

Кафедра теоретической физики и астрофизики
Физический факультет, БГУ Минск



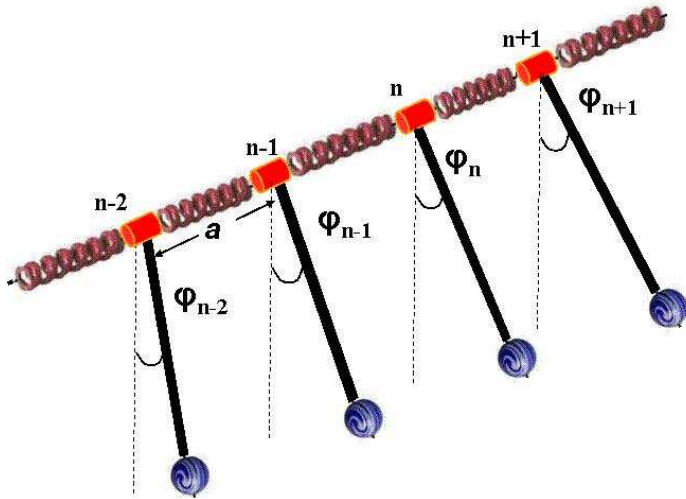
**Функциональное
интегрирование в квантовой
теории поля**

Я М Шнир

**все вопросы, комментарии, замечания и
протесты:**

shnir@maths.tcd.ie

Классические поля



$$T = \frac{I}{2} \sum_n \left(\frac{\partial \phi(x_n, t)}{\partial t} \right)^2$$

$$U = \frac{\alpha}{2} \sum_n [\phi(x_{n+1}, t) - \phi(x_n, t)]^2 + \sum_n V[x_n, t]$$

$$V[x_n] = -mgl (1 - \cos \phi(x_n, t))$$

$$\ddot{\phi}_n - \alpha(\phi_{n+1} - 2\phi_n + \phi_{n-1}) = -\sin \phi_n$$

Разложение в ряд:

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi(x_{n\pm 1}) \approx \phi(x_n) \pm a \frac{\partial \phi(x_n)}{\partial x} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 \phi(x_n)}{\partial x^2} \pm \frac{a^3}{3!} \frac{\partial^3 \phi(x_n)}{\partial x^3} + \frac{a^4}{4!} \frac{\partial^4 \phi(x_n)}{\partial x^4} + \dots \\ \phi(x_{n+1}) - 2\phi(x_n) + \phi(x_{n-1}) \approx a^2 \frac{\partial^2 \phi(x_n)}{\partial x^2} \end{array} \right.$$

$$\phi_{tt} - \alpha a^2 \phi_{xx} + mgl \sin \phi = 0$$

Лагранжиан:

$$L = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - U(\phi); \quad U(\phi) = 1 - \cos \phi$$

Квантование полей

- Действие свободного поля:

$$S = \int d^3x dt \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi(\vec{x}, t))^2 - \frac{1}{2} m^2 \varphi(\vec{x}, t)^2 \right]$$

- **Диагонализация:**

$$\varphi(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p}\vec{x}} \varphi(\vec{p}, t)$$

Масса

Поле φ является действительным, $\varphi(\vec{p}, t) = \varphi^*(-\vec{p}, t)$

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_0^T dt \int_V d^3x \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{x}} \right)^2 - m^2 \varphi^2 \right] = \\ &= \frac{1}{2} \int dt d^3x \frac{d^3p_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3p_2}{(2\pi)^3} e^{i(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)\vec{x}} \left[\dot{\varphi}(\vec{p}_1, t) \dot{\varphi}(\vec{p}_2, t) + \vec{p}_1 \vec{p}_2 \varphi(\vec{p}_1, t) \varphi(\vec{p}_2, t) - m^2 \varphi(\vec{p}_1, t) \varphi(\vec{p}_2, t) \right] \\ &= \frac{1}{2} \int dt \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[\dot{\varphi}(\vec{p}, t) \dot{\varphi}(-\vec{p}, t) - (\vec{p}^2 + m^2) \varphi(\vec{p}, t) \varphi(-\vec{p}, t) \right] \\ &= \frac{1}{2} \int dt \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[|\dot{\varphi}(\vec{p}, t)|^2 - \omega^2 |\varphi(\vec{p}, t)|^2 \right] \end{aligned}$$

$$\omega^2 = \vec{p}^2 + m^2$$

Гармонические осцилляторы!

Энергия вакуума и эффект Казимира

- Энергия нулевых колебаний:

$$\frac{E_0}{V} = \frac{1}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \omega(\vec{p}) \rightarrow \infty$$

- **Упрощенная модель в 1+1 измерениях:**

$$S = \frac{1}{2} \int d^2 x [(\partial_\nu \varphi)(\partial^\nu \varphi) - \cancel{m^2 \varphi^2}]$$



0 L

$$\varphi(0, t) = \varphi(L, t) = 0$$

Вакуум: $\varphi_0 = 0$

Флуктуации над вакуумом: $\varphi = \varphi_0 + \delta\varphi$

$$\square(\delta\varphi) = (\partial_t^2 - \partial_x^2)\delta\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta\varphi(x, t) = \phi(x)e^{-i\omega t}, \quad \phi(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin k_n x$$

$$k_n = \pi n/L, \quad \omega_n = |k_n|, \quad n \in \mathbb{Z}$$

- Энергия вакуумных флуктуаций:

$$E_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_n}{2} = \frac{\pi}{2L} \sum_{n=1}^{\infty} n \rightarrow \infty$$

Энергия вакуума и эффект Казимира

Трюк: регуляризация

$$E_0 \rightarrow E_\alpha = \frac{\pi}{2L} \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-\alpha k_n} = \frac{\pi}{2L} \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-\frac{\alpha \pi n}{L}}$$

$$\varepsilon = \alpha \pi / L \rightarrow E_\alpha = \frac{\pi}{2L} \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-\varepsilon n} = \frac{\pi}{2L} \left[-\frac{d}{d\varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\varepsilon n} \right] = \frac{\pi}{2L} \left[-\frac{d}{d\varepsilon} \left(\frac{e^{-\varepsilon}}{1 - e^{-\varepsilon}} \right) \right]$$

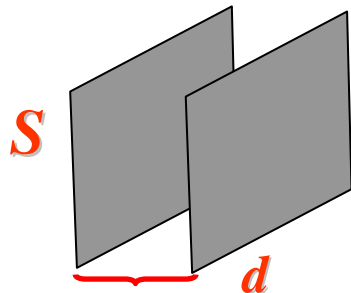
● Регуляризованная энергия вакуума:

$$E_\alpha = \frac{\pi}{2L} \frac{e^\varepsilon}{(e^\varepsilon - 1)^2} \approx \frac{\pi}{2L\varepsilon^2} - \frac{\pi}{24L} + O(\varepsilon)$$

● Энергия Казимира – отклонение от энергии вакуума:

$$\Delta E = -\frac{\pi}{24L}$$

● Реалистичная теория в 3d:



$$\Delta E = -\frac{\pi^2 S}{720L^3}$$



$$\Delta E = \frac{0.09235}{2R}$$

1997 – экспериментальное подтверждение ~ 5%

Энергия вакуума: функциональный интеграл

$$S = \frac{1}{2} \int d^2x [(\partial_\nu \varphi)(\partial^\nu \varphi) - m^2 \varphi^2]$$

$$Z = \int D\varphi(x, \tau) \exp \{-S_E\}$$

Евклидово действие:

$$S_E = \frac{1}{2} \int_0^T d\tau \int_0^L dx \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + m^2 \varphi(x, \tau)^2 \right]$$

Вакуум: $\varphi_0 = 0 \rightarrow S_0 = 0$

Флуктуации над вакуумом: $\varphi = \varphi_0 + \delta\varphi$

● **Вторая вариация действия описывает вклад вакуумных флуктуаций:**

$$\delta^2 S_E = \frac{1}{2} \int_0^T d\tau \int_0^L dx \delta\varphi D^{(2)} \delta\varphi,$$

$$D^{(2)} = -\partial_\tau^2 - \partial_x^2 + m^2$$

Оператор вторых производных

Задача: найти собственные функции и собственные значения оператора $D^{(2)}$

$$D^{(2)} \psi(x, \tau) = (-\partial_\tau^2 - \partial_x^2 + m^2) \psi(x, \tau) = \lambda \psi(x, \tau)$$

$$D^{(2)}\psi(x, \tau) = (-\partial_\tau^2 - \partial_x^2 + m^2)\psi(x, \tau) = \lambda\psi(x, \tau)$$

Граничные условия: $\psi(x, 0) = \psi(x, T) = 0, \quad \psi(0, \tau) = \psi(L, \tau) = 0$

• Ортонормированные моды:

$$\psi_{n,l}(x, t) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right) \sqrt{\frac{2}{T}} \sin\left(\frac{\pi l}{T}\tau\right), \quad n, l \in \mathbb{Z}$$

$$\delta\phi = \sum_{n,l} C_{n,l} \psi_{n,l}(\tau)$$



$$\lambda \rightarrow \lambda_{n,l} = \frac{\pi^2 l^2}{T^2} + \frac{\pi^2 n^2}{L^2} + m^2$$



$$S_E = \frac{1}{2} \sum_{n,l} \lambda_{n,l} C_{n,l}^2$$

$$Z = N \int \prod_{n,l} dC_{n,l} e^{-\frac{1}{2} \lambda_{n,l} C_{n,l}^2} = N' \prod_{n,l} \sqrt{\frac{1}{\lambda_{n,l}}} = N' (\det D^{(2)})^{-1/2}$$

• **Квантовая поправка :**

$$= N' \prod_{n,l} \left[\frac{\pi^2 l^2}{T^2} + \frac{\pi^2 n^2}{L^2} + m^2 \right]^{-1/2}$$

Энергия Казимира

Задача: Вычислить произведение

$$Z = N' \prod_n \left[\prod_l \left(\frac{\pi^2 l^2}{T^2} + \omega_n^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \right]$$

$$\omega_n^2 = \frac{\pi^2 n^2}{L^2} + m^2$$

• Это выражение ничего не напоминает?

Евклидова функция Грина гармонического осциллятора:

E_0



$$\prod_l \left(\frac{\pi^2 l^2}{T^2} + \omega_n^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \sim \sqrt{\frac{\omega_n}{2\pi \sinh(\omega_n T)}} \sim e^{-\frac{1}{2}\omega_n T} \Rightarrow Z \sim \prod_n e^{-\frac{1}{2}\omega_n T} = e^{-T \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n}$$

Замечание: Ответ уже известен из предыдущего вычисления!

$$E_0 = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{\pi^2 n^2}{L^2} + m^2}$$

Энергия нулевых колебаний:

Эффективный потенциал модели φ^4

$$S = \int d^4x \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2 - U(\varphi) \right]$$

$$\text{Вакуум: } \phi_0 = 0$$

Задача: найти квантовые поправки к потенциалу

$$U(\varphi) = \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 + \frac{\lambda}{4!} \varphi^4$$

• **Вопрос:** Как измерить потенциальную энергию поля?

• **Метод источников:**

$$S \rightarrow S[J] = \frac{1}{2} \int d^4x \left[(\partial_\nu \varphi(x, t)) (\partial^\nu \varphi(x, t)) - U(\varphi(x, t)) + J \varphi(x, t) \right]$$

$$\text{Вакуум: } \phi_0 \rightarrow U'(\phi_0) = J$$

$$\text{Энергия вакуума: } U(\phi_0) - J\phi_0 ?$$

Замечание: Экспериментально измерима не классическая энергия системы, а сумма ее классической части и квантовых поправок

• **Евклидов производящий функционал (определение эффективного потенциала):**

$$Z(J) = \int D\varphi(x) e^{-S_E + J \star \varphi} \equiv e^{-VT(U_{eff} - J \langle \varphi \rangle)}$$

$$J \star \varphi \equiv \int d^4x J(x) \varphi(x)$$

Вакуумное среднее и эффективный потенциал

• Вакуумное среднее поля φ :

$$\langle \varphi \rangle = \frac{1}{Z(J)} \int D\varphi(x, \tau) \varphi(x, \tau) e^{-\int_0^T d\tau \int d^3x \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2 + U(\varphi) - J\varphi \right]} = \frac{1}{VT} \frac{1}{Z(J)} \frac{\partial}{\partial J} Z(J)$$

• Флуктуации полей над вакуумом: $\varphi = \phi_0 + \delta\varphi$, $\phi_0 = \text{const}$

$$S_E - \int d^4x J\varphi = \int d^4x \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2 + U(\varphi) - J\varphi \right]$$

$$\approx \int d^4x [U(\phi_0) - J \cdot (\phi_0 + \delta\varphi)] + \cancel{\delta S_E} + \frac{1}{2!} \delta^2 S_E + \cancel{\frac{1}{3!} \delta^3 S_E} + \cancel{\frac{1}{4!} \delta^4 S_E}$$

• Квазиклассическое приближение: $\delta^3 S_E = \delta^4 S_E = \delta^n S_E = 0, \quad n > 2$

Разложение в окрестности вакуума: $\delta S_E - J \star \delta\varphi = 0 \rightarrow J = U'(\phi_0)$

$$Z(J) = e^{-VT(U(\varphi_0) - J\varphi_0)} \int D(\delta\phi) e^{-[\delta S_E - \int d^4x J\delta\phi + \frac{1}{2!} \delta^2 S_E]}$$

$$\approx VT [U(\phi_0) - J \cdot \phi_0] + \frac{1}{2} \delta^2 S_E$$

$$Z(J) = \int D\varphi(x) e^{-(S_E - \int d^4x J\varphi)} \approx e^{-VT(U(\varphi_0) - J\varphi_0)} \int D(\delta\varphi) e^{-\frac{1}{2}\delta^2 S_E}$$

• Вклад квантовых поправок :

$$\equiv e^{-VT(U_{eff} - J\langle\varphi\rangle)}$$

$$Z[\delta\varphi] = \int D(\delta\varphi) e^{-\frac{1}{2}\delta^2 S_E} = \mathcal{N} [\det(-\partial_\mu^2 + U''(\phi_0))]^{-1/2}$$

$$J = U'(\phi_0)$$

• **Эффективный потенциал модели:**

$$U_{eff} = U(\phi_0) + U'(\phi_0)(\langle\varphi\rangle - \varphi_0) + \frac{1}{2VT} \ln \det [-\partial_\mu^2 + U''(\phi_0)]$$

$$= U(\langle\varphi\rangle) + \frac{1}{2VT} \ln \det [-\partial_\mu^2 + U''(\langle\varphi\rangle)]$$

Замечание: U_{eff} зависит от вакуумного среднего поля $\langle\varphi\rangle$ а не от ϕ_0

Задача: найти собственные значения оператора $D^{(2)} = -\partial_\mu^2 + U''(\phi_0)$

$$\rightarrow \det [-\partial_\mu^2 + U''(\phi_0)] = \prod_{n_i=1}^{\infty} \left[\frac{\pi^2 n_1^2}{L_1^2} + \frac{\pi^2 n_2^2}{L_2^2} + \frac{\pi^2 n_3^2}{L_3^2} + \frac{\pi^2 n_4^2}{T^2} + U''(\phi_0) \right]$$

Вычисление эффективного потенциала

1: Преобразование Фурье: $k_1 = \pi n_1 / L_1, \dots$

2: $\ln \prod_{n_i=0}^{\infty} (\dots) \rightarrow \sum_{n_i=0}^{\infty} \ln(\dots)$



$$\frac{1}{VT} \sum_{n_i=0}^{\infty} \rightarrow \int_0^{\infty} \frac{d^4 k}{\pi^4} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4}$$

3: $\frac{1}{2VT} \ln \det [-\partial_{\mu}^2 + U''(\langle \varphi \rangle)] \rightarrow \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \ln [k^2 + U''(\varphi)]$

4: Гиперсферические координаты:

Вспомогательный интеграл:

$$\left\{ \begin{aligned} I_n &= \int_{-\infty}^{\infty} d^n k \exp \left\{ - \sum_{i=1}^n k_i^2 \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} d^n k e^{-k_1^2} e^{-k_2^2} \dots e^{-k_n^2} = \pi^{n/2} \\ I_n &== \Omega_n \int_0^{\infty} \exp(-k^2) k^{n-1} dk = \frac{\Omega_n}{2} \Gamma \left(\frac{n}{2} \right) \end{aligned} \right. \rightarrow \Omega_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$$

Телесный угол в n-мерном пространстве

● Квантовая поправка к потенциалу:

$$\Omega_4 = 2\pi^2$$

$$\Delta U = \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \ln [k^2 + U''(\varphi)] = \frac{1}{16\pi^2} \int_0^\infty dk k^3 \left[\ln U'' + \ln \left(1 + \frac{k^2}{U''} \right) \right]$$

$$\Delta U = \frac{(U'')^2}{32\pi^2} \int_0^\infty dx x \left(\ln U'' + \ln(1 + x) \right)$$

$$x = k^2 / U''$$

Проблема: этот интеграл очевидно расходится!

● Трюк - регуляризация обрезанием: $k_{max} = \Lambda \gg 1$

$$\begin{aligned} \Delta U &= \frac{(U'')^2}{32\pi^2} \left[\int_0^{\Lambda^2/U''} dx x \ln(1 + x) + \int_0^{\Lambda^2/U''} dx x \ln U'' \right] \\ &= \frac{(U'')^2}{64\pi^2} \left[(x^2 - 1) \ln(1 + x) + x \left(1 - \frac{x}{2} \right) \Big|_0^{\Lambda^2/U''} + x^2 \ln U'' \Big|_0^{\Lambda^2/U''} \right] \\ &= \frac{(U'')^2}{64\pi^2} \left[\left(\frac{\Lambda^4}{(U'')^2} - 1 \right) \ln \left(1 + \frac{\Lambda^2}{U''} \right) + \frac{\Lambda^2}{U''} - \frac{\Lambda^4}{2(U'')^2} + \frac{\Lambda^4 \ln U''}{(U'')^2} \right] \end{aligned}$$

$$\Delta U = \frac{(U'')^2}{64\pi^2} \left[\left(\frac{\Lambda^4}{(U'')^2} - 1 \right) \ln \left(1 + \frac{\Lambda^2}{U''} \right) + \frac{\Lambda^2}{U''} - \frac{\Lambda^4}{2(U'')^2} + \frac{\Lambda^4 \ln U''}{(U'')^2} \right]$$

Разложение логарифма: $\ln(1+x) = \ln x + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \approx \ln x + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \dots$



$$\Delta U = \frac{(U'')^2}{2^6\pi^2} \left[\left(\frac{\Lambda^4}{(U'')^2} - 1 \right) \left(\ln \frac{\Lambda^2}{U''} + \frac{U''}{\Lambda^2} - \frac{(U'')^2}{2\Lambda^4} \right) + \frac{\Lambda^2}{U''} - \frac{\Lambda^4}{2(U'')^2} + \frac{\Lambda^4 \ln U''}{(U'')^2} \right]$$

$$\approx \frac{1}{2^6\pi^2} \left[\cancel{\Lambda^4 \ln \Lambda^2} - \frac{1}{2}\Lambda^4 + 2\Lambda^2 U'' - (U'')^2 \left(\ln \frac{\Lambda^2}{U''} + \frac{1}{2} \right) \right] + O(\Lambda^{-2})$$

- **Расходимости:** члены $\Lambda^4 \ln \Lambda^2 - \frac{1}{2}\Lambda^4$ не зависят от поля φ
- это энергия вакуума

Упростим задачу: положим $m = 0$



$$U = \frac{1}{4!} \lambda \varphi^4, \quad U'' = \frac{1}{2} \lambda \varphi^2$$

- **Вопрос:** Как тогда интерпретировать член $\sim \Lambda^2 U'' = \Lambda^2 \frac{\lambda \varphi^2}{2}$?

Перенормировка

- Линейная модель Клейна-Гордона:

$$L = \frac{1}{2} [(\partial_\mu \varphi)^2 - m^2 \varphi^2]$$

Уравнения поля: $\partial_\mu \partial^\mu \varphi + m^2 \varphi = 0 \quad \rightarrow \quad \phi \sim e^{i(\vec{p} \cdot \vec{x} - \epsilon t)}$

● **Масса:** $m^2 = \epsilon^2 - \vec{p}^2 \quad \rightarrow$

$$m^2 = U''(\varphi) \Big|_{\varphi=0}$$

Масса поля определяется как коэффициент при члене φ^2 в лагранжиане модели

- Если мы хотим рассматривать безмассовую теорию, то в квантовом случае недостаточно просто положить $m = 0$ - все коэффициенты при φ^2 должны быть равны нулю.

m_0, λ_0 - классические масса и константа связи

● **Физическая масса:** $m^2 = m_0^2 + \lambda_0 \Lambda^2 / (2^6 \pi^2) = m_0^2 + \delta m^2$

- **Идея перенормировки:** как m_0 , так и δm по отдельности расходятся, но их суммарный вклад в физическую массу конечен.

● **Физическая масса:** $m^2 = U''_{eff}(\varphi) \Big|_{\varphi=0}$

Безмассовый предел - $m = 0$

● **Эффективный потенциал безмассовой теории:**

$$U_{eff}(\varphi) = \frac{\lambda_0}{4!} \varphi^4 + \frac{(U'')^2}{2^6 \pi^2} \left(\ln \frac{U''}{\Lambda^2} - \frac{1}{2} \right) = \frac{\lambda_0}{4!} \varphi^4 + \frac{\lambda_0^2}{2^8 \pi^2} \varphi^4 \left(\ln \frac{\lambda_0 \varphi^2}{\Lambda^2} - \frac{1}{2} \right)$$

Логарифмическая расходимость

● **Вопрос:** Как определить физическую константу связи λ ?

По аналогии с определением массы:

$$\lambda \stackrel{?}{=} \frac{\delta^4}{\delta \varphi^4} U_{eff}(\varphi) \Big|_{\varphi=0}$$

Проблема: $\frac{\delta^4}{\delta \varphi^4} [\varphi^4 \ln \varphi] \sim \ln \varphi$

→ Расходимость в пределе $\varphi \rightarrow 0$

Выделим промежуточное значение поля $\varphi = M$ - точка нормировки

$$U_{eff} = \frac{1}{4!} \left[\lambda_0 + \frac{3\lambda^2}{2^5 \pi^2} \ln \frac{M^2}{\Lambda^2} \right] \varphi^4 + \frac{\lambda^2}{2^8 \pi^2} \varphi^4 \left(\ln \frac{\varphi^2}{M^2} - \frac{1}{2} \right)$$

Перенормировка: бегущая константа связи

- Константа связи приобретает зависимость от масштаба M :

$$\lambda \rightarrow \lambda(M) = \left. \frac{\partial^4 U_{eff}}{\partial \varphi^4} \right|_{\varphi_0=M} = \lambda_0 + \frac{3\lambda^2}{2^5 \pi^2} \left(\ln \frac{\varphi_0^2}{\Lambda^2} - \frac{1}{2} + \frac{25}{6} \right) \Big|_{\varphi_0=M}$$

Замечание: во втором члене разница между λ и λ_0 пренебрежимо мала

Выразим эффективный потенциал через перенормированную константу:

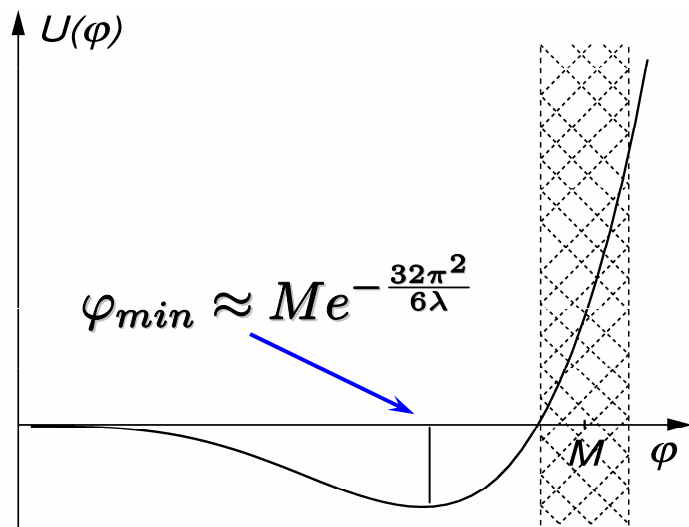
$$U_{eff} = \frac{1}{4!} \left[\lambda_0 + \frac{3\lambda^2}{2^5 \pi^2} \ln \frac{M^2}{\Lambda^2} \right] \varphi^4 + \frac{\lambda^2}{2^8 \pi^2} \varphi^4 \left(\ln \frac{\varphi^2}{M^2} - \frac{1}{2} \right)$$

$$= \frac{\lambda}{4!} \varphi^4 + \frac{\lambda^2}{2^8 \pi^2} \varphi^4 \left(\ln \frac{\varphi^2}{M^2} - \frac{25}{6} \right)$$

Эффективный потенциал модели φ^4 :



Отсутствует зависимость от Λ но появилась зависимость от выбора точки нормировки M



$$U_{eff} = \frac{\lambda}{4!} \varphi^4 + \frac{\lambda^2}{2^8 \pi^2} \varphi^4 \left(\ln \frac{\varphi^2}{M^2} - \frac{25}{6} \right)$$

$$U'_{eff} = 0, \Rightarrow \lambda \ln \frac{\varphi_{min}^2}{M^2} = -\frac{32\pi^2}{3} + \frac{11\lambda}{3}$$

Квантовые поправки индуцируют нетривиальный минимум потенциала?

Условие применимости полученного выражения: $|\lambda \ln(\varphi/M)| \ll 1$

• **Вопрос:** Как меняется константа связи при изменении точки нормировки?

$$M \rightarrow M' \Rightarrow \lambda' = \lambda(M'), \quad U_{eff}(\varphi; \lambda', M') = U_{eff}(\varphi; \lambda, M)$$

$$U_{eff}(\varphi; \lambda, M) = \frac{\lambda}{4!} \varphi^4 + \frac{\lambda^2}{2^8 \pi^2} \varphi^4 \left(\ln \frac{\varphi^2}{M^2} - \frac{25}{6} \right) = \frac{\lambda}{4!} \varphi^4 + \frac{\lambda^2}{2^8 \pi^2} \varphi^4 \left(\ln \frac{\varphi^2}{M'^2} + \ln \frac{M'^2}{M^2} - \frac{25}{6} \right)$$

$$\left. \frac{\delta^4}{\delta \varphi^4} U_{eff}(\varphi) \right|_{\varphi=M'} \Rightarrow \lambda(M') = \lambda(M) + \frac{3\lambda^2}{2^5 \pi^2} \ln \frac{M'^2}{M^2}$$

Бегущая константа связи

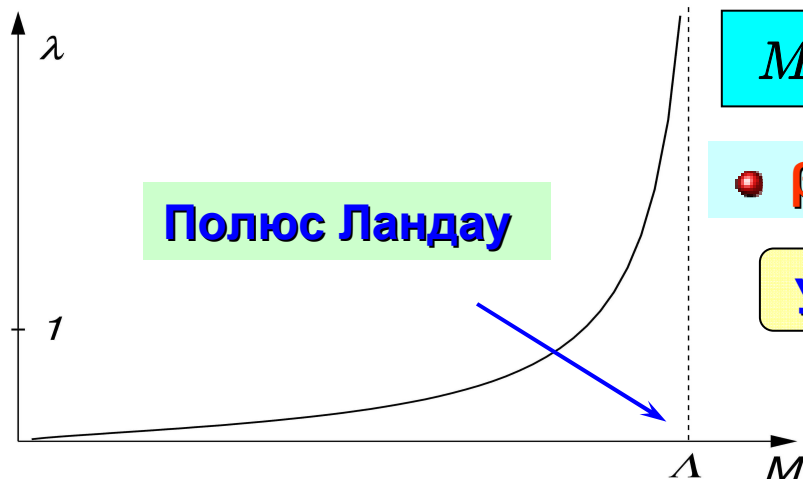
$$\lambda(M') = \lambda(M) + \frac{3\lambda^2}{2^5\pi^2} \ln \frac{M'}{M^2}$$

$$-\lambda(M') + \frac{3\lambda^2}{2^5\pi^2} \ln M'^2 = -\lambda(M) + \frac{3\lambda^2}{2^5\pi^2} \ln M^2 = \text{const}$$

Размерная трансмутация: Возникает новая константа с размерностью массы!

• **Инфинитезимальное изменение масштаба:** $M \rightarrow M + dM$

$$\lambda(M') = \lambda(M + dM) = \lambda(M) + \frac{3\lambda^2(M)}{16\pi^2} \ln \frac{M'}{M} \approx \frac{\lambda(M)}{1 - \frac{3\lambda^2(M)}{16\pi^2} \ln \frac{M'}{M}}$$



$$M' \rightarrow 0 \rightarrow \lambda(0) \rightarrow 0$$

• **β-функция теории:** $\beta(\lambda) = \frac{3\lambda^2}{16\pi^2}$

Уравнение ренормгруппы:

$$\frac{d\lambda}{dt} = \beta(\lambda), \quad t = \ln(M'/M)$$

● **Бегущая константа связи КЭД:**

$e(m_e) = 1/137, \quad e(m_W) = 1/128$

$$e^2(M') = \frac{e^2(M)}{1 - \frac{e^2(M)}{6\pi^2} \ln \frac{M'}{M}}$$

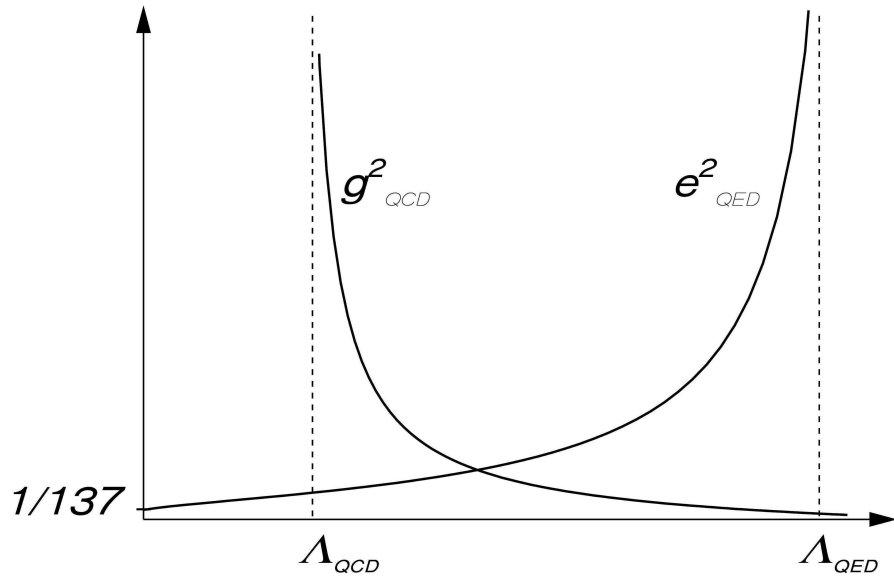
$$\Lambda_{QED} = m_e \exp\left(\frac{6\pi^2}{e^2(m_e)}\right) \approx Me^{645}$$

● **Бегущая константа связи КХД:**

$$g^2(M') = \frac{g^2(M)}{1 + \frac{7g^2(M)}{16\pi^2} \ln \frac{M'}{M}}$$

$$\Lambda_{QCD} \approx 180 \text{ MeV.}$$

● **Выход константы связи на непертурбативный режим сигнализирует о приближении к границам применимости теории**



$\Lambda_{QSB} \sim 1 \text{ GeV}$

$\Lambda_{QCD} \sim 180 \text{ MeV}$

*Пертурбативная КХД
(кварки & глюоны)*

*Низкоэнергетическая
эффективная теория*

Ядерная физика

Аномальная размерность

- **Замечание:** Классическое действие теории φ^4

$$S[\varphi(x, t)] = \int d^4x \left(\frac{1}{2} (\partial_\nu \varphi)^2 + \frac{\lambda}{4!} \varphi^4 \right)$$

инвариантно относительно масштабных преобразований:

$$x_\nu \rightarrow \frac{x_\nu}{s}, \quad \varphi \rightarrow s\varphi, \quad \lambda \rightarrow \lambda$$

- **В квантовой теории** $\varphi \rightarrow \varphi' = s\varphi$

$$\begin{aligned} \rightarrow \lambda(\varphi) \rightarrow \lambda(s\varphi) &= \frac{\lambda(\varphi)}{1 - \frac{3\lambda(\varphi)}{16\pi^2} \ln \frac{s\varphi}{\varphi}} \approx \lambda(\varphi) \left(1 + \frac{3\lambda(\varphi)}{16\pi^2} \ln s \right) \\ &\approx \lambda(\varphi) \exp\left(\frac{3\lambda(\varphi)}{16\pi^2} \ln s \right) = s^\gamma \lambda(\varphi), \end{aligned}$$

$$\gamma = 3\lambda/(16\pi^2)$$

**Аномальная
размерность**

Аномалия: Нарушение симметрии классического действия квантовыми поправками, вычисленными с использованием этого же самого действия

Задача: Вычислить эффективный потенциал массивной теории φ^4

