z_i + z_i^* J_i} = \frac{(2\pi)^n}{\det\ M} e^{J_i^* M_{ij}^{-1} J_j}}$$

Фермионный осциллятор: функция Грина

$$L = \frac{i}{2}\left(\bar{\psi}\dot{\psi} - \dot{\bar{\psi}}\psi\right) - \frac{\omega}{2}[\bar{\psi}, \psi] \Rightarrow L = \frac{1}{2}\bar{\Psi}\left(i\sigma_3\frac{d}{dt} - \omega\right)\Psi$$

Двухкомпонентный спинор: $\Psi = \begin{pmatrix} \psi \\ \bar{\psi} \end{pmatrix}, \quad \bar{\Psi} = \Psi^\dagger\sigma_3 = (\bar{\psi}, -\psi)$

- $$i\bar{\Psi}\sigma_3\frac{d}{dt}\Psi = i(\bar{\psi}, -\psi)\begin{pmatrix} \dot{\psi} \\ -\dot{\bar{\psi}} \end{pmatrix} = i(\bar{\psi}\dot{\psi} + \psi\dot{\bar{\psi}}) \equiv i(\bar{\psi}\dot{\psi} - \dot{\bar{\psi}}\psi)$$

- $$\bar{\Psi}\Psi = (\bar{\psi}, -\psi)\begin{pmatrix} \psi \\ \bar{\psi} \end{pmatrix} = \bar{\psi}\psi - \psi\bar{\psi} \equiv [\bar{\psi}, \psi]$$

- **Функция Грина фермионного осциллятора:**

$$\left(i\sigma_3\frac{d}{dt} - \omega\right)G(t-t') = \delta(t-t')$$

Преобразование Фурье: $G(t-t') = \int \frac{dk}{2\pi}G(k)e^{-ik(t-t')}; \quad \delta(t-t') = \int \frac{dk}{2\pi}e^{-ik(t-t')}$

$$G(k) = \frac{1}{\sigma_3 k - \omega} = \frac{\sigma_3 k + \omega}{k^2 - \omega^2}$$

- *Уравнения движения:*

$$\left(i\sigma_3\frac{d}{dt}-\omega\right)\Psi(t)=\Theta(t),\quad \Theta(t)=\begin{pmatrix}\eta(t)\\ \bar{\eta}(t)\end{pmatrix}$$

Источники

- **Формальное решение уравнения движения:**

$$\Psi(t)=\int dt'\ G(t-t')\Theta(t')\equiv G\star\Theta$$

- **Производящий функционал** $Z[\bar{\Theta},\Theta]=Ne^{\int dtdt'\bar{\Theta}(t')G(t-t')\Theta(t)}\equiv Ne^{\bar{\Theta}\star G\star\Theta}$

Производящий функционал *связных* функций Грина

$$W[\bar{\Theta},\Theta]=-\int dtdt'\bar{\Theta}(t)G(t-t')\Theta(t')\equiv-\bar{\Theta}\star G\star\Theta$$

- **Пропагатор фермионного осцллятора:**

$$G(t-t')\equiv-\frac{\delta}{\delta\bar{\Theta}(t)}\frac{\delta}{\delta\Theta(t')}W[\bar{\Theta},\Theta]$$

Фермионный осциллятор: функциональный интеграл

Действие:

$$S=\frac{1}{2}\int dt\left[\bar{\Psi}\left(i\sigma_3\frac{d}{dt}-\omega\right)\Psi+\bar{\Theta}\Psi+\bar{\Psi}\Theta\right]$$

- ***Источники:***

$$\bar{\Theta}\Psi\equiv\bar{\Psi}\Theta=(\bar{\psi},-\psi)\begin{pmatrix}\eta\\ \bar{\eta}\end{pmatrix}=\bar{\psi}\eta+\bar{\eta}\psi$$

- ***Функциональный интеграл:***

$$Z[\bar{\Theta},\Theta]=\int\mathcal{D}\bar{\Psi}\mathcal{D}\Psi e^{\frac{i}{2}\int dt\left[\bar{\Psi}\left(i\sigma_3\frac{d}{dt}-\omega\right)\Psi+\bar{\Theta}\Psi+\bar{\Psi}\Theta\right]}=Ne^{\int dtdt'\bar{\Theta}(t')G(t-t')\Theta(t)}$$

- **Вакуумное среднее поля Ψ:**

$$\langle\Psi\rangle=\left.\frac{\delta Z}{\delta\bar{\Theta}}\right|_{\Theta=\bar{\Theta}=0}=\frac{1}{Z}\int\mathcal{D}\bar{\Psi}\mathcal{D}\Psi\ \Psi e^{\frac{i}{2}\int dt\bar{\Psi}\left(i\sigma_3\frac{d}{dt}-\omega\right)\Psi}=0$$

- **Двухточечная функция:**

$$\langle\bar{\Psi}\Psi\rangle=\left.\frac{\delta Z}{\delta\bar{\Theta}\delta\Theta}\right|_{\Theta=\bar{\Theta}=0}=\frac{1}{Z}\int\mathcal{D}\bar{\Psi}\mathcal{D}\Psi\ \bar{\Psi}\Psi e^{\frac{i}{2}}\int dt\bar{\Psi}\left(i\sigma_3\frac{d}{dt}-\omega\right)\Psi=G(t-t')$$

Фермионный детерминант

- **Производящий функционал:** $$Z[0]=\int \mathcal{D}\bar\psi\mathcal{D}\psi e^{i\int dt\left[i\bar\psi\dot\psi-\omega\bar\psi\psi\right]}$$

Дискретизация: $\Delta t=\frac{t_b-t_a}{N},\quad t_{i+1}-t_i=\Delta t,\quad i=1,2,\dots N,\ \psi(t_1)=\psi_1,\ \psi(t_N)=\psi_N$

Дискретизованное действие: $$S_N=\Delta t\sum_{n=1}^{N}\left[i\bar\psi_n\left(\frac{\psi_n-\psi_{n-1}}{\Delta t}\right)-\omega\bar\psi_n\left(\frac{\psi_n-\psi_{n-1}}{2}\right)\right]$$

- **Фермионный интеграл по траекториям:**

$$Z[0]=\lim_{N\to\infty}\int d\bar\psi_1\dots d\bar\psi_{N-1}d\psi_1\dots d\psi_{N-1}\ e^{iS_N}$$

Замечание: ***можно записать*** $$iS_N=\left[-\sum_{n=1}^{N-1}\left(1+\frac{i\omega\Delta t}{2}\right)\bar\psi_n\psi_n-\left(1+\frac{i\omega\Delta t}{2}\right)\bar\psi_N\psi_N\right.$$
$$\left.+\sum_{n=2}^{N-1}\left(1-\frac{i\omega\Delta t}{2}\right)\bar\psi_n\psi_{n-1}+\left(1-\frac{i\omega\Delta t}{2}\right)\bar\psi_1\psi_0+\left(1-\frac{i\omega\Delta t}{2}\right)\bar\psi_N\psi_{N-1}\right]$$
$$=\boxed{-\left[\bar\psi^T M\psi+\left(1+\frac{i\omega\Delta t}{2}\right)\bar\psi_N\psi_N+\bar J^T\psi+\bar\psi^T J\right]}$$

$$iS_N = -\left[\bar\psi^T M\psi + \left(1+\frac{i\omega\Delta t}{2}\right)\bar\psi_N\psi_N + \bar J^T\psi + \bar\psi^T J\right]$$

$$\psi^T = (\psi_1, \psi_2 \dots \psi_{N-1}); \qquad \bar\psi^T = (\bar\psi_1, \bar\psi_2 \dots \bar\psi_{N-1})$$

$$J^T = -\left(1-\frac{i\omega\Delta t}{2}\right)(\psi_0, 0, \dots, 0); \qquad \bar J^T = -\left(1-\frac{i\omega\Delta t}{2}\right)(0, \dots, 0, \bar\psi_N)$$

$$M = \begin{pmatrix} \left(1+\frac{i\omega\Delta t}{2}\right) & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -\left(1-\frac{i\omega\Delta t}{2}\right) & \left(1+\frac{i\omega\Delta t}{2}\right) & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\left(1-\frac{i\omega\Delta t}{2}\right) & \left(1+\frac{i\omega\Delta t}{2}\right) & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -\left(1-\frac{i\omega\Delta t}{2}\right) & \left(1+\frac{i\omega\Delta t}{2}\right) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

Окончательно:

$$\det\, M = \left(1+\frac{i\omega\Delta t}{2}\right)^{N-1}$$

$$Z[0] = \lim_{N\to\infty} \det M e^{\bar J^T M^{-1} J - \left(1+\frac{i\omega\Delta t}{2}\right)\bar\psi_N\psi_N} = e^{i\omega T/2}\, \exp\left[e^{-i\omega T}\bar\psi_N\psi_0 - \bar\psi_N\psi_N\right]$$

Суперсимметричный осциллятор

- **А что, если рассмотреть бозонный и фермионный осцилляторы вместе?**

Напомним: $[a_B, a_B^\dagger] = 1; \qquad \{a_F, a_F^\dagger\} = 1$

$$\boxed{H_B = \omega\left(a_B^\dagger a_B + \frac{1}{2}\right) = \omega\left(N_B + \frac{1}{2}\right);} \qquad \boxed{H_F = \omega\left(a_F^\dagger a_F - \frac{1}{2}\right) = \omega\left(N_F - \frac{1}{2}\right)}$$

$$N_B = 0, 1, 2\ldots \qquad\qquad N_F = 0, 1$$

$$H = H_B + H_F = \omega(a_B^\dagger a_B + a_F^\dagger a_F) = \omega(N_B + N_F)$$

- **Замечание: энергия основного состояния равна нулю!**

Рассмотрим *суперзаряды* $\quad Q = a_B^\dagger a_F, \quad \bar{Q} = a_F^\dagger a_B$

Задача: 1) проверьте, что $[Q, H] = [\bar{Q}, H] = 0$, и $\{Q, \bar{Q}\} = H/\omega$

2) проверьте, что $[Q, N_B] = -Q,$ и $[Q, N_F] = Q$

- ***Оператор*** Q ***увеличивает*** N_B ***на 1 и уменьшает*** N_F ***на 1;***
- ***Оператор*** $\bar{Q}$ ***уменьшает*** N_B ***на 1 и увеличивает*** N_F ***на 1***

Свободная суперчастица: $S = \frac{1}{2}\int dt\left(\dot{x}^2 + i\psi\dot{\psi}\right)$

Первая вариация действия: $\delta S = \int dt\left\{\dot{x}\delta\dot{x} + \frac{i}{2}\left(\delta\psi\dot{\psi} + \psi\delta\dot{\psi}\right)\right\}$

$$= \int dt\left\{-\ddot{x}\delta x + \frac{i}{2}\left(\delta\psi\dot{\psi} - \dot{\psi}\delta\psi\right)\right\} = \int dt\left\{-\ddot{x}\delta x + i\delta\psi\dot{\psi}\right\} = 0$$

Уравнения поля: $\ddot{x} = 0, \quad \dot{\psi} = 0$

$\epsilon\psi = -\psi\epsilon$

Симметрия действия: $x \to x + \delta_\epsilon x, \quad \psi \to \psi + \delta_\epsilon\psi; \quad \delta_\epsilon x = -i\epsilon\psi; \quad \delta_\epsilon\psi = \epsilon\dot{x}$

Суперсимметрия - SUSY

Напомним: ***генератор преобразований симметрии с параметром*** ϵ ***определяется как*** $\delta S = \int dt\dot{\epsilon}Q = 0$

$$\delta S = \int dt(i\ddot{x}\epsilon\psi + i\epsilon\dot{x}\dot{\psi}) = -\int dt\; i\dot{x}\dot{\epsilon}\psi - \int dt\; i\dot{x}\epsilon\dot{\psi} + i\epsilon\dot{x}\dot{\psi} = -\int dt\; \dot{\epsilon}(i\dot{x}\psi)$$

Суперзаряд: $Q = i\dot{x}\psi$

Суперсимметричный осциллятор

$$L = \frac{\dot{x}^2}{2} - \frac{\omega^2 x^2}{2} + i\bar{\psi}\dot{\psi} - \omega\bar{\psi}\psi$$

Преобразования суперсимметрии:

$$\begin{cases} \delta_\epsilon x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\bar{\psi}\epsilon \\ \delta_\epsilon \psi = -\dfrac{i}{\sqrt{2}}\dot{x}\epsilon - \dfrac{\omega x}{\sqrt{2}}\epsilon \\ \delta_\epsilon \bar{\psi} = 0 \end{cases}$$

- **Задача:** **вычислите вариацию лагранжиана при этих преобразованиях**

Фермионы в 2+1 измерениях

$$L = \bar{\psi}\left(i\sigma_3 \frac{d}{dt} - \omega\right)\psi \quad \Rightarrow \quad L = \bar{\psi}\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m\right)\psi$$

- **0+1 dim:** $\psi(t)$
- **2+1 dim:** $\psi(\mathbf{r},t) = \begin{pmatrix} \psi_1(\mathbf{r},t) \\ \psi_2(\mathbf{r},t) \end{pmatrix}$

Алгебра Клиффорда: $\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\eta_{\mu\nu}, \quad \eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\,(-1,1,1)$

Обычный выбор: $\gamma_0 = \sigma_3; \quad \gamma_1 = -i\sigma_1; \quad \gamma_2 = -i\sigma_2$ $\qquad \bar{\psi} = \psi^{\dagger}\gamma_0$

Замечание: ***Евклидовы*** γ ***матрицы задаются алгеброй*** $\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu} \Rightarrow \gamma_0 = I_2; \quad \gamma_k = i\sigma_k$ ***и*** $\bar{\psi} = \psi^{\dagger}$

- ***Канонический импульс:***

$$\pi = \frac{\delta L}{\delta \dot{\psi}} = i\bar{\psi}\gamma_0 = i\phi^{\dagger}$$

- ***Гамильтониан:***

$$H = \pi\dot{\psi}L = -i\bar{\psi}\gamma^k\partial_k\psi + m\bar{\psi}\psi$$

Производящий функционал фермионных полей

Уравнение Дирака:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\,\psi = 0$$

Фермионный пропагатор:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\,G_F(x-y) = \delta(x-y)$$

Преобразование Фурье:

$$G_F(x-y) = i\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{e^{ik^\mu(x_\mu - y_\mu)}}{\gamma^\mu k_\mu - m}$$

Обратный пропагатор: $G_F^{-1}(x,y) = -i\,(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\,\delta(x-y)$

Задача: вычислить производящий функционал

$$Z[\bar\eta,\eta] = \int D\psi D\bar\psi e^{iS[\bar\psi,\psi]+i\bar\eta\star\psi+i\bar\psi\star\eta}$$

Метод: разложение экспоненты около экстремума: $\psi \to \psi_0 + \psi, \quad \bar\psi \to \bar\psi_0 + \bar\psi$

$$\begin{cases} \bar\psi_0 = -\bar\eta(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)^{-1} \\ \psi_0 = -(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)^{-1}\eta \end{cases}$$

$$iS[\bar\psi,\psi] + i\bar\eta\star\psi + i\bar\psi\star\eta =$$

$$i\int dxdy\;\bar\eta(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)^{-1}\eta(y) + i\int dxdy\;\bar\psi(x)\,(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(y) =$$

$$= -i\bar\eta\star G_F\star\eta - \bar\psi\star G_F^{-1}\star\psi$$

- **Производящий функционал:**

$$\boxed{Z[\bar\eta,\eta] = \int D\psi D\bar\psi e^{-\bar\eta\star G_F\star\eta-\bar\psi\star G_F^{-1}\star\psi} = \det(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)e^{-i\bar\eta\star G_F\star\eta}}$$

Напомним: для комплексного скалярного поля

$$Z[J,J^*] = \det{}^{-1}(-\partial_\nu^2+m^2)e^{-iJ^*\star G_B\star J}$$

- ***Вакуумные средние:*** $$\boxed{\langle\psi(x)\rangle = \frac{1}{Z[\bar\eta,\eta]}\frac{\delta Z[\bar\eta,\eta]}{i\delta\bar\eta(x)} = \langle\bar\psi(x)\rangle = \frac{1}{Z[\bar\eta,\eta]}\frac{\delta Z[\bar\eta,\eta]}{-i\delta\eta(x)} = 0}$$

- ***2-х точечная функция:***

$$\langle\psi(x)\bar\psi(y)\rangle = \frac{1}{Z[\bar\eta,\eta]}\left(\frac{\delta}{i\delta\bar\eta(x)}\right)\left(\frac{\delta}{-i\delta\eta(y)}\right)Z[\bar\eta,\eta] = G_F(x-y)$$

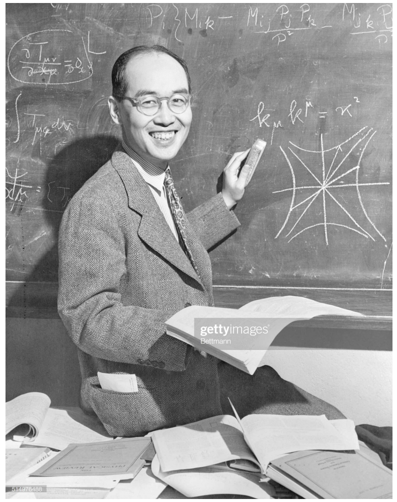
Диаграммная техника:

$$G_F(x-y) = -\frac{\delta W[J]}{\delta\bar\eta(x)\eta(y)}$$

Фермионы + бозоны

$$S = \frac{1}{2}\int d^4x \left((\partial_\mu\varphi)^2 + M^2\varphi^2\right) + \bar{\psi}\,(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\,\psi + g\varphi\bar{\psi}\psi$$

Взаимодействие Юкавы $L_{int} = g\varphi\bar{\psi}\psi$



- **Производящий функционал (Евклид):**

$$Z[\bar{\eta},\eta,J] = \int D\varphi D\psi D\bar{\psi} e^{-S[\phi,\bar{\psi},\psi]+J\star\varphi+\bar{\eta}\star\psi+\bar{\psi}\star\eta}$$

Метод: пертурбативное разложение по константе связи *g*:

$$\exp\left\{-g\int d^4x\varphi\bar{\psi}\psi\right\} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-g)^n}{n!}\int d^4x_1\ldots d^4x_n\varphi(x_1)\bar{\psi}(x_1)\psi(x_1)\ldots\varphi(x_n)\bar{\psi}(x_n)\psi(x_n)$$

$$Z[\bar{\eta},\eta,J] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-g)^n}{n!}\int d^4x_1\ldots d^4x_n\varphi(x_1)\bar{\psi}(x_1)\psi(x_1)\ldots\varphi(x_n)\bar{\psi}(x_n)\psi(x_n)$$
$$\times\ e^{-\int d^4x\left[\frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2+\frac{1}{2}M^2\varphi^2+\bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu-m)\psi+J(x)\varphi(x)+\bar{\eta}(x)\psi(x)+\bar{\psi}(x)\eta(x)\right]}$$

Замечание: $\varphi(x_1)\bar\psi(x_1)\psi(x_1)\ldots\varphi(x_n)\bar\psi(x_n)\psi(x_n) =$

$$= \frac{\delta}{\delta J(x_1)}\frac{\delta}{\delta \eta(x_1)}\frac{\delta}{\delta \bar\eta(x_1)}\cdots\frac{\delta}{\delta J(x_n)}\frac{\delta}{\delta \eta(x_n)}\frac{\delta}{\delta \bar\eta(x_n)}\left(e^{\int d^4x \varphi(x)J(x)+\bar\eta(x)\psi(x)+\bar\psi(x)\eta(x)}\right)\Bigg|_{J=\bar\eta=\eta=0}$$

- **В первом порядка по g:** $Z = (1 - g\;\delta Z_1 + \ldots)Z_0$

$$\boxed{Z[J,\bar\eta,\eta] \approx \int d^4x \left[1 - g\frac{\delta}{\delta J(x)}\frac{\delta}{\delta \eta(x)}\frac{\delta}{\delta \bar\eta(x)}\right] e^{\frac{1}{2}J\star G_B\star J+\bar\eta\star G_F\star\eta}}$$

- $$\frac{\delta}{\delta J(x)}\left(e^{\frac{1}{2}\int d^4y d^4z\;\; J(y)G_B(y-z)J(z)+\int d^4y d^4z\;\; \bar\eta(y)G_F(y-z)\eta(z)}\right) =$$
$$= \left[\int d^4y\; G_B(x-y)J(y)\right] e^{\frac{1}{2}J\star G\star J+\bar\eta\star G_F\star\eta}$$

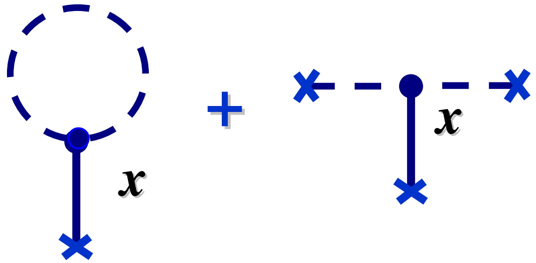
- $$\frac{\delta}{\delta \bar\eta(x)}\frac{\delta}{\delta J(x)}\left(e^{\frac{1}{2}\int d^4y d^4z\;\; J(y)G_B(y-z)J(z)+\int d^4y d^4z\;\; \bar\eta(y)G_F(y-z)\eta(z)}\right) =$$
$$= \frac{\delta}{\delta \bar\eta(x)}\left(\left[\int d^4y\; G_B(x-y)J(y)\right] e^{\frac{1}{2}J\star G\star J+\bar\eta\star G_F\star\eta}\right)$$
$$= \left[\left(\int d^4y\; G_B(x-y)J(y)\right)\left(\int d^4y\; G_F(x-y)\eta(y)\right)\right] e^{\frac{1}{2}J\star G\star J+\bar\eta\star G_F\star\eta}$$

$$\frac{\delta}{\delta\eta(x)}\frac{\delta}{\delta\bar\eta(x)}\frac{\delta}{\delta J(x)}\left(e^{\frac{1}{2}\int d^4y d^4z\ J(y)G_B(y-z)J(z)+\int d^4y d^4z\ \bar\eta(y)G_F(y-z)\eta(z)}\right)=$$

$$=\frac{\delta}{\delta\eta(x)}\left(\left[\left(\int d^4y\ G_B(x-y)J(y)\right)\left(\int d^4y\ G_F(x-y)\eta(y)\right)\right]e^{\frac{1}{2}J\star G\star J+\bar\eta\star G_F\star\eta}\right)$$

$$\boxed{=\left[\left(\int d^4y\ G_B(x-y)J(y)\right)\left(G_F(0)+\int d^4y\ G_F(x-y)\eta(y)\int d^4y\ \bar\eta(y)G_F(x-y)\right)\right]e^{\frac{1}{2}J\star G\star J+\bar\eta\star G_F\star\eta}}$$

$$\frac{\delta}{\delta J(x)}\frac{\delta}{\delta\eta(x)}\frac{\delta}{\delta\bar\eta(x)}e^{\frac{1}{2}J\star G_B\star J+\bar\eta\star G_F\star\eta}=\Bigg\{$$



$$\Bigg\}\ e^{\frac{1}{2}J\star G_B\star J+\bar\eta\star G_F\star\eta}$$

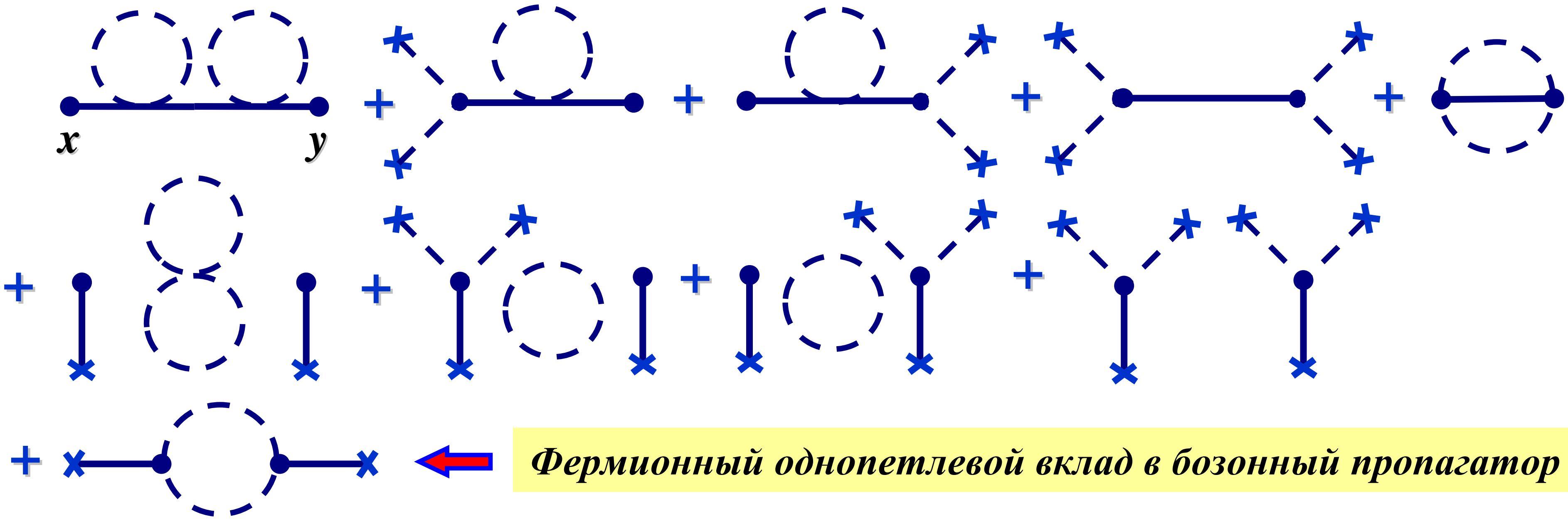
- ***Поправки 1го порядка не меняют пропагаторы полей***

- **Во втором порядка по g:** $Z=\left(1-g\ \delta Z_1+\frac{g^2}{2}\ \delta Z_2\right)Z_0$

$$Z[J,\bar\eta,\eta]\approx\int d^4x\left[1-g\frac{\delta}{\delta J(x)}\frac{\delta}{\delta\eta(x)}\frac{\delta}{\delta\bar\eta(x)}+\frac{g^2}{2}\frac{\delta}{\delta J(x)}\frac{\delta}{\delta\eta(x)}\frac{\delta}{\delta\bar\eta(x)}\frac{\delta}{\delta J(y)}\frac{\delta}{\delta\eta(y)}\frac{\delta}{\delta\bar\eta(y)}\right]e^{\frac{1}{2}J\star G_B\star J+\bar\eta\star G_F\star\eta}$$

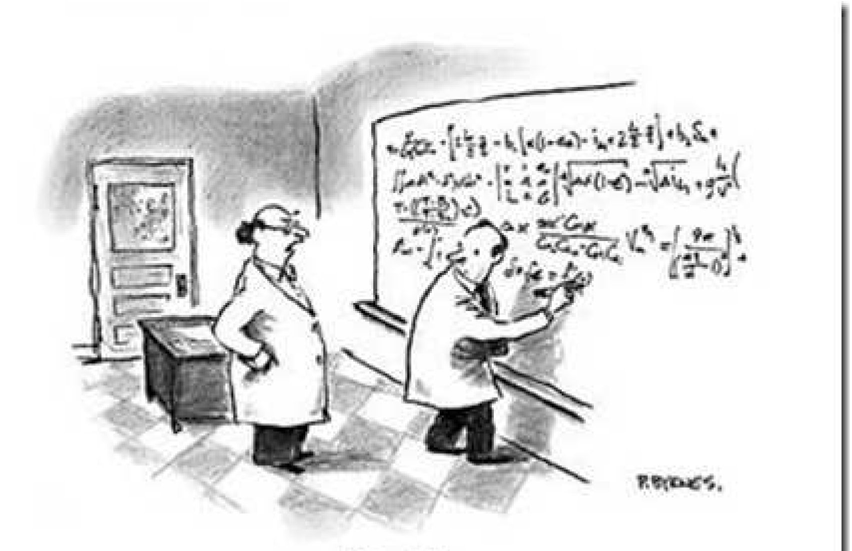
Домашнее задание: проверить, что

$$\delta Z_2 = \left[G_B(x-y) + \left(\int d^4x'\; G_B(x-x')J(x')\right)\left(\int d^4y'\; G_B(y-y')J(y')\right)\right]$$
$$\times\left\{\left[G_F(0) + \left(\int d^4x'\bar\eta(x')G_F(x-x')\right)\left(\int d^4x''G_F(x-x'')\eta(x'')\right)\right]\right.$$
$$\times\left[G_F(0) + \left(\int d^4y'\bar\eta(y')G_F(y-y')\right)\left(\int d^4y''G_F(y-y'')\eta(y'')\right)\right]$$
$$\left.+\int d^4x d^4y\; G_F(x-y)G_F(y-x)\right\}$$



Фермионный однопетлевой вклад в бозонный пропагатор

Удачи на экзамене!



“Duh!”