Оператор Казимира SU(2)

Напомним: Первая лемма Шура – матрица, коммутирующая со всеми матрицами irreps, кратна единичной.

- **Какая матрица коммутирует со всеми генераторами SU(2) преобразований?**

Базис алгебры su(2) – операторы, связанные с матрицами Паули :

$$T_i = \frac{i}{2}\sigma_i, \quad [T_i, T_j] = i\varepsilon_{ijk}T_k$$

$$\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij}\mathbb{I} + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k, \quad \{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}\mathbb{I}$$

$$T_iT_j = \frac{1}{2}[T_i, T_j] + \frac{1}{2}\{T_i, T_j\}$$

Замечание: для произвольной алгебры Ли

2й набор констант

$$\{T_i, T_j\} = T_iT_j + T_jT_i = \frac{1}{N}\delta_{ij}\mathbb{I} + d_{ijk}T_k$$

$$d_{ijk} = 2\mathrm{Tr}\left(\{T_i, T_j\}T_k\right)$$

Размерность фундаментального представления

- **Для SU(2)** $\quad d_{ijk} = 0$

Оператор Казимира группы SU(2): $\quad C(\sigma_i) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 = \sigma_i^2$

Оператор Казимира SU(3)

Базис SU(3) – матрицы Гелл-Мана :

$$[T_i, T_j] = i f_{ijk} T_k \qquad \mathrm{Tr}(T_i T_j) = 2\delta_{ij}$$

$$f_{123} = 1,\; f_{147} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = -f_{156} = -f_{367} = -\frac{1}{2},\; f_{458} = f_{678} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\{T_i, T_j\} = T_i T_j + T_j T_i = \frac{1}{3}\delta_{ij}\mathbb{I} + d_{ijk} T_k$$

Задача: **Вычислить su(3) константы** $d_{ijk} = 2\mathrm{Tr}\left(\{T_i, T_j\} T_k\right)$

Операторы Казимира группы SU(3):

$$\boxed{C_1 = \sum_{i}^{8} \lambda_i^2, \quad C_2 = \sum_{ijk}^{8} d_{ijk} \lambda_i \lambda_j \lambda_k}$$

- **Число операторов Казимира полупростой алгебры Ли равно рангу этой группы *k***

Замечание: **Оператор Казимира не принадлежит алгебре Ли**

Интеграл по группе Ли

$$\sum_{g\in G}^{N} \xrightarrow{?} \int_G d\mu$$

Напомним: для конечной группы $\sum_i f(g_i) = \sum_i f(gg_i) \quad \forall g \in G$

- ***U(1):*** $U = e^{i\alpha} \in U(1), \quad \alpha \in [0, 2\pi]$ $\Rightarrow$ $f(\alpha) = f(\alpha + 2\pi)$

$$U(\alpha')U(\alpha) = e^{i\alpha'}e^{i\alpha} = e^{i(\alpha'+\alpha)} \Rightarrow \int_0^{2\pi} d\alpha f(\alpha) = \int_0^{2\pi} d\alpha f(\alpha' + \alpha)$$

Инвариантность интеграла по группе U(1) относительно левого умножения

- ***Для произвольной компактной группы Ли существует единственная левоинвариантная мера интегрирования по группе (мера Хаара):***

$$\int_G d\mu(g) f(g'g) = \int_G d\mu(g) f(g), \quad d\mu(g'g) = d\mu(g) \quad \forall g, g' \in G$$

$$\boxed{\int_G \mu(g) = 1}$$ $\Rightarrow$ ***мера Хаара на S^1:*** $\mu(\alpha) = \frac{1}{2\pi} d\alpha$

Инвариантная метрика на группе:

$$ds^2(g'g_1, g'g_2) = ds^2(g_1, g_2) = ds^2(e, g_2 g_1^{-1})$$

Замечание: *задание метрики в окрестности групповой единицы однозначно задает ее на всей группе*

В локальных координатах на группе x_i: $ds^2 = a_{ij}(\vec{x})dx^i dx^j = a_{ij}(\vec{0})dx^i dx^j$

Напомним: генератор алгебры Ли определен как $T_i = \left.\frac{\partial g(\vec{x})}{\partial x_i}\right|_{\vec{x}=0} \vec{x}$

$\Rightarrow$ $a_{ij}(\vec{0}) = \mathrm{Tr}\,(T_i T_j)$ $\qquad a_{ij}(\vec{x}) = \mathrm{Tr}\,\left[\left(\partial_i g(\vec{x}) \cdot g(\vec{x})^{-1}\right)\ \left(\partial_j g(\vec{x}) \cdot g(\vec{x})^{-1}\right)\right]$

$$ds^2 = \mathrm{Tr}\,\left[(dg) \cdot g^{-1} \cdot (dg \cdot g^{-1})\right] = \mathrm{Tr}\,[dg^{-1} \cdot dg]$$

- **SU(2):** $U(z_1, z_2) = \begin{pmatrix} z_1 & -\bar{z}_2 \\ z_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} \in SU(2), \quad (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, \quad |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$

Групповое пространство SU(2): сфера S^3 (ξ, θ, ϕ)

$z_1 = x_1 + ix_2 = \cos\xi + i\sin\xi\cos\theta \qquad z_2 = x_3 + ix_4 = \sin\xi\sin\theta e^{i\varphi}$

$$\xi = \pi/2 \longrightarrow S^3 \mapsto S^2$$

$$U(\theta,\varphi,\xi)=\begin{pmatrix}\cos\xi+i\sin\xi\cos\theta & -\sin\xi\sin\theta e^{-i\varphi}\\ \sin\xi\sin\theta e^{i\varphi} & \cos\xi-i\sin\xi\cos\theta\end{pmatrix}\in SU(2)$$

Задача: показать, что метрика на группе SU(2) в этом случае есть

$$ds^2=\mathrm{Tr}\,[dU\,dU^\dagger]=d\xi^2+\sin^2\xi(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2)$$

Гиперсферические координаты

Вспомогательный интеграл:

$$\int_{-\infty}^{\infty}dx\ e^{-x^2}=\sqrt{\pi}$$

$$I_n=\int_{-\infty}^{\infty}d^nx\ \exp\left\{-\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right\}=\int_{-\infty}^{\infty}d^nx\ e^{-x_1^2}e^{-x_2^2}\ldots e^{-x_n^2}=\pi^{n/2}$$

$$I_n==\Omega_n\int_0^{\infty}\exp(-r^2)r^{n-1}dr=\frac{\Omega_n}{2}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$$

$$\Omega_n=\frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$$

Телесный угол в n-мерном пространстве

$n=4 \Rightarrow \Omega_4=2\pi^2$

мера Хаара на S^3

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$$

Координаты на $\mathbb{R}^4$

$$\begin{cases} z_1 = x_1 + ix_2 = r\cos\xi + ir\sin\xi\cos\theta \\ z_2 = x_3 + ix_4 = r\sin\xi\sin\theta e^{i\varphi} \end{cases}$$

$(\xi,\ \theta,\ \varphi)$ *- координаты на* S^3

$$U(z_1, z_2) = \begin{pmatrix} z_1 & -\bar{z}_2 \\ z_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} \in SU(2), \quad (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, \quad |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$$

- **Элемент группового объема:** $dV = dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 = J\, dr d\xi d\theta d\varphi$

Якобиан преобразования: $J = \left| \det\left(\dfrac{\partial x_1, \partial x_2, \partial x_3, \partial x_4}{r, \xi, \theta, \varphi} \right) \right| = r^3 \sin^2\xi \sin\theta$

$\Rightarrow$ ***мера Хаара на S³:*** $\boxed{d\mu(g) = \dfrac{1}{2\pi^2}\sin^2\xi\sin\theta d\xi d\theta d\varphi}$

Задача 1: При параметризации сферы S^3 углами Эйлера

$$U(\theta, \psi, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} e^{\frac{i}{2}(\psi+\varphi)} & -\sin\frac{\theta}{2} e^{-\frac{i}{2}(\psi-\varphi)} \\ \sin\frac{\theta}{2} e^{\frac{i}{2}(\psi-\varphi)} & \cos\frac{\theta}{2} e^{-\frac{i}{2}(\psi+\varphi)} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = r\cos\frac{\theta}{2} e^{\frac{i}{2}(\psi+\varphi)} \\ z_2 = r\sin\frac{\theta}{2} e^{\frac{i}{2}(\psi-\varphi)} \end{cases}$$

Покажите, что мера Хаара в этом случае есть $d\mu(g) = \frac{1}{8\pi^2}\sin\theta d\theta\psi d\varphi$

Задача 2: Определите меру Хаара для группы $SO(3)$

Классификация Вейля-Картана

- ***Простая*** **группа Ли: группа ранга r, единственными подгруппами которой являются элемент единицы и сама группа;**
- ***Полупростая*** **группа Ли: группа ранга r, не содержащая связных абелевых нормальных подгрупп**

- **Подалгебра Картана H: максимальный одновременно диагонализируемый набор элементов в полупростой алгебре Ли ранга r**

$$\{H_1, H_2, \ldots, H_r\} \quad [H_i, H_j] = 0 \;\; \forall i, j$$

Основная идея классификации Вейля-Картана:
разбить все элементы алгебры Ли размерности dim G = d на
(I) образующие подалгебы Картана; (II) ее ортогональное дополнение:

$$al\ G = \{t_1, t_2, \ldots t_d\} = \{H_1, H_2, \ldots H_r\} \; + \; \{T_1, T_2, \ldots T_{d-r}\}$$

$$\mathrm{Tr}\ (\mathrm{H}_i, T_a) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{ad}\,(\mathrm{H_i}) \cdot \mathrm{ad}\,(\mathrm{T_a})) = 0$$

Замечание: $\mathrm{Tr}\,(H_i, [H_j, T_a]) = \mathrm{Tr}\ ([H_i, H_j], T_a) = 0 \Longrightarrow [H_i, T_a] = i f_{iab} T_b$

$$[H_i, T_a] = h^{(i)}_{ab} T_b, \quad h^{(i)}_{ab} = i f_{iab} = (h^{(i)})^\dagger_{ab} \longleftarrow$$

Эрмитова матрица размерности d-r

$$[H_i, T_a] = h^{(i)}_{ab} T_b, \quad h^{(i)}_{ab} = i f_{iab} = -i f_{iba} = (h^{(i)})^{\dagger}_{ab} = -h^{(i)*}_{ab}$$

- **Диагонализация** $h^{(i)}_{ab} \quad \to \quad (U h^{(i)} U^{-1})_{ab}, \quad T_a \to U_{ab} T_b, \quad H_i \to H_i$

Новый базис E_α в подпространстве, ортогональном подалгебре Картана:

- ***Базис Вейля-Картана:*** $\boxed{[H_i, E_\alpha] = \alpha_i E_\alpha}$ **α_i – корневые вектора**

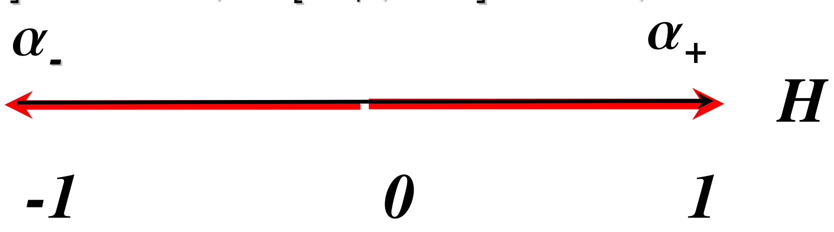
Индекс α нумерует собственные значения матрицы H_i,

α_i – компоненты соответствующего (комплексного) вектора, размерности r

Замечание: ***корневые вектора не вырождены***

SU(2): d=3, r=1 $\quad H = \frac{1}{2}\sigma_3, \quad E_+ = \frac{1}{2}(\sigma_1 + i\sigma_2), \quad E_- = \frac{1}{2}(\sigma_1 - i\sigma_2)$

$$[H, E_\pm] = \pm E_\pm, \quad [E_+, E_-] = 2H, \qquad \alpha_\pm = \pm 1$$



Замечание 1: корневые вектора всегда действительны (собственные значения антисимметричной эрмитовой матрицы)

$$h^{(i)}v = \alpha_i v, \quad h^{(i)*}v^* = -h^{(i)}v^* = \alpha_i v^*$$

Замечание 2: корневые вектора всегда ходят парами:
если α_i - корневой вектор, то и $-\alpha_i$ - корневой вектор

Используя тождество Якоби:

$$\boxed{[H_i, E_\alpha] = \alpha_i E_\alpha}$$

$$[H_i, [E_\alpha, E_\beta]] = -[E_\alpha, [E_\beta, H_i]] - [E_\beta, [H_i, E_\alpha]] = (\alpha_i + \beta_i)[E_\alpha, E_\beta]$$

Замечание 3: операторы E_α ортогональны если их корни не совпадают

$$\mathrm{Tr}\,([H_i, E_\alpha]E_\beta) = \mathrm{Tr}\,(E_\alpha[E_\beta, H_i]) \Rightarrow (\alpha_i + \beta_i)\mathrm{Tr}\,(E_\alpha E_\beta) = 0$$

Для любой алгебры Ли!

$[E_\alpha, E_\beta]$ - элемент алгебры

- $\alpha_i + \beta_i$ -корневой вектор
  $\rightarrow [E_\alpha, E_\beta] \sim E_{\alpha+\beta}$
- $\alpha_i + \beta_i$ - не корневой вектор
  $\rightarrow [E_\alpha, E_\beta] = 0$
- $\alpha_i + \beta_i = 0$
  $\rightarrow [E_\alpha, E_\beta] \in H$

Замечание 4: корни не вырождены, если α_i – простой корень, то $2\alpha_i$ не может быть корнем

Скалярное произведение в пространстве корней: $(\alpha \cdot \beta) = \alpha_i \beta_i, \;\; \alpha^2 = (\alpha \cdot \alpha)$

Каждый простой корень определяет sl(2) подалгебру группы G:

$$\boxed{H_\alpha = \frac{2(\alpha_i \cdot H_i)}{\alpha^2}} \Rightarrow \begin{cases} [H_\alpha,\, E_{\pm\alpha}] = \pm 2E_{\pm\alpha} \\ [E_\alpha,\, E_{-\alpha}] = H_\alpha \end{cases}$$

$$[H_i, E_\alpha] = \alpha_i E_\alpha \Rightarrow [H_\alpha,\, E_\beta] = \frac{2\,(\alpha\cdot\beta)}{\alpha^2} E_\beta$$

Замечание: **матрица H_α соответствует оператору $2\mathrm{T}_3$ и имеет целые собственные значения:**

$$H_\alpha E_\beta |m\rangle = (E_\beta H_\alpha + [H_\alpha,\, E_\beta]|m\rangle = \left(m + \frac{2\,(\alpha\cdot\beta)}{\alpha^2}\right)|m\rangle$$

$$\boxed{\frac{2(\alpha\cdot\beta)}{\alpha^2} = 0, 1, 2, \ldots \qquad \cos\phi = \frac{(\alpha\cdot\beta)}{\sqrt{(\alpha\cdot\alpha)(\beta\cdot\beta)}}} \Rightarrow \boxed{\phi = \{30^\circ,\; 45^\circ,\; 60^\circ,\; 90^\circ\}}$$

Базис Вейля-Картана

- $[H_i,\, H_j] = 0$
- $[H_\alpha,\, E_\beta] = \dfrac{2\,(\alpha\cdot\beta)}{\alpha^2}E_\beta$
- $$[E_\alpha,\, E_\beta] = \begin{cases} N_{\alpha\beta}E_{\alpha+\beta}, & \text{if} \;\; \alpha+\beta \;\; is\ a\ root \\ \dfrac{2(\alpha\cdot H)}{\alpha^2} & \text{if} \;\; \alpha+\beta = 0; \\ 0 & \text{в любом другом случае} \end{cases}$$

Замечание: $\mathrm{Tr}\,(H_iH_j) = \delta_{ij},\quad \mathrm{Tr}\,(H_iE_\alpha) = 0,\quad \mathrm{Tr}\,(E_\alpha,\, E_{-\alpha}) = \dfrac{2}{\alpha^2}$

- **Система корневых векторов в пространстве $\mathbb{R}^{\mathbf{r}}$ однозначно соответствует полупростой алгебре Ли**
- **Набор корневых векторов конечен, он не содержит нулевых элементов**
- **Если** α **и** β **- два простых корня, то** $\beta - 2\alpha\dfrac{(\alpha\cdot\beta)}{\alpha^2}$ **- тоже простой корень**
- **Если** α **и** β **- два простых корня, то** $\dfrac{2(\alpha\cdot\beta)}{\alpha^2}$ **- целое число**

SU(3): d=8, r=2, базис алгебры – матрицы Гелл-Мана λ_i, $\left[\frac{\lambda_i}{2}, \frac{\lambda_j}{2}\right] = i f_{ijk} \frac{\lambda_k}{2}$,

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix},\ \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

- **Подалгебра Картана:** $H = \{H_1, H_2\} = \left\{\frac{\lambda_3}{\sqrt{2}}, \frac{\lambda_8}{\sqrt{2}}\right\}$
- **Step operators:** $E_{\pm\alpha_1} = \frac{1}{2}(\lambda_1 \pm \lambda_2) = T_\pm$ $\qquad E_{\pm\alpha_2} = \frac{1}{2}(\lambda_6 \pm \lambda_7) = U_\pm$

$$E_{\pm\alpha_3} = \frac{1}{2}(\lambda_4 \pm \lambda_5) = V_\pm$$

$$\mathrm{Tr}\,(H_i H_j) = \delta_{ij},\,{}^{\sim}\mathrm{Tr}\,(E_{\alpha_a} E_{-\alpha_b}) = \delta_{ab}$$

SU(3) → 3 SU(2)

Коммутационные соотношения (проверить!):

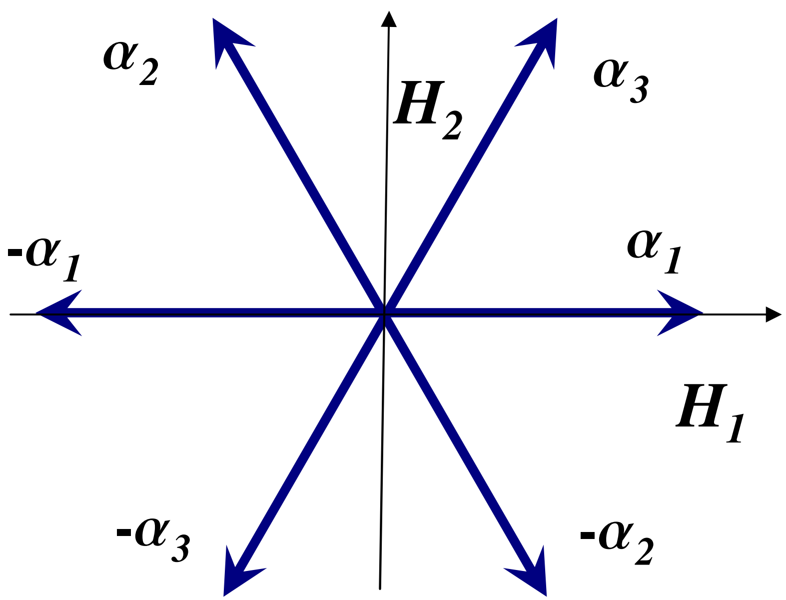
$$[H_1,\, E_{\pm\alpha_1}] = \qquad\qquad [H_2,\, E_{\pm\alpha_1}] =$$

$$[H_1,\, E_{\pm\alpha_2}] = \qquad\qquad [H_2,\, E_{\pm\alpha_2}] =$$

$$[H_1,\, E_{\pm\alpha_3}] = \qquad\qquad [H_2,\, E_{\pm\alpha_3}] =$$

Корни su(3):

$$\alpha_1 = (\sqrt{2},\, 0); \quad \alpha_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\, \sqrt{\frac{3}{2}}\right); \quad \alpha_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$$



Замечание 1: $\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$

Замечание 2: $\alpha_i^2 = 2$

$$[E_{\alpha_1},\, E_{-\alpha_1}] = \sqrt{2} H_1$$

$$[E_{\alpha_2},\, E_{-\alpha_2}] = -\frac{1}{\sqrt{2}} H_1 + \sqrt{\frac{3}{2}} H_2$$

$$[E_{\alpha_3},\, E_{-\alpha_3}] = \frac{1}{\sqrt{2}} H_1 + \sqrt{\frac{3}{2}} H_2$$

SU(3) - Корни и веса

• **Подалгебра Картана:** $$H = \{H_1, H_2\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \right\}$$

Собственные вектора и собственные значения подалгебры Картана:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Фундаментальный триплет *(кварки)*

$$\begin{cases} H_1 v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} v_1, & H_2 v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{3}} v_1 \\ H_1 v_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} v_2, & H_2 v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{3}} v_2 \\ H_1 v_3 = 0, & H_2 v_3 = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} v_3 \end{cases}$$

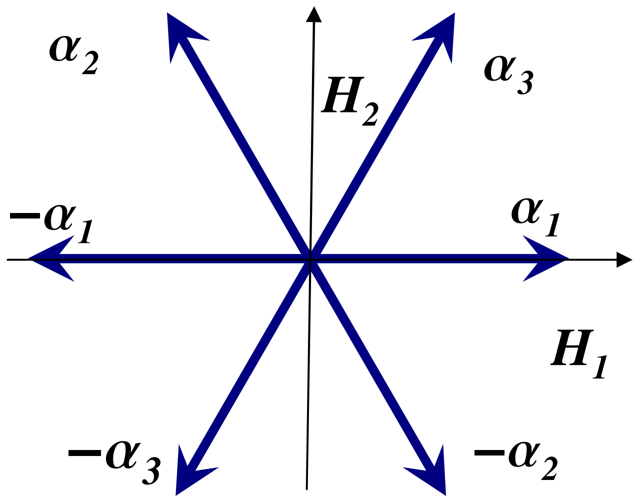
Веса **фундаментального представления su(3):**

$$\mu_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{3}} \right), \quad \mu_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{3}} \right), \quad \mu_3 = \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \right)$$

Корни su(3) дуальны весам:

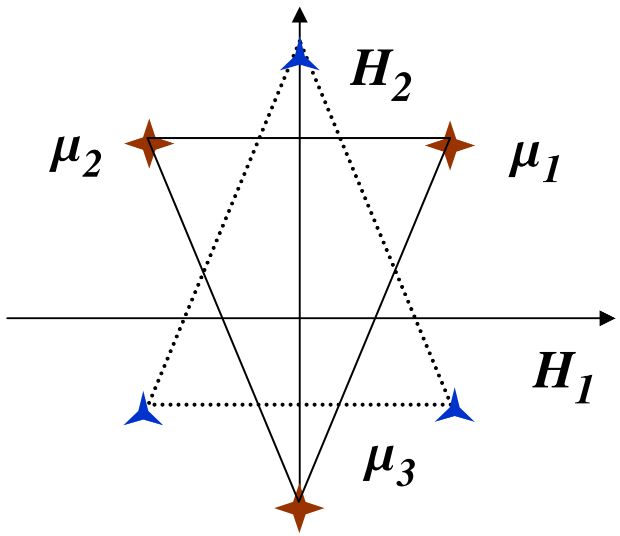
$$\alpha_1 = \mu_1 - \mu_2 = (\sqrt{2}, 0); \quad \alpha_2 = \mu_2 - \mu_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right); \quad \alpha_3 = \mu_1 - \mu_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$$

Корневая диаграмма 3 представления



Весовая диаграмма $3\,,\bar{3}$ представлений

$$\mu_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{3}}\right)$$
$$\mu_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{3}}\right)$$
$$\mu_3 = \left(0,\ -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$$



Фундаментальный анти-триплет $\bar{3}$

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Приводимое представление $3 \otimes \bar{3} = 1 \oplus 8$ (сингет + октет) - мезоны (кварк-антикварк)

$$\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{3}}\right), \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)\right] \oplus \left[-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{3}}\right), -\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{3}}\right), -\left(0, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)\right]$$

$$= (0,0) + \left(\sqrt{2}, 0\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right) + \left(-\sqrt{2}, 0\right) + (0,0) + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right) + (0,0)$$

Задача: **Нарисуйте сооответствующую весовую диаграмму для октета**

И еще одно представление SU(3):

Подалгебра Картана: $H = \{H_1, H_2\} = \left\{ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$

Step operators:

$$E_{\alpha_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{\alpha_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{\alpha_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{-\alpha_i} = (E_{\alpha_i})^\dagger$$

Собственные вектора подалгебры Картана: $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

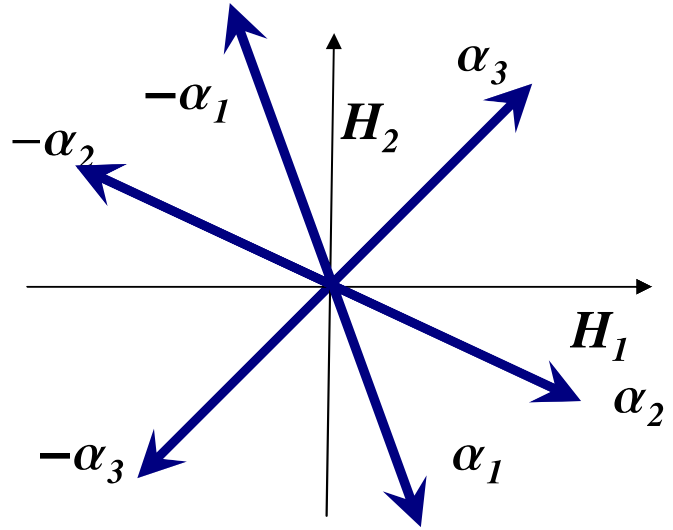
Веса представления: $\boxed{\mu_1 = \left(\frac{1}{2}, 0\right), \quad \mu_2 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad \mu_3 = \left(0, -\frac{1}{2}\right)}$

Корни su(3) дуальны весам:

$$\alpha_1 = \mu_1 - \mu_2 = (1, -\frac{1}{2})$$

$$\alpha_2 = \mu_3 - \mu_2 = (\frac{1}{2}, -1)$$

$$\alpha_3 = \mu_1 - \mu_3 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$



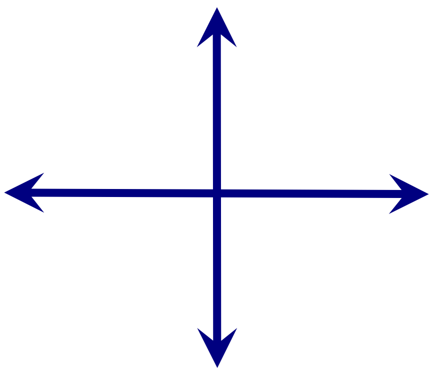
Матрица Картана: $K_{ab} = \dfrac{2(\alpha_a \cdot \alpha_b)}{\alpha_b^2}$

$$(\alpha_a \cdot \alpha_b) \leq 0$$

- **Угол между двумя корневыми векторами α_a и α_b :** $\cos\phi = -\dfrac{1}{2}\sqrt{K_{ab}K_{ba}}$
- **Отношение длин двух корневых векторов α_a и α_b :** $\dfrac{\alpha_a^2}{\alpha_b^2} = \dfrac{K_{ab}}{K_{ba}}$
- **Диагональные элементы не содержат никакой информации:** $K_{aa} = 2$
- $K_{ab}K_{ba} = 4\cos^2\phi, \quad K_{ab} = \{0,\ -1,\ -2,\ -3\} \quad \forall a \neq b$

Замечание 1: ***матрица Картана группы SU(2) тривиальна, K=2***

Замечание 2: ***матрица Картана группы SU(3) имеет вид*** $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$



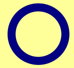
Задача: ***что это за группа?***
Какая у нее матрица Картана?

Диаграммы Дынкина

The *Rules of the Game:*

Какая это группа?

- Каждому из r корней сопоставляется кружок:



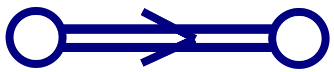
- Каждый из кружков соединяется с другим $K_{ab}K_{ba}$ линиями :

Какая это группа?

- Если корни ортогональны, то линий между ними нет:

Какая это группа?

- Если $K_{ab}K_{ba} = 2, 3$,то соответствующие корни имеют различную длину. В этом случае на диаграмме ставится стрелка, направленная от «длинного» корня к «короткому» :

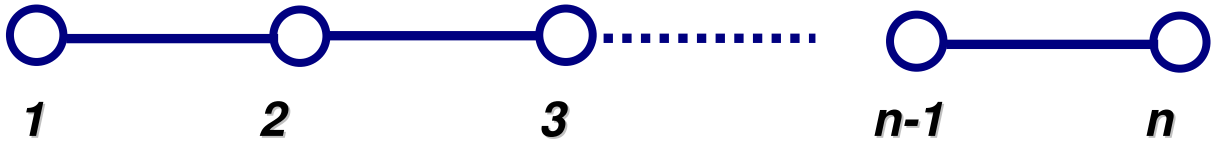


Какая это группа?

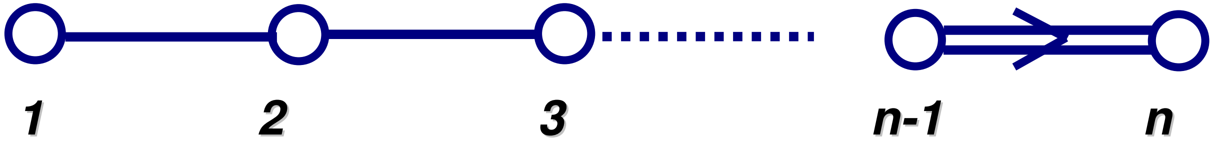
- Число линий не превышает 3, петель не существует

Диаграммы Дынкина

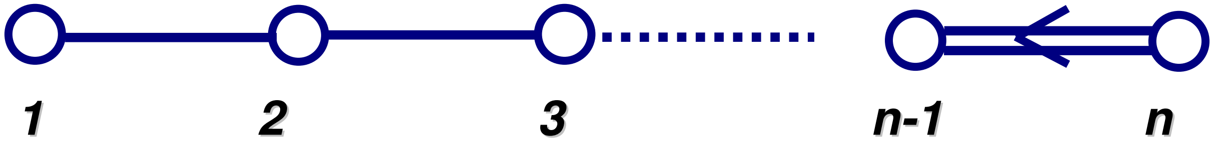
Тип A_n :   su(n+1)



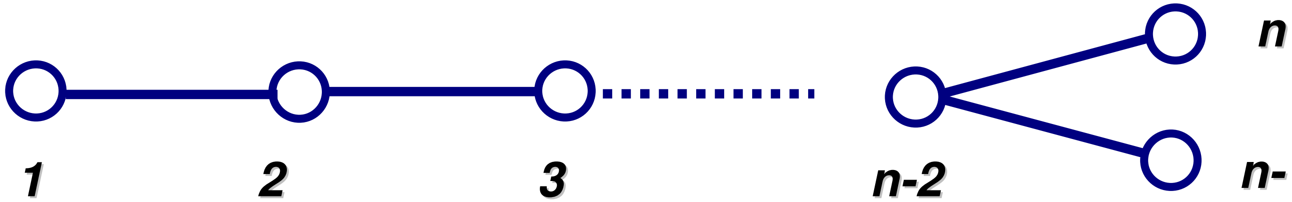
Тип B_n : so(2n+1)



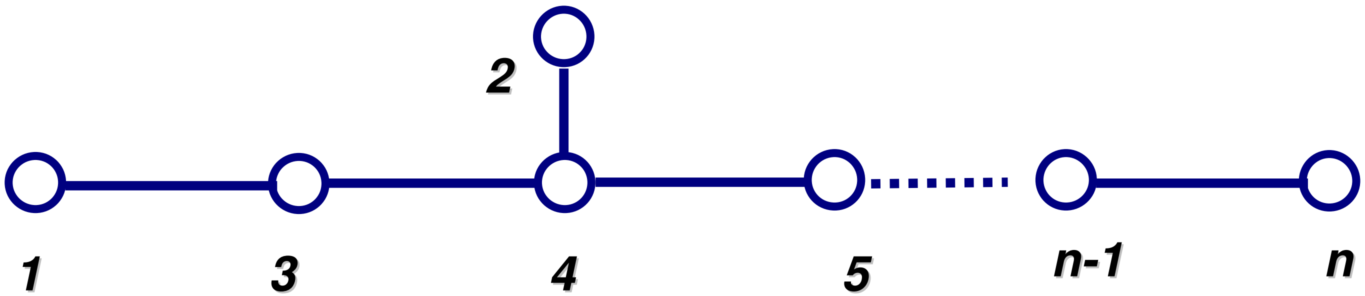
Тип C_n : sp(2n)



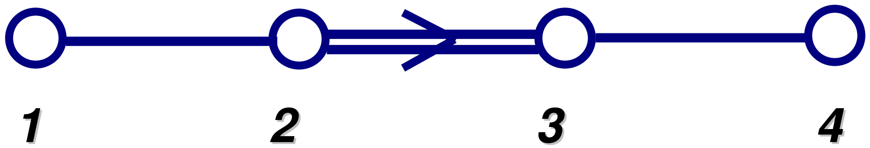
Тип D_n : so(2n)



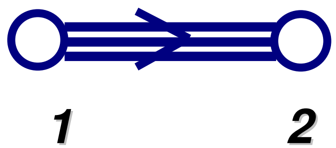
Тип E_n n=6,7,8:



Тип F_4 :



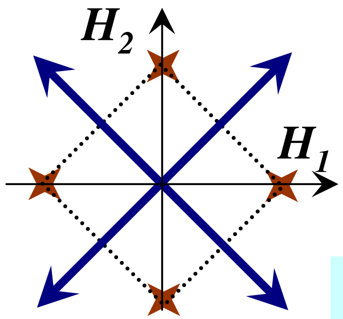
Тип G_2 :



Еще один пример: SO(4)

$$O^T O = \mathbb{I}_4$$

d=6, r=2



Подалгебра Картана:

$$H = \{H_1, H_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Собственные вектора: $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

- **Веса :** $\mu_1 = (1, 0), \quad \mu_2 = (0, 1), \quad \mu_3 = (0, -1), \quad \mu_4 = (-1, 0)$

Корни so(4):

$$\alpha_1 = \mu_1 - \mu_2, = (1, -1), \ \alpha_2 = \mu_2 - \mu_1 = (-1, 1), \ \alpha_3 = \mu_2 + \mu_1 = (1, 1), \ \alpha_4 = -\mu_1 - \mu_2 = (-1, -1)$$

- **Матрица Картана:** $K = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

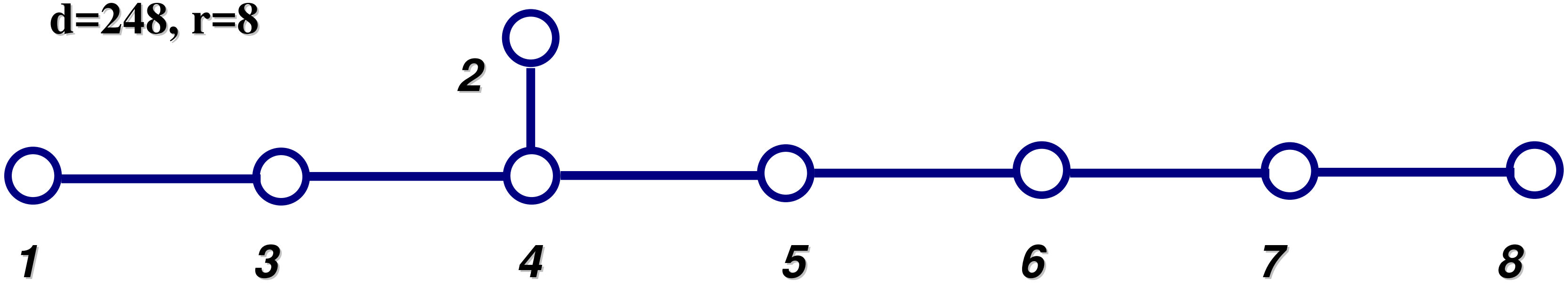
- **Step operators:**

$$E_{\alpha_1} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ E_{\alpha_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad E_{\alpha_2} = E_{\alpha_1}^T, \quad E_{\alpha_4} = E_{\alpha_3}^T$$

Группа so(4) факторизуется как $so(2) \oplus so(2)$

.. и последний пример: E_8

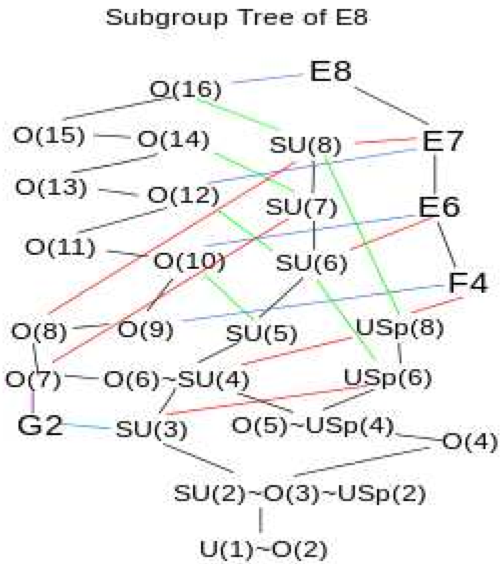
d=248, r=8



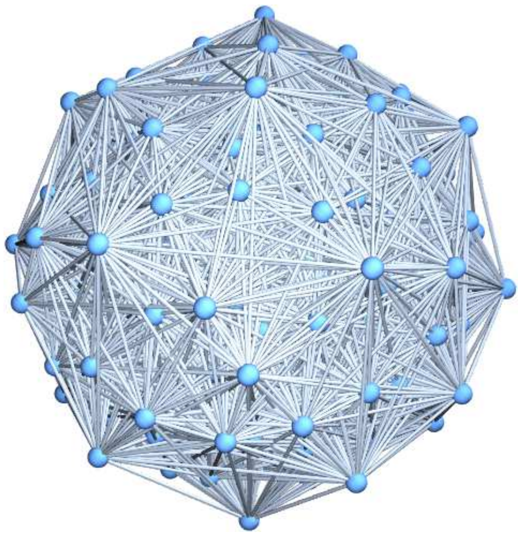
112 весов для базисных векторов $v_i^T = (\pm 1, \pm 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$

+

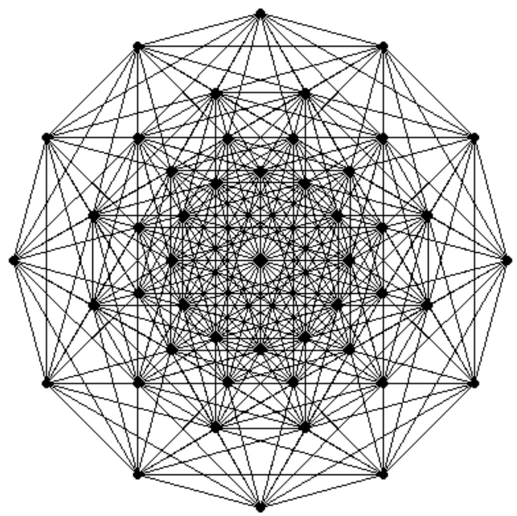
128 весов для базисных векторов $v_j^T = (\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2})$



3d проекция



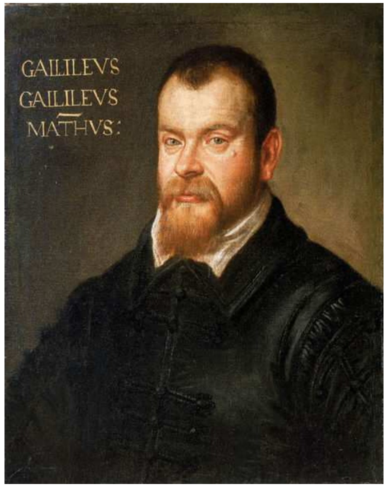
2d проекция



Пространственные симметрии и группы

Группа Галилея:

Галилео Галилей
(1564-1642)



- **Трансляции:** $\vec{r} \mapsto \vec{r}' = \vec{r} + \vec{r}_0$
- **3d вращения:** $\vec{r} \mapsto \vec{r}' = R\,\vec{r}, \quad R \in O(3)$
- **Сдвиг во времени:** $t \mapsto t' = t + \tau$
- **Движение с постоянной скоростью:** $\vec{r} \mapsto \vec{r}' = \vec{r} + \vec{v}t$

$$\begin{pmatrix} \vec{r}' \\ t' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & \vec{v} & \vec{r}_0 \\ 0 & 1 & \tau \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{r} \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$$

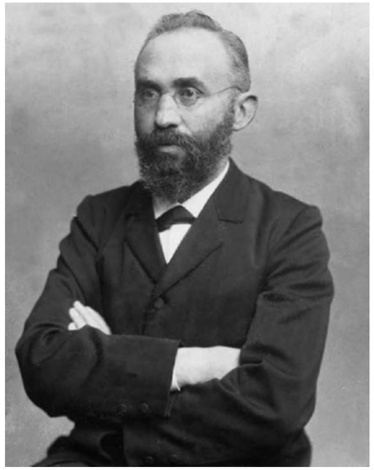
$$\boxed{r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = \mathrm{const}}$$

- *6-параметрическая группа Галилея* $\in GL(5,\mathbb{R}) \sim O(3) \oplus \mathbb{R}_3 \oplus \mathbb{R}_1$

Пространственно-временные симметрии механики Ньютона
(и квантовой механики!)

Группа Лоренца

Хендрик Лоренц
(1853-1928)



- **4-вектор пространства Миньковского:** $(ct,\, x,\, y,\, z) = x_\mu$

- **Инвариантная билинейная форма:**

$$\boxed{x_\mu x^\mu = g_{\mu\nu} x^\nu x^\mu = -x_0^2 + x^2 + y^2 + z^2 = \text{const}}$$

- **Преобразования Лоренца (буст):**

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\beta = \frac{v}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}}$$

Замечание: $\gamma^2 - \beta^2\gamma^2 = 1$

$\Rightarrow$ $\gamma = \cosh\theta, \quad \beta\gamma = \sinh\theta$

Гиперболические вращения: $x_0' = x_0 \cosh\theta + x \sinh\theta; \quad x' = x_0 \sinh\theta + x \cosh\theta$

$$x_\mu \to x'_\mu = \Lambda_x(\theta) \cdot x_\mu$$

- **Инфинитезимальный буст:**

$$\Lambda_x(\delta\theta)\Big|_{\theta \ll 1} = \begin{pmatrix} 1 & \delta\theta & 0 & 0 \\ \delta\theta & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Генератор буста вдоль оси x:

$$-iK_x = \frac{d\Lambda_x}{d\theta}\,\Big|_{\theta=0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Конечное преобразование Лоренца:

$$e^{-i\theta K_x} = \sum_n (-i\theta K_x)^n = \mathbb{I} - i\theta K_x + \frac{1}{2}(-i\theta K_x)^2 + \cdots = \Lambda_x(\theta)$$

***Напомним:* матрица вращений вокруг оси z**

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Соответствующий генератор вращения $-iJ_3 = \frac{dR_3}{d\varphi}.\Big|_{\varphi=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Генераторы бустов вдоль осей y,z:

$$-iK_y = \frac{d\Lambda_y}{d\theta}\,\Big|_{\theta=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad -iK_z = \frac{d\Lambda_z}{d\theta}\,\Big|_{\theta=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- **Алгебра генераторов вращений:** $[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk} J_k \in su(2)$

- **Алгебра генераторов бустов?** $[K_i, K_j] = -i\varepsilon_{ijk} J_k, \quad [J_i, K_j] = i\varepsilon_{ijk} K_k$

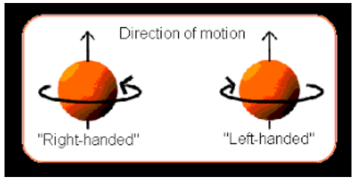
6 генераторов группы Лоренца K_i, J_j, алгебра задана 3 наборами коммутаторов

Замечание: ***генераторы вращений эрмитовы,*** $J_i^\dagger = J_i$ ***, а генераторы бустов антиэрмитовы,*** $K_i^\dagger = -K_i$

$$\boxed{J_i = \frac{1}{2}\sigma_i, \quad K_i = \frac{i}{2}\sigma_i}$$ $\Rightarrow$ ***Генераторы 6-параметрической группы*** $SL(2, \mathbb{C})$

- **Генераторы вращений и бустов:** $U = e^{\frac{1}{2}(i\sigma\cdot\theta \pm \sigma\cdot\phi)}$

+ Левые спиноры
- Правые спиноры



Где правое нейтрино??

- **Преобразования отражения**

Р-инверсия:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Т-инверсия:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Группа Пуанкаре:

Лоренц + 4-трансляции = симметрии СТО

$$x \cdot y = (\Lambda x) \cdot (\Lambda y) \Rightarrow g_{\alpha\beta} = g_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta$$

Метрический тензор симметричен, матрица преобразования Лоренца Λ зависит от 16 -10 = 6 параметров

Собственная ортохронная группа Лоренца: SO(3,1), det Λ = 1, $\Lambda_0{}^0 \geq 1$

+Трансляции в $\mathbb{R}^4$ ***:***

$$\boxed{x' = T(\Lambda, a) x = \Lambda x + a}$$

10-параметрическая группа Пуанкаре –
полупрямое произведение группы Лоренца и группы трансляций

- **Генераторы группы Пуанкаре:** $M_{ij} = i\varepsilon_{ijk} J_k, \quad M_{0i} = K_i$

$$U(\Lambda, a) = e^{\frac{i}{2}\varepsilon_{\mu\nu}M^{\mu\nu}} e^{ia_\mu P^\mu} = \mathbb{I} + \frac{i}{2}\varepsilon_{\mu\nu}M^{\mu\nu} + ia_\mu P^\mu + \ldots$$

- **Алгебра:**

$$\begin{cases} i[M_{\mu\nu},\, M_{\rho\sigma}] = g_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} + g_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} - g_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} - g_{\nu\sigma}M_{\mu\rho}, \\ i[P_\mu,\, M_{\rho\sigma}] = g_{\mu\rho}P_\sigma - g_{\mu\sigma}P_\rho \\ [P_\mu,\, P_\nu] = 0 \end{cases}$$

Операторы Казимира групы Лоренца:

- $C_1 = \frac{1}{2} M_{\mu\nu} M^{\mu\nu} = J^2 - K^2$
- $C_2 = \frac{1}{4} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} M^{\mu\nu} M^{\rho\sigma} = 2J \cdot K$

Замечание: $[C_1, P_\mu] \neq 0, \quad [C_2, P_\mu] \neq 0$

Операторы Казимира групы Пуанкаре:

Вектор Паули-Любанского

$\boxed{C_1 = P_\mu P^\mu = m^2}$ $\quad \boxed{C_2 = W_\mu W^\mu}$ $\quad W_\mu = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} M^{\nu\rho} P^\sigma \quad [P_\mu, W_\mu] = 0$

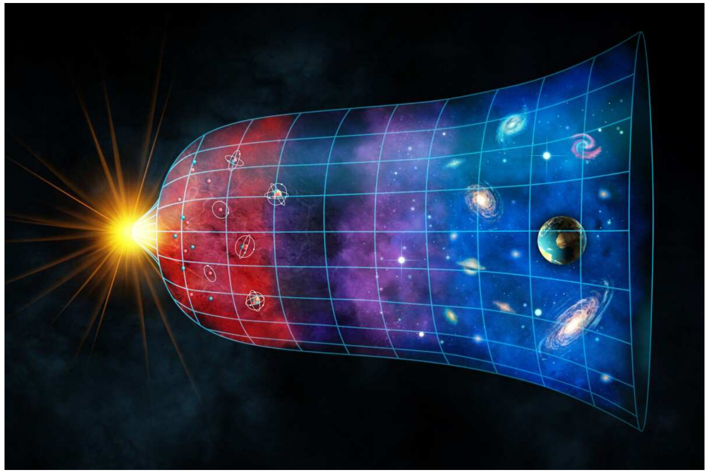
- **Безмассовые состояния:** $m^2 = 0, \quad E^2 - p^2 = 0, \quad W_\mu = h P_\mu$

спиральность

- **Элементарная частица:** объект, волновая функция которого соответствует неприводимому представлению группы Пуанкаре

Домашнее задание 1: ***покажите, что оператор C_2 коммутирует со всеми генераторами группы Пуанкаре***

Домашнее задание 2: ***покажите, что $C_2 = - m^2 s(s+1)$, где s – собственное значение оператора углового момента в системе покоя, $J^2 = s(s+1)$***

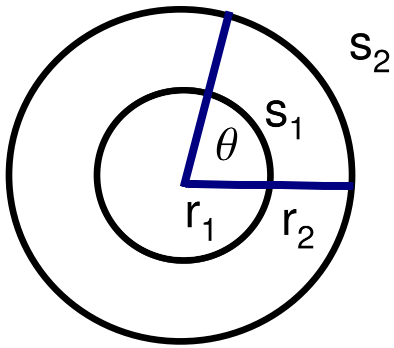


Группа конформных перобразований

$$x_\mu \to x'_\mu, \quad g_{\mu\nu}(x) \to g'_{\mu\nu}(x') = \Omega^2(x) g_{\mu\nu}(x)$$

- **Дилатации:** $x_\mu \mapsto \lambda x_\mu$

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 \mapsto \lambda^{-2}(dr^2 + r^2 d\theta^2) =$$
$$= dr'^2 + r'^2 d\theta^2 = dl'^2$$



$$\theta = \frac{s_1}{r_1} = \frac{s_2}{r_2}$$

- **1+1 dim:** $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\,(-1, 1)$

Координаты светового конуса (c=1) $x_\pm = x \pm t$

Конформное преобразование координат (сохраняющее углы между кривыми)

$$x_\pm = \tan\sigma_\pm, \quad \sigma_\pm \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}]$$

$\Rightarrow$ $ds^2 = dx_+ dx_- \mapsto ds'^2 = \cos^2 x_+ \cos^2 x_- ds^2 = d\sigma_+ d\sigma_-$

$$\Omega^2 = \cos^2 x_+ \cos^2 x_-$$

- **Конформные преобразования:**

$$x_\mu \to x'_\mu, \quad g_{\mu\nu}(x) \mapsto \Omega^2(x) g_{\mu\nu}(x)$$

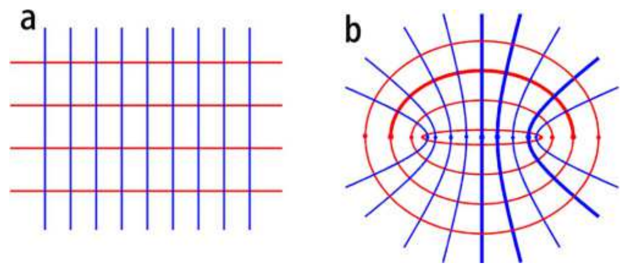
- **Инфинитезимальные конформные преобразования:**

$$x_\mu \mapsto x'_\mu = x_\mu + \epsilon_\mu(x); \qquad \delta g_{\mu\nu} = \partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu = c(x)\delta_{\mu\nu} \qquad \Omega(x) = 1 + \frac{c(x)}{2}$$

- $\epsilon_\mu = \mathrm{const} \to c(x) = 0$ ⇒ трансляции P_μ
- $\epsilon_\mu = x_\nu\, \omega^{\mu\nu} \to c(x) = 0$ ⇒ вращения $M_{\mu\nu}$
- $\epsilon_\mu = \lambda\, x_\mu \to c(x) = 2\lambda$ ⇒ дилатации D
- $\epsilon_\mu = 2(a_\nu\, x^\nu)\, x_\mu - (x_\nu\, x^\nu)\, a_\mu \to c(x) = (a_\nu\, x^\nu)$, a_ν - произвольный вектор

⇒ специальные конформные преобразования K

$$x_\mu \xrightarrow{K} \frac{x_\mu + a_\mu x^2}{1 + 2a\cdot x + a^2 x^2}$$



- **Инверсия:** $x_\mu \mapsto x'_\mu = \dfrac{x_\mu}{x^2}$

- **Специальное конформное преобразование:**

Инверсия I $x_\mu \mapsto \dfrac{x_\mu}{x^2}$ + **Трансляция** $x_\mu \mapsto \dfrac{x_\mu}{x^2} + a_\mu$

+ **Инверсия II** $x_\mu \mapsto \dfrac{x_\mu}{x^2} + a_\mu \mapsto \dfrac{\frac{x_\mu}{x^2} + a_\mu}{\left(\frac{x_\mu}{x^2} + a_\mu\right)^2} = \dfrac{x_\mu + a_\mu x^2}{1 + 2(a_\mu x^\mu) + a^2 x^2)}$

Генераторы конформной группы в *пространстве Миньковского:*

- 4 генератора трасляций
- 6 генераторов группы Лоренца
- 1 генератор дилатаций
- 4 генератора СКП

15 генераторов конформной группы

SO(4,2)

Псевдоортогональная группа ***SO(p,q)***