Белорусский Государственный Университет, Минск
Физический факультет

WS 2022
Я.М. Шнир

Теория непрерывных групп

Задачи - зачет

1. Постройте таблицу Кэли для группы D_4. Найдите все ее подгруппы, определите инвариантную подруппу, и постройте соответствующие смежные классы

2. Группа вращений трехмерного пространства $SO(3)$ параметризуется заданием оси вращения $\hat{n}$ и угла поворота вокруг этой оси $\theta \in [0, \pi]$, $R_{ij}(\hat{n}, \theta) = e^{-i\theta(\hat{n}\cdot\vec{J})_{ij}}$, где генератор вращений $\vec{J}$ определяется алгеброй $(\hat{n}\cdot\vec{J})_{ij} = -i\varepsilon_{ijk}n_k$. Покажите, что
$$R_{ij}(\hat{n}, \theta) = n_i n_j + (\delta_{ij} - n_i n_j)\cos\theta - \varepsilon_{ijk}n_k \sin\theta$$

3. Группа вращений трехмерного пространства $SO(3)$ параметризуется заданием оси вращения $\hat{n}$ и угла поворота вокруг этой оси $\theta \in [0, \pi]$, $R_{ij}(\hat{n}, \theta) = e^{-i\theta(\hat{n}\cdot\vec{J})_{ij}}$, где генератор вращений $\vec{J}$ определяется алгеброй $(\hat{n}\cdot\vec{J})_{ij} = -i\varepsilon_{ijk}n_k$. Покажите, что
$$e^{-i\frac{\theta}{2}\hat{n}\cdot\vec{\sigma}}\sigma_j e^{i\frac{\theta}{2}\hat{n}\cdot\vec{\sigma}} = R_{ij}(\hat{n}, \theta)\sigma_i$$
где $\vec{\sigma}$ - триплет матриц Паули.

4. Покажите, что матрицы Паули $\vec{\sigma}$ удовлетворяют следующим свойствам:
$$\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k, \qquad \sigma_2\vec{\sigma}\ \sigma_2 = -\vec{\sigma}^*, \qquad e^{-i\frac{\theta}{2}\hat{n}\cdot\vec{\sigma}} = \cos\frac{\theta}{2} - i\hat{n}\cdot\vec{\sigma}\sin\frac{\theta}{2}$$
где $\hat{n}$ - единичный вектор.

5. Постройте таблицу характеров для неприводимых представлений дихедральной группы D_4.

6. Пусть $D^{(i)}(g)$ - матрица некоторого i-е неприводимого конечномерного представления конечной группы G. Покажите, что для элементов класса эквивалентности $\mathcal{C}_k$ выполняется соотношение

$$\sum_{g\in\mathcal{C}_k} D^{(i)}_{jl}(g) = \frac{N_k}{n_i}\chi^{(i)}(\mathcal{C}_k)\delta_{jl}$$

где n_i - размерность i-го неприводимого представления G, N_k - число элементов k-го класса, и $\chi^{(i)}(\mathcal{C}_k)$ - характер неприводимого представления, соответствующий этому классу.

7. Покажите, что группа $SO(n)$ является нормальной подгруппой группы $O(n)$.

8. Группа $O(n)$ задана набором действительных ортогональных матриц размерности $n \times n$. Покажите, что для нечетных значений n нормальной подгруппой $O(n)$ является группа $\mathbb{Z}_2 \cong \{I_n,\ -I_n\}$, где I_n - единичная матрица. Покажите, что в этом случае группа $O(n)$ может быть записана в виде прямого произведения $O(n) \cong SO(n) \otimes \mathbb{Z}_2$. Объясните, почему это невозможно если размерность n является четным числом.

9. Определите центр $Z(D_4)$ дихедральной группы D_4 и постройте фактор-группу $D_4/Z(D_4)$.

10. Покажите, что $SO(n)/SO(n-1) = S^{n-1}$.
Подсказка: рассмотрите действие группы вращений в точке $(1, 0, 0, \dots 0) \in \mathbb{R}^n$.

11. Комплексная матрица S размерности $2n \times 2n$ называется симплектической, если $S^T J S = J$, где $J = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & 0 \end{pmatrix}$. Покажите, что в этом случае $\det S = 1$.

12. Покажите, что $SO(3) \cong SU(2)/\mathbb{Z}_2$.

13. Рассмотрите триплет матриц

$$I_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \qquad I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Алгебру какой группы они образуют? Является данное ее представление приводимым?

14. Покажите, что группа $SO(4)$ локально изоморфна $SU(2) \otimes SU(2)$. Используя информацию о явном виде непрводимых представлений группы $SU(2)$ постройте из двух таких представлений представление группы $SO(4)$. Найдите фактор-группу $SU(2) \otimes SU(2)$ изоморфную группе $SO(4)$.

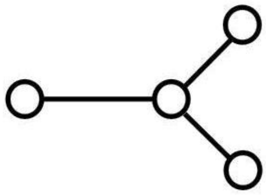
15. Найдите центр группы $U(N)$.

16. Группа Лоренца $O(1,2)$ в пространстве размерности 2+1 определяется как преобразования, оставлющие инвариантными элемент длины $ds^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2$. Найдите явный вид соответствующих генераторов и определите их алгебру.

17. Диаграмма Дынкина некоторой группы Ли имеет вид:

Идентифицируйте эту группу, запишите соответствующую матрицу Картана и постройте систему простых корней. Найдите явный вид матриц подгруппы Картана и постройте полный набор матриц, образующих фундаментальное представление этой группы.

18. Диаграмма Дынкина некоторой группы Ли имеет вид:

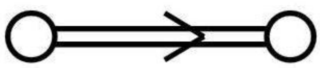


Идентифицируйте эту группу, запишите соответствующую матрицу Картана и постройте систему простых корней. Найдите явный вид матриц подгруппы Картана и постройте полный набор матриц, образующих фундаментальное представление этой группы.

19. Диаграмма Дынкина некоторой группы Ли имеет вид:

Идентифицируйте эту группу, запишите соответствующую матрицу Картана и постройте систему простых корней. Найдите явный вид матриц подгруппы Картана и постройте полный набор матриц, образующих фундаментальное представление этой группы.

20. Диаграмма Дынкина некоторой группы Ли имеет вид:



Идентифицируйте эту группу, запишите соответствующую матрицу Картана и постройте систему простых корней. Найдите явный вид матриц подгруппы Картана и постройте полный набор матриц, образующих фундаментальное представление этой группы.

21. Получите явный вид разложения $C(A, B)$, где $A, B, C \in g$, g - произвольная алгебра Ли, в формуле Бейкера-Кэмпбелла-Хаусдорфа $e^A e^B = e^C$ с точностью до членов 3го порядка.

22. Рассмотрите преобразования действительного числа x вида

$$x \to x' = \frac{ax+b}{cx+d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc \neq 0$$

(i) Покажите, что эти преобразования образуют группу.
(ii) Покажите, что отношение 4 точек

$$R = \frac{(x_1 - x_2)(x_3 - x_4)}{(x_1 - x_4)(x_3 - x_2)}$$

является инвариантом этих преобразований.
(iii) Покажите, что существует гомоморфизм между этой группой и группой $GL(2, \mathbb{R})$:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : x \mapsto x'$$

Что является ядром K этого гомоморфизма?