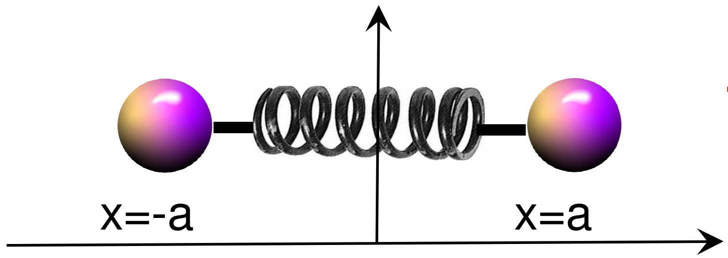
Теория групп и осциллятор



Замечание: в положении равновесия система инвариантна относительно отражений $x \rightarrow -x$

Вопрос: какие ограничения это накладывает на динамику?

- **Две основные моды колебаний:** I в фазе ⇉ II в противофазе ⇄

Мода I антисимметрична относительно отражений, мода II - симметрична

- **Уравнения движения:** $$m\frac{d^2x_1}{dx^2} = -k(x_1 - x_2) \qquad m\frac{d^2x_2}{dx^2} = -k(x_2 - x_1)$$

В матричной форме: $$m\frac{d^2X}{dt^2} = -KX, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} k & -k \\ -k & k \end{pmatrix}$$

X – гармоническая функция: $X = A\cos(\omega t)$ $\Rightarrow$ $m\omega^2 A = KA$

А является собственным вектором матрицы К с собственным значением $m\omega^2$

$$m\frac{d^2X}{dt^2} = -KX, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} k & -k \\ -k & k \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad m\omega^2 A = KA$$

Напомним: система инвариантна относительно отражений **X → - X**

Матрица отражений $D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

- **Динамика системы не меняется при отражениях:** $\Rightarrow$ $D^{-1}KD = K$

- **А что за группа генерируется матрицей отражений?** $D^2 = \mathbb{I}, \quad C_2 = \{e, d\}$

$$\boxed{D(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D(d) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}$$

Вопрос: **это приводимое или неприводимое представление?**

- **Преобразования подобия:**

$$MD(e)M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad MD(d)M^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$\Rightarrow$ - **Имеется 2 irreps:** $\{D(e) = 1, D(d) = 1\}, \quad \{D(e) = 1, D(d) = -1\}$

Динамика системы не меняется при отражениях: $\Rightarrow$ $D^{-1}KD = K$

$D^{-1}KD = K,$ или $KD = DK$ $\Rightarrow$ Лемма Шура: $MKM^{-1} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$

Собственные вектора К: $A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

симметричная мода

антисимметричная мода

- ***Физика***: уравнения движения механической системы: $KX = \lambda X$
- ***Симметрия***: $DX = -X, \quad D^{-1}KD = K$
- ***Линейная алгебра***:

$$MD(g)M^{-1} = \begin{pmatrix} D^{(1)} & 0 \\ 0 & D^{(2)} \end{pmatrix}$$

- ***Теория групп***: irreps $D^{(i)}$ $\Rightarrow$ собственные вектора матрицы К:

$$A_1 = M^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = M^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Группы Ли

Closure + **Associativity** + **Inverse element** + **Unit element**

- **Параметры непрерывной группы являются координатами некоторого топологического пространства, точками которого являются элементы группы Ли**

- ***Группы Ли – это гладкие дифференцируемые множества***

- ***Множество M:*** *пространство, которое локально выглядит как евклидово пространство* $\mathbb{R}^n$.

Матричные группы Ли:

- **Closure** $M(a) \in G, \quad M(a)M(b) = M(c) \in G, \quad c = f(a,b)$
- **Associativity** $M(a)[M(b)M(c)] = M(a)M(f(b,c)) = [M(a)M(b)]M(c)$

$= M(f(a,b))M(c), \Rightarrow f(a,f(b,c)) = f(f(a,b),c)$

- **Unit element** $M(e)M(a) = M(a)M(e) = M(a), \quad f(e,a) = a$
- **Inverse element** $M(a^{-1})M(a) = M(a)M(a^{-1}) = M(e), \quad f(a^{-1},a) = e$

Пример: 2х параметрическая группа Ли преобразований координат

$$x \to x' = a_1 x + a_2, \quad a_1, a_2 \in \mathbb{R}$$

- **Closure** $x'' = a_1 x' + a_2 = a_1(b_1 x + b_2) + a_2 = a_1 b_1 x + (a_1 b_2 + a_2)$ ✓

$$c_1 = a_1 b_1, \quad c_2 = a_1 b_2 + a_2 \in \mathbb{R}$$

- **Associativity** $x'' = b_1(a_1 x + a_2) + b_2 = a_1 b_1 x + b_1 a_2 + b_2$

$$x''' = a_1 b_1 (c_1 x + c_2) + b_1 a_2 + b_2 = a_1 b_1 c_1 x + a_1 b_1 c_2 + b_1 a_2 + b_2$$ ✓

- **Unit element** $x' = x, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 0$ ✓

- **Inverse element** $x^{-1} = \dfrac{x}{a} - \dfrac{a_2}{a_1}$ ✓

Это неабелева группа

- ***Две группы Ли изоморфны,*** **если соответствующие пространства параметров топологически эквивалентны**

Алгебры Ли

- ***Групповая единица матричной группы Ли:*** $M(a_0) = \mathbb{I} \in G$

Разложение в ряд Тейлора в окрестности единицы: (t ≪ 1)

$$M(t) = \mathbb{I} + \left.\frac{dM}{dt}\right|_{t=a_0} t + O(t^2) = \mathbb{I} + At + O(t^2)$$

Матрица *алгебры* Ли
$A \in \mathrm{g}, \quad M \in G$

- **Экспоненциальное отображение:** $M(t) = e^{At}$

Условие унитарности: $M^\dagger M = \mathbb{I} \Longrightarrow e^{(A^\dagger + A)t} = \mathbb{I} \Longrightarrow A^\dagger + A = 0, \quad \boxed{A^\dagger = -A}$

Матрица A антиунитарна

Физик: $M(t) = \mathbb{I} - iAt + O(t^2) \Rightarrow M(t) = e^{-iAt}, \quad A^\dagger = A$

- **Алгебра Ли задает кривую на групповом пространстве**

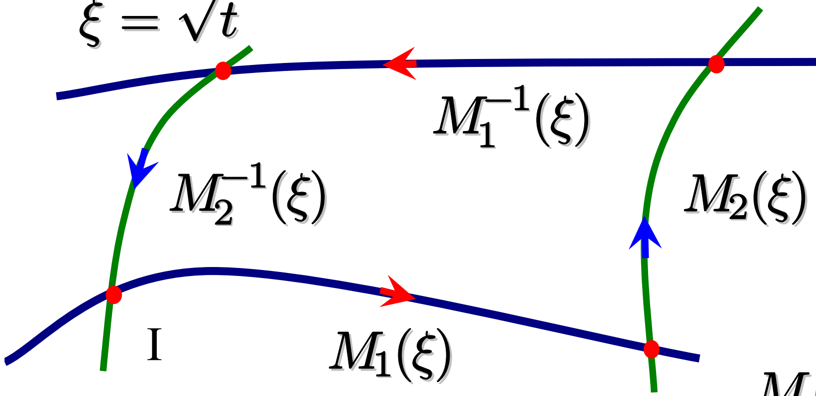
$$M(t) = M_1(t)M_2(t) = e^{A_1 t}e^{A_2 t} = I + (A_1 + A_2)t + O(t^2)$$

Произведение элементов группы ↔ сумма элементов алгебры

Алгебры Ли

- **Алгебра Ли – это линейное векторное пространство с операцией коммутации ее элементов:** $[A_1, A_2] = A_1A_2 - A_2A_1 = -[A_2, A_1]$

$$\xi = \sqrt{t}$$



$$M(t) = M_1(\xi)M_2(\xi)M_1^{-1}(\xi)M_2^{-1}(\xi)$$

$$M_1(\xi) = \mathbb{I} + A_1\xi + \alpha_1\xi^2; \quad M_2(\xi) = \mathbb{I} + A_2\xi + \alpha_2\xi^2$$

$$M_1^{-1}(\xi) = \mathbb{I} - A_1\xi - \beta_1\xi^2; \quad M_2(\xi) = \mathbb{I} - A_2\xi - \beta_2\xi^2$$

- **Во втором порядке по ξ :**

$$M(t) = (\mathbb{I} + A_1\xi + \alpha_1\xi^2 + A_2\xi + A_1A_2\xi^2 + \alpha_2\xi^2)$$
$$\times(\mathbb{I} - A_1\xi - \beta_1\xi^2 - A_2\xi + A_1A_2\xi^2 + \beta_2\xi^2)$$

$$M_1(\xi)M_1^{-1} = M_2(\xi)M_2^{-1} = \mathbb{I}$$

$$(\mathbb{I} + A_1\xi + \alpha_1\xi^2)(\mathbb{I} - A_1\xi - \beta_1\xi^2) = \mathbb{I} \qquad (\mathbb{I} + A_2\xi + \alpha_2\xi^2)(\mathbb{I} - A_2\xi - \beta_2\xi^2) = \mathbb{I}$$

$$\Rightarrow \quad \beta_1 = \alpha_1 - A_1^2; \quad \beta_2 = \alpha_2 - A_2^2$$

$$M(t) = \; ?$$

Формула Бейкера - Кэмпбелла - Хаусдорфа

$$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\ldots}$$

Замечание: если $[A,B]=0, \quad e^A e^B = e^{A+B}$

Предположим, что $\exists C \in \mathrm{g}, \quad e^A e^B = e^C \Rightarrow C = \log(e^A e^B)$

$$\log X = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(X-1)^k = (X-1) - \frac{(X-1)^2}{2} + \frac{(X-1)^3}{3} + \ldots$$

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = 1 + A + \frac{A^2}{2} + \ldots, \qquad e^B = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B^m}{m!} = 1 + B + \frac{B^2}{2} + \ldots$$

$$\Downarrow$$

$$\log(e^A e^B) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \left(\sum_{n,m} \frac{A^n B^m}{n!m!} - 1 \right)^k =$$

$$= \underbrace{A + B + AB + \frac{1}{2}(A^2 + B^2 + \ldots)}_{k=1} - \underbrace{\frac{1}{2}(A^2 + B^2 + AB + BA + \ldots)}_{k=2} \cdots = A + B + \frac{1}{2}[A,B] + \ldots$$

***Домашнее задание:* покажите,что в 3м порядке**

$$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\frac{1}{12}[A,[A,B]]+\frac{1}{12}[B,[B,A]]+\ldots}$$

Алгебры Ли

Алгебра Ли образует линейное векторное пространство:

- **Замкнутость:** $\alpha a + \beta b = c \in \mathrm{g}, \quad \forall a, b \in \mathrm{g}, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$
- **Антисимметрия:** $[a,\ b] = -[b, a] \in \mathrm{g}, \quad \forall a, b \in \mathrm{g}$
- **Билинейность:** $[\alpha a + \beta b,\ c] = \alpha[a,\ b] + \beta[b,\ c], \quad \forall a, b, c \in \mathrm{g}, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$
- **Тождество Якоби:** $[a, [b, c]] + [b, [c, a]] + [c, [a, b]] = 0$

Доказательство: ***заметим,что***

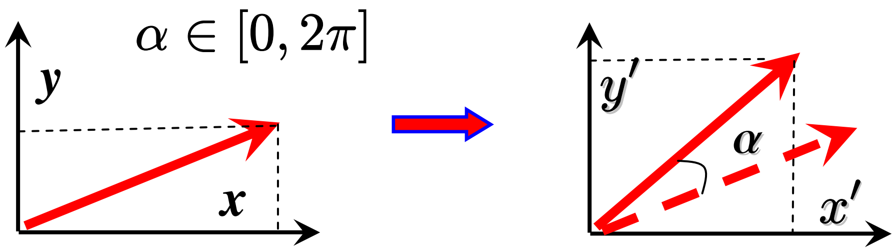
$$[a, [b, c]] = a[b, c] - [b, c]a = abc - acb - bca + cba + bac - bac + cab - cab$$
$$= (ab - ba)c - c(ab - ba) + b(ac - ca) - (ac - ca)b$$
$$= [a, b]c - c[a, b] + b[a, c] - [a, c]b = [[a, b], c] + [b, [a, c]]$$
$$-[c, [a, b] - [b, [c, a]]$$

Алгебра Ли: $[T_i, T_j] = f_{ijk} T_k, \quad \forall T_i \in \mathrm{g}$

f_{ijk} - структурные константы

Группы Ли

Напомним: группа SO(2) – абелева группа вращений на плоскости



$$O \in SO(2), \quad \det O = 1$$

$$O(\alpha)O(\beta) = O(\alpha + \beta \mod 2\pi)$$

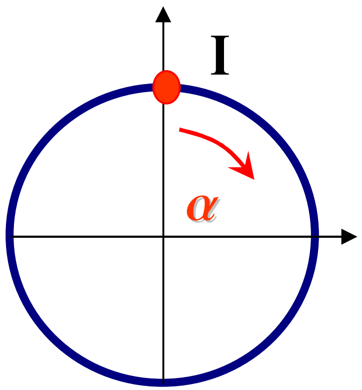
$$\vec{r} \to O \cdot \vec{r} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\alpha + y\sin\alpha \\ -x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \vec{r}\,'$$

Комплексификация: $z = x + iy$

Унитарная абелева группа

$$z = re^{i\alpha} \to z' = ze^{i\beta} = re^{i(\alpha+\beta)}, \qquad U \in U(1) \cong SO(2)$$

Групповая единица в SO(2): $\mathbb{I} = O(\alpha = 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$



Разложение в ряд Тейлора в окрестности единицы: ($\alpha \ll 1$)

$$\boxed{O(\alpha) = \mathbb{I} + \left.\frac{dO}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} \alpha + O(\alpha^2) = \mathbb{I} - i\alpha X + O(\alpha^2)}$$

Генератор SO(2) преобразования

$$O=\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix} \Rightarrow -iX=\left.\frac{dO}{d\alpha}\right|_{\alpha=0}=\left.\begin{pmatrix}-\sin\alpha & \cos\alpha\\ -\cos\alpha & \sin\alpha\end{pmatrix}\right|_{\alpha=0}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$

Замечание: $X=\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix},\quad X=X^\dagger \Rightarrow X^2=\mathbb{I}$

Проверка: **Разложение экспоненты в ряд в окрестности единицы:**

$$e^{-i\alpha X}=\sum_n(-i\alpha X)^n=\mathbb{I}-i\alpha X+\frac{1}{2}(-i\alpha X)^2+\dots=O(\alpha)$$

$$=\mathbb{I}\left(1-\frac{1}{2}\alpha^2-\frac{1}{4!}\alpha^4+\dots\right)-iX\left(\alpha-\frac{1}{3!}\alpha^3+\dots\right)=\mathbb{I}\cos\alpha-iX\sin\alpha$$

- **Собственные вектора и собственные значения:** $O\cdot\vec{v}_i=\lambda_i\vec{v}_i,\quad i=1,2$

$$\vec{v}_1=\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix},\quad \vec{v}_2=\begin{pmatrix}i\\ 1\end{pmatrix};\qquad \begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}=e^{i\alpha}\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}$$

- **Преобразования подобия:**

$$\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i\\ 1\end{pmatrix}=e^{-i\alpha}\begin{pmatrix}i\\ 1\end{pmatrix}$$

$$O\sim SOS^{-1}=\boxed{\begin{pmatrix}e^{i\alpha} & 0\\ 0 & e^{-i\alpha}\end{pmatrix}=D(\alpha),}\qquad S=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -i\\ -i & 1\end{pmatrix}$$

Матрица представления O(2)

Вопрос: это неприводимое представление?

- **irreps SO(2):** $\chi^{(n)} = e^{in\alpha}, \quad n = 1, 2 \ldots, \alpha \in [0, 2\pi]$

- **Условие ортогональности irreps SO(2):**

$$\boxed{(\chi^{(n)}, \chi^{(m)}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha e^{-in\alpha} e^{-im\alpha} = \delta_{nm}}$$

- **Рассмотрим изменение функции координат при их SO(2) вращении:**

$$O = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \Rightarrow O(\delta\alpha)\Big|_{\alpha \ll 1} = \begin{pmatrix} 1 & \delta\alpha \\ -\delta\alpha & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Delta\vec{r} = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = O \cdot \vec{r} - \vec{r} = \begin{pmatrix} y\,\delta\alpha \\ -x\,\delta\alpha \end{pmatrix}$$

$$f(\vec{r}) \to f(O\vec{r}) = f(\vec{r} + \Delta\vec{r}) = f(\vec{r}) + \left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y}\right) f(\vec{r}) + \ldots$$

$$= f(\vec{r}) + \delta\alpha \left(y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}\right) f(\vec{r}) + \ldots$$

- **Индуцированный оператор углового момента:** $L = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}$

Задача: найти член второго порядка в разложении функции $f(\vec{r} + \Delta r)$

Группа SO(3) –группа вращений в трехмерном пространстве:

Матрицы вращений в 3d ортогональны: $\forall O \in O(3), \quad O^{\dagger} O = \mathbb{I}$

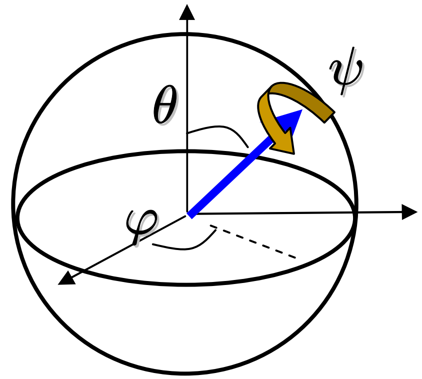
Задача 1: покажите, что при этом условии собственными значениями матрицы O могут быть только $\pm 1, \quad e^{\pm i\theta}$

Задача 2: покажите, что любая ортогональная матрица с точностью до преобразования подобия O → SOS^{-1} эквивалентна матрице

$$O = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

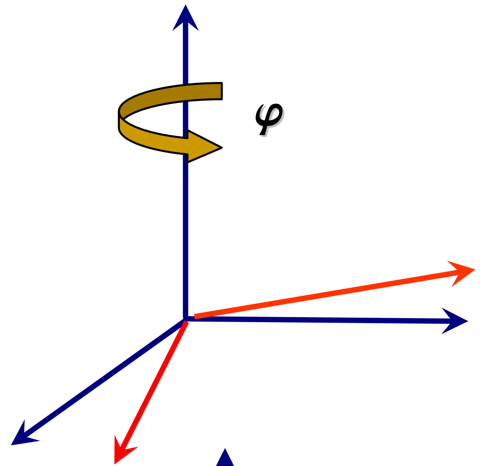
Аксиальная параметризация вращений: задание единичного вектора $\vec{n} = \{\sin\theta\cos\varphi, \ \sin\theta\sin\varphi, \ \cos\theta\}$, задающего ось вращения, и угол поворота ψ вокруг нее.

$$O\vec{n} = O \qquad \vec{n} \in S^2, \quad \theta \in [0, \pi], \quad \varphi \in [0, 2\pi]$$



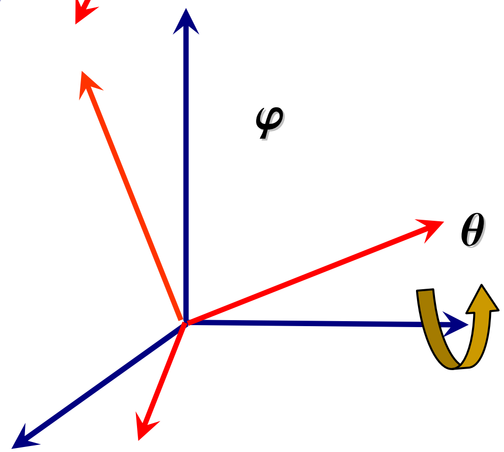
$$\Rightarrow \quad O_{ij}(\psi, \vec{n}) = \cos\psi\,\delta_{ij} + (1 - \cos\psi)n_i n_j - \sin\psi\,\varepsilon_{ijk} n_k$$

$$\vec{r} \to R_3(\varphi)\cdot\vec{r} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$



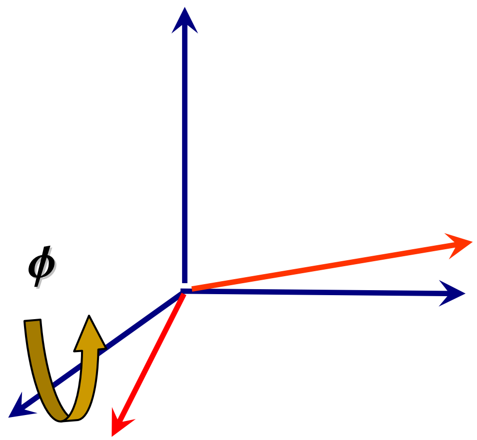
$$-iX_3 = \frac{dR_3}{d\varphi}\cdot\Big|_{\varphi=0} =$$

$$\vec{r} \to R_2(\theta)\cdot\vec{r} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$



$$-iX_2 = \frac{dR_2}{d\theta}\cdot\Big|_{\theta=0} =$$

$$\vec{r} \to R_1(\phi)\cdot\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$



$$-iX_1 = \frac{dR_1}{d\phi}\cdot\Big|_{\phi=0} =$$

Генераторы группы SO(3): коммутационные соотношения

$$-iX_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$-iX_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$-iX_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- **Коммутационные соотношения:**

$$[X_1, X_2] = X_1X_2 - X_2X_1 =$$
$$[X_2, X_3] = X_2X_3 - X_3X_2 = -iX_1$$
$$[X_3, X_1] = X_3X_1 - X_1X_3 = -iX_2$$

- **Алгебра генераторов SO(3):**

$$[X_n, X_m] = -i\varepsilon_{nmk}X_k$$

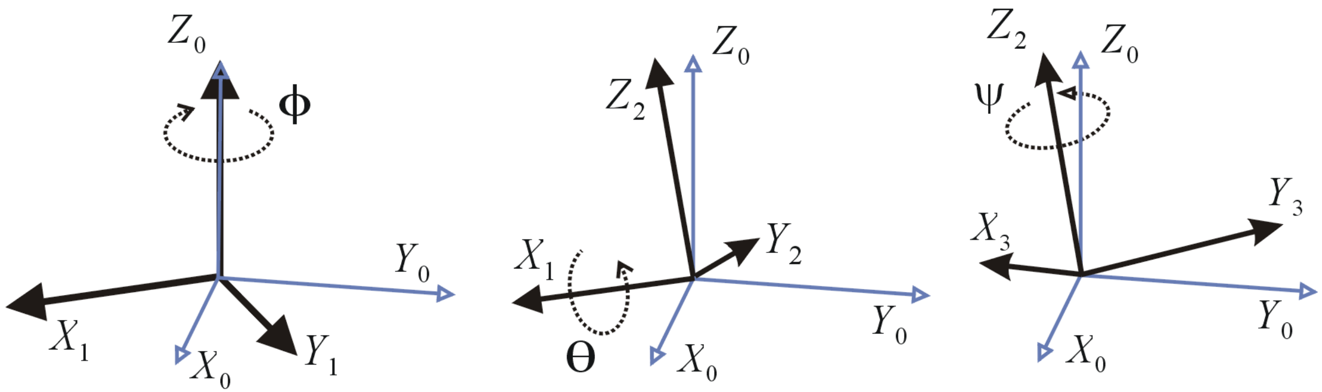
Замечание: $(X_n)_{ij} = i\varepsilon_{ijn}$, например

$$(X_1)_{ij} = i\varepsilon_{ij1} = i\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Очень Полезная Формула:

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{nmk} = \delta_{in}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jn}$$

Парамеризация 3 углами (Эйлер)



Рассмотрим изменение функции координат при их SO(3) вращении:

$$\vec{r} \to R_1(\phi)R_2(\theta)R_3(\varphi)\cdot\vec{r} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Инфинитеземальные вращения:

$$R_1(\delta\phi)\Big|_{\phi\ll 1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \delta\phi \\ 0 & -\delta\phi & 1 \end{pmatrix} \qquad R_2(\delta\theta)\Big|_{\theta\ll 1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\delta\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \delta\theta & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R_3(\delta\varphi)\Big|_{\varphi\ll 1} = \begin{pmatrix} 1 & \delta\varphi & 0 \\ -\delta\varphi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{r} \to R_1(\phi)R_2(\theta)R_3(\varphi)\cdot\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 & \delta\phi & -\delta\theta \\ -\delta\phi & 1 & \delta\varphi \\ \delta\theta & -\delta\varphi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+\Delta x \\ y+\Delta y \\ y+\Delta z \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\Delta x = y\ \delta\phi - z\ \delta\theta; \quad \Delta y = -x\ \delta\phi + z\ \delta\varphi; \quad \Delta z = x\ \delta\theta - y\ \delta\varphi}$$

Изменение произвольной функции координат при вращениях:

$$f(\vec{r}) \to f(O\vec{r}) = f(\vec{r} + \Delta\vec{r}) = f(\vec{r}) + \left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y} + \Delta z\frac{\partial}{\partial z}\right) f(\vec{r}) + \ldots$$

$$\Delta x = y\,\delta\phi - z\,\delta\theta; \quad \Delta y = -x\,\delta\phi + z\,\delta\varphi; \quad \Delta z = x\,\delta\theta - y\,\delta\varphi$$

$$\Delta f(\vec{r}) = \left(y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}\right)\delta\phi + \left(x\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial x}\right)\delta\theta + \left(z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z}\right)\delta\varphi$$

$$= \mathrm{L}_z\delta\phi + L_y\delta\theta + L_x\delta\varphi$$

Операторы углового момента в квантовой механике:

$$L_z = i\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}\right); \quad L_y = i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial x}\right); \quad L_x = i\hbar\left(z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

Алгебра дифференциальных операторов углового момента:

$$\boxed{[L_i, L_j] = -i\hbar\varepsilon_{ijk}L_k, \qquad \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times (i\hbar\nabla)}$$

Оператор Казимира

Напомним: Первая лемма Шура – матрица, коммутирующая со всеми матрицами irreps, кратна единичной.

- **Какая матрица коммутирует со всеми генераторами SO(3) вращений?**

$$\boxed{L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2; \qquad [L^2, L_i] = 0, \quad i = 1, 2, 3}$$

Оператор Казимира группы SO(3)

- **Лестничные операторы:** $L_\pm = L_x \pm i L_y, \qquad L_\pm^\dagger = L_\mp$

$$[L_z, L_\pm] = \pm L_\pm\,; \qquad [L_+, L_-] = 2L_z$$

- **Задача 1:** покажите, что $L^2 = L_z^2 + L_z + L_- L_+ = L_z^2 - L_z + L_+ L_-$

- **Задача 2:** покажите, что в сферических координатах

$$-L^2 = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

Группа SU(2) –группа специальных унитарных преобразований: $2\pi \neq 4\pi$!

$$SU(2) := \{g \in GL(2,\mathbb{C}), gg^\dagger = \mathbb{I}_2, \quad \det\, g = 1\}$$

$$g \in SU(2) \longrightarrow U = \begin{pmatrix} a^* & -b^* \\ b & a \end{pmatrix}, \qquad a, b \in \mathbb{C}, \qquad |a|^2 + |b|^2 = 1$$

Базис SU(2) – матрицы Паули :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- **Произведение:** $\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$
- **Коммутатор:** $[\sigma_i,\ \sigma_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$
- **Анти-коммутатор:** $\{\sigma_i, \sigma_j\} = \sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i = 2\delta_{ij}$

Замечание: $\sigma_1 = \frac{1}{2}(E_1 + E_2), \quad \sigma_2 = \frac{1}{2i}(E_1 - E_2), \quad \sigma_3 = H$

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Алгебра группы SU(N):

$$\det U = 1, \quad U = e^{aT}, \quad U \in G = SU(N), \quad T \in g = su(n)$$

Очень Полезная Формула: $\ln \det M = \mathrm{Tr} \ln M$

$$\ln \det M = \ln \det \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = \ln(\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n)$$

$$= \ln \lambda_1 + \ln \lambda_2 + \dots \ln \lambda_n = \mathrm{Tr} \ln \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = \mathrm{Tr} \ln M$$

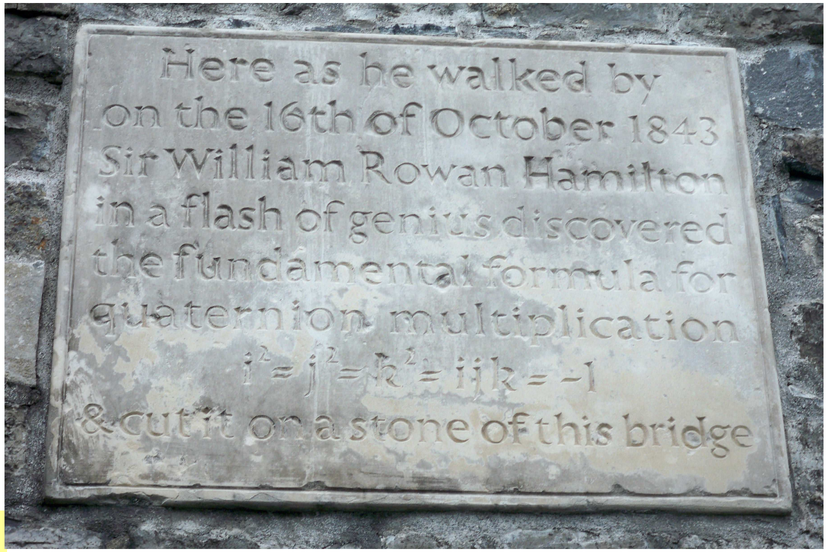
$$\det M = 1 \Rightarrow \ln \det M = 0 \Rightarrow \mathrm{Tr} \ln M = \mathrm{Tr} \ln e^{aT} = \mathrm{Tr}(aT) = a \mathrm{Tr}\, T$$

След любой матрицы алгебры группы $SU(N)$ равен 0

Алгебра кватернионов

Уильям Гамильтон

(1805-1865)



$$I = -i\sigma_1; \quad J = -i\sigma_2, \quad K = -i\sigma_3$$

- **Алгебра кватернионов:**

$$IJ = -JI = K, \quad JK = -KJ = I, \quad KI = -IK = J$$
$$I^2 = J^2 = K^2 = -1$$

SU(2) – мультипликативная подгруппа кватернионов

Алгебры Ли

Базис алгебры su(2) – операторы, связанные с матрицами Паули :

$$s_i = -\frac{i}{2}\sigma_i, \quad [s_i, s_j] = \varepsilon_{ijk} s_k$$

- ***Произвольное преобразование SU(2):*** $U(\vec{\omega}) = e^{\omega_i s_i} = e^{-i\frac{\omega_i}{2}\sigma_i} \in \ \mathrm{SU}(2)$

$$\omega_i \cdot \sigma_i = \omega_1\sigma_1 + \omega_2\sigma_2 + \omega_3\sigma_3 = \begin{pmatrix} \omega_3 & \omega_1 - i\omega_2 \\ \omega_1 + i\omega_2 & -\omega_3 \end{pmatrix}$$

- **Аксиальная параметризация вращений: задание единичного вектора** $\vec{n} = \{\sin\theta\cos\varphi, \ \ \sin\theta\sin\varphi, \ \ \cos\theta\}$**, задающего ось вращения, и угол поворота** ω **вокруг нее:** $\vec{\omega} = \omega\vec{n}$

$$U(\vec{n}) = e^{-i\frac{\omega}{2}n_i\cdot\sigma_i} = \cos\frac{\omega}{2} - i(n_i\cdot\sigma_i)\sin\frac{\omega}{2}$$

Проверка: $\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k \qquad (n_i\cdot\sigma_i)(n_j\cdot\sigma_j) = \delta_{ij}n_in_j = 1$

$$e^{-i\alpha(n_i\cdot\sigma_i)} = \sum_k \left(-i\alpha(n_i\cdot\sigma_i)\right)^k = \mathbb{I} - i\alpha(n_i\cdot\sigma_i) + \frac{1}{2}\left(-i\alpha(n_i\cdot\sigma_i)\right)^2 + \cdots =$$

$$= \mathbb{I}\left(1 - \frac{1}{2}\alpha^2 - \frac{1}{4!}\alpha^4 + \ldots\right) - i(n_i\cdot\sigma_i)\left(\alpha - \frac{1}{3!}\alpha^3 + \ldots\right) = \mathbb{I}\cos\alpha - i(n_i\cdot\sigma_i)\sin\alpha$$

Преобразование поворота вокруг третьей оси: $\vec{n} = (0,0,1)$

$$U(\vec{n}) = e^{-i\frac{\omega}{2}\sigma_3} = \cos\frac{\omega}{2} - i\sigma_3 \sin\frac{\omega}{2} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\omega}{2} - i\sin\frac{\omega}{2} & 0 \\ 0 & \cos\frac{\omega}{2} + i\sin\frac{\omega}{2} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\omega}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\omega}{2}} \end{pmatrix}$$

Подъем в алгебру: $\vec{V} = (V_1, V_2, V_3) \in \mathbb{R}^3, \ \mapsto V = V_k \cdot \sigma_k = \begin{pmatrix} V_3 & V_1 - iV_2 \\ V_1 + iV_2 & -V_3 \end{pmatrix}$

Преобразование SU(2):

$$V \to U(\omega) V U^{-1}(\omega) = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\omega}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\omega}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_3 & V_1 - iV_2 \\ V_1 + iV_2 & -V_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\frac{\omega}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\omega}{2}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} V_3 & (V_1 - iV_2)e^{-i\omega} \\ (V_1 + iV_2)e^{i\omega} & -V_3 \end{pmatrix}$$

- $(V_1 + iV_2) \to (V_1 + iV_2)e^{i\omega}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} V_1 \to V_1 \cos\omega - V_2 \sin\omega \\ V_2 \to V_1 \sin\omega + V_2 \cos\omega \end{cases}$

- **Группы SU(2) гомоморфна группе SO(3):** $f : SU(2) \mapsto SO(3)$

$\mathrm{Ker}\, f = ?$

$2\pi \neq 4\pi$!

$$U(\vec{n}) = e^{-i\frac{\omega}{2}n_i\cdot\sigma_i} = \mathbb{I}_2\cos\frac{\omega}{2} - i(n_i\cdot\sigma_i)\sin\frac{\omega}{2} \in \ \mathrm{SU}(2)$$

- **Групповая единица:** $U(\omega = 0) = \mathbb{I}_2$

$$U(\omega = 2\pi) = -\mathbb{I}_2, \quad U(\omega = 4\pi) = \mathbb{I}_2 \qquad \textbf{!}$$

Центр группы SU(2) состоит из двух элементов: $Z_2 = \{-\mathbb{I}_2, \mathbb{I}_2\}$

- ***Преобразование SU(2) – параметризация углами Эйлера:***

$$U(\varphi,\theta,\psi) = U_z(\varphi)U_y(\theta)U_z(\psi) = e^{i\frac{\varphi}{2}\sigma_3}e^{i\frac{\theta}{2}\sigma_2}e^{i\frac{\psi}{2}\sigma_3} =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{i\frac{}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & \sin\frac{\theta}{2} \\ -\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\frac{\psi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\psi}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2}e^{\frac{i}{2}(\psi+\varphi)} & \sin\frac{\theta}{2}e^{-\frac{i}{2}(\psi-\varphi)} \\ -\sin\frac{\theta}{2}e^{\frac{i}{2}(\psi-\varphi)} & \cos\frac{\theta}{2}e^{-\frac{i}{2}(\psi+\varphi)} \end{pmatrix}$$

Угловые параметры: $0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \psi \leq 4\pi$

- **Групповое пространство SU(2): сфера S^3**

Группа SO(3) изоморфна фактор группе SU(2)/Z_2

$$U(2\pi,0,0) = U(0,2\pi,0) = U(0,0,2\pi) = -\mathbb{I}$$

$$U(4\pi,0,0) = U(0,4\pi,0) = U(0,0,4\pi) = \mathbb{I}$$

Каждый элемент R группы SO(3) соответствует двум элементам группы SU(2) (двойная накрывающая группа): $f^{-1}(R) = \{U, -U\}$

Замечание: группа SU(2) содержит подгруппу U(1): $U(\alpha) = \begin{pmatrix} e^{-\frac{i}{2}\alpha} & 0 \\ 0 & e^{\frac{i}{2}\alpha} \end{pmatrix}$

Собственные вектора матриц SU(2) – *спиноры*:

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}, \quad \xi \to \xi' = U\xi, \quad U \in SU(2)$$

Базис: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Эрмитово скалярное произведение: $(\xi,\eta) \to (U\xi, U\eta) = (U^{\dagger}U\xi, \eta) = (\xi,\eta)$

Группа SU(3)

$$SU(3) := \{U \in SL(3,\mathbb{C}) | UU^\dagger = \mathbb{I}_3\}$$

- ***Размерность** группы d: число ее независимых элементов (число координат, параметризующих групповое пространство)*

GL(n, $\mathbb{R}$) $\rightarrow$ GL(n, $\mathbb{C}$) $\rightarrow$ SL(n, $\mathbb{R}$) $\rightarrow$

U(n) $\rightarrow$ SU(n) $\rightarrow$ SO(n) $\rightarrow$

Базис SU(3) – матрицы Гелл-Мана :

$$\left[\frac{\lambda_i}{2}, \frac{\lambda_j}{2}\right] = i f_{ijk}\frac{\lambda_k}{2}, \quad \mathrm{Tr}(\lambda_i\lambda_j) = \delta_{ij}$$

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

$$f_{123} = 1, \; f_{147} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = -f_{156} = -f_{367} = -\frac{1}{2}, \; f_{458} = f_{678} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

- **Ранг** группы k: число ее независимых диагональных (коммутирующих) элементов – поалгебра Картана H

$$H_{SU(3)} = \left(\frac{\lambda_3}{2}, \frac{\lambda_8}{2}\right)$$

Замечание: алгебра su(3) может быть представлена как 3 su(2) подалгебры $T_\pm = T_1 \pm iT_2, \quad V_\pm = V_1 \pm iV_2, \quad U_\pm = U_1 \pm iU_2$

$$T_1 = \frac{\lambda_1}{2}, \quad T_2 = \frac{\lambda_2}{2}, \quad T_3 = \frac{\lambda_3}{2},$$

$$V_1 = \frac{\lambda_4}{2}, \quad V_2 = \frac{\lambda_5}{2}, \quad V_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$U_1 = \frac{\lambda_6}{2}, \quad U_2 = \frac{\lambda_7}{2}, \quad U_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$Y = \frac{\lambda_8}{\sqrt{3}}$$ **Гиперзаряд**

- **Алгебра** (линейно зависимая, $U_3=-T_3+V_3$)

$$[T_3, T_\pm] = \pm T_\pm, \; [T_+, T_-] = 2T_3, \qquad [U_3, U_\pm] = \pm U_\pm, \; [U_+, U_-] = 2U_3 = \frac{3}{2}Y - T_3$$

$$[V_3, V_\pm] = \pm V_\pm, \quad [V_+, V_-] = 2V_3 = \frac{3}{2}Y + T_3$$

Представления групп и алгебр Ли

- ***Представление T группы G:*** ***отображение, ставящее элемент группы G в соответствие оператору T действующему в линейном векторном пространстве V в согласовании с групповыми аксиомами:***

- $T(a+b) = T(a) + T(b), \quad \forall a, b \in g, \quad T(a) \in V$
- $T(\alpha a) = \alpha T(a), \quad \forall a \in g, \quad \alpha \in \mathbb{C}$
- $T([a,b]) = [T(a), T(b)]$
- $T(\mathbb{I} + \epsilon a) \approx \mathbb{I} + \epsilon T(a)$

Замечание: не всякое представление группы генерирует представление алгебры

- **Действительное представление: V – действительное пространство**
- **Унитарное представление: $T(g)$ – унитарный оператор**

Замечание: для компактных групп Ли любое конечномерное представление эквивалентно унитарному представлению

- **Фундаментальное представление: неприводимое конечномерное представление группы G с матричной размерностью n**

$R_k \in SO(3) \rightarrow n=3$ $\quad$ $\sigma_k \in SU(2) \rightarrow n=2$ $\quad$ $\lambda_k \in SU(3) \rightarrow n=3$ $\quad$ $R_k \in SO(4) \rightarrow n=?$

Присоединенное представление группы Ли: *отображение, ставящее элемент U группы G в соответствие линейному оператору T(U), действующему в ее алгебре g:*

$$T(U)a := U\,a\,U^{-1}, \in g \quad \forall a \in g, \;\; U \in G$$

Преобразование элемента $U(a) = e^{at} = \mathbb{I} + at + \ldots$ ***группы G:***

$$U\,U(a)\,U^{-1} = U\,(\mathbb{I} + at + \ldots)\,U^{-1} = \mathbb{I} + tU\,a\,U^{-1} = e^{a't}, \quad a' = U\,a\,U^{-1} \in g$$

- **Композиция:** $T(U_1, U_2)\,a = (U_1U_2)\,a\,(U_1U_2)^{-1} = U_1U_2\,a\,U_2^{-1}U_1^{-1} =$

$$= U_1(U_2\,a\,U_2^{-1})U_1^{-1} = T(U_1)T(U_2)\,a$$

- **Действие оператора *T* определено коммутацией элементов алгебры**

$$T(U)\,b = U(a)\,b\,U^{-1}(a) = (\mathbb{I}+at+\ldots)\,b\,(\mathbb{I}-at+\ldots) = b+t[a,b]+\ldots \forall a,b \in g$$

Действие на генераторы группы: $T(t_i)t_j = T^{(i)}_{kj} t_k = [t_i, t_j] = f_{ijk}t_k$

⇒ **Матрицы присоединенного представления** $T^{(k)}_{ij}$ **заданы структурными константами группы:** $T^{(k)}_{ij} = f_{ijk}$