Кафедра теоретической физики и астрофизики
Физический факультет, БГУ Минск

Введение в теорию непрерывных групп

Я М Шнир

все вопросы, комментарии, замечания и протесты:
shnir@maths.tcd.ie

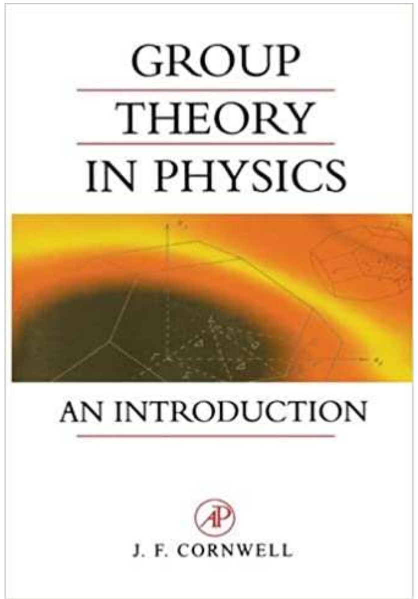
“The Theory of Groups is a branch of mathematics in which one does something to something and then compares the result with the result obtained from doing the same thing to something else, or something else to the same thing.”

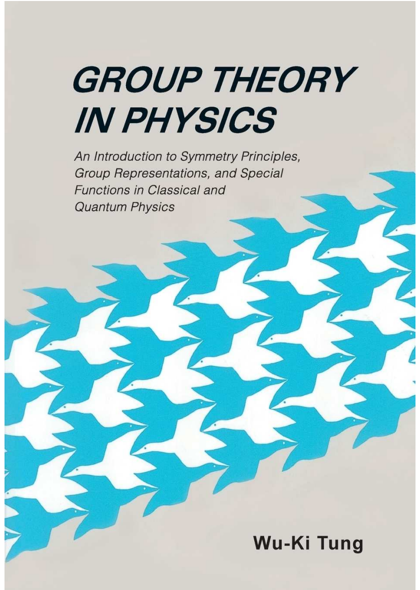
James R. Newman (1907–1966)

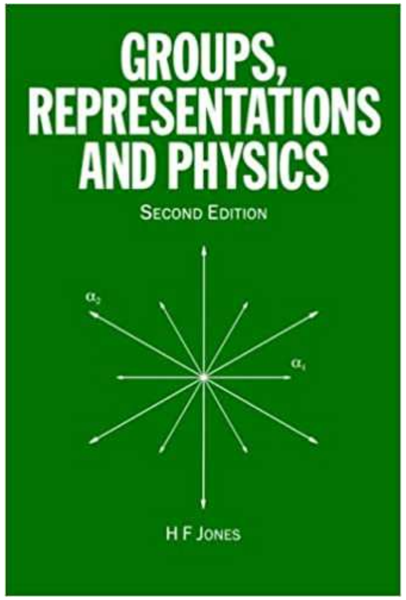
План лекций

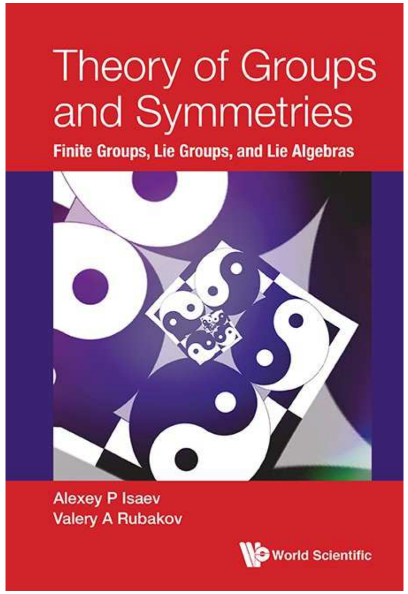
- **Группы: основные определения и теоремы**
- **Группы симметрии**
- **Представления групп**
- **Группы и алгебры Ли**
- **Классификация Вейля-Картана.**

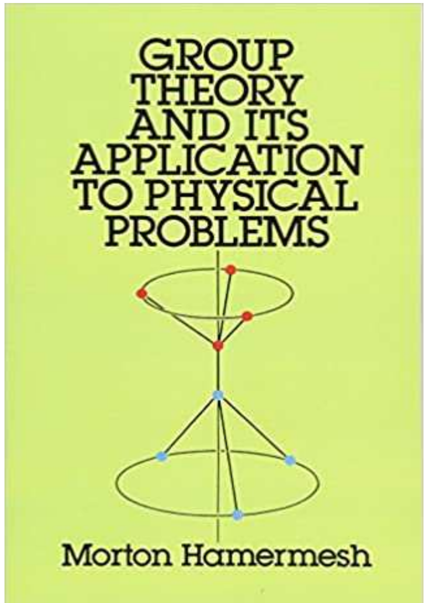
Литература

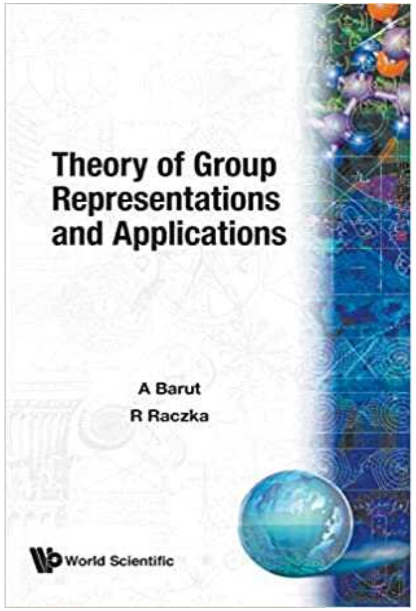

GROUP
THEORY
IN PHYSICS
AN INTRODUCTION
J. F. CORNWELL

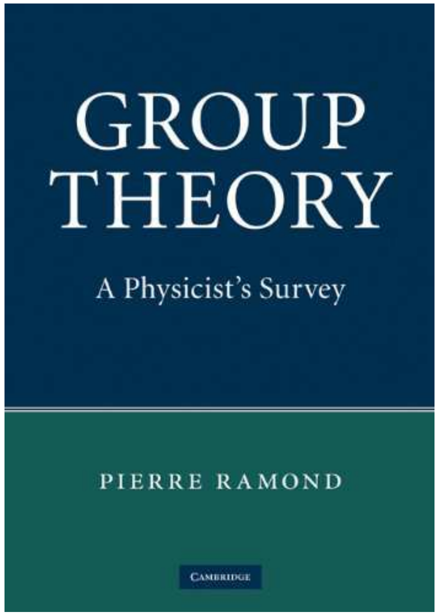

GROUP THEORY
IN PHYSICS
An Introduction to Symmetry Principles,
Group Representations, and Special
Functions in Classical and
Quantum Physics
Wu-Ki Tung


GROUPS,
REPRESENTATIONS
AND PHYSICS
SECOND EDITION
H F JONES


Theory of Groups
and Symmetries
Finite Groups, Lie Groups, and Lie Algebras
Alexey P Isaev
Valery A Rubakov
World Scientific

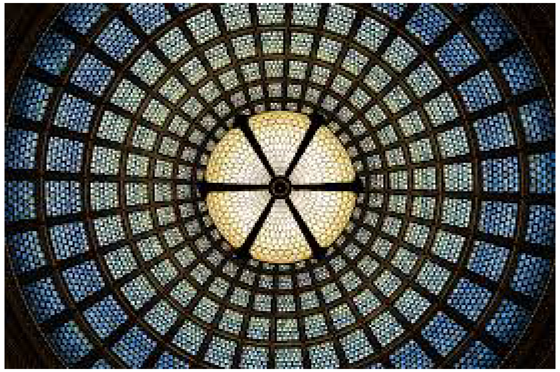

GROUP
THEORY
AND ITS
APPLICATION
TO PHYSICAL
PROBLEMS
Morton Hamermesh

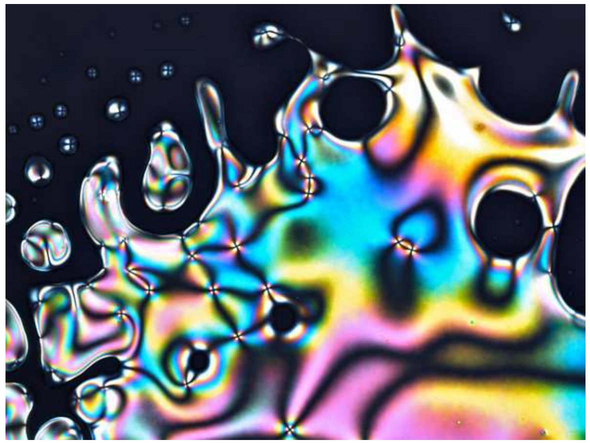

Theory of Group
Representations
and Applications
A Barut
R Raczka
World Scientific

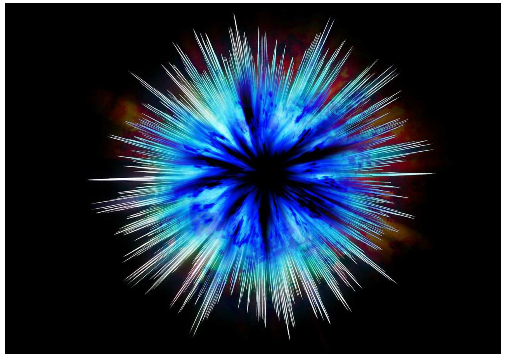

GROUP
THEORY
A Physicist's Survey
PIERRE RAMOND
CAMBRIDGE

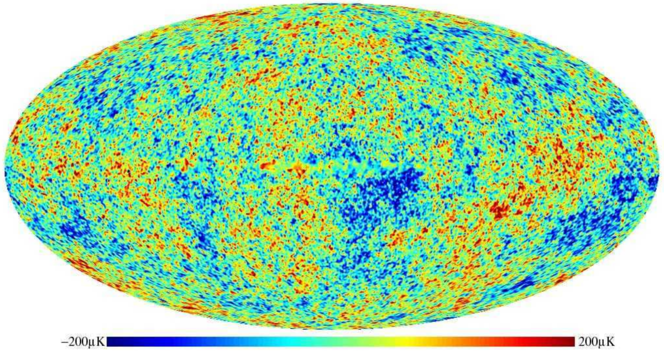

Г. ВЕЙЛЬ
ТЕОРИЯ ГРУПП
И КВАНТОВАЯ
МЕХАНИКА

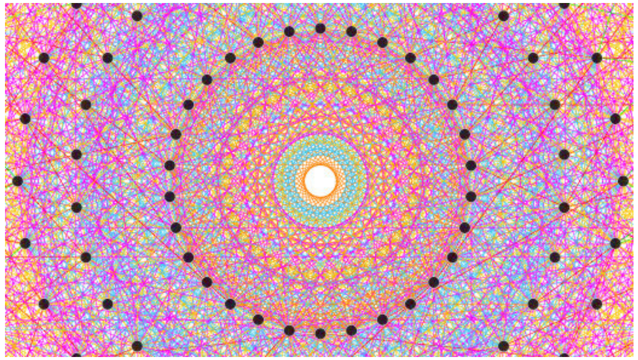
К истокам: Симметрия





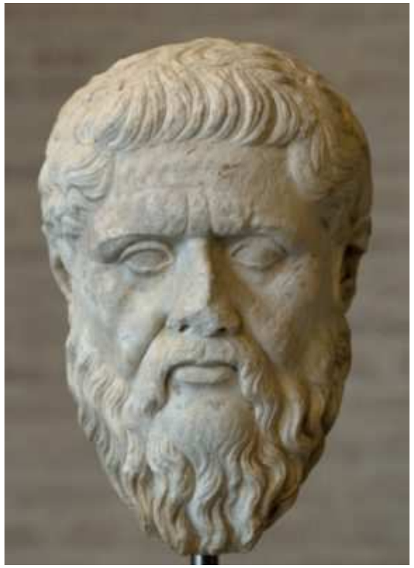




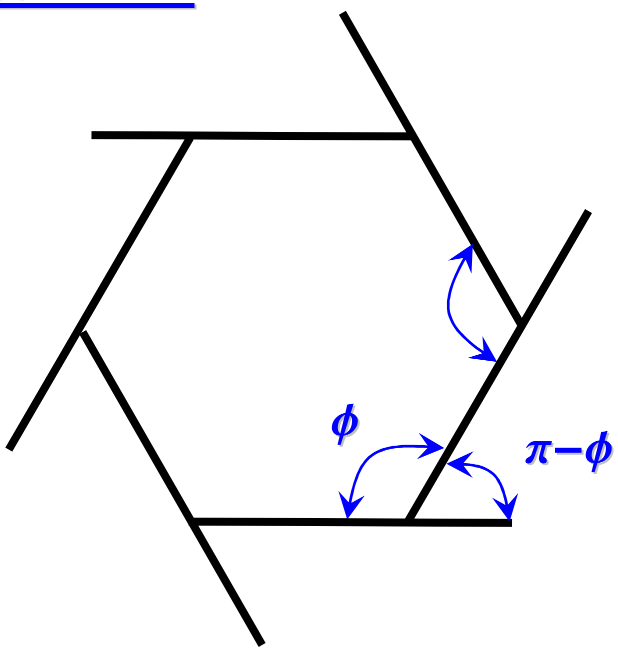


Задача: **математическое описание свойств симметрии физического мира (*συμμετρία - соразмерный*)**

- **Правильные многогранники:**



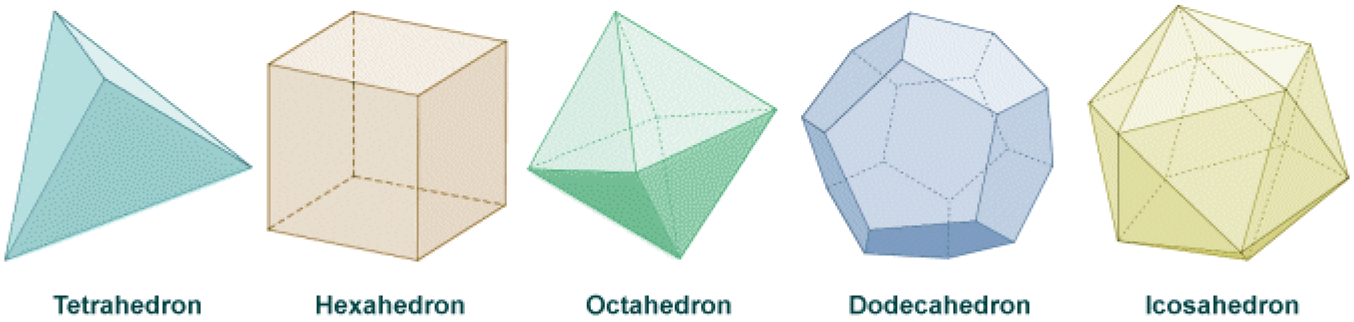
Платон (428-348 BC)



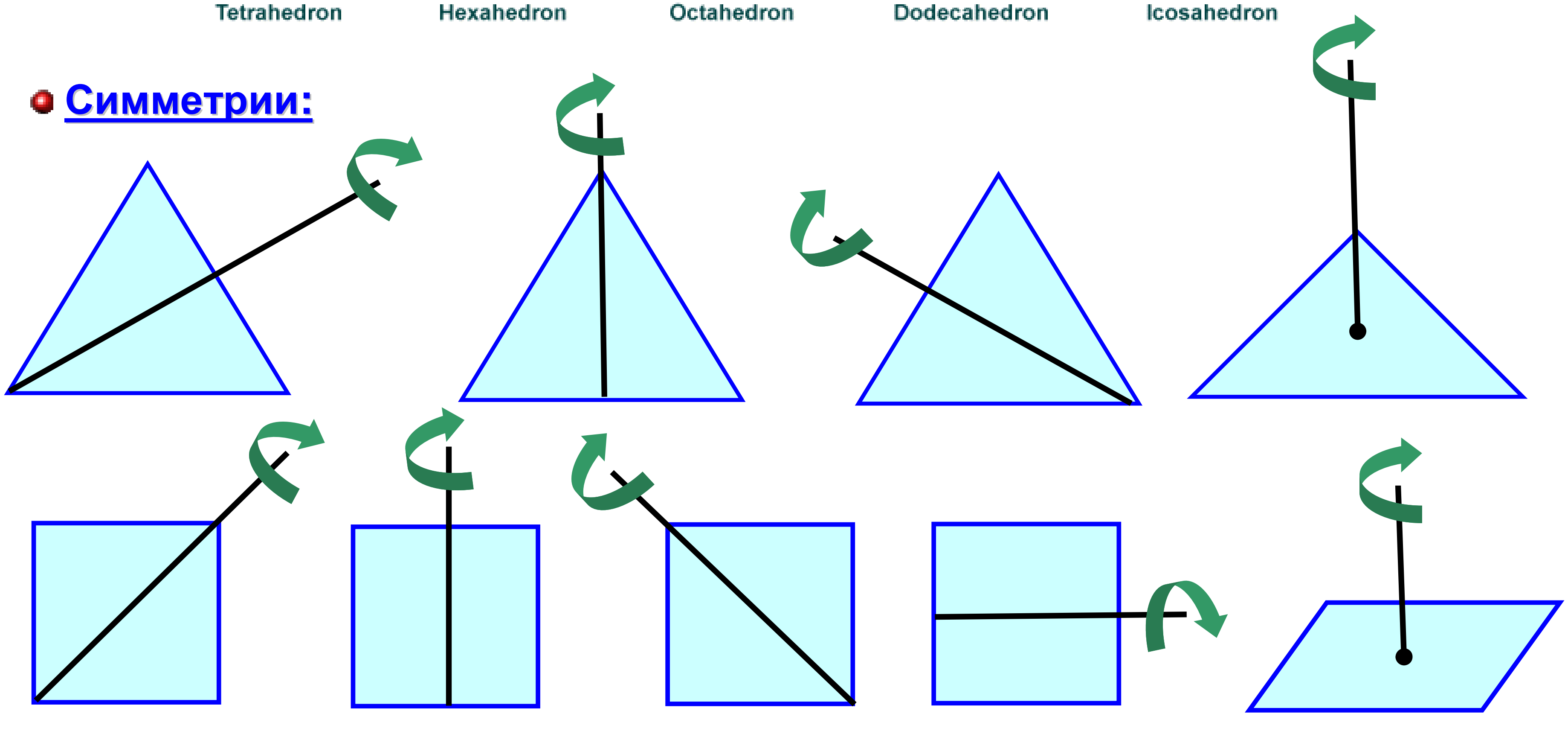
$$\phi = \pi\left(1 - \frac{2}{n}\right)$$

- **n=3: треугольник**
- **n=4: квадрат**
- **n=5: пятигранник**
- **n=6: шестиугольник**

К истокам: Тела Платона



- **Симметрии:**

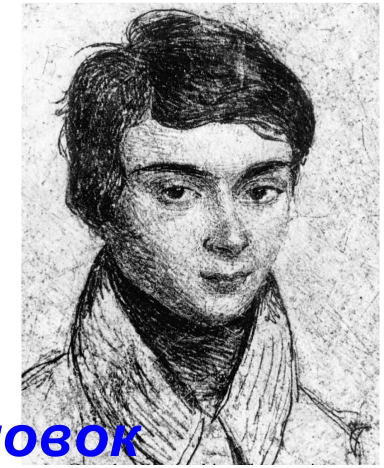


Х.Абель, Э.Галуа: задача об алгебраических корнях

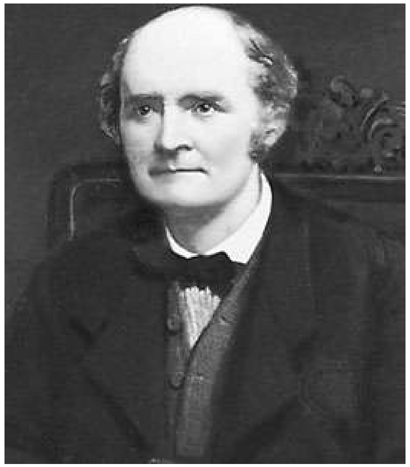
Niels Henrik Abel
(1802-1829)

$$(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n) = 0$$

n корней уравнения, $n!$ перестановок



Évariste Galois
(1811-1832)



Sir Arthur Cayley
(1821 – 1895)

Sophus Lie
(1842 – 1899)

Формулировка понятия группы, ее элементов и групповой операции

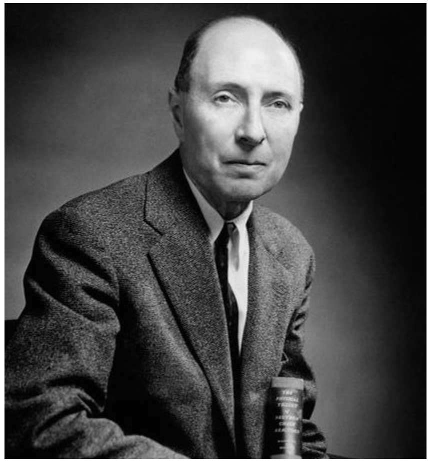
Felix Klein
(1849 – 1925)

Эрлангенская программа (1872): теория групп как основа геометрии

Теория групп и физика

Связь с квантовой механикой (1926..)

Джон фон НЕЙМАН
(1903-1957)



Юджин Вигнер
(1902-1995)

$$U(1),\ SO(3),\ SU(2)\times U(1),\ SU(3),\ \ldots E_8\ldots$$

Герман Вейль
(1885-1995)

Группы в математике и физике

Муррей Гелл-Ман
(1929-2019)

$$\boxed{a \cdot x = b}$$

?

?

Решение этого уравнения ?

Теория групп описывает объекты и бинарные операции, для которых это уравнение всегда имеет решение

I ***Замкнутость:***

$$\forall g_1, g_2 \in G, \quad g = g_1 \cdot g_2 \in G$$

II ***Ассоциативность:***

$$\forall g_1, g_2, g_3 \in G$$

$$g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3) = (g_1 \cdot g_2) \cdot g_3$$

Группа G

III ***Единичный элемент:***

$$\forall g \in G, \ \exists\ e \in G, \quad e \cdot g = g$$

IV ***Обратный элемент:***

$$\forall g \in G, \ \exists\ g^{-1} \in G, \quad g \cdot g^{-1} = e$$

$$\boxed{a \cdot x = b}$$

Доказательство:

- **Аксиомы I, IV:** $a^{-1} \cdot (a \cdot x) = a^{-1} \cdot b$
- **Аксиома II:** $(a^{-1} \cdot a) \cdot x = a^{-1} \cdot b$
- **Аксиома III:** $e \cdot x = x = a^{-1} \cdot b$

Замечание: **в общем случае коммутативность не требуется:** $a \cdot b \neq b \cdot a$

- **Теорема 1:** **Если** $a \in G$ **и** $a \cdot a = a$**, то** $a = e$

Доказательство: **пусть имеется** $b \in G, \quad b \cdot a = e$**. Тогда**

- **Аксиома III:** $(b \cdot a) \cdot a = e \cdot a = a$
- **Аксиома II:** $b \cdot (a \cdot a) = b \cdot a$

$\Rightarrow \quad b \cdot a = a = e$

- **Теорема 2:** **Единичный элемент уникален:** $\forall f, a \in G, \; f \cdot a = a \cdot f = a, \quad f$ ´ e

- **Аксиома III:** $e \cdot f = e \cdot e = e \quad \Rightarrow \quad f = e$

- **Теорема 2:** **Обратный элемент уникален**

Доказательство: **пусть** $a \cdot b = b \cdot a = e; \quad a \cdot c = c \cdot a = e$ **. Тогда**

$$b \overset{\mathrm{III}}{=} b \cdot e \;=\; b \cdot (a \cdot c) \overset{\mathrm{II}}{=} (b \cdot a) \cdot c \;=\; e \cdot c \overset{\mathrm{III}}{=} c$$

- **Теорема 3:** $\forall a, b \in G, \quad (a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$

Доказательство: **пусть** $g = (a \cdot b) \overset{\mathrm{I}}{\in} G$ **. Тогда**

$$g \cdot g^{-1} \;=\; (a \cdot b) \cdot (b^{-1} \cdot a^{-1}) \overset{\mathrm{II}}{=} a \cdot (b \cdot b^{-1}) \cdot a^{-1} \overset{\mathrm{IV}}{=} a \cdot e \cdot a^{-1} \overset{\mathrm{III}}{=} a \cdot a^{-1} \overset{\mathrm{IV}}{=} e$$

Замечание: **единичный элемент обратен сам к себе:** $e = e^{-1}$

- ***Группа G называется абелевой, если*** $\forall a, b \in G, a \cdot b = b \cdot a$

- ***Группа G называется конечной, если число ее элементов n= |G| конечно.***
Это число называют порядком группы
Например: $|D_3|$=6, «Монстр» группа, |M| ~ $8 \cdot 10^{53}$

- ***Группа G называется непрерывной, если число ее элементов бесконечно.***

Примеры групп и групповых операций

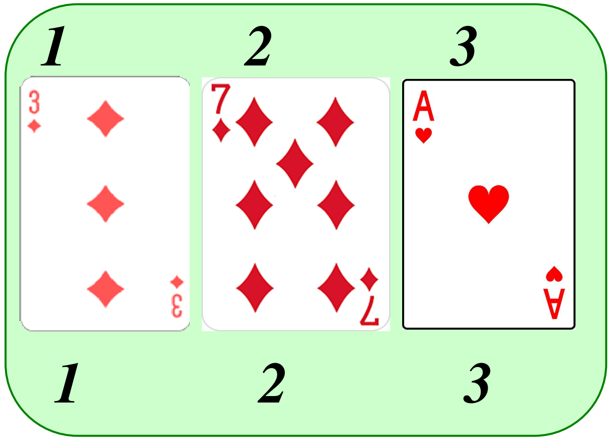
- $\mathbb{Z}_2 = \{-1, 1\}$ с операцией умножения
- $\mathbb{Z}$ - целые числа с операцией сложения (0 – групповая единица)
- $m \times n$ матрицы с операцией сложения (0 – групповая единица)
- $n \times n$ обратимые матрицы с операцией умножения (единичная матрица $\mathbf{I}$ – групповая единица)
- Произвольное векторное пространство имеет групповую структуру с операцией сложения векторов (0-вектор – групповая единица)
- $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| = 1\}$ - множество комплексных чисел с модулем единица по отношению к операции умножения
- $\mathbb{Z}_n = \{0,\ 1,\ \ldots n-1\}$ - группа целых чисел по модулю n

Определим бинарную операцию как $a \cdot b = a + b$, если $a + b < n$

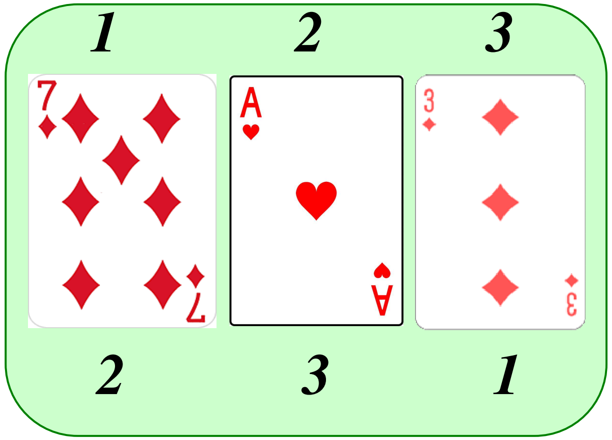
и $a \cdot b = a + b - n$, если $a + b \geq n$ - *сложение по модулю* n

→ Циклическая группа порядка n

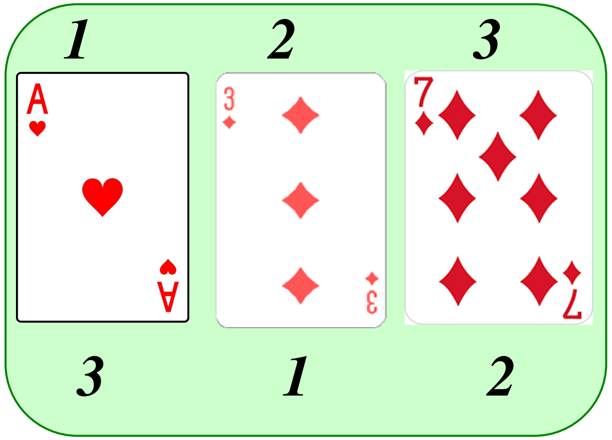
Перестановки



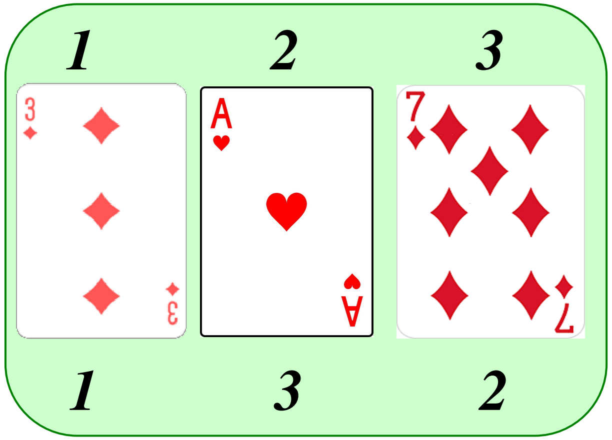
$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$



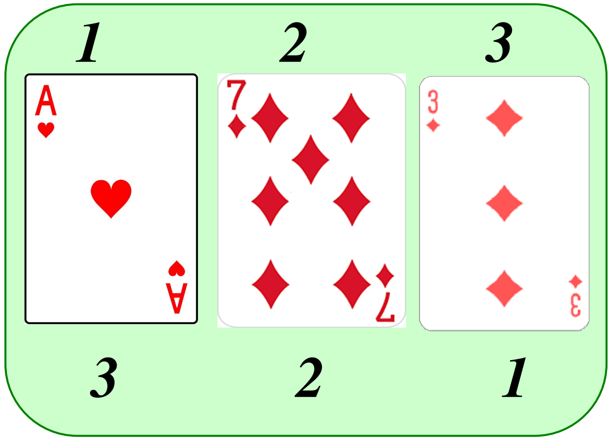
$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$



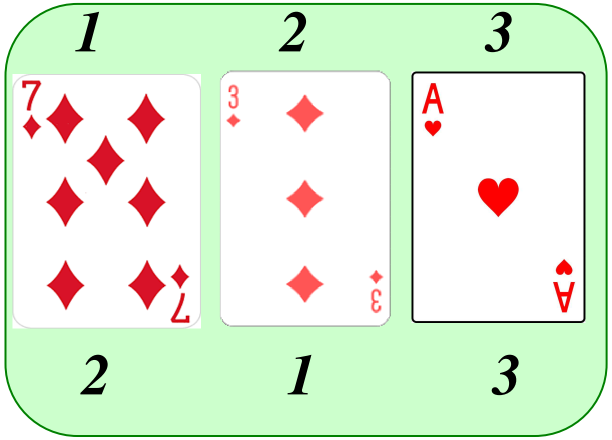
$$b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$



$$c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

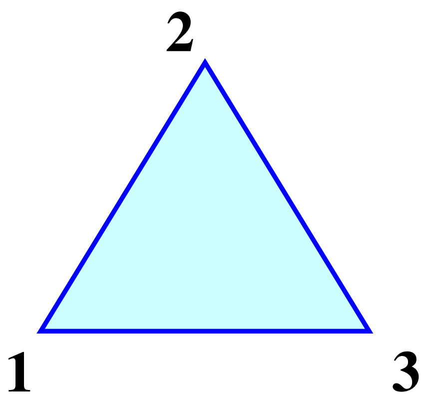


$$d = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

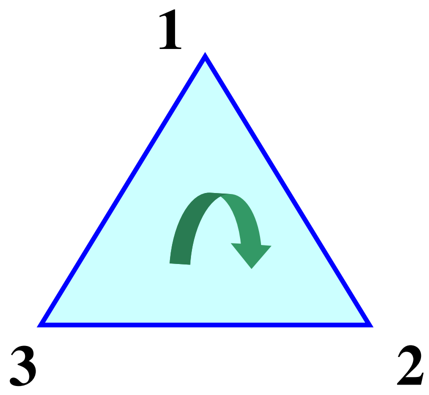


$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

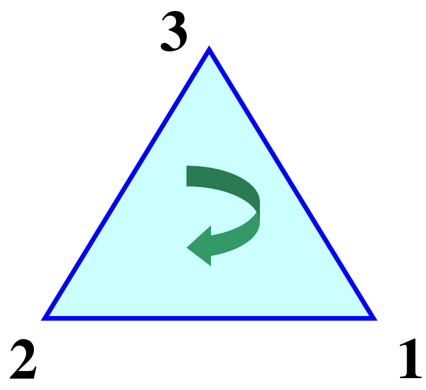
Перестановки и симметрии



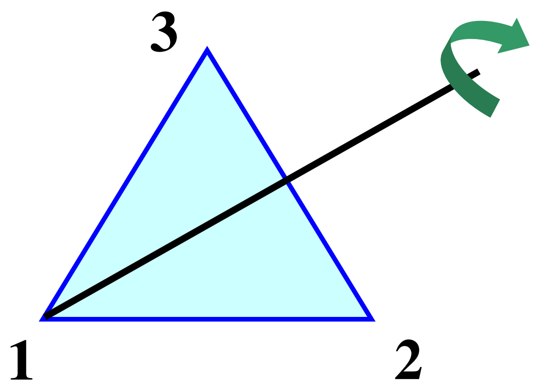
$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$



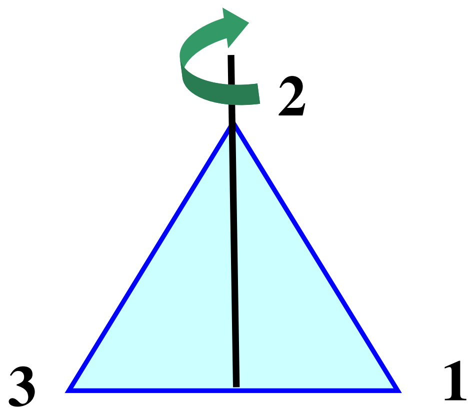
$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$



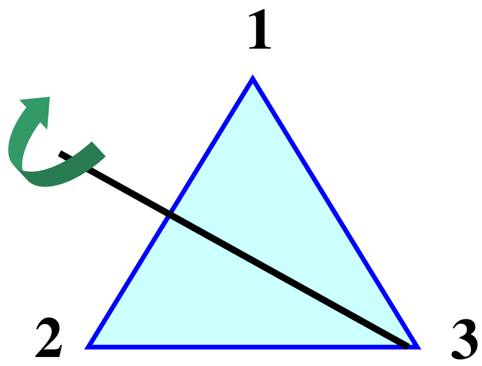
$$b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$



$$c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

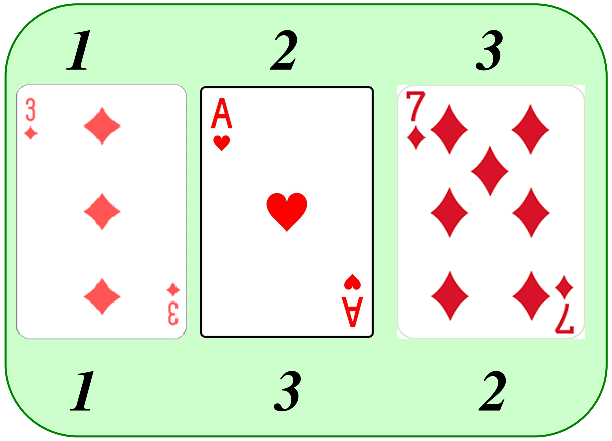


$$d = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

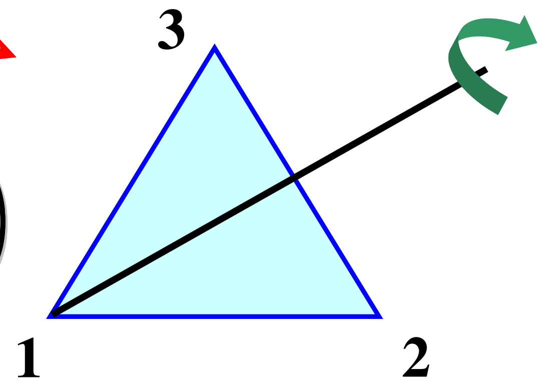


$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Изоморфизм



$$c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$



$\mathbf{S_3}$ $\mathbf{D_3}$

Изоморфизм: взаимно однозначное (1↔1) отображение $f: \ G \mapsto G'$ $f^{-1}: \ G' \mapsto G$,согласованное с действием бинарной операции:

$$\forall g_1, g_2 \in G, \quad f(g_1) \star f(g_2) = f(g_1 \cdot g_2)$$

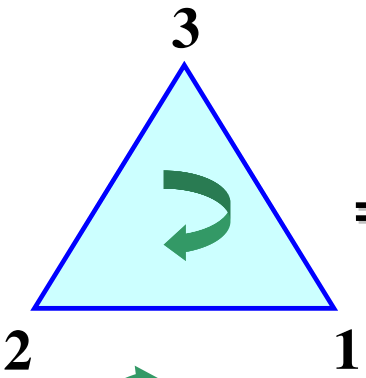
Автоморфизм: отображение группы на саму себя $f: \ G \mapsto G$ с сохранением групповой структуры

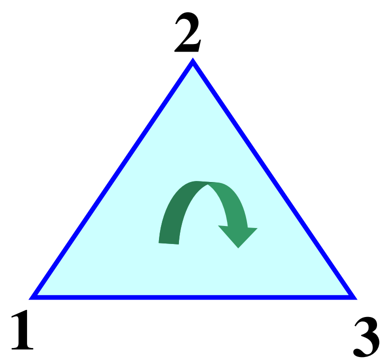
Группа перестановок S_3

- **Элементы группы:** *перестановки трех объектов* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i & j & k \end{pmatrix}$

$$G = \{e,\ a,\ b,\ c,\ d,\ f\},\quad |G| = 6$$

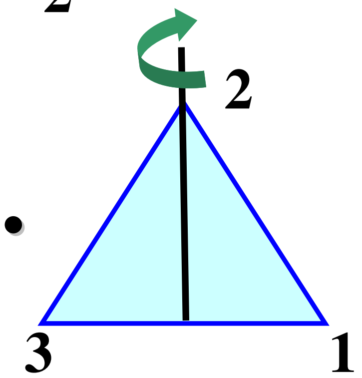
- **Групповая операция:** *последовательность 2 перестановок:*
  $g_k = g_i \cdot g_j$ *(сначала g_j, а потом g_i)*

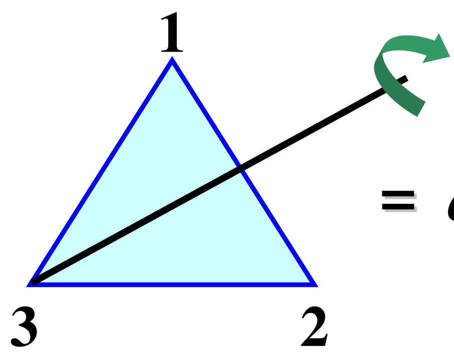
$a \bullet b = a \bullet$ 

$=$ 

$= e$

Вопрос: $a \bullet a = ?$
$b \bullet d = ?$
$d \bullet f = ?$

$c \bullet d = c \bullet$ 

$=$ 

$= a$

Группа перестановок S_3

- **Групповая единица:** *тождественная перестановка* $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

- **Обратный элемент:** *обратная перестановка*

$$\forall g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i & j & k \end{pmatrix} \in G, \ \exists\, g^{-1} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in G$$

- **Таблица Кэли**

S_6	e	a	b	c	d	f
e	e	a	b	c	d	f
a	a					
b	b					
c	c					
d	d					
f	f					

S_6	e	a	b	c	d	f
e	e	a	b	c	d	f
a	a	b	e	f	c	d
b	b	e	a	d	f	c
c	c	d	f	e	a	b
d	d	f	c	b	e	a
f	f	c	d	a	b	e

Замечание I: *в каждой строке и в каждом столбце один элемент группы, в том числе единичный, появляется только один раз*

Замечание II: *все строки и все столбцы включают все элементы группы в разных перестановках, каждая перестановка появляется один раз*

Теорема о перестановке: *для любой конечной группы* $G=\{e,\ g_1,\ g_2,\ \ldots g_n\}$ *умножение всех ее элементов на произвольный элемент* g_i *приводит к перестановке элементов.*

$$G=\{e,\ g_1,\ g_2,\ \ldots g_n\}\rightarrow Gg_k=\{(e\cdot g_k),\ (g_1\cdot g_k),\ (g_2\cdot g_k),\ \ldots(g_n\cdot g_k)\}$$

Доказательство: предположим, что $g_n\cdot g_i=g_k,\quad g_m\cdot g_i=g_k,\quad n\neq m$

$$\Rightarrow\quad g_n\cdot(g_i\cdot g_k^{-1})=g_k\cdot g_k^{-1}=e,\qquad g_m(g_i\cdot g_k^{-1})=g_k\cdot g_k^{-1}=e$$

$$g_n^{-1}=g_i\cdot g_k^{-1},\qquad g_m^{-1}=g_i\cdot g_k^{-1}$$

$$g_n=g_k\cdot g_i^{-1},\qquad g_m=g_k\cdot g_i^{-1}$$

$$g_n=g_m$$

Подгруппа

S_2	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

$S_2 = \{e,\ a,\ b\}$ ⟵ **Подгруппа группы S_3**

Подмножество H элементов группы G является ее подгруппой, если

- **H замкнуто относительно групповой операции:**

$$\forall a, b \in H \subset G, \quad c = a \cdot b \in H \ \subset G$$

- $e \in H$
- $\forall a \in H,\ a^{-1} \in H$

Замечание I: ***единичный элемент и вся группа G по определению также являются подгруппами G.***

Замечание II: S_2 ***- конечная циклическая группа 3-го порядка, порожденная элементом a :*** $S_2 = \{e,\ a,\ a^2\}, \quad a^3 = e$

Замечание III: ***группа S_3 кроме подгруппы H=S_2 содержит еще 3 нетривиальные подгруппы первого порядка:*** $\{e,\ c\}, \quad \{e,\ d\}, \quad \{e,\ f\}$

Классы эквивалентности

- <u>Сопряжение элемента группы:</u> $\forall g_i, g_k \in G \ \exists \ g_i \cdot g_k \cdot g_i^{-1} = g_k' \in G$

Рассмотрим сопряжение элементов подгруппы $S_2 = \{e, \ a, \ b\}$
по всем элементам группы S_3:

$e \to e \cdot e \cdot e^{-1} = e$ $\qquad a \to e \cdot a \cdot e^{-1} = a$ $\qquad b \to e \cdot b \cdot e^{-1} = b$

$e \to a \cdot e \cdot a^{-1} = e$

$e \to b \cdot e \cdot b^{-1} = e$

$e \to c \cdot e \cdot c^{-1} = e$

$e \to d \cdot e \cdot d^{-1} = e$

$e \to f \cdot e \cdot f^{-1} = e$

Соотношение эквивалентности: $a \sim b$ **, если**

- $a \sim a$ - рефлективность
- $a \sim b \Longrightarrow b \sim a$ - симметрия
- Если $a \sim b$, и $b \sim c$, то $a \sim c$ - транзитивность

- <u>Сопряжение элемента группы задаёт соотношение эквивалентности</u>

- ***Элементы*** a ***и*** b $\in S_2 \subset S_3$ ***образуют класс эквивалентости.***

Подгруппы и смежные классы (косеты)

- *Если для любого элемента $h \in H$ и для любого элемента $g \in G$ выполняется условие $g \cdot h \cdot g^{-1} \in H \subset G$, то H является **нормальной подгруппой** G*

Замечание: *группу можно «разделить» на ее нормальную подгруппу, получив в результате новую группу.*

- **Левый смежный класс элемента $g \in G$ по подгруппе $H \subset G$:**

$$\boxed{gH = \{g \cdot h |\ \forall h \in H\}}$$

- **Правый смежный класс элемента $g \in G$ по подгруппе $H \subset G$:**

$$\boxed{Hg = \{h \cdot g |\ \forall h \in H\}}$$

Множество всех левых смежных классов (фактор-множество): G/H

Множество всех правых смежных классов (фактор-множество): H\G

Замечание: *левые (правые) смежные классы группы G по подгруппе H или полностью совпадают, или не пересекаются.*

Подгруппы и смежные классы

$$\boxed{H = \{e,\ a,\ b\} \subset S_3} \Rightarrow gHg^{-1} = H,\ \forall g \in S_3$$

- **Смежные классы H:**

$$\left\{\begin{array}{l} He = \{e,\ a,\ b\} = H \\ Ha = \{a,\ b,\ e\} = H \\ Hb = \{b,\ e,\ a\} = H \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} Hc = \{c,\ f,\ d\} = K \\ Hd = \{d,\ c,\ f\} = K \\ Hf = \{f,\ d,\ c\} = K \end{array}$$

$$\boxed{\mathrm{ind}_{S_3}(S_2) = 2}$$

Правый смежный класс подгруппы H

- ***Индекс подгруппы*** $\mathrm{ind}_G(H)$ ***- количество ее различных смежных классов***

$$\boxed{H = \{e,\ c\} = S_1 \subset S_3} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} He = \{e,\ c\} = H \\ Ha = \{a,\ d\} = K_1 \\ Hb = \{b,\ f\} = K_2 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} Hc = \{c,\ e\} = H \\ Hd = \{d,\ a\} = K_1 \\ Hf = \{f,\ b\} = K_2 \end{array}$$

$$\boxed{\mathrm{ind}_{S_3}(S_1) = 3}$$

Правые смежные классы подгруппы H

Подгруппы и смежные классы

$$H = \{e,\ d\} = S_1 \subset S_3 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} He = \{e,\ d\} = H \\ Ha = \{a,\ f\} = K_3 \\ Hb = \{b,\ c\} = K_4 \end{cases} \qquad \begin{matrix} Hc = \{c,\ b\} = K_4 \\ Hd = \{d,\ e\} = H \\ Hf = \{f,\ a\} = K_3 \end{matrix}$$

$$\mathrm{ind}_{S_3}(S_1) = 3$$

$$H = \{e,\ f\} = S_1 \subset S_3 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} He = \{e,\ f\} = H \\ Ha = \{a,\ c\} = K_5 \\ Hb = \{b,\ d\} = K_6 \end{cases} \qquad \begin{matrix} Hc = \{c,\ a\} = K_5 \\ Hd = \{d,\ b\} = K_6 \\ Hf = \{f,\ e\} = H \end{matrix}$$

- **Теорема Лагранжа:** **порядок и индекс подгруппы H конечной группы G являются делителями порядка группы, $|G| = |H| \bullet \mathrm{ind}_G(H)$**

$$H = \{e,\ a,\ b\} \subset S_3, \quad |H| = 3, \quad \mathrm{ind}_{S_3}(H) = 2, \quad |S_3| = 6$$

$$H = \{e,\ c\} \subset S_3, \quad |H| = 2, \quad \mathrm{ind}_{S_3}(H) = 3, \quad |S_3| = 6$$

Фактор-группа: смежные классы группы G по инвариантной подгруппе H образуют фактор-группу G/H

S_3	e	a	b	c	d	f
e	e	a	b	c	d	f
a	a	b	e	f	c	d
b	b	e	a	d	f	c
c	c	d	f	e	a	b
d	d	f	c	b	e	a
f	f	c	d	a	b	e

→

S_2	E	K
E	E	K
K	K	E

$$E = H = \{e,\ a,\ b\}$$

$$K = \{c,\ d,\ f\}$$

Произведение смежных классов: $K_1 \cdot K_2 = (g_1 H) \cdot (g_2 H) = (g_1 \cdot g_2) H$

- ***Замкнутость*:** произведение $K_1 \cdot K_2 \in G/H,$ так как $g_1 \cdot g_2 \in G$
- ***Ассоциативность*:** $K_1 \cdot (K_2 \cdot K_3) = (K_1 \cdot K_2) \cdot K_3$,так как

$$(g_1 H) \cdot [(g_2 H) \cdot (g_3 H)] = g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3) H = (g_1 \cdot g_2) \cdot g_3 H = [(g_1 H) \cdot (g_2 H)] \cdot (g_3 H)$$

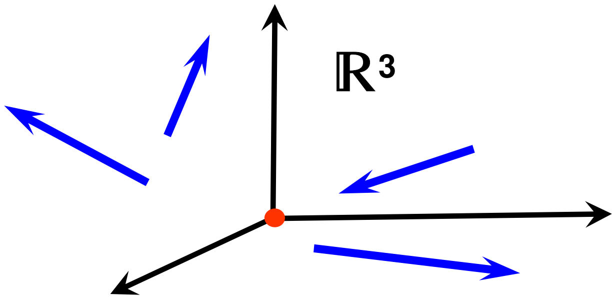
- ***Единичный элемент*:** смежный класс $E = eH$,так как

$$E \cdot K = (eH) \cdot (gH) = (e \cdot g) H = gH = K$$

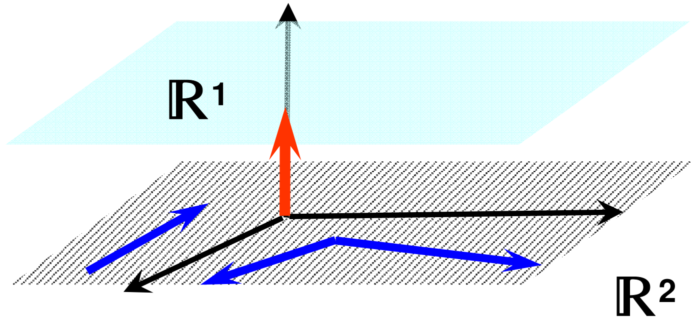
- ***Обратный элемент*:** смежный класс $K^{-1} = g^{-1} H$,так как

$$K^{-1} \cdot K = (g^{-1} \cdot g) H = eH = E \in G/H$$

Задача: *вектора в 3-х мерном пространстве $\mathbb{R}^3$ являются элементами бесконечной группы относительно операции сложения, а ноль-вектор является групповой единицей. Что представляет собой инвариантная подгруппа и соответствующие классы эквивалентности?*



$\mathbf{R}^1 = \mathbf{R}^3 / \mathbf{R}^2$



…и еще несколько определений:

- *Конечная группа называется **простой**, если она не имеет нетривиальных инвариантных подгрупп.*
- *Конечная группа называется **полупростой**, если она не имеет нетривиальных абелевых инвариантных подгрупп.*

- ***Прямое** произведение групп:* $G = A \times B$ *, причем*

- $\forall a \in A, \quad \forall b \in B, \quad a \cdot b = b \cdot a$
- $\forall g \in G, \quad g = a \cdot b, \; a \in A, \quad b \in B$

Следствие: как A, так и B – инвариантные подгруппы G

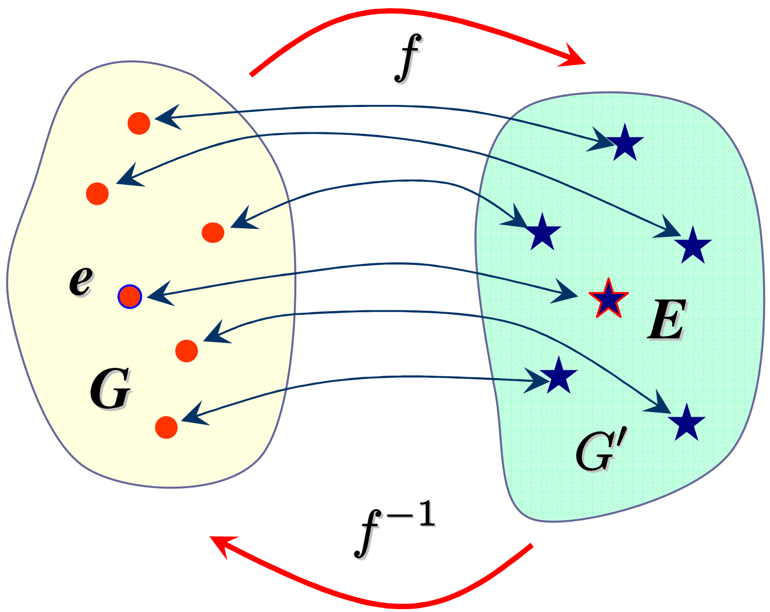
- ***Центр группы:*** *набор ее элементов, коммутирующих со всеми элементами G*

Напомним: $S_3 \rightleftarrows D_3$

Изоморфизм: взаимно однозначное (1↔1) отображение $f: G \mapsto G'$ $f^{-1}: G' \mapsto G$, согласованное с действием бинарной операции:

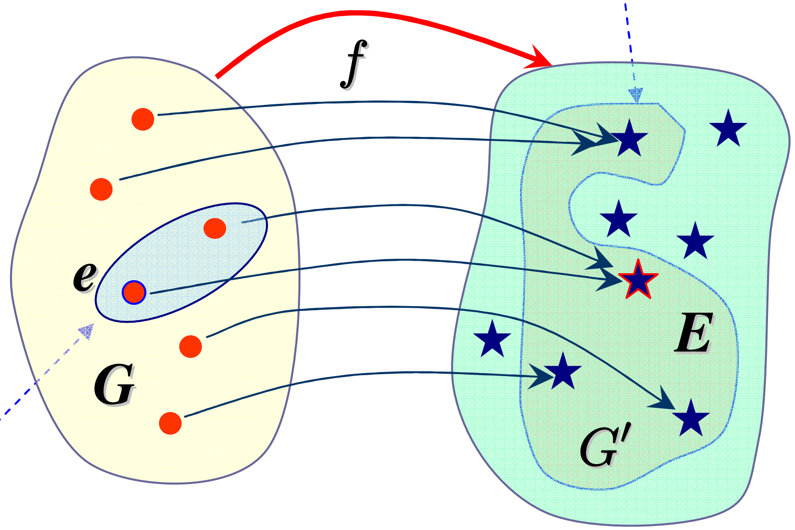
$$\forall g_1, g_2 \in G, \quad f(g_1) \star f(g_2) = f(g_1 \cdot g_2)$$

Гомоморфизм: отображение одной группы на другую, сохраняющее групповую структуру: $f: G \mapsto G' \quad \forall g_1, g_2 \in G, \quad f(g_1) \star f(g_2) = f(g_1 \cdot g_2)$



- ***Образ гомоморфизма:*** набор элементов

$$\mathrm{Im}\ f = \{g' \in G' |\ g' = f(g),\ g \in G\}$$



- ***Ядро гомоморфизма:*** набор элементов

$$\mathrm{Ker}\ f = \{g \in G | f(g) = E \in G'\}$$

Теорема об изоморфизме

Замечание 1: образ гомоморфизма $\mathrm{Im}\ f$ образует подгруппу в G'

Напомним: Подмножество H элементов группы G является ее подгруппой, если выполняются условия (1) замкнутости, (2) наличия в H единичного элемента, (3) наличия в H всех обратных элементов

- **Пусть** $g_1', g_2' \in \mathrm{Im}\ f \subset G'$ **, тогда** $\exists g_1, g_2 \in G, \quad f(g_1) = g_1', \quad f(g_2) = g_2'$

  $\Rightarrow \quad g_1' \star g_2' = f(g_1) \star f(g_2) = f(g_1 \cdot g_2) \in \mathrm{Im}\ f$ ✓
- **По определению** $E \in \mathrm{Im}\ f \subset G'$ ✓
- **Так как** $f(g \cdot g^{-1}) = f(e) = f(g) \star f(g^{-1}) = g' \star (g')^{-1} = E$ **, то**

  $\Rightarrow \quad f(g^{-1}) = f^{-1}(g) = (g')^{-1} \in \mathrm{Im}\ f$ ✓

Замечание 2: ядро гомоморфизма $\mathrm{Ker}\ f$ образует инвариантную подгруппу G

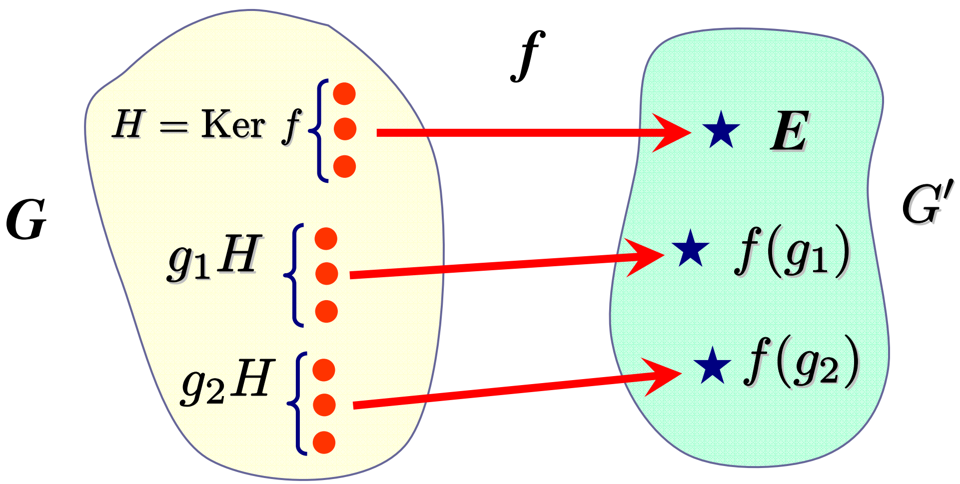
- **Пусть** $g_1, g_2 \in \mathrm{Ker}\ f \in G, \quad f(g_1) = f(g_2) = E \in G'$**, тогда**

  $f(g_1 \cdot g_2) = f(g_1) \star f(g_2) = E, \Rightarrow g_1 \cdot g_2 \in \mathrm{Ker}\ f$ ✓
- **По определению** $e \in \mathrm{Ker}\ f$ ✓
- $\forall g \in \mathrm{Ker}\ f, \quad f(g^{-1}) = f^{-1}(g) = E, \Rightarrow g^{-1} \in \mathrm{Ker}\ f$ ✓

- ***Теорема изоморфизма:*** ***Гомоморфный образ группы изоморфен факторгруппе по ядру гомоморфизма:***

$$\mathrm{Im}\ f \cong G/\mathrm{Ker}\ f$$

Замечание 1: **образ** $f(g)$ **каждого элемента** $g \in G$ **ассоциирован со смежным классом** $g \cdot \mathrm{Ker}\ f \in G/\mathrm{Ker}\ f$



$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & G' \\ G/\mathrm{Ker}\ f & \mathrm{Im}\ f \arrow[l, "h"'] \arrow[u, "\varphi"'] \end{tikzcd}$$

Замечание 2: **каждому элементу** $g' \in \mathrm{Im}\ f \subset G'$ **соответствует единственный смежный класс** $g \cdot \mathrm{Ker}\ f \in G/\mathrm{Ker}\ f$