

Кафедра теоретической физики и астрофизики  
Физический факультет, БГУ Минск



**Функциональное  
интегрирование в квантовой  
теории поля**

**Я М Шнир**

**все вопросы, комментарии, замечания и  
протесты:**

***shnir@maths.tcd.ie***

## Рецепт вычисления энергии основного состояния

- Вычислить функцию Грина квантовой системы методом стационарной фазы с учетом квантовых поправок
- Перейти к евклидовому времени  $\mathcal{T}$  и рассмотреть предел  $\mathcal{T} \rightarrow \infty$
- Все, что является коэффициентом при  $\mathcal{T}$  в экспоненциальном множителе, интерпретируется как энергия основного состояния (вакуума)
- Предэкспоненциальные множители интерпретируются как волновые функции основного состояния

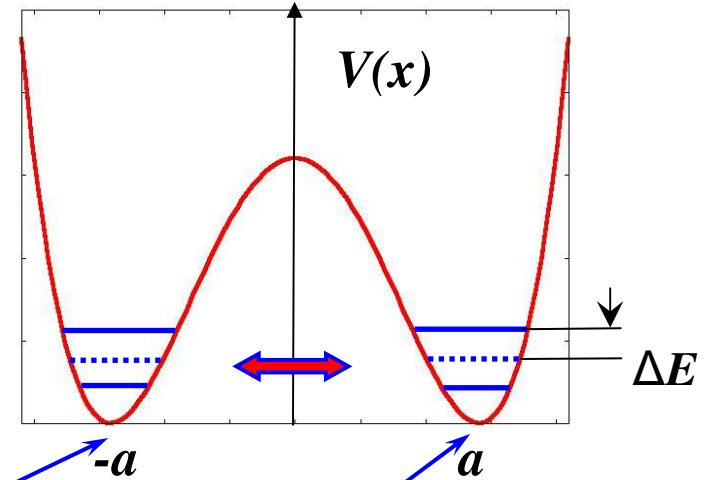
# Задача о двухямном потенциале

$$S[x(t)] = \int_0^T dt \left[ \frac{m}{2} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 - V(x) \right]$$

$$m=1$$

$$V(x) = \lambda(x^2 - a^2)^2$$

$$E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}$$



Пертурбативная квантовая механика:

$$\psi_L \approx \psi_0^{osc}(x+a); \quad \psi_R \approx \psi_0^{osc}(x-a)$$

Непертурбативные поправки:

$$\psi_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_L + \psi_R); \quad \psi_- = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_L - \psi_R)$$

Расщепление спектра:

$$E_0 \rightarrow E_0^{(+)} = \frac{\hbar\omega}{2} - \Delta, \quad E_0^{(-)} = \frac{\hbar\omega}{2} + \Delta$$

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \psi_+ e^{-iE_0^{(+)}t} + \psi_- e^{-iE_0^{(-)}t} \right] = \psi_L \cos(\Delta \cdot t) + i\psi_R \sin(\Delta \cdot t)$$

**Задача:** найти величину  $\Delta$

• **Метод ВКБ:**

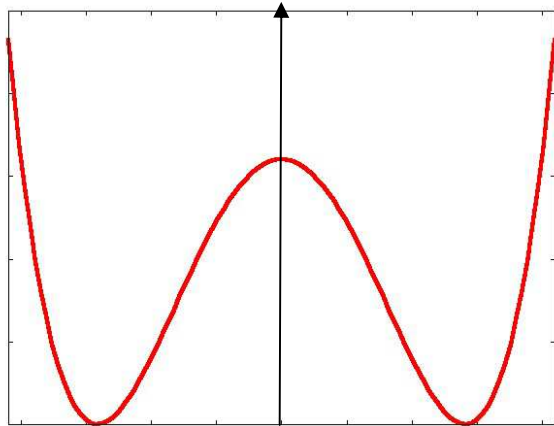
$$\Delta = \frac{\omega}{2\sqrt{e\pi}} e^{-\frac{2}{\hbar} \int_{-a}^a dx \sqrt{2m(V(x) - E_0)}}$$

# Квантовомеханические инстантоны

$$S[x(t)] = \int_0^T dt \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 - \lambda(x^2 - a^2)^2 \right]$$

$$\tau = it$$

$$S_E[x(\tau)] = \int_0^T d\tau \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{dx}{d\tau} \right)^2 + \lambda(x^2 - a^2)^2 \right]$$

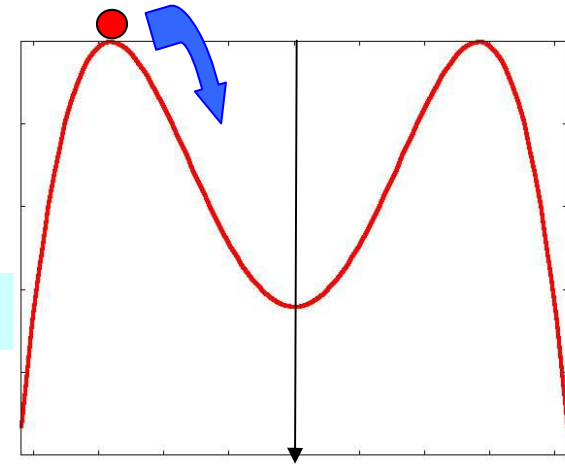


Уравнение движения

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} = -\frac{dV(x)}{dx}$$

Энергия псевдочастицы

$$\frac{1}{2} \left( \frac{dx}{d\tau} \right)^2 - V(x) \equiv E$$



Туннельная траектория в евклидовом времени:  $d\tau = \frac{dx}{\sqrt{2(E + V(x))}}$

Действие на туннельной траектории ( $E=0$ ):

$$S_{inst} = \int_0^T d\tau \left( \frac{dx}{d\tau} \right)^2 = \int_0^T d\tau \frac{dx}{d\tau} \sqrt{2V(x)} = \int_{-a}^a dx \sqrt{2V(x)} = \int_{-a}^a dx \sqrt{2\lambda} (a^2 - x^2) = \frac{4}{3} \sqrt{2\lambda} a^3$$

# Квантовомеханические инстантоны

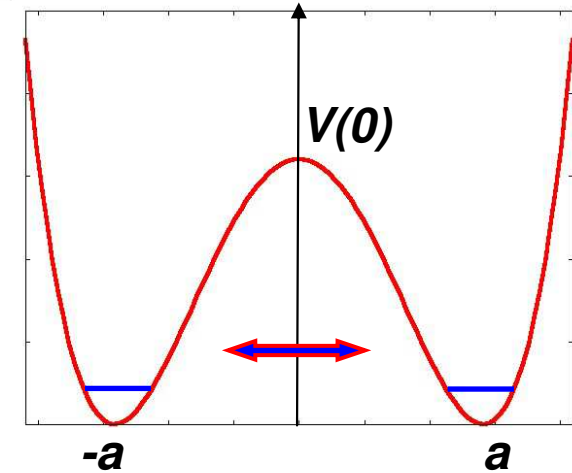
**Замечание:** в окрестности каждого минимума

$$V(x) \approx \frac{1}{2} V''(\pm a)(x \mp a)^2 \equiv \frac{1}{2} \omega^2 (x \mp a)^2$$

Частота осцилляций:  $\omega^2 = V''(a) = 8\lambda a^2$

● Высота барьера  $V(0) = \lambda a^4 = \omega^4 / 64\lambda$   
 много больше  $E_0 = \omega/2$  ( $\hbar = c = 1$ )

$$\frac{\lambda}{\omega^3} \ll 1$$



Подбарьерная траектория:  $d\tau = \frac{dx}{\sqrt{2\lambda(x^2 - a^2)^2}}$

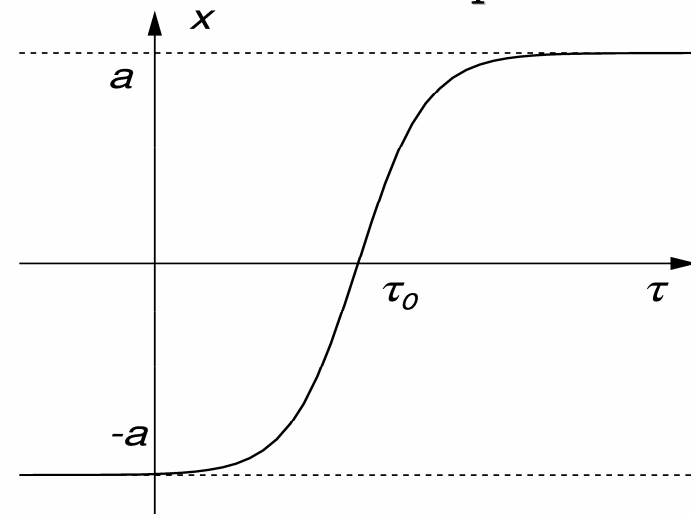
$$\Rightarrow \tau - \tau_0 = \sqrt{\frac{1}{2\lambda a^2}} \int_{-1}^{\bar{x}/a} \frac{d(x/a)}{1 - (x/a)^2}$$

● Квантовомеханический инстантон:

$$\bar{x}(\tau) = a \tanh \frac{\omega(\tau - \tau_0)}{2}$$

(Кинк)

**Задача:** найти амплитуды перехода  
 из  $x(-\infty) = -a$  в  $x(\infty) = \mp a$



# Мультиинстантонные траектории

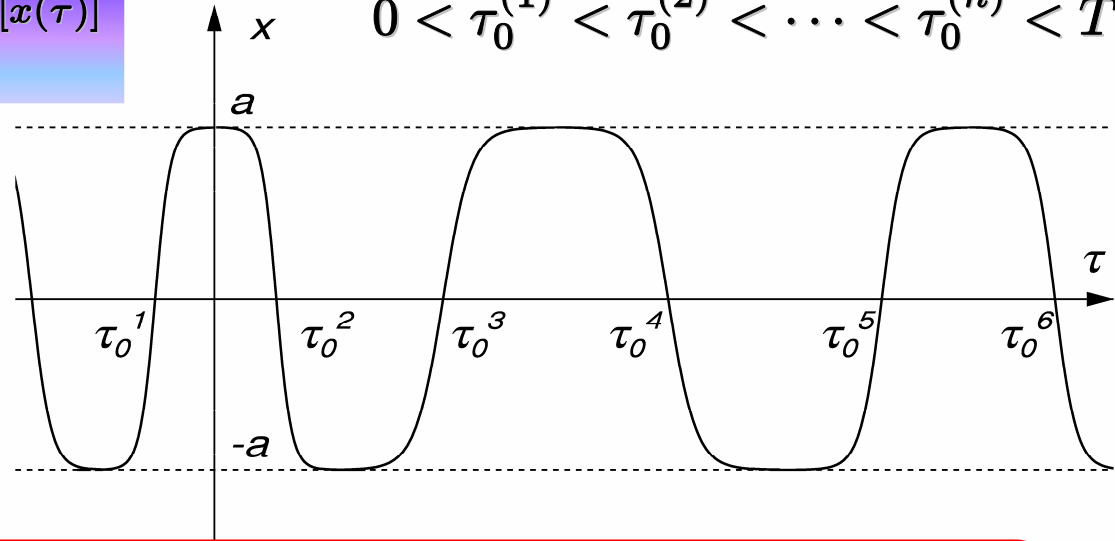
$$G(\pm a, -a, T) = \int \mathcal{D}x(\tau) e^{-S[x(\tau)]}$$

$$0 < \tau_0^{(1)} < \tau_0^{(2)} < \dots < \tau_0^{(n)} < T$$

- Приближение разреженного инстантонного газа:

$$S_n = nS$$

- Усреднение по центру инстантонов:



$$\int_0^T d\tau_0^{(1)} \int_0^{\tau_0^{(1)}} d\tau_0^{(2)} \int_0^{\tau_0^{(2)}} d\tau_0^{(3)} \dots \int_0^{\tau_0^{(n-1)}} d\tau_0^{(n)} = \frac{1}{n!} \int_0^T d\tau_0^{(1)} \int_0^T d\tau_0^{(2)} \int_0^T d\tau_0^{(3)} \dots \int_0^T d\tau_0^{(n)} = \frac{T^n}{n!}$$

$$Z_n = \text{Const} \frac{T^n}{n!} e^{-nS} = Z_0 K_n \frac{T^n}{n!} e^{-nS}$$

Квантовая поправка

$$K_n = K^n$$

Функция Грина гармонического осциллятора

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\omega}{\pi}} e^{-\frac{\omega T}{2}}$$

# Мультиинстантонные траектории

Амплитуда перехода из  $x(-\infty) = -a$  в  $x(\infty) = -a$  : ( $n = 2k$ )

$$G(-a, -a, T) = Z_0 \sum_{k=0}^{\infty} e^{-2kS} K^{2k} \frac{T^{2k}}{(2k)!} = \sqrt{\frac{\omega}{\pi}} e^{-\frac{\omega T}{2}} \cosh [KTe^{-S}]$$

Амплитуда перехода из  $x(-\infty) = -a$  в  $x(\infty) = a$  : ( $n = 2k + 1$ )

$$G(-a, a, T) = Z_0 \sum_{k=0}^{\infty} e^{-(2k+1)S} K^{2k+1} \frac{T^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sqrt{\frac{\omega}{\pi}} e^{-\frac{\omega T}{2}} \sinh [KTe^{-S}]$$

$$\Delta = Ke^{-S}$$

$$G(-a, -a, T) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega}{\pi}} \left[ e^{-\frac{\omega T}{2} + \frac{\Delta \cdot T}{2}} + e^{-\frac{\omega T}{2} - \frac{\Delta \cdot T}{2}} \right]$$

$$G(-a, a, T) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega}{\pi}} \left[ e^{-\frac{\omega T}{2} + \frac{\Delta \cdot T}{2}} - e^{-\frac{\omega T}{2} - \frac{\Delta \cdot T}{2}} \right]$$

$$G(x_0, x; T) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(x_0) \psi_n^*(x) e^{-E_n T} \quad \rightarrow \quad E_0^{(\pm)} = \frac{\omega}{2} \mp \Delta$$

**Задача:** найти  $\Delta$  !

# Вклад окрестностей инстантонной траектории

● **Вторая вариация действия:**

$$\delta^2 S[x(t)] = \frac{1}{2} \int_0^T d\tau \delta x(\tau) \left( -\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(x) \right) \delta x(\tau)$$

**Задача:** найти собственные функции и собственные значения оператора

$$D^{(2)} \chi_n(\tau) = \left( -\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(\bar{x}) \right) \chi_n(\tau) = \lambda_n \chi_n(\tau)$$

$$\delta x(\tau) = \sum_n C_n \chi_n(\tau)$$

$$\begin{aligned} Z &= e^{-S[\bar{x}]} \mathcal{A} \int \prod_{n=0}^{\infty} \exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n C_n^2 \right\} = e^{-S[\bar{x}]} \mathcal{A} \prod_{n=0}^{\infty} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda_n}} \\ &= N e^{-S[\bar{x}]} \det \left( -\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(x(\tau)) \right)^{-1/2} \end{aligned}$$

**Функциональный детерминант**



● **Тривиальная траектория (осцилляции около локального минимума):**

$$x(\tau) = -a, \quad D^{(2)} = -\frac{d^2}{d\tau^2} + \omega^2$$

● **Ортонормированные моды:**

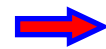
$$\chi_k(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \sin \frac{\pi kt}{T}; \quad \lambda_k = \frac{\pi^2 k^2}{T^2} + \omega^2, \quad k = 1, 2, 3 \dots$$



$$G(-a, -a, T) = \sqrt{\frac{\omega}{\pi}} e^{-\frac{\omega T}{2}}$$

● **Нулевая (трансляционная) мода:  
одно из собственных значений  $\lambda_0 = 0$**

**Уравнение движения**  $-\ddot{x} + V' = 0$



$$\left( -\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(\bar{x}) \right) \frac{d\bar{x}}{d\tau} = 0$$

Мода  $\chi_0 = A\dot{x}(\tau)$  соответствует нулевому собственному значению  $\lambda_0 = 0$

**Замечание: Действие на инстантонной траектории**

$$S_{inst} = \int_0^T d\tau \left( \frac{d\bar{x}}{d\tau} \right)^2 = \frac{1}{A^2} \int_0^T d\tau \chi_0^2 = \frac{1}{A^2} \Rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{S}}$$

Смысл возбуждения нулевой моды – трансляция кинка

$$\bar{x} \rightarrow \bar{x} + C_0 \chi_0 = \bar{x}(\tau) + \frac{C_0}{\sqrt{S}} \frac{d\bar{x}}{d\tau} \approx \bar{x} \left( \tau + \frac{C_0}{\sqrt{S}} \right)$$

В функциональном интеграле  $Z$  одно из интегрирований – не гауссово

$$Z = N \int \prod_{n=0}^{\infty} \exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n C_n^2 \right\} e^{-S} \rightarrow NT \sqrt{\frac{S}{2\pi}} \det' \left[ -\frac{d^2}{d\tau^2} + V'' \right]^{-1/2} e^{-S}$$

• Нормировка на осцилляторный детерминант:

$$\frac{Z}{Z_0} = T \sqrt{\frac{S}{2\pi}} \left[ \frac{\det' [-d^2/d\tau^2 + V''(\bar{x}(\tau))]}{\det [-d^2/d\tau^2 + \omega^2]} \right]^{-1/2} e^{-(S-S_0)}$$

• Квантовая поправка к инстантонной траектории:

$$K = \sqrt{\frac{S}{2\pi}} \left[ \frac{\omega^2 \det' [-d^2/\tau^2 + V''(\bar{x}(\tau))]}{\det[-d^2/\tau^2 + \omega^2]} \right]^{-1/2}$$

**Задача:** найти собственные функции и собственные значения оператора

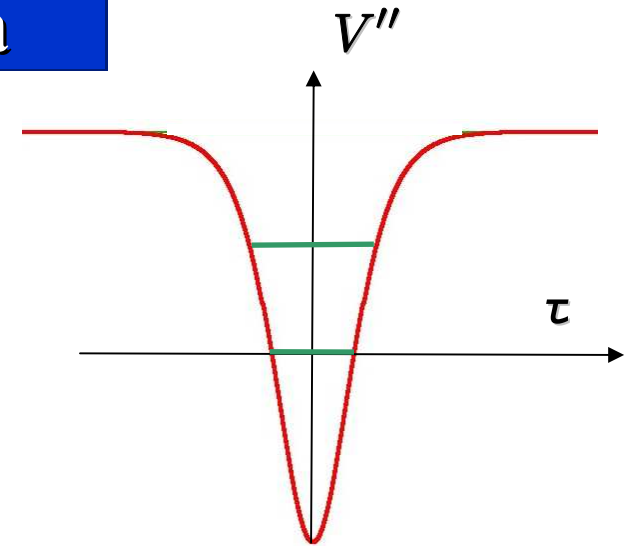
$$D^{(2)} \chi_n(\tau) = \left( -\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(\bar{x}) \right) \chi_n(\tau) = \lambda_n \chi_n(\tau)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} V''(x) = -4\lambda a^2 + 12\lambda \bar{x}^2 \\ \bar{x}(\tau) = a \tanh \frac{\omega\tau}{2} \end{array} \right.$$

# Потенциал Пёшль-Теллера

Частота осцилляций:  $\omega^2 = V''(a) = 8\lambda a^2$

$$V''(x) = -4\lambda a^2 + 12\lambda \bar{x}^2 = \omega^2 - \frac{3\omega^2}{2 \cosh^2 \frac{\omega\tau}{2}}$$



• Задача Пёшль-Теллера:

$$\left( -\frac{d^2}{d\tau^2} + \omega^2 - \frac{3\omega^2}{2 \cosh^2 \frac{\omega\tau}{2}} \right) \chi(\tau) = \lambda \chi(\tau)$$

$$\tau \rightarrow \pm\infty \quad \left( -\frac{d^2}{d\tau^2} + \underbrace{\omega^2 - \lambda}_{\kappa^2} \right) \chi = 0$$

Выделяя асимптотику:  $\chi(\tau) = f(\tau)e^{\kappa\tau}$

$$\kappa = \sqrt{\omega^2 - \lambda}$$

$$\frac{d^2 f}{d\tau^2} + 2\kappa \frac{df}{d\tau} + \frac{3\omega^2}{2 \cosh^2 \frac{\omega\tau}{2}} f = 0$$

$$\xi = \tanh \frac{\omega\tau}{2}$$

$$\frac{d}{dx} \tanh x = \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$$

$$\frac{1}{2}(1 - \xi^2) \frac{d^2 f}{d\xi^2} - \xi \frac{df}{d\xi} + \frac{2\kappa}{\omega} \frac{df}{d\xi} + 3f = 0$$

И еще одна замена переменной:  $z = \frac{1+\xi}{2}$

Гипергеометрическое уравнение:

$$z(1-z)f''_{zz} - \left(2z - 1 - \frac{2\kappa}{\omega}\right) f'_z + 6f = 0$$

Обычный алгоритм поиска решения в виде ряда:  $f(z) = \sum_n B_n z^n$

$$\sum_n z(1-z)n(n-1)B_n z^{n-2} + \sum_n \left(1 - 2z + \frac{2\kappa}{\omega}\right) nB_n z^{n-1} + \sum_n 6B_n z^n = 0$$

$n - 2 \rightarrow n$

$n - 1 \rightarrow n$

$$\sum_n \left[ -n(n-1)B_n + (n+1)nB_{n+1} - 2nB_n + \left(1 + \frac{2\kappa}{\omega}\right) (n+1)B_{n+1} + 6B_n \right] z^n = 0$$

Рекуррентное соотношение:

$$B_{n+1} = B_n \frac{-6 + 2n + n(n-1)}{(n+1) \left(n + 1 + \frac{2\kappa}{\omega}\right)}$$

$$B_{n+1} = B_n \frac{-6 + 2n + n(n-1)}{(n+1) \left(n+1 + \frac{2\kappa}{\omega}\right)}$$

$$B_0 = 1; \quad B_1 = -\frac{6\omega}{\omega + 2\kappa}; \quad B_2 = \frac{6\omega^2}{(\omega + 2\kappa)(\omega + \kappa)}; \quad B_3 = 0 \dots$$

Собственные функции:

$$\kappa = \sqrt{\omega^2 - \lambda}$$

$$\xi = \tanh \frac{\omega\tau}{2}$$

$$\chi(\tau) = e^{\kappa\tau} \left( \frac{2\kappa - \omega}{2(\kappa + \omega)} - \frac{3\kappa\omega}{(2\kappa + \omega)(\kappa + \omega)} \xi + \frac{3\omega^2}{2(2\kappa + \omega)(\kappa + \omega)} \xi^2 \right)$$

• Асимптотическое поведение:  $\tau \rightarrow -\infty \Rightarrow \xi \rightarrow -1$

$$P(\kappa, \xi) = \left( \frac{2\kappa - \omega}{2(\kappa + \omega)} - \frac{3\kappa\omega}{(2\kappa + \omega)(\kappa + \omega)} \xi + \frac{3\omega^2}{2(2\kappa + \omega)(\kappa + \omega)} \xi^2 \right) \xrightarrow[\tau \rightarrow -\infty]{} 1$$

•  $\tau \rightarrow \infty \Rightarrow \xi \rightarrow 1$

$$P(\kappa, 1) = \frac{(\kappa - \omega)(\kappa - \omega/2)}{(\kappa + \omega)(\kappa + \omega/2)}$$

Локализованные моды:

$$\kappa = \omega; \quad \kappa = \omega/2$$

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_1 = \frac{3}{4}\omega^2$$

$$\chi(\tau) = e^{\kappa\tau} \left( \frac{2\kappa - \omega}{2(\kappa + \omega)} - \frac{3\kappa\omega}{(2\kappa + \omega)(\kappa + \omega)} \xi + \frac{3\omega^2}{2(2\kappa + \omega)(\kappa + \omega)} \xi^2 \right)$$

● Собственные функции:  $\kappa = \omega$ ,  $\lambda_0 = 0$



$$\begin{aligned} \chi_0(\tau) &= e^{\omega\tau} \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \tanh \frac{\omega\tau}{2} + \frac{1}{4} \tanh^2 \frac{\omega\tau}{2} \right) = \frac{1}{4} e^{\omega\tau} \left( 1 - \tanh \frac{\omega\tau}{2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2(e^{\frac{\omega\tau}{2}} + e^{-\frac{\omega\tau}{2}})} = \frac{1}{4} \frac{1}{\cosh^2 \frac{\omega\tau}{2}} \end{aligned}$$

Нулевая (трансляционная) мода

● Собственные функции:  $\kappa = \omega/2$ ,  $\lambda_1 = \frac{3}{4}\omega^2$

$$\begin{aligned} \chi_1(\tau) &= e^{\frac{\omega\tau}{2}} \left( -\frac{1}{2} \tanh \frac{\omega\tau}{2} + \frac{1}{2} \tanh^2 \frac{\omega\tau}{2} \right) = -\frac{e^{\frac{\omega\tau}{2}} - e^{-\frac{\omega\tau}{2}}}{(e^{\frac{\omega\tau}{2}} + e^{-\frac{\omega\tau}{2}})^2} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\sinh \frac{\omega\tau}{2}}{\cosh^2 \frac{\omega\tau}{2}} \end{aligned}$$

Осцилляторная (вибрационная) мода

# Непрерывный спектр

$$\chi(\tau) = e^{\kappa\tau} \left( \frac{2\kappa - \omega}{2(\kappa + \omega)} - \frac{3\kappa\omega}{(2\kappa + \omega)(\kappa + \omega)} \xi + \frac{3\omega^2}{2(2\kappa + \omega)(\kappa + \omega)} \xi^2 \right)$$

• Аналитическое продолжение:  $\kappa = ik, \quad \lambda = \omega^2 + k^2$

$$\chi(\tau) = e^{ik\tau} \left( \frac{2k + i\omega}{2(k - i\omega)} + \frac{3ik\omega}{(2k - i\omega)(k - i\omega)} \xi - \frac{3\omega^2}{2(2k - i\omega)(k - i\omega)} \xi^2 \right)$$

• Асимптотическое поведение:  $\tau \rightarrow -\infty \Rightarrow \xi \rightarrow -1 \Rightarrow \chi(\tau) \rightarrow e^{ik\tau}$

•  $\tau \rightarrow \infty \Rightarrow \xi \rightarrow 1 \Rightarrow P(ik, 1) = \frac{(k + i\omega)(k + i\omega/2)}{(k - i\omega)(k - i\omega/2)}$

$$\chi(\infty) = e^{i(k\tau + \delta_k)}$$

ФАЗОВЫЙ СДВИГ

$$e^{i\delta_k} = \frac{(k + i\omega)(k + i\omega/2)}{(k - i\omega)(k - i\omega/2)}$$

Потенциал Пёшль-Теллера является безотражательным!

**Задача:** Найти произведение ненулевых собственных значений  $\lambda$  по всему спектру

$$\lambda_1 = \frac{3}{4}\omega^2, \quad \lambda_k = \omega^2 + k^2$$

Дискретизация:  $\tau \in [0, T]$

$$\rightarrow \begin{cases} \tau \rightarrow 0; & \chi \rightarrow \sin(k\tau) \rightarrow 0 \\ \tau \rightarrow \infty; & \chi \rightarrow \sin(k\tau + \delta_k) \rightarrow 0 \end{cases}$$

$$k_n T + \delta_k = \pi n, \quad k_n = \frac{\pi n}{T} - \frac{\delta_k}{T} = k_n^{(0)} - \frac{\delta_k}{T}$$

Моды осциллятора

• Нормировка на осцилляторный детерминант:

$$\prod_{n=2}^{\infty} \frac{\lambda_n}{\lambda_n^{(0)}} = \exp \left( \sum_{n=2}^{\infty} \ln \frac{\lambda_n}{\lambda_n^{(0)}} \right) = \exp \left( \sum_{n=2}^{\infty} \ln \frac{\omega^2 + k_n^2}{\omega^2 + k_n^{(0)2}} \right)$$

• В пределе  $T \rightarrow \infty$  с точностью до членов порядка  $1/T^2$  :

$$\sum_{n=2}^{\infty} \ln \frac{\lambda_n}{\lambda_n^{(0)}} \approx \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left( 1 - \frac{2k_n^{(0)} \delta(k_n^{(0)})}{T(\omega^2 + k_n^{(0)2})} \right) \approx -\frac{1}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2k_n^{(0)} \delta(k_n^{(0)})}{\omega^2 + k_n^{(0)2}}$$

$$\Delta n = 1 \rightarrow k_n \rightarrow \frac{\pi}{T}$$

$$\rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{\lambda_n}{\lambda_n^{(0)}} = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dk k \delta_k}{\omega^2 + k^2}$$



**Вспомогательная задача:** Вычислить интеграл

$$I = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dk k \delta_k}{\omega^2 + k^2}$$

$$e^{i\delta_k} = \frac{(k + i\omega)(k + i\omega/2)}{(k - i\omega)(k - i\omega/2)}$$

• **Замена переменной**  $k \rightarrow x = k/\omega \Rightarrow I = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \delta_k \frac{x dx}{1 + x^2}$

• **Замена**  $\frac{2x}{1 + x^2} = \frac{d}{dx} (\ln(1 + x^2))$

• **Интегрирование по частям:**

$$-\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dx \delta_k \frac{d}{dx} (\ln(1 + x^2)) = -\delta_k \ln(1 + x^2) \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{d\delta_k}{dx} \ln(1 + x^2) dx$$

• **Вычисление производной**  $\frac{d\delta_k}{dx} \Rightarrow \frac{d}{dx} e^{i\delta_k} = \frac{d\delta_k}{dx} e^{i\delta_k}$

$$\frac{d\delta_k}{dx} = -i \left( \frac{1}{x+i} + \frac{1}{x+i/2} - \frac{1}{x-i} - \frac{1}{x-i/2} \right) = -\frac{2}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1/4}$$

• **Переформулировка задачи:**  
вычислить интеграл вида

$$I(a) = -\frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)} \ln(1 + x^2)$$

$$I = I(1) + I\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$I(a) = -\frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)} \ln(1 + x^2)$$

Скачок функции  $\ln(1 + z^2)$  на разрезе:

$$I_2 + I_3 = -\frac{1}{\pi} \int_i^{i\infty} (-2\pi i) \frac{a}{a^2 + z^2} dz$$

$$y = \text{Im } z$$

$$= -\frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} 2\pi \frac{a}{a^2 - y^2} dy = -2 \int_1^{\infty} dy \frac{a}{a^2 - y^2} = \ln \frac{y - a}{y + a} \Big|_1^{\infty} = -\ln \frac{1 - a}{1 + a}$$

Простой полюс внутри контура  $C$  в точке  $z = ia$ :

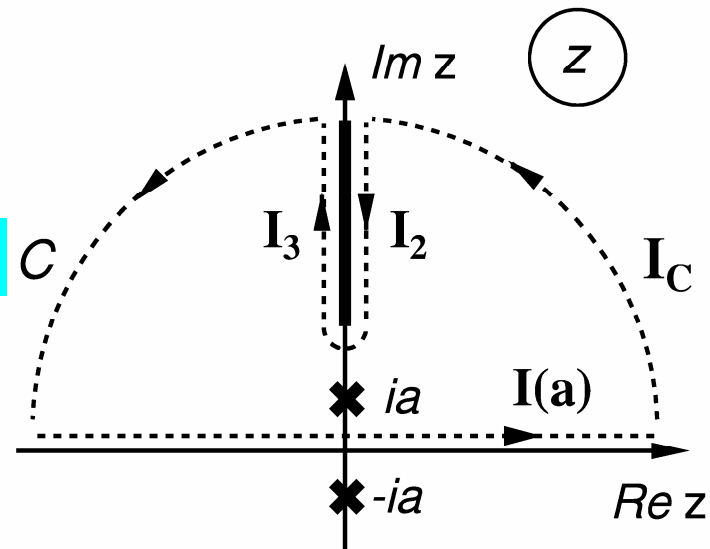
$$I_C = -\frac{1}{\pi} 2\pi i \ln(1 - a^2) \frac{a}{2ia} = -\ln(1 - a^2)$$

Интеграл, который мы ищем:

$$I(a) = I_C - I_2 - I_3 = -\ln(1 - a^2) + \ln \frac{1 - a}{1 + a}$$

$$= -2 \ln(1 + a)$$

$$I = I(1) + I\left(\frac{1}{2}\right) = -2 \ln 2 - 2 \ln \frac{3}{2}$$



# Вклад окрестностей инстантонной траектории (Итоги)

- Квантовая поправка к инстантонной траектории:

$$K = \sqrt{\frac{S}{2\pi}} \left[ \frac{\omega^2 \det' [-d^2/\tau^2 + V''(\bar{x}(\tau))]}{\det[-d^2/\tau^2 + \omega^2]} \right]^{-1/2}$$

$$\frac{\det' [-d^2/d\tau^2 + V''(\bar{x})]}{\det[-d^2/d\tau^2 + \omega^2]} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{\lambda_n^{(0)}}$$

- Вклад дискретного спектра:

$$\frac{1}{\lambda_1^{(0)}} \frac{\lambda_2}{\lambda_2^{(0)}} = \frac{1}{\omega^2} \frac{3}{4}$$

- Вклад непрерывного спектра:

$$\prod_{n=3}^{\infty} \frac{\lambda_n}{\lambda_n^{(0)}} = \exp \left( \sum_{n=3}^{\infty} \ln \frac{\lambda_n}{\lambda_n^{(0)}} \right) = e^{I(1)+I(\frac{1}{2})} = e^{-2(\ln \frac{3}{2} + \ln 2)} = \frac{1}{9}$$

- Квантовая поправка:

$$K = \sqrt{\frac{S}{2\pi}} \frac{1}{12} = \frac{\omega}{24} \sqrt{\frac{\omega}{6\pi\lambda}}$$

$$S = \frac{\omega^3}{12\lambda}$$

- Расщепление спектра:

$$\Delta = K e^{-S} = \frac{\omega}{24} \sqrt{\frac{\omega}{6\pi\lambda}} e^{-\frac{\omega^3}{12\lambda}}$$

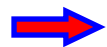
● **Расщепление спектра основного состояния:**

$$\Delta = \frac{\omega}{24} \sqrt{\frac{\omega}{6\pi\lambda}} e^{\frac{\omega^3}{12\lambda}}$$

● **Вопрос:** При каких условиях применимо это выражение?

Приближение разреженного инстантонного газа:  $S_n = nS$

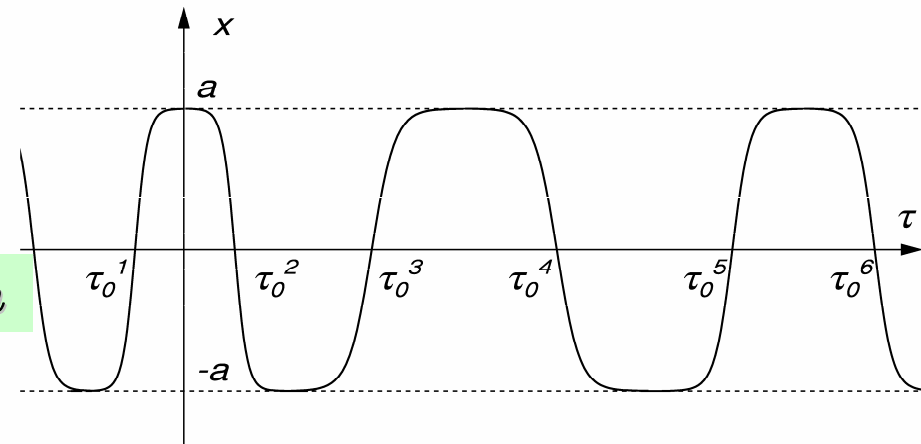
$$\bar{x}(\tau) = a \tanh \frac{\omega(\tau - \tau_0)}{2}$$



Размер инстантона  $\sim \omega^{-1}$

Расстояние между инстантонами  $\sim T/n$

$$n \ll \omega T$$

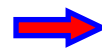


● **Вопрос:** Какое число инстантонов дает максимальный вклад в амплитуду?

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(KTe^{-\frac{S}{\hbar}})^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\Delta \cdot T)^n}{n!}$$

Формула Стирлинга:  $n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n$

n-й член суммы:  $\sim (e\Delta \cdot T/n)^n$



Максимум при  $n \approx n_{max} = \Delta \cdot T$

Плотность инстантонов:  $\Delta$

# Частица в периодическом потенциале

Например,  $V(x) = 1 - \cos x$

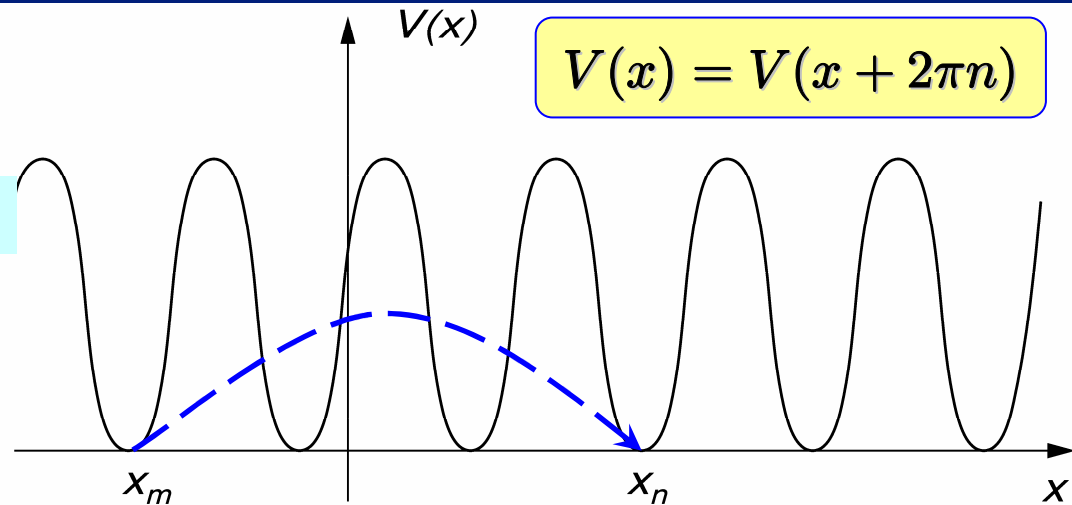
$$V(x) = V(x + 2\pi n)$$

В окрестности каждого минимума

$$\omega^2 = V''(x_m)/a^2$$

Квантовая механика:  
теорема Блоха

$$\psi_\theta(x + 2\pi) = e^{i\theta} \psi_\theta(x)$$



$$\psi_\theta(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\theta} \psi_0(x + 2\pi n)$$

**Расщепление спектра (зонная структура):**  $E(\theta) = \omega/2 - \Delta \cos \theta$

**Задача:** найти величину  $\Delta$  методами функционального интегрирования:

$$k - k' = m - n \equiv l$$

$$G(x_n, x_m; T) = \int \mathcal{D}x e^{-S[x(t)]} = Z_0 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k'=0}^{\infty} \frac{\delta_{k-k', l}}{k!k'!} (KT e^{-S})^{(k+k')}$$

Число инстантонов:

Число анти-инстантонов:

# Зонная структура

$$G(x_n, x_m; T) = Z_0 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k'=0}^{\infty} \frac{\delta_{k-k',l}}{k!k'!} (KTe^{-S})^{(k+k')}$$

$$K = \omega \sqrt{\frac{S}{2\pi\hbar}} \left[ \frac{\omega^2 \det'[-d^2/\tau^2 + V''(\bar{x})]}{\det[-d^2/\tau^2 + \omega^2]} \right]^{-1/2}$$

$$\delta_{k-k',l} = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \exp(i(k - k' - l)\theta)$$

Амплитуда перехода из  $x_m(-\infty)$  в  $x_n(\infty)$  :

$$\Delta = Ke^{-S}$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\omega}{\pi}} e^{-\frac{\omega T}{2}}$$

$$G(x_n, x_m, T) = Z_0 \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} e^{-il\theta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(KTe^{-S}e^{i\theta})^k}{k!} \sum_{k'=0}^{\infty} \frac{(KTe^{-S}e^{-i\theta})^{k'}}{(k')!}$$

$$= Z_0 \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} e^{-il\theta} \exp\left(e^{i\theta} \frac{\Delta \cdot T}{2}\right) \exp\left(e^{-i\theta} \frac{\Delta \cdot T}{2}\right) = \sqrt{\frac{\omega}{\pi}} e^{-\frac{\omega T}{2}} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} e^{-il\theta} e^{\Delta \cdot T \cos \theta}$$

● Коэффициент при евклидовом времени  $T$ :  $E(\theta) = \omega/2 - \Delta \cos \theta$

Энергия основного состояния (нижняя зона)

