Матричные группы

- *Группа, элементами которой являются невырожденные матрицы, а групповой операцией – матричное умножение, называется* ***матричной группой***

- **Линейное векторное пространство $\mathcal{V}(\mathbb{K})$ над полем $\mathbb{K}$:**

$$\boxed{\forall\vec{v},\vec{w}\in\mathcal{V},\quad \vec{u}=\alpha\vec{v}+\beta\vec{w}\in\mathcal{V},\quad \forall\alpha,\beta\in\mathbb{K}}$$

Замечание: линейное векторное пространство имеет групповую структуру относительно операции сложения векторов, если $\forall\vec{v},\vec{u}\in\mathcal{V},\quad \alpha,\beta\in\mathbb{K}$

- $(\alpha+\beta)\vec{v}=\alpha\vec{v}+\beta\vec{v};\quad \alpha(\vec{v}+\vec{u})=\alpha\vec{v}+\beta\vec{u}:\quad (\alpha\beta)\vec{v}=\alpha(\beta\vec{v})$
- **0-вектор – единичный элемент:** $\vec{0}=0\vec{v},\quad \vec{u}+\vec{0}=\vec{u},\quad \forall\vec{v},\vec{u}\in\mathcal{V}(\mathbb{K})$

- **Базис n-мерного векторного пространства $\mathcal{V}(\mathbb{K})$ - набор n линейно независимых векторов** $\vec{e}_k,\quad k=1,2,\ldots n,\qquad \vec{v}=v_k\vec{e}_k$

Преобразования базиса векторного пространства: $T\cdot\vec{e}_k = \vec{e}_k T_{ki} = \vec{e}\,'_i$

T - Линейный оператор в пространстве $\mathcal{V}(\mathbb{K})$

$$T\cdot(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}) = \alpha(T\cdot\vec{x})+\beta(T\cdot\vec{y}) \qquad \forall\vec{x},\vec{y}\in\mathcal{V}(\mathbb{K}),\ \alpha,\beta\in\mathbb{K}$$

$$(\alpha T_1+\beta T_2)\cdot\vec{x} = \alpha(T_1\cdot\vec{x})+\beta(T_1\cdot\vec{x}) \qquad \forall\vec{x},\in\mathcal{V}(\mathbb{K}),\ \alpha,\beta\in\mathbb{K}$$

Каждому линейному оператору T в n-мерном пространстве $\mathcal{V}(\mathbb{K})$ соответствует квадратная матрица T_{nm} ⇒ ***матричная группа*** $GL(n,\mathbb{K})$

Билинейная форма $f(\vec{x},\vec{y})$ на пространстве $\mathcal{V}(\mathbb{K})$:

$$f(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y},\vec{z}) = \alpha f(\vec{x},\vec{z})+\beta f(\vec{y},\vec{z}) \qquad f(\vec{x},\alpha\vec{y}+\beta\vec{z}) = \alpha f(\vec{x},\vec{y})+\beta f(\vec{x},\vec{z})$$

В компонентной записи: $\vec{x}=x_i\vec{e}_i,\quad \vec{y}=y_j\vec{e}_j,\quad f(\vec{x},\vec{y})=x_iM_{ij}y_j,\quad M_{ij}=f(\vec{e}_i,\vec{e}_j)$

Любую билинейную форму $f(\vec{x},\vec{y})$ можно представить в виде суммы симметричной и антисимметричной форм:

$$f_s=\frac{1}{2}\left[f(\vec{x},\vec{y})+f(\vec{y},\vec{x})\right], \qquad f_a=\frac{1}{2}\left[f(\vec{x},\vec{y})-f(\vec{y},\vec{x})\right]$$

- **Скалярное произведение в $\mathcal{V}(\mathbb{K})$: невырожденная симметричная билинейная форма f_s**

- **Симплектическая форма в $\mathcal{V}(\mathbb{K})$: невырожденная антисимметричная билинейная форма f_a**

- **<u>Эрмитова</u> форма f_H на комплексном пространстве $\mathcal{V}(\mathbb{C})$:**

$$f_H(\vec{x},\vec{y}) = f^*(\vec{y},\vec{x}), \quad \forall \vec{x},\vec{y} \in \mathcal{V}(\mathbb{C})$$

Эрмитова форма линейна по второму аргументу и сопряженно-линейна по первому аргументу:

$$f_H(\vec{x},\alpha\vec{y}+\beta\vec{z}) = \alpha f_H(\vec{x},\vec{y}) + \beta f_H(\vec{x},\vec{z}) \qquad f_H(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y},\vec{z}) = \alpha^* f_H(\vec{x},\vec{z}) + \beta^* f_H(\vec{y},\vec{z})$$

- ***Матрицы базисных форм:*** $M_{ij} = f(\vec{e}_i,\vec{e}_j) \in GL(n,\mathbb{K})$

- **Матрица симметричной формы - метрика**

Условие инвариантности билинейной формы относительно действия линейного оператора ***T:*** $f(T\cdot\vec{x},T\cdot\vec{y}) = f(\vec{x},\vec{y}), \quad \forall \vec{x},\vec{y} \in \mathcal{V}(\mathbb{C})$

$$T\cdot\vec{e}_k = \vec{e}_k T_{ki} = \vec{e}_i' \Rightarrow \qquad T_{ki}M_{km}T_{mj} = M_{ij}, \qquad T^T\cdot M\cdot T = M$$

- **<u>Преобразования ортогональной группы:</u>** $O^T\cdot O = \mathbb{I}_n, \quad O \in O(n,\mathbb{C})$

Группа комплексных симплектических матриц $M \in Sp(2n,\mathbb{C})$:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}, \qquad M^T \cdot J \cdot M = J$$

Группа линейных преобразований сохраняющих антисимметричную билинейную форму: $f(\vec{x},\vec{y}) = z_i J_{ij} y_j$

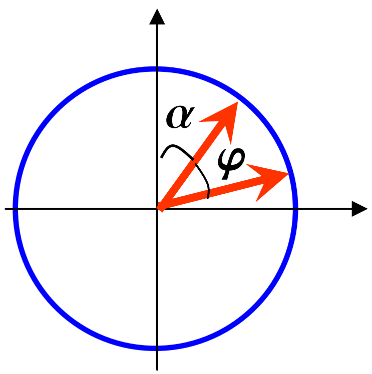
Группа комплексных унитарных комплексных матриц $U \in U(n)$:

$$U^\dagger \cdot U = \mathbb{I}_n, \quad U^\dagger = (U^*)^T = U^{-1}$$

Специальная унитарная группа SU(n): $\det \mathrm{U} = \mathbb{I}_\mathrm{n}$

Пример: группа U(1)

$$z = x + iy, \quad |z| = 1, \quad z = e^{i\alpha}$$



α – параметр группы

$$U = e^{i\varphi} \in U(1), \quad Uz = z' = z^{i(\alpha+\phi)}$$

Замечание: в группе *SU(n)* имеется Z_n подгруппа корней из единицы

$$z^n = 1, \quad z = \exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, \ldots n-1$$

Матричные группы: O(2) и SL(2,2)

$$\left\{ \begin{array}{lll} e=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}; & a=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}; & b=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix} \\ c=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}; & d=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}; & f=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} \end{array} \right\}$$

Матричная группа с операцией умножения по модулю 2:

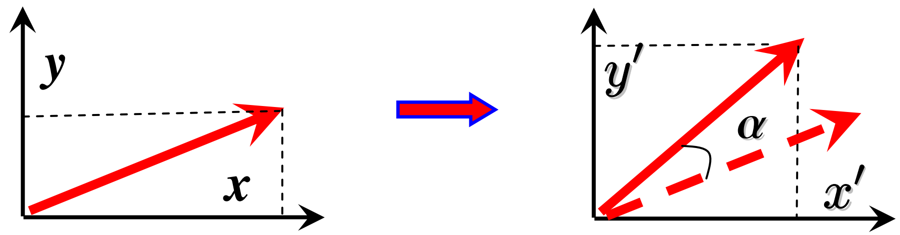
$$2=0 \mod 2$$

$$a\cdot b=$$

SL(2,2)	e	a	b	c	d	f
e	e	a	b	c	d	f
a	a	b	e	f	c	d
b	b	e	a	d	f	c
c	c	d	f	e	a	b
d	d	f	c	b	e	a
f	f	c	d	a	b	e

$$\boxed{D_3 \cong S_3 \cong SL(2,2)}$$

- ***Поворот вектора в*** $\mathbb{R}^2$ **:**

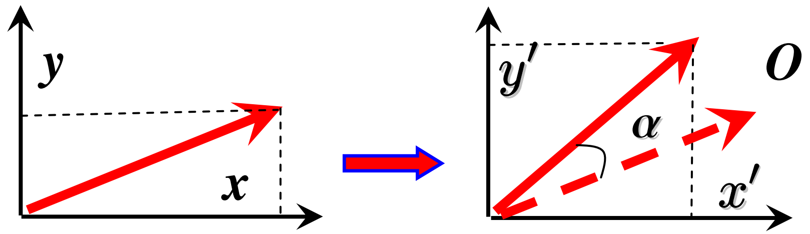


$$\vec{r} \to R\cdot\vec{r} = \begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\cos\alpha + y\sin\alpha\\ -x\sin\alpha + y\cos\alpha\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \vec{r}'$$

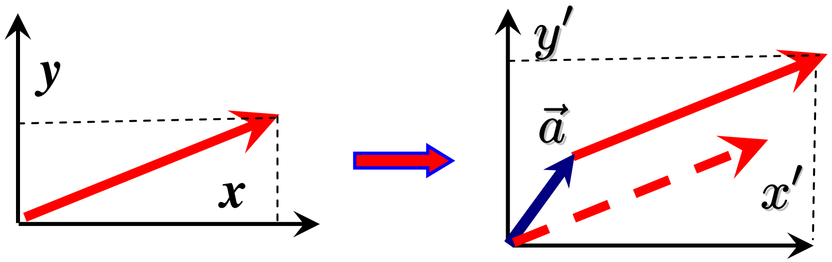
- Матрица преобразований ортогональной группы O(2)

Пространственные симметрии

- *Поворот вектора в* $\mathbb{R}^2$ *:*



- *Трансляция вектора в* $\mathbb{R}^2$ *:*



Замечание: Трансляции и повороты вектора $\vec{V} \in \mathbb{R}^2$ не коммутируют:

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}, \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$$

$$R: \ \vec{V} = \begin{pmatrix} v_x \cos\alpha + v_y \sin\alpha \\ -v_x \sin\alpha + v_y \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad TR: \ \vec{V} = \begin{pmatrix} v_x \cos\alpha + v_y \sin\alpha + a_x \\ -v_x \sin\alpha + v_y \cos\alpha + a_y \end{pmatrix}$$

$$T: \ \vec{V} = \begin{pmatrix} v_x + a_x \\ v_y + a_y \end{pmatrix}, \quad RT: \ \vec{V} = \begin{pmatrix} (v_x + a_x)\cos\alpha + (v_y + a_y)\sin\alpha \\ -(v_x + a_x)\sin\alpha + (v_y + a_y)\cos\alpha \end{pmatrix}$$

E(2) - Группа движений евклидова пространства $\mathbb{R}^2$ (*евклидова группа*)

Преобразования группы движений не меняют углы и расстояния между точками

Полупрямое произведение

- **Элемент евклидовой группы E(2):** $g = (R, \vec{a}) \in E(2), \quad R \in O(2), \quad \vec{a} \in T$
  Группа вращений O(2) и группа трансляций T являются подгруппами E(2)

Замечание 1: **Действие группы вращений O(2) определяет автоморфизм пространства $\mathbb{R}^2$ как гомоморфизм** $f : O(2) \to \mathrm{Aut}\, \mathbb{R}^2$

Обратное преобразование E(2): $g^{-1} = (R, \vec{a})^{-1} = (R^{-1}, -R^{-1}\vec{a}) \in E(2)$

Групповая единица E(2): $e = (\mathbb{I}, \vec{0}) \in E(2)$

- **Рассмотрим два последовательных преобразования из группы E(2):**

$$g \cdot g' = (R, \vec{a}) \cdot (R', \vec{a}\,') = (RR', \vec{a} + R\vec{a}\,') \in E(2)$$

Напомним: ***Если для любых элементов*** $h \in H$ ***и*** $g \in G$ ***выполняется условие*** $g \cdot h \cdot g^{-1} \in H \subset G$***, то H является нормальной подгруппой G***

Замечание 2: **Группа трансляций *T* является нормальной подгруппой E(2)**

$$(R, \vec{a}) \cdot (\mathbb{I}, \vec{a}\,') \cdot (R^{-1}, -R^{-1}\vec{a}) = (\mathbb{I}, R\vec{a}\,')$$

- Группа E(2) построена как ***полупрямое*** произведение группы вращений O(2) и группы трансляций T: $E(2) = O(2) \rtimes T$

В полупрямом произведении каждый элемент E(2) строится как композиция преобразований вращения и трансляций, $g = (R, \vec{a}) \in E(2)$ но при последовательном действии двух преобразований

$$\boxed{g \cdot g' = (R, \vec{a}) \cdot (R', \vec{a}\,') = (RR', \vec{a} f(R)(\vec{a}\,')) \in E(2)}$$

$$f : O(2) \to \ \mathrm{Aut}\ \mathbb{R}^2$$

Вопрос: как записать $g^{-1} = (R \cdot \vec{a})^{-1}$?

Подсказка: $g \cdot g^{-1} = (e_R, e_T)$

$$g^{-1} = (R^{-1},\ [f(R^{-1})(\vec{a})]^{-1})$$

- **В общем случае :** $\forall \chi \in G,\ \xi \in K, \quad (\chi, \xi) \in G \rtimes K$ **если**

$$(\chi, \xi) \cdot (\chi', \xi') = (\chi \cdot \chi',\ \xi \cdot \chi(\xi'))$$

Замечание: при тривиальном действии G на K: $\chi(\xi') = \xi'$

полупрямое произведение редуцируется до прямого произведения

Теория представлений

Представление группы G:
Отображение ее элементов на пространство матричных операторов, действующих на некотором линейном векторном пространстве $\mathcal{V}(\mathbb{K})$

$$\boxed{\forall g \in G \quad \exists D^{(n)}(g) \in GL(n, \mathbb{C})}$$

- **Представление группы – это гомоморфизм:** $D^{(n)}(g) D^{(n)}(g') = D^{(n)}(g \cdot g')$

- **Эквивалентные представления:**

$D^{(n)}(g) \sim \tilde{D}^{(n)}(g)$ **если** $\exists S \in GL(n, \mathbb{C}), \quad S^{-1} D^{(n)}(g) S, \quad \forall g \in G$

Напомним: Соотношение эквивалентности: $a \sim b$ **, если**

- $a \sim a$ **- рефлективность**
- $a \sim b \Longrightarrow b \sim a$ **- симметрия**
- **Если** $a \sim b$, **и** $b \sim c$, **то** $a \sim c$ **- транзитивность**

- **Характер представления:**

$$\chi = \mathrm{Tr}\ D^{(n)}(g), \quad \mathrm{Tr}\ (S^{-1} D^{(n)}(g) S) = \mathrm{Tr}\ (S S^{-1} D^{(n)}(g)) = \mathrm{Tr}\ D^{(n)}(g) = \chi$$

Теория представлений

Приводимые и неприводимые представления:

- Пусть $D^{(n)}(G)$ - представление группы G, действующее на векторном пространстве $\mathcal{V}$. Подпространство $\mathcal{V}'$ называется ***инвариантным***, если

$$D^{(n)}(g)\vec{v} \in \mathcal{V}' \qquad \forall \vec{v} \in \mathcal{V}'$$

- Представление $D^{(n)}(G)$ называется ***неприводимым***, если в векторном пространстве $\mathcal{V}$ не содержится нетривиальных подпространств $\mathcal{V}' \subset \mathcal{V}$
В противном случае представление называется ***приводимым***

$$D^{(n)}(g) = \left(\begin{array}{c|c} D^{(m)}(g) & C^{(m,k)}(g) \\ \hline 0 & D^{(k)}(g) \end{array} \right)$$

- **Теорема Машке:** матрица представления любой конечной группы, с точностью до преобразования подобия $D^{(n)}(g) \sim S^{-1}D^{(n)}(g)S$, может быть преобразована к блочно-диагональному виду (полностью приводимое представление)

$$D^{(n)}(g) = D^{(n_1)}(g) \oplus D^{(n_2)}(g) \oplus \ldots D^{(n_k)}(g), \quad n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$$

Полярная декомпозиция

Произвольная матрица $A \in GL(n,\mathbb{C})$ **может быть представлена как произведение эрмитовой матрицы H и унитарной матрицы U:**

$$A = H\,U, \quad H^\dagger = H, \quad U^\dagger U = \mathbb{I}_n$$

Доказательство: **рассмотрим матрицу** $X = AA^\dagger$**, которая** ***эрмитова*** **по определению:** $X^\dagger = (AA^\dagger)^\dagger = (A^\dagger)^\dagger A^\dagger = AA^\dagger = X$

- **Эрмитова матрица** $X = AA^\dagger$ **всегда может быть диагонализирована подходящим унитарным преобразованием:**

$X = AA^\dagger = VD^2V^\dagger = H^2$**, где** $\boldsymbol{D}$ **– диагональная матрица и**

$H = VDV^\dagger$ **- эрмитова матрица** ⇒ $(H^{-1}A)(A^\dagger H^{-1}) = \mathbb{I}_n$

⇒ **Матрица** $H^{-1}A$ **- унитарна**

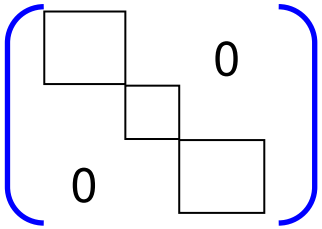
- **Пример:** $z = \rho e^{i\varphi}$

Леммы Шура

Исай Шур (1875-1941)

- **Основная задача теории представлений групп: определить, является ли данное матричное представление какой-то группы приводимым, и если нет, то найти соответствующее неприводимое представление.** *«irreps»*

$$\begin{pmatrix} a_{11}\; a_{12} \ldots \ldots a_{1n} \\ a_{21}\; a_{22} \ldots \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\; a_{n2} \ldots \ldots a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow$$



Лемма Шура 1: **любая матрица, коммутирующая со всеми матрицами неприводимого представления $D(g)$, является кратной единичной матрице:**

$$\boxed{MD(g) = D(g)M, \quad \forall g \in G \quad \Longrightarrow M = \lambda \mathbb{I}}$$

- **Замечание:** любое представление конечной группы G эквивалентно *унитарному* представлению: $S^{-1}D(g)S = U \quad \forall g \in G$, где $U^{\dagger}U = \mathbb{I}$

Доказательство: **рассмотрим матрицу** $H = \sum_{g \in G} D^{\dagger}(g)D(g)$ **которая** ***эрмитова*** **по определению:** $H = H^{\dagger}$

Эрмитова матрица $H = \sum D^\dagger(g)D(g)$ **всегда может быть диагонализирована подходящим унитарным преобразованием:**

$$V^\dagger H V = \Lambda = \text{ diag } (\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n), \qquad V^\dagger V = \mathbb{I}$$

Рассмотрим матрицу $\tilde{D}(g) = V^\dagger D(g) V$ **, используя ее запишем**

$$V^\dagger H V = V^\dagger \left(\sum_g D^\dagger(g) D(g) \right) V = \sum_g \overbrace{\left(V^\dagger D^\dagger(g) V\right) \left(V^\dagger}^{\mathrm{I}} D(g) V\right) =$$

$$= \sum_g \tilde{D}^\dagger(g) \tilde{D}(g) = \Lambda$$ **- диагональная матрица,** $$\lambda_k = \sum_g \sum_{i=1}^n |\tilde{D}_{ik}(g)|^2 \geq 0$$

Определим вспомогательную матрицу $A(g) = \Lambda^{1/2} \tilde{D}(g) \Lambda^{-1/2}$

Замечание: **матрица *A(g)* является унитарной:**

$$\Lambda = \sum_{g'} \tilde{D}^\dagger(g') \tilde{D}(g')$$

$$A^\dagger(g) A(g) = \left(\Lambda^{-1/2} \tilde{D}^\dagger(g) \Lambda^{1/2}\right) \left(\Lambda^{1/2} \tilde{D}(g) \Lambda^{-1/2}\right) = \Lambda^{-1/2} \tilde{D}^\dagger(g) \Lambda \tilde{D}(g) \Lambda^{-1/2} =$$

$$\Lambda^{-1/2} \sum_{g'} \underbrace{\tilde{D}^\dagger(g) \tilde{D}^\dagger(g')}_{\tilde{D}^\dagger(h)} \underbrace{\tilde{D}(g') \tilde{D}(g)}_{\tilde{D}(h),} \Lambda^{-1/2} = \Lambda^{-1/2} \sum_h \tilde{D}^\dagger(h) \tilde{D}(h) \Lambda^{-1/2} = \mathbb{I}$$

$$h = gg' \in G$$

- **In summary:** мы показали, что матрица $A(g) = S^{-1}D(g)S$, где $S = V\Lambda^{-1/2}$ является унитарной для всех элементов группы *G*
- **Ergo:** без ограничения общности можно рассматривать *унитарные* матрицы неприводимого представления группы *G.*

- **Возвращаемся к первой лемме Шура: рассмотрим матрицу M, коммутирующую с унитарной матрицей D**

$$MD(g) = D(g)M$$

$$\Downarrow$$

$$(MD(g))^{\dagger} = (D(g)M)^{\dagger}$$

$$D^{\dagger}(g)M^{\dagger} = M^{\dagger}D(g)^{\dagger}$$

$$D(g)\left(D^{\dagger}(g)M^{\dagger}\right)D(g) = D(g)\left(M^{\dagger}D(g)^{\dagger}\right)D(g)$$

$$M^{\dagger}D(g) = D(g)M^{\dagger}$$

$$\Rightarrow (M + M^{\dagger})D(g) = D(g)(M + M^{\dagger}), \quad \boxed{H_{+}D(g) = D(g)H_{+}}$$

Замечание: матрицы $H_{+} = (M + M^{\dagger}),\ H_{-} = i(M - M^{\dagger})$ - эрмитовы, то есть их всегда можно диагонализировать, $V^{\dagger}H_{\pm}V = \Lambda$, и перейти к эквивалентному представлению $\tilde{D}(g) = V^{\dagger}D(g)V$:

$$\boxed{\tilde{D}(g)\Lambda = \Lambda\tilde{D}(g)}$$

$$\tilde{D}(g)\Lambda = \Lambda\tilde{D}(g) \Rightarrow \tilde{D}_{ij}\Lambda_{jj} = \Lambda_{ii}\tilde{D}_{ij}, \quad \tilde{D}_{ij}(\Lambda_{jj} - \Lambda_{ii}) = 0$$

- **Случай 1:** все собственные значения совпадают, $\Lambda_{ii} = \lambda, \quad \forall i = 1, 2, \ldots n$
- **Случай 2:** некоторые собственные значения совпадают,

$$\Lambda_{kk} = \lambda, \quad \forall k = 1, 2 \ldots m < n \Rightarrow D(g) = \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$$

Q.E.D

Задача: найти унитарную матрицу V, диагонализирующую матрицу

$$M = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Лемма Шура 2: рассмотрим два различных неприводимых представления группы G, $D^{(n)}(g), \ D^{(m)}(g)$, размерности n и m. Тогда, если $D^{(n)}M = MD^{(m)}$, где M – матрица размерности $n \times m$, то

- $n \neq m, \Rightarrow M = 0$
- $n = m, \Rightarrow M = 0$, или представления $D^{(n)}(g), \ D^{(m)}(g)$ эквивалентны

Доказательство:

$$D^{(n)}(g)M = MD^{(m)}(g)$$

$$\left(D^{(n)}(g)M\right)^{\dagger} = \left(MD^{(m)}(g)\right)^{\dagger}$$

$$M^{\dagger}D^{(n)\dagger}(g) = D^{(m)\dagger}(g)M^{\dagger}$$

$$M^{\dagger}D^{(n)^{-1}}(g) = D^{(m)^{-1}}(g)M^{\dagger}$$

$$MM^{\dagger}D^{(n)^{-1}}(g) = MD^{(m)^{-1}}(g)M^{\dagger}$$

$$MM^{\dagger}D^{(n)}(g^{-1}) = MD^{(m)}(g^{-1})M^{\dagger}$$

$$\boxed{MM^{\dagger}D^{(n)}(g^{-1}) = D^{(n)}(g^{-1})MM^{\dagger}}$$

Напомним: матрица $D^{(n)}(g)$ - irreps, тогда по лемме Шура 1 $MM^{\dagger} = \lambda\mathbb{I}$

- **Случай 2:** размерности представлений совпадают, *n=m*

$$|MM^{\dagger}| = |\lambda\mathbb{I}|, \quad |M||M^{\dagger}| = ||M||^2 = |\lambda|^n \qquad |M| \neq 0$$

- Если $\lambda \neq 0$ то существует обратная матрица M^{-1}. Тогда

$M^{-1}\left(D^{(n)}M\right) = M^{-1}\left(MD^{(n)}\right) = D^{(n)}$ ⟹ Представления $D^{(n)}, D^{(m)}$ эквивалентны

- Если $\lambda = 0$ то матрица M - нулевая.

- **Случай 1:** **размерности представлений не совпадают,** $n \neq m$

M – прямоугольная матрица размерности $n \times m$

$$M = \underbrace{\begin{pmatrix} \overbrace{m \times m}^{m} & \Bigg| & \end{pmatrix}}_{n} \;\Rightarrow\; N = \left.\underbrace{\begin{pmatrix} M \\ \hline 0\;\;0\;\;0\;\;0\;\;0\ldots 0\;0\;0 \end{pmatrix}}_{n}\right\} n$$

$$NN^\dagger = MM^\dagger = \lambda \mathbb{I}$$

$$NN^\dagger = \lambda \mathbb{I}, \quad |NN^\dagger| = \lambda^n, \quad |N| = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = 0, \;\Rightarrow\; N = 0, \;\Rightarrow\; M = 0$$

Q.E.D

Леммы Шура $\Rightarrow$ **Теорема Ортогональности:**

Элементы матриц $D_{ij}^{(n)}(g)$ **неприводимого** d_n**-мерного представления конечной группы G удовлетворяют соотношениям ортогональности**

$$\sum_{g \in G} \left(D_{ij}^{(n)}\right)^* D_{kl}^{(m)} = \frac{|G|}{d_n} \delta_{nm} \delta_{ik} \delta_{jl}$$

Доказательство:

- **Рассмотрим матрицу** $M = \sum_g D^{(n)}(g) X D^{(m)}(g^{-1})$ **,** $n \neq m$

где X**– вспомогательная произвольная матрица размерности** $n \times m$

- **Покажем что эта матрица удовлетворяет второй лемме Шура:**

$$
\begin{aligned}
\boxed{D^{(n)}(g')M} &= \sum_g D^{(n)}(g')D^{(n)}(g)XD^{(m)}(g^{-1}) \\
&= \sum_g D^{(n)}(g')D^{(n)}(g)XD^{(m)}(g^{-1})D^{(m)}(g'^{-1})D^{(m)}(g') \\
&= \sum_g D^{(n)}(g'g)XD^{(m)}(g^{-1}g'^{-1})D^{(m)}(g') \\
&= \sum_g D^{(n)}(g'g)XD^{(m)}((g'g)^{-1})D^{(m)}(g') \\
&= \sum_g D^{(n)}(g)XD^{(m)}(g^{-1})D^{(m)}(g') \\
&= \sum_g \left[D^{(n)}(g)X\left(D^{(m)}(g)\right)^{-1}\right] D^{(m)}(g') = \boxed{MD^{(m)}(g')}
\end{aligned}
$$

- $n \neq m$ $\Rightarrow$ **матрица M нулевая, M=0**

$$M=\sum_g D^{(n)}(g)XD^{(m)}(g^{-1})=\sum_g\sum_{kl}D^{(n)}_{ik}(g)X_{kl}D^{(m)}_{lj}(g^{-1})=0$$

Напомним: матрица X – произвольная, например можно взять $X_{kl}=\delta_{ks}\delta_{lt}$

$$M=\sum_g\sum_{kl}D^{(n)}_{ik}(g)\delta_{ks}\delta_{lt}D^{(m)}_{lj}(g^{-1})=\sum_g D^{(n)}_{is}(g)D^{(m)}_{tj}(g^{-1})$$

$$=\sum_g D^{(n)}_{is}(g)\left(D^{(m)}_{tj}(g)\right)^{-1}=\sum_g D^{(n)}_{is}(g)\left(D^{(m)}_{tj}(g)\right)^{\dagger}$$

$$=\sum_g D^{(n)}_{is}(g)\left(D^{(m)}_{jt}(g)\right)^{*}=0$$

$n=m$ **первая лемма Шура:** $\boxed{X_{kl}=\delta_{ks}\delta_{lt}}$

$$M_{ij}=\alpha\delta_{ij}=\sum_g\sum_{kl}D^{(n)}_{ik}(g)X_{kl}D^{(n)}_{lj}(g^{-1})=\sum_g D^{(n)}_{is}(g)D^{(n)}_{tj}(g^{-1})$$

$$=\sum_g D^{(n)}_{is}(g)\left(D^{(n)}_{tj}(g)\right)^{-1}$$

Рассмотрим диагональные элементы *матрицы M*, *i=j* и просуммируем по *i*:

$$\alpha\sum_i^n\delta_{ii}=\sum_g\sum_i^n D^{(n)}_{is}(g)\left(D^{(n)}_{ti}(g)\right)^{-1}=\sum_g D^{(n)}_{st}(e)=|G|\delta_{st}\ \Rightarrow\ \boxed{\alpha=\frac{|G|}{d_n}\delta_{st}}$$

Теорема Ортогональности:

Элементы матриц $D^{(n)}_{ij}(g)$ неприводимого n-мерного представления конечной группы G удовлетворяют соотношениям ортогональности

$$\boxed{\sum_g D^{(n)}_{is}(g)\left(D^{(n)}_{jt}(g)\right)^* = \frac{|G|}{d_n}\delta_{ij}\delta_{st}}$$

Замечание: эта формула напоминает обычное скалярное произведение векторов, компоненты которых – это $D^{(n)}(g)$, в $|G|$-мерном пространстве

Следствие: число компонент вектора не может быть больше размерности пространства: $\sum_n d_n^2 \leq |G|$

- **Учитывая ортогональность матриц представлений разной размерности:**

$$\boxed{\sum_{g\in G}\left(D^{(n)}_{is}\right)^* D^{(m)}_{jt} = \frac{|G|}{d_n}\delta_{nm}\delta_{ij}\delta_{st}}$$

Q.E.D

$$\sum_{g\in G} \left(D_{is}^{(n)}\right)^* D_{jt}^{(m)} = \frac{|G|}{d_n}\delta_{nm}\delta_{ij}\delta_{st}$$

- Теорема ортогональности сформулирована для векторов, построенных из [i,j]-элементов матриц неприводимого представления группы G.

- Размерность пространства, в котором определены эти вектора, равняется порядку группы |G|.

- Число таких ортогональных векторов определяется как числом irreps N_k, так и их размерностью d_k, всего имеется $\sum_k N_k d_k^2$ векторов

- Ортогональными являются не только вектора, соответствующие различным irreps, но и вектора соответствующие различным элементам матрицы одного и того же irrep

- Длина каждого такого вектора равна $|G|/d_k$

- **Домашнее задание: проверить эти утверждения на примере группы D_3**

Теорема ортогональности для характеров

- **Напомним:** характер представления: $\chi = \mathrm{Tr}\, D^{(n)}(g) = \mathrm{Tr}\,(S^{-1}D^{(n)}(g)S)$

- **Теорема ортогональности:**

$$\sum_{g\in G}\left(D_{is}^{(n)}\right)^{*} D_{jt}^{(m)} = \frac{|G|}{d_n}\delta_{nm}\delta_{ij}\delta_{st}$$

$s = i,\ t = j$

$$\Longrightarrow \sum_{g}\chi^{(n)*}(g)\chi^{(m)}(g) = \frac{|G|}{d_n}\delta_{nm}\sum_{ij}\delta_{ij}\delta_{ij} = |G|\delta_{nm}$$

Замечание: от суммирования по элементам группы $g \in G$ можно перейти к суммированию по классам эквивалентности c_k (N_k – число класов):

$$\sum_{g}\chi^{(n)*}(g)\chi^{(m)}(g) = \sum_{k}N_k\chi^{(n)*}(c_k)\chi^{(m)}(c_k) = |G|\delta_{nm}$$

Следствие: число irreps не может быть больше числа классов эквивалентности

- **Теорема:** $\sum_{n} d_n^2 = |G|$

Доказательство: Рассмотрим *регулярное* представление элемента g_i:

$$D_{jk}(g_i) = \begin{cases} 1, & \text{if } g_j^{-1}\cdot g_k = g_i \\ 0, & \text{if } g_j^{-1}\cdot g_k \neq g_i \end{cases}$$

Регулярное представление группы D_3

D_3	e	a	b	c	d	f
e	e	a	b	c	d	f
a	a	b	e	f	c	d
b	b	e	a	d	f	c
c	c	d	f	e	a	b
d	d	f	c	b	e	a
f	f	c	d	a	b	e

- **Задача:** построить регулярное представление нормальной подгруппы

$$H \simeq S_2 = \{e, a, b\} \subset D_3$$

$$D_{jk}(g_i) = \begin{cases} 1, & \text{if } g_j^{-1} \cdot g_k = g_i \\ 0, & \text{if } g_j^{-1} \cdot g_k \neq g_i \end{cases}$$

$$g_1^{-1} \cdot g_1 = e \cdot e = e$$
$$g_1^{-1} \cdot g_2 = e \cdot a = a$$
$$g_1^{-1} \cdot g_3 = e \cdot b = b$$

$$D_{11}(e) = 1, \quad D_{11}(a) = 0, \quad D_{11}(b) = 0$$
$$D_{12}(e) = 0, \quad D_{12}(a) = 1, \quad D_{12}(b) = 0$$
$$D_{13}(e) = 0, \quad D_{13}(a) = 0, \quad D_{13}(b) = 1$$

$$g_2^{-1} \cdot g_1 = b \cdot e = b$$
$$g_2^{-1} \cdot g_2 = b \cdot a = e$$
$$g_2^{-1} \cdot g_3 = b \cdot b = a$$

$$g_3^{-1} \cdot g_1 = a \cdot e = a$$
$$g_3^{-1} \cdot g_2 = a \cdot a = b$$
$$g_3^{-1} \cdot g_3 = a \cdot b = e$$

$$D_{jk}(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D_{jk}(a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D_{jk}(b) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Домашнее задание: **проверить, что это действительно представление группы G, то есть выполняется условие :**

$$\sum_k D_{jk}(g_i) D_{kl}(g_m) = D_{jl}(g_n) \quad \text{iff} \quad g_i \cdot g_m = g_n$$

	e	g_1	g_2	$\dots$	g_n
e	e				
g_1^{-1}		e			
g_2^{-1}			e		
$\dots$					
g_n^{-1}					e

Характер регулярного представления:

$$\chi(g_i) = \sum_{j=1}^{d_n} D_{jj}(g_i) = d_h \quad \text{if} \quad g_i = e$$
$$= 0, \quad \text{if} \quad g_i \neq e$$

Замечание: **ортогональный базис в пространстве характеров представлений задан характерами irreps** $\chi^{(n)}(g_i)$ **:** $\Rightarrow$ $\chi(g_i) = \sum_n c_n \chi^{(n)}(g_i))$

Используя соотношения ортогональности:

$$\sum_g \left(\chi^{(n)}(g)\right)^* \chi^{(m)}(g) = |G|\delta_{nm} \quad \Rightarrow \quad c_n = \frac{1}{|G|}\sum_i \left(\chi^{(n)}(g_i)\right)^* \chi(g_i)$$

$$\chi^{(n)}(e) = d_n, \quad \chi(e) = |G|, \quad \chi(g_i \neq e) = 0 \quad \Rightarrow \quad c_n = d_n$$

каждое irreps появляется в регулярном представлении d_n раз

Так как $|G| = \sum_n c_n d_n$ **, то** $\boxed{|G| = \sum_n d_n^2}$

- **Теорема ортогональности характеров I:**

$$\sum_g \chi^{(m)*}(g)\chi^{(n)}(g) = |G|\delta_{mn}$$

($|G|$ – порядок группы)

- **Теорема ортогональности характеров II :**

$$\sum_n \chi^{(n)*}(c_k)\chi^{(n)}(c_l) = \frac{|G|}{N_k}\delta_{kl}$$

(N_k – число класов эквивалентности)

Замечание: эти соотношения напоминают скалярное произведение векторов:

$$\left\{\chi^{(m)}(g_1),\ \chi^{(m)}(g_2),\ \ldots\chi^{(m)}(g_{|G|})\right\}, \qquad \left\{\chi^{(n)}(g_1),\ \chi^{(n)}(g_2),\ \ldots\chi^{(n)}(g_{|G|})\right\}$$

размерность пространства в первом случае равна $|G|$. Во втором случае вектора $N_k^{1/2}\chi_k^{(n)}$ задают ортогональный базис в пространстве, размерность которого равна числу irreps.

Следствие – число irreps равно числу классов эквивалентности N_k

- **irreps любой конечной группы полностью определяются заданием их характеров. Два различных irreps не могут иметь одинаковый набор** $\chi^{(n)}(c_k)$

Соотношения ортогональности: сводка результатов

- Теорема ортогональности неприводимых представлений группы G:

$$\sum_{i=1}^{|G|} \left(D_{is}^{(n)}(g_i)\right)^* D_{jt}^{(m)}(g_i) = \frac{|G|}{d_n}\delta_{nm}\delta_{ij}\delta_{st}$$

- Условия полноты набора неприводимых представлений:

$$\sum_{n=1}^{N_k}\sum_{\mu\nu} \left(D_{\mu\nu}^{(n)}(g_i)\right)^* D_{\mu\nu}^{(n)}(g_j) = \frac{|G|}{d_n}\delta_{ij}$$

- Теорема ортогональности характеров:

$$\sum_{k}^{N_k} \chi^{(n)*}(c_k)\chi^{(m)}(c_n) = \frac{|G|}{N_k}\delta_{km}$$

- Условие полноты набора характеров:

$$\sum_{n} \chi^{(n)*}(c_k)\chi^{(n)}(c_l) = \frac{|G|}{N_k}\delta_{kl}$$

Таблица характеров группы D$_3$

$$D_3 = \{e,\ a,\ b,\ c,\ d,\ f\} \qquad |G| = 6$$

- **Три класса эквивалентности:** $c_1 = \{e\},\ \ c_2 = \{a,\ b\},\ \ c_3 = \{c, d, f\},\ \ \ N_k = 3$

Для группы *D*$_3$ должно быть 3 irreps $D^{(1)},\ D^{(2)},\ D^{(3)}$

$$\boxed{|G| = \sum_n d_n^2} \quad \Rightarrow \quad 6 = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2$$

- **Замечание:** одно из представлений всегда является тривиальным – каждый элемент группы отображается на единицу, $d_1 = 1$

$\Rightarrow$ $d_1 = 1,\ d_2 = 1,\ d_3 = 2$, из 3 irreps группы *D*$_3$ два являются одномерными

- **Задача:** построить таблицу характеров *D*$_3$

D$_3$	c$_1$	c$_2$	c$_3$
$D^{(1)}$	1	1	1
$D^{(2)}$	1	α	γ
$D^{(3)}$	2	β	δ

- $\chi^{(1)}(c_k) = 1,\ \chi^{(2)}(c_1) = 1,\ \chi^{(3)}(c_1) = 2$

- **Характеры одномерных представлений должны отражать структуру группы:**

D_3	c_1	c_2	c_3
$D^{(1)}$	1	1	1
$D^{(2)}$	1	1 α	-1 γ
$D^{(3)}$	2	-1 β	0 δ

$$\chi^{(2)}(b\cdot c)=\chi^{(2)}(b)\chi^{(2)}(c)=\chi^{(2)}(d)$$

Сокращенная запись: $\chi^{(n)}(c_k)\rightarrow\chi_k^{(n)}$

$$\chi_2^{(2)}\chi_3^{(2)}=\chi_3^{(2)}\quad\Rightarrow\quad\chi_2^{(2)}=1,\quad\chi_3^{(2)}=-1$$

- **Теорема ортогональности:** $\sum\limits_k\chi^{(n)*}(c_k)\chi^{(n)}(c_l)=\dfrac{|G|}{N_k}\delta_{kl}$

$\Rightarrow$ **Вектор $\chi^{(3)}$ ортогонален векторам $\chi^{(1)}$ и $\chi^{(2)}$:**

$$\sum_{k=1}^{3}N_k\chi_k^{(1)*}\chi_k^{(3)}=N_1\chi_1^{(1)}\chi_1^{(3)}+N_2\chi_2^{(1)}\chi_2^{(3)}+N_3\chi_3^{(1)}\chi_3^{(3)}=$$

$$\sum_{k=1}^{3}N_k\chi_k^{(2)*}\chi_k^{(3)}=N_1\chi_1^{(2)}\chi_1^{(3)}+N_2\chi_2^{(2)}\chi_2^{(3)}+N_3\chi_3^{(2)}\chi_3^{(3)}=$$

$$\boxed{2+2\beta+3\delta=0;\qquad 2+2\beta-3\delta=0}$$

$$\Rightarrow\quad\delta=0,\quad\beta=-1$$

Задача 1: Рассмотрим представление группы D_3 , заданное матрицами

$$D(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D(a) = D(b) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$$

$$D(c) = D(d) = D(f) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$$

Вопрос: Это приводимое или неприводимое представление?

- **Для этого представления** $\chi(c_1) = 2, \quad \chi(c_2) = -1, \quad \chi(c_3) = -1$

Характеры неприводимых представлений D_3:

$$\chi^{(1)}(c_1) = 1, \quad \chi^{(1)}(c_2) = 1, \quad \chi^{(1)}(c_3) = 1$$
$$\chi^{(2)}(c_1) = 1, \quad \chi^{(2)}(c_2) = 1, \quad \chi^{(2)}(c_3) = -1$$
$$\chi^{(3)}(c_1) = 2, \quad \chi^{(3)}(c_2) = -1, \quad \chi^{(3)}(c_3) = 0$$

Коэффициенты разложения по базису irreps:

$$\chi(c_k) = \sum_k a_k \chi^{(k)}(c_k), \quad a_k = \frac{1}{|G|}\sum_k N_k \chi(c_k)(\chi^{(k)}(c_k))$$

$$a_1 = \tfrac{1}{6}\textstyle\sum_k \chi(c_k)(\chi^{(1)}(c_k)) = \tfrac{1}{6}(1\cdot 2\cdot 1 + 2\cdot(-1)\cdot 1 + 3\cdot(-1)\cdot 1) = -\tfrac{1}{2}$$

$$a_2 = \tfrac{1}{6}\textstyle\sum_k \chi(c_k)(\chi^{(2)}(c_k)) = \tfrac{1}{6}(1\cdot 2\cdot 1 + 2\cdot(-1)\cdot 1 + 3\cdot(-1)\cdot(-1)) = \tfrac{1}{2}$$

$$a_3 = \tfrac{1}{6}\textstyle\sum_k \chi(c_k)(\chi^{(3)}(c_k)) = \tfrac{1}{6}(1\cdot 2\cdot 2 + 2\cdot(-1)\cdot(-1) + 3\cdot(-1)\cdot 0) = 1$$

$$\boxed{\chi_k = -\frac{1}{2}\chi_k^{(1)} + \frac{1}{2}\chi_k^{(2)} + \chi_k^{(3)}}$$

Рассмотрим регулярное 3d представление группы D_3 , заданное матрицами

$$D(e)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad D(a)=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\quad D(b)=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix},$$

$$D(c)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\quad D(d)=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix},\quad D(f)=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

- **Для этого представления** $\chi(c_1)=3,\quad \chi(c_2)=0,\quad \chi(c_3)=1$

Характеры неприводимых представлений D_3:

$$\chi^{(1)}(c_1)=1,\quad \chi^{(1)}(c_2)=1,\quad \chi^{(1)}(c_3)=1$$
$$\chi^{(2)}(c_1)=1,\quad \chi^{(2)}(c_2)=1,\quad \chi^{(2)}(c_3)=-1$$
$$\chi^{(3)}(c_1)=2,\quad \chi^{(3)}(c_2)=-1,\quad \chi^{(3)}(c_3)=0$$

Коэффициенты разложения по базису irreps:

$$\chi(c_k)=\sum_k a_k\chi^{(k)}(c_k),\quad a_k=\frac{1}{|G|}\sum_k N_k\chi(c_k)(\chi^{(k)}(c_k))$$

$$a_1=\tfrac{1}{6}\textstyle\sum_k \chi(c_k)(\chi^{(1)}(c_k))=\tfrac{1}{6}(1\cdot 3\cdot 1+2\cdot 0\cdot 1+3\cdot 1\cdot 1)=1$$

$$a_2=\tfrac{1}{6}\textstyle\sum_k \chi(c_k)(\chi^{(2)}(c_k))=\tfrac{1}{6}(1\cdot 3\cdot 1+2\cdot 0\cdot 1+3\cdot 1\cdot(-1))=0$$

$$a_3=\tfrac{1}{6}\textstyle\sum_k \chi(c_k)(\chi^{(3)}(c_k))=\tfrac{1}{6}(1\cdot 3\cdot 2+2\cdot 0\cdot(-1)+3\cdot 1\cdot 0)=1$$

$$\boxed{\chi_k=\chi_k^{(1)}+\chi_k^{(3)}}$$

Прямая сумма и прямое произведение представлений

Рассмотрим два представления элемента *g*, $D^{(1)}(g)$ и $D^{(2)}(g)$ размерности m и n

Прямая сумма представлений:

$$D^{(n+m)}(g) = D^{(n)}(g) \oplus D^{(m)}(g) = \begin{pmatrix} D^{(n)}(g) & 0 \\ 0 & D^{(m)}(g) \end{pmatrix}, \qquad \chi^{(n+m)} = \chi^{(n)} + \chi^{(m)}$$

Прямое произведение представлений:

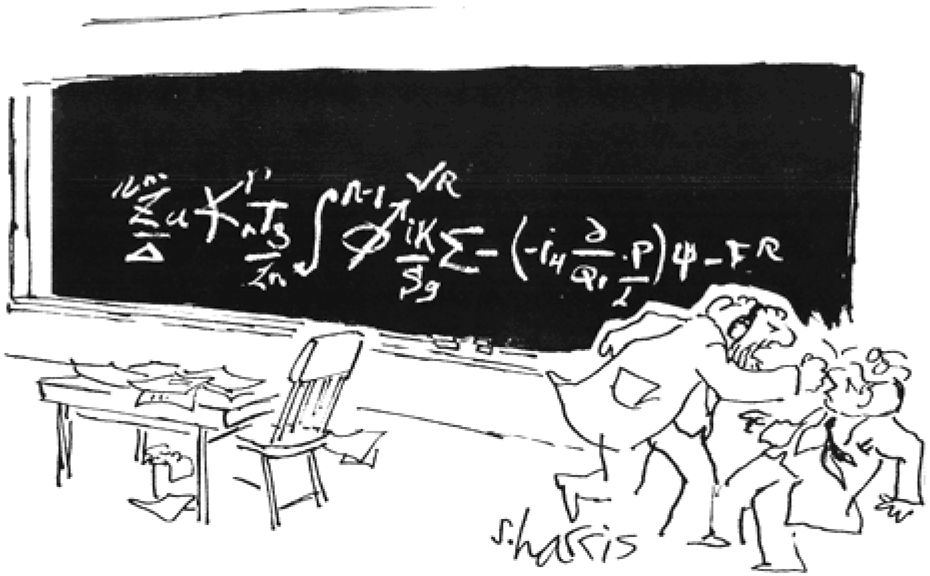
$$D^{(m\times n)} = D^{(m)} \otimes D^{(n)}$$

Произведение Кронекера:

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B \\ a_{21}B & a_{22}B \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{pmatrix} \qquad \chi^{m\times n} = \chi^{(m)}\chi^{(n)}$$

Надеюсь, все вам теперь стало все понятно? Объяснить еще раз?



"You want proof? I'll give you proof!"