Кафедра теоретической физики и астрофизики
Физический факультет, БГУ Минск

Дифференциальная геометрия и топология

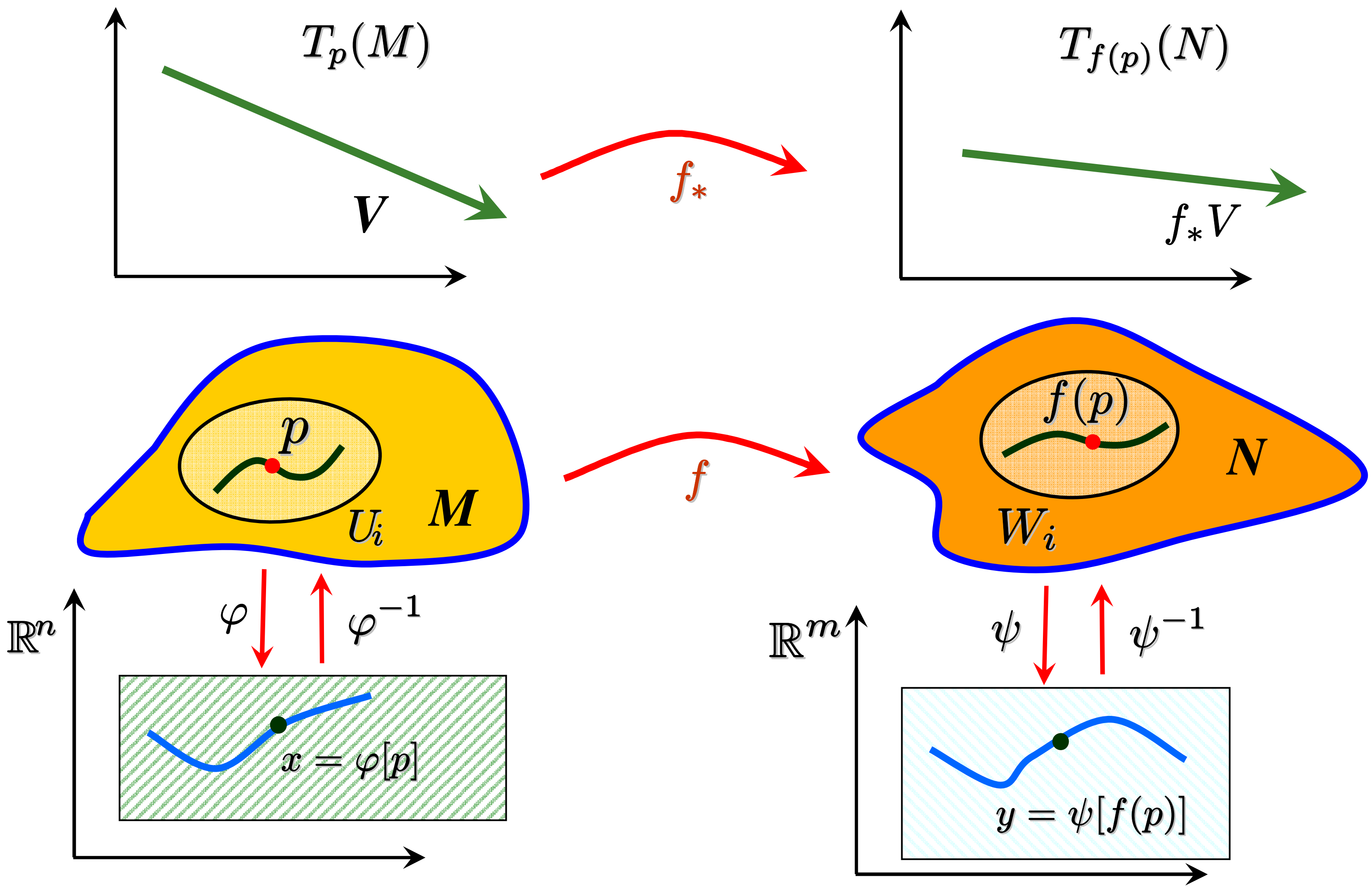
Я М Шнир

все вопросы, комментарии, замечания и протесты:

shnir@maths.tcd.ie

Векторные поля на многообразиях

Рассмотрим отображение дифференцируемых многообразий $f : \mathbb{M} \to \mathbb{N}$:



- ***Отображение многообразий*** $f: \mathbb{M} \mapsto \mathbb{N}$ ***индуцирует отображение касательных пространств:*** $f_*: T_p(\mathbb{M}) \mapsto T_{f(p)}(\mathbb{N})$

Пример: ***Рассмотрим векторное поле*** $V = 3\frac{\partial}{\partial x_1} + 4\frac{\partial}{\partial x_2} \in T_p(\mathbb{M})$

на пространстве $\mathbb{M} = \mathbb{R}^2$***, параметризуемом координатами,*** (x_1, x_2)

и зададим отображение $f: \mathbb{M} \mapsto \mathbb{N}$ ***на пространство*** $\mathbb{N} = \mathbb{R}^3$ **:**

$$(y_1, y_2, y_3) \stackrel{f}{=} \left(x_1, x_2, \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}\right)$$

$$f_*V = f_*V_\nu \frac{\partial}{\partial y_\nu} = V_\mu \frac{\partial y_1}{\partial x_\mu}\frac{\partial}{\partial y_1} + V_\mu \frac{\partial y_2}{\partial x_\mu}\frac{\partial}{\partial y_2} + V_\mu \frac{\partial y_3}{\partial x_\mu}\frac{\partial}{\partial y_3}$$

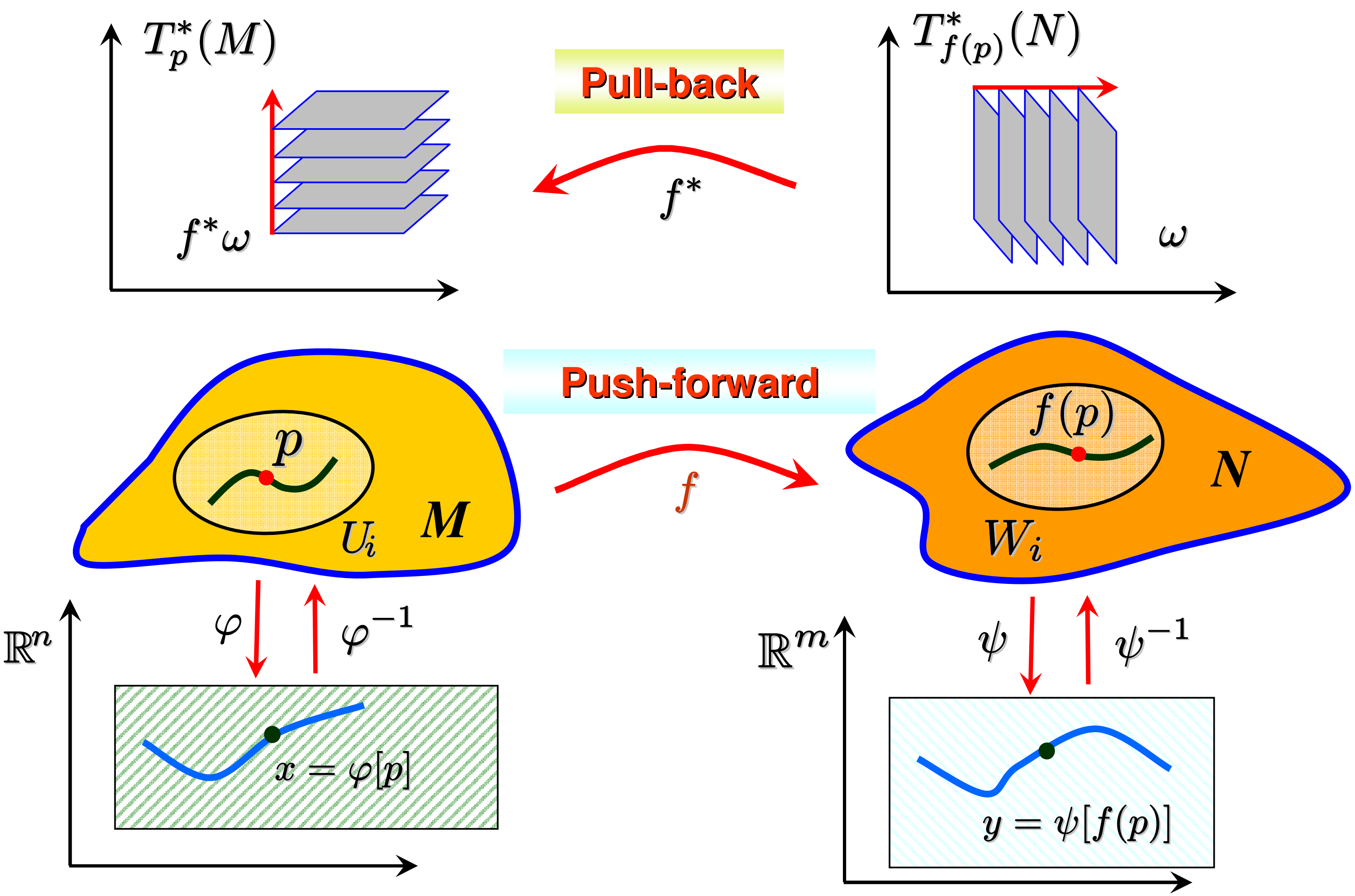
$$= 3\frac{\partial}{\partial y_1} + 4\frac{\partial}{\partial y_2} - \frac{3y_1 + 4y_2}{y_3}\frac{\partial}{\partial y_3}$$

Задача: рассмотрите отображение того же поля $V \in T_p(\mathbb{M})$ при отображении

$$f: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2, \qquad (y_1, y_2) = (x_1^2 - 2x_2^2,\ 2x_1^3 x_2^2)$$

Pullback (возврат формы)

Вопрос: а как ведут себя формы $\omega \in T_p^*(\mathbb{M})$ при отображении $f: \mathbb{M} \to \mathbb{N}$?



Свойства операции возврата формы:

- **Линейность:** $f^*(\omega_1+\omega_2)=f^*\omega_1+f^*\omega_2$
- **Коммутативность с внешним умножением:** $f^*(\omega_1\wedge\omega_2)=(f^*\omega_1)\wedge(f^*\omega_2)$
- **Коммутативность с внешним дифференцированием:** $f^*(d\omega)=d(f^*\omega)$
- **Ассоциативность: если** $f:\ \mathbb{M}\mapsto\mathbb{N}$ **и** $g:\ \mathbb{N}\mapsto\mathbb{P}$ **, то** $(gf)^*=f^*g^*$

Пример вычисления pullback: *Рассмотрим отображение* $f:\ \mathbb{R}^3\mapsto\mathbb{R}^2$

$$f:\ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mapsto\ (u,v)=(x^2+yz,\ e^{xyz})\in\mathbb{R}^2$$

и вычислим pullback 2-формы $\omega=uv^3\ du\wedge dv\in\mathbb{R}^2$

$$f^*\omega=(x^2+yz)e^{3xyz}\ d(x^2+yz)\wedge d(e^{xyz})=$$

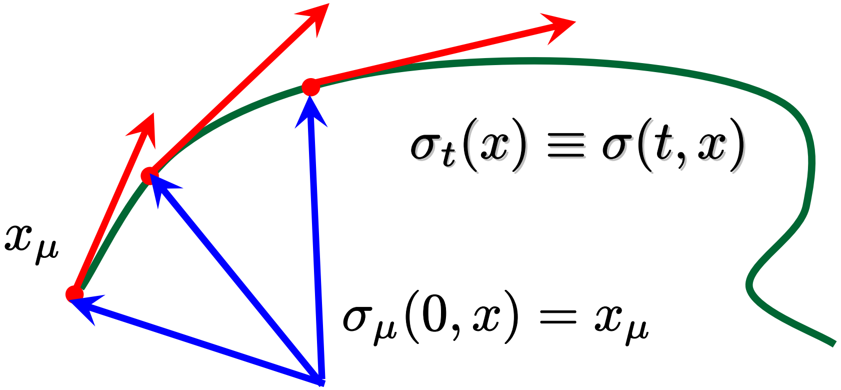
$$=(x^2+yz)e^{3xyz}\ (2xdx+zdy+ydz)\wedge(yze^{xyz}dx+xze^{xyz}dy+xye^{xyz}dz)=$$

$$\boxed{=e^{4xyz}(x^2+yz)\left[(2x^2z-yz^2)dx\wedge dy+(2x^2y-y^2z)dx\wedge dz\right]}$$

Поток векторного поля

- *Векторное поле* $V = V_\mu \dfrac{\partial}{\partial x_\mu} \in T_p(\mathbb{M})$ *на многообразии можно задать интегральной кривой* $\sigma(t,x)$*:* $\dfrac{d\sigma_\mu(t,x)}{dt} = V_\mu(\sigma)$

σ_μ **- локальные координаты**



- **Интегральная кривая** $\sigma_t(x)$ **задает поток векторного поля:** $\sigma: \mathbb{R} \times \mathbb{M} \mapsto \mathbb{M}$

Замечание: поток векторного поля определяет групповую структуру:

- $\sigma_t(x)\sigma_s(x) = \sigma_{t+s}(x)$
- $\sigma_0 = 1$
- $\sigma_t^{-1} = \sigma_{-t}$

Инфинитезимальное смещение, $t \ll 1$: $\sigma_\mu(t,x) = x_\mu + tV_\mu(x) + \dots$

- **Конечные смещения:** $\boxed{\sigma_\mu(t,x) = x_\mu e^{tV}}$

Генератор потока

Замечание: ***разложение в ряд Тейлора***

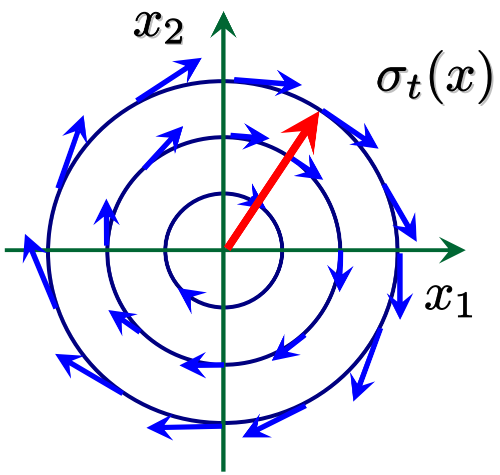
$$\sigma_\mu(t,x) = \left[1 + t\frac{d}{dt} + \frac{t^2}{2!}\left(\frac{d^2}{dt^2}\right) + \ldots\right]\sigma_\mu(0,x) = e^{t\frac{d}{dt}}\sigma_\mu(t,x)\Big|_{t=0}$$

$$\frac{d\sigma_\mu(t,x)}{dt} = V_\mu(\sigma) \quad \Rightarrow$$

Поток векторного поля: $\sigma_\mu(t,x) = x_\mu e^{tV}$

Пример: *Рассмотрим векторное поле* $V = -x_2\frac{\partial}{\partial x_1} + x_1\frac{\partial}{\partial x_2} \in \mathbb{R}^2$

Задача: вычислить поток $\sigma_\mu(t,x) = (\sigma_1, \sigma_2) = (x_1 \cos t - x_2 \sin t,\ x_1 \sin t + x_2 \cos t)$



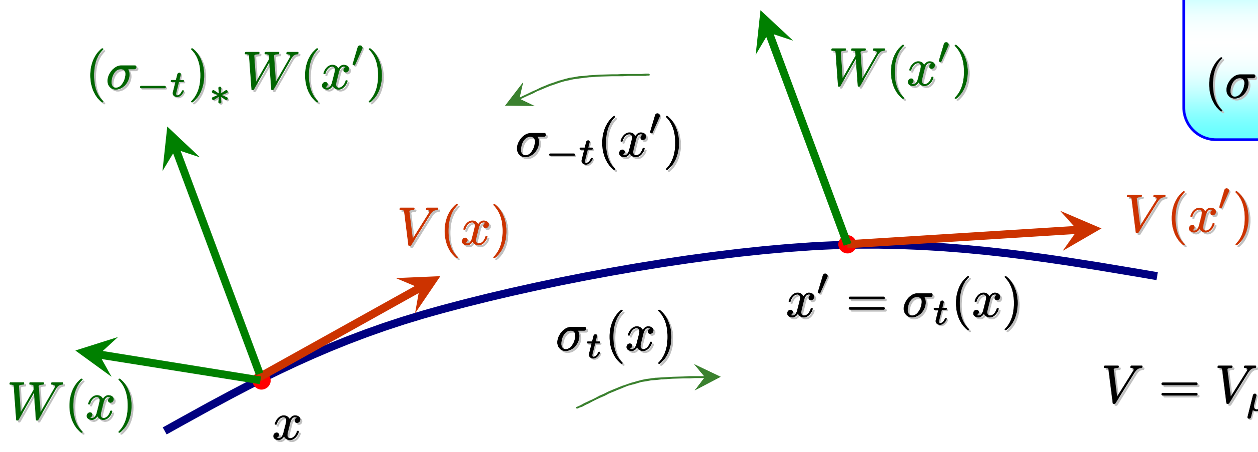
$$V_\mu(x) = \frac{d\sigma_\mu}{dt}\Big|_{t=0} = (-x_2, x_1)$$

Домашнее задание: вычислить поток векторного поля

$$V = x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial}{\partial x_2} \in \mathbb{R}^2$$

Производная Ли векторного поля

$$W(x) \in T_x(\mathbb{M})$$
$$(\sigma_{-t})_* W(\sigma_t(x)) \in T_x(\mathbb{M})$$



$$V = V_\mu(x)\frac{\partial}{\partial x_\mu}, \quad W = W_\mu(x)\frac{\partial}{\partial x_\mu}$$

- ***Производная Ли векторного поля W вдоль потока поля V:***

$$\boxed{\mathcal{L}_V W = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[(\sigma_{-t})_* W(\sigma_t(x)) - W(x)\right]}$$

- **Альтернативное определение:** $\mathcal{L}_V W = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[W(\sigma_t(x)) - (\sigma_t)_* W(x)\right]$

<u>В явном виде:</u> $W(x') = W_\mu(\sigma_t(x))\frac{\partial}{\partial x_\mu}\bigg|_{x'=\sigma_t(x)} = W_\mu(x_\nu + tV_\nu(x))\frac{\partial}{\partial x_\mu}\bigg|_{x'=\sigma_t(x)}$

$$\sigma_t(x) = x_\nu + tV_\nu(x) + \ldots$$

$$W(x') = W_\mu(\sigma_t(x))\frac{\partial}{\partial x_\mu}\Big|_{x'=\sigma_t(x)} = W_\mu(x_\nu + tV_\nu(x))\ \frac{\partial}{\partial x_\mu}\Big|_{x'=\sigma_t(x)}$$

$$= \left[W_\mu(x) + tV_\nu(x)\frac{\partial}{\partial x_\nu}W_\mu(x)\right]\ \frac{\partial}{\partial x_\mu}\Big|_{x'=\sigma_t(x)}$$

Напомним: при отображении векторного поля $f_* X_\alpha = X_\beta \dfrac{\partial y_\alpha}{\partial x_\beta}$

$$(\sigma_{-t})_* W(x') = W_\mu(\sigma_t(x))\frac{\partial \sigma^\nu_{-t}}{\partial x_\mu}\frac{\partial}{\partial x_\nu} =$$

$$\boxed{f_* \to (\sigma_{-t})_*, \quad y^\alpha \to \sigma^\alpha_{-t}}$$

$$= \left[W_\mu(x) + tV_\nu(x)\frac{\partial}{\partial x_\nu}W_\mu(x)\right]\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(x_\nu - tV_\nu\right)\frac{\partial}{\partial x_\nu}$$

$$= W_\mu(x)\frac{\partial}{\partial x_\mu} + t\left[V_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}W_\nu - W_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}V_\nu\right]\frac{\partial}{\partial x_\nu}$$

Производная Ли :

$$\mathcal{L}_V W = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[(\sigma_{-t})_* W(\sigma_t(x)) - W(x)\right] = \boxed{\left[V_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}W_\nu - W_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}V_\nu\right]\frac{\partial}{\partial x_\nu}}$$

Коммутатор векторных полей (скобка Ли)

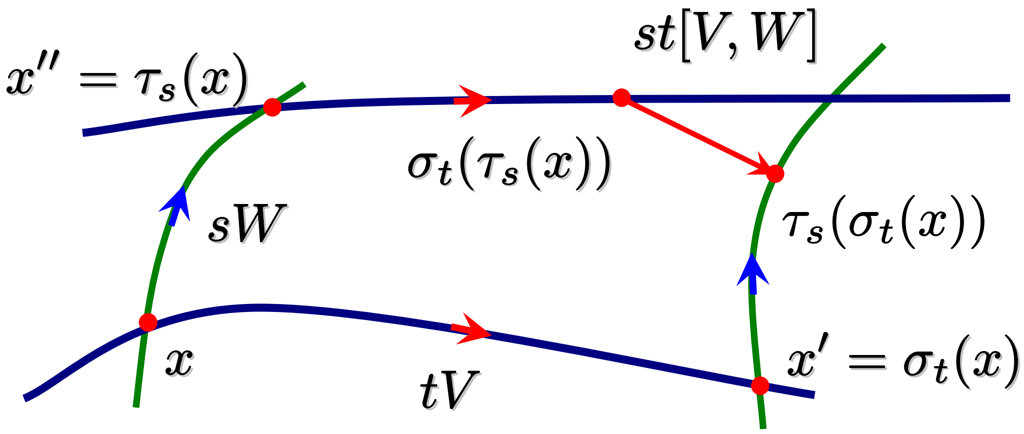
- **Скобка Ли:** $[V,W]f = VW(f) - WV(f),\quad f(x)$**- гладкая функция на $\mathbb{M}$**

в компонентных обозначениях:

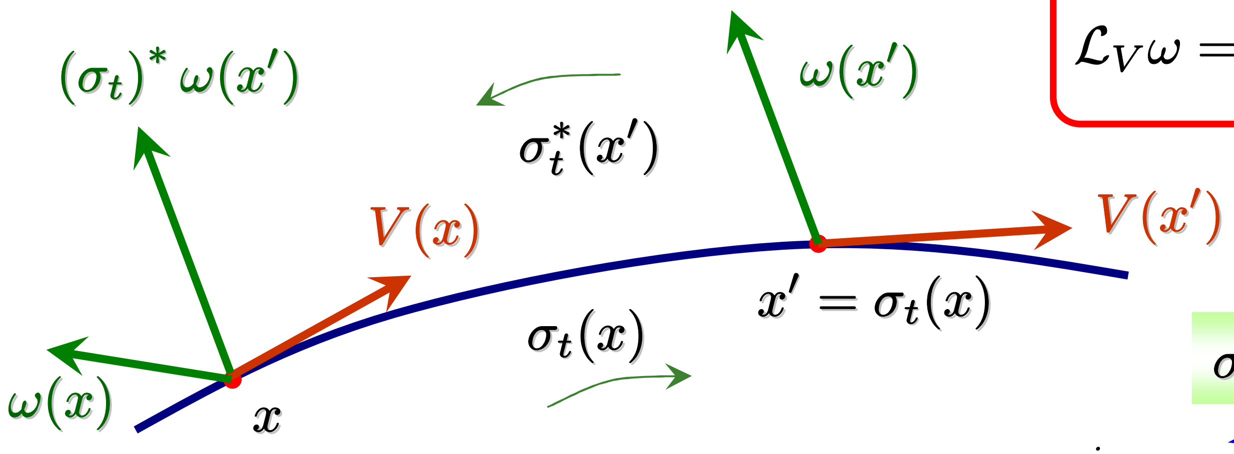
$$[V,W]f = V_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} W_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} f - W_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} V_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} f = [V,W]_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} f = \mathcal{L}_V W\ f$$

Свойства скобки Ли:

- ***Билинейность*** **:** $[V, aW + bU] = a[V,W] + b[V,U]$
- ***Антисимметрия*** **:** $[V,W] = -[W,V]$
- ***Тождество Якоби*** **:** $[[V,W],U] + [[W,U],V] + [[U,V],W] = 0$
- ***Сохранение структуры при отображении*** **:** $f_*[V,W] = [f_*V, f_*W]$
- **Геометрический смысл – некоммутативность двух потоков:**



Производная Ли дифференциальных форм



$$\mathcal{L}_V\omega = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[\sigma_t^*\omega(\sigma_t(x)) - \omega(x)]$$

$$\sigma_t(x) = x_\nu + tV_\nu(x) + \dots$$

В явном виде: $\sigma_t^*\omega(\sigma_t(x)) = \dfrac{1}{r!}\omega_{i_1,\dots i_r}(\sigma_t(x))\dfrac{\partial\sigma_t^{i_1}(x)}{\partial x_{j_1}}\dots\dfrac{\partial\sigma_t^{i_r}(x)}{\partial x_{j_r}}\; dx^{j_1}\wedge\dots\wedge dx^{j_r} =$

$$= \omega(x) + t\frac{1}{r!}\left[V_\nu(x)\frac{\partial}{\partial x_\nu}\omega_{i_1,\dots i_r} + \omega_{\nu,i_2\dots i_r}\frac{\partial V_\nu}{\partial x_{i_1}} + \dots + \omega_{i_1,i_2\dots\nu}\frac{\partial V_\nu}{\partial x_{i_r}}\right]\; dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_r}$$

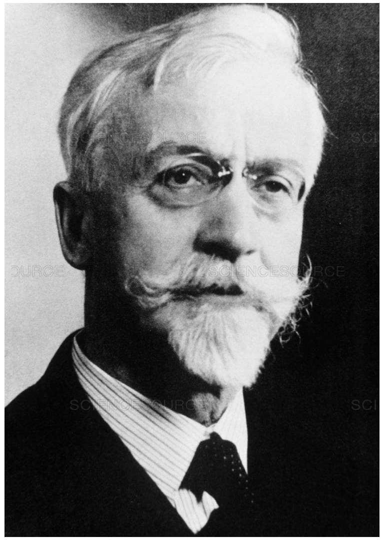
- ***Производная Ли:***

$$\mathcal{L}_V\omega = \frac{1}{r!}\left[V^\nu(x)\partial_\nu\omega_{i_1,\dots i_r} + \omega_{\nu,i_2\dots i_r}\partial_{i_1}V^\nu + \dots + \omega_{i_1,i_2\dots\nu}\partial_{i_r}V^\nu\right]\; dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_r}$$

- **Производная Ли от 1-формы:** $\mathcal{L}_V\omega = [V^\nu\partial_\nu\omega_\mu + \omega_\nu\partial_\mu V^\nu]dx^\mu$

Тождество Картана

- **Тождество Картана:** $$\boxed{\mathcal{L}_V\omega = i_V(d\omega) + d(i_V\omega)}$$



Élie Cartan

- **0-форма (функция):** $\omega = \omega(x), \quad i_V\omega = 0$

$$i_V d\omega = V^\nu \partial_\nu \omega_\mu dx^\mu = \mathcal{L}_V\omega$$

- **1-форма:** $\omega = \omega_\mu(x) dx^\mu$

$$\begin{cases} i_V\omega = V^\nu\omega_\nu; \quad d(i_V\omega) = \partial_\mu(V^\nu\omega_\nu)\ dx^\mu \\ d\omega = \partial_\mu\omega_\nu\ dx^\mu \wedge dx^\nu; \quad i_V(d\omega) = \partial_\mu\omega_\nu\,(V^\mu dx^\nu - V^\nu dx^\mu) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$i_V(d\omega) + d(i_v\omega) = [V^\nu\partial_\nu\omega_\mu + \omega_\nu\partial_\mu V^\nu]dx^\mu = \mathcal{L}_V\omega$$

- **Следствие:** $d(\mathcal{L}_V\omega) = \mathcal{L}_V(d\omega)$

Производная Ли и внешняя производная коммутируют

Производная Ли дифференциальных форм

Пример вычисления: *Рассмотрим векторное поле* $V = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$

и вычислим производную Ли $\mathcal{L}_V\omega$ *от 1-формы* $\omega = y^2dx + x^2dy$

$$\mathcal{L}_V\omega = [V^\nu\partial_\nu\omega_\mu + \omega_\nu\partial_\mu V^\nu]\,dx^\mu = (2xy + x^2)dx - (2xy + y^2)dy$$

- **Тождество Картана:** $\mathcal{L}_V\omega = i_V(d\omega) + d(i_V\omega)$

$$d\omega = 2(x-y)dx\wedge dy; \quad i_V\omega = x^3 - y^3$$

$$i_v(d\omega) = (2xy - 2x^2)dx + (2y^2 - 2xy)dy; \quad d(i_v\omega) = 3x^2dx - 3y^2dy$$

$$\Downarrow$$

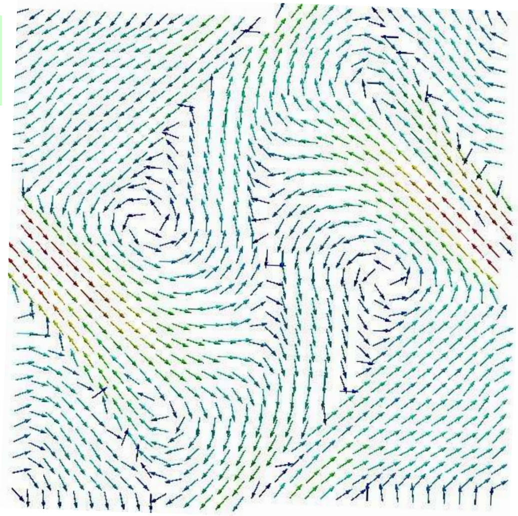
$$\boxed{\mathcal{L}_V\omega = (2xy + x^2)dx - (2xy + y^2)dy}$$

Домашнее задание: вычислить производную Ли от 2-формы

$\omega = -xdx\wedge dy + ydy\wedge dz$ по векторному полю $V = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$

Индекс векторных полей

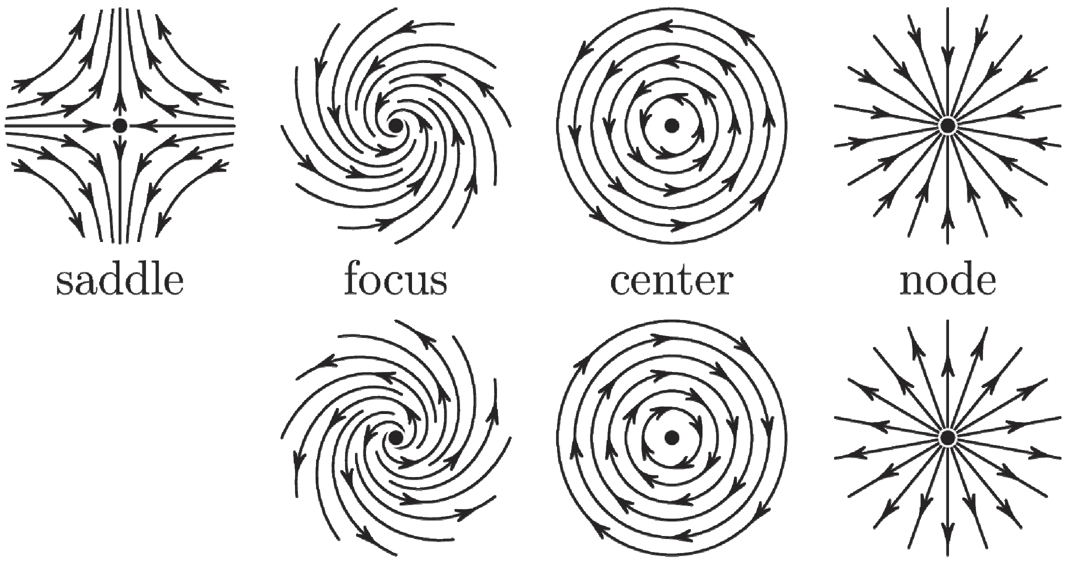
Рассмотрим векторное поле $\mathbf{V}$ на пространств $\mathbb{R}^2$



$$V = v_1(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + v_2(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$$

Особая точка векторного поля: $V(x_0) = 0$

Типы особых точек:



- **Индекс векторного поля:**

$$f = \frac{V}{|V|}, \quad f : S^1 \mapsto S^1$$

$$i_{x_0} = \frac{1}{2\pi}\int_{S^1} d\alpha \frac{v_1 d_\alpha v_2 - v_2 d_\alpha v_1}{v_1^2 + v_2^2}$$

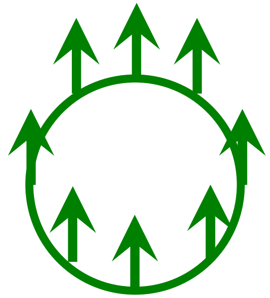
Домашнее задание: определить, каким векторным полям соответствуют эти особые точки

$$i_{x_0} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{S^1} d\alpha \frac{v_1 d_\alpha v_2 - v_2 d_\alpha v_1}{v_1^2 + v_2^2}$$

Индекс векторного поля – это число намотки при обходе вокруг особой точки

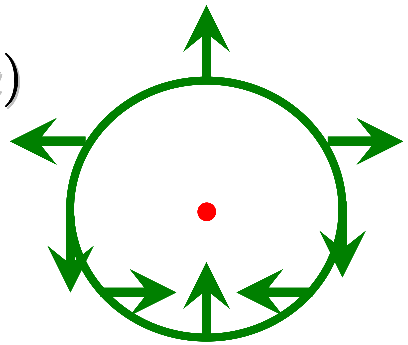
- $i(x_0) = 0$

$f = (0, 1)$



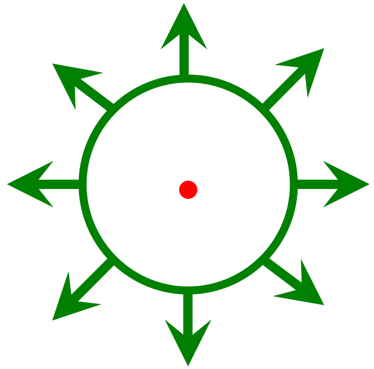
- $i(x_0) = 2$

$f = (\cos 2\alpha, \sin 2\alpha)$



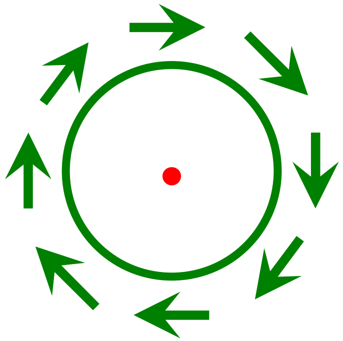
- $i(x_0) = 1$

$f = (\cos\alpha, \sin\alpha)$



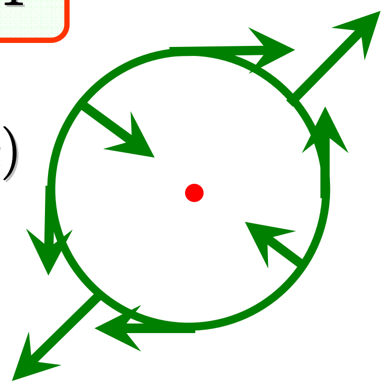
- $i(x_0) = 1$

$f = (\sin\alpha, -\cos\alpha)$



- $i(x_0) = -1$

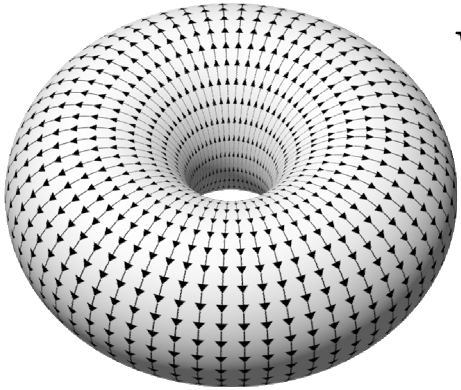
$f = (\sin\alpha, \cos\alpha)$



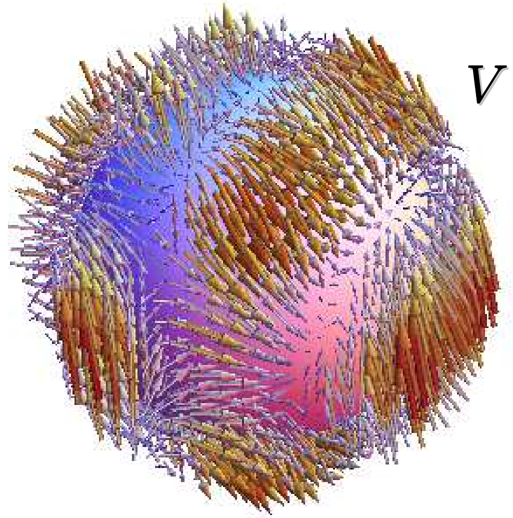
Теорема Хопфа-Пуанкаре

Напомним: векторное поле принадлежит пространству $T_p(\mathbb{M})$, касательному к $\mathbb{M}$.

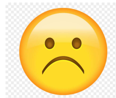
Вопрос: на каких пространствах оно может не иметь особых точек?



$V \in T_p(T^2)$



$V \in T_p(S^2)$



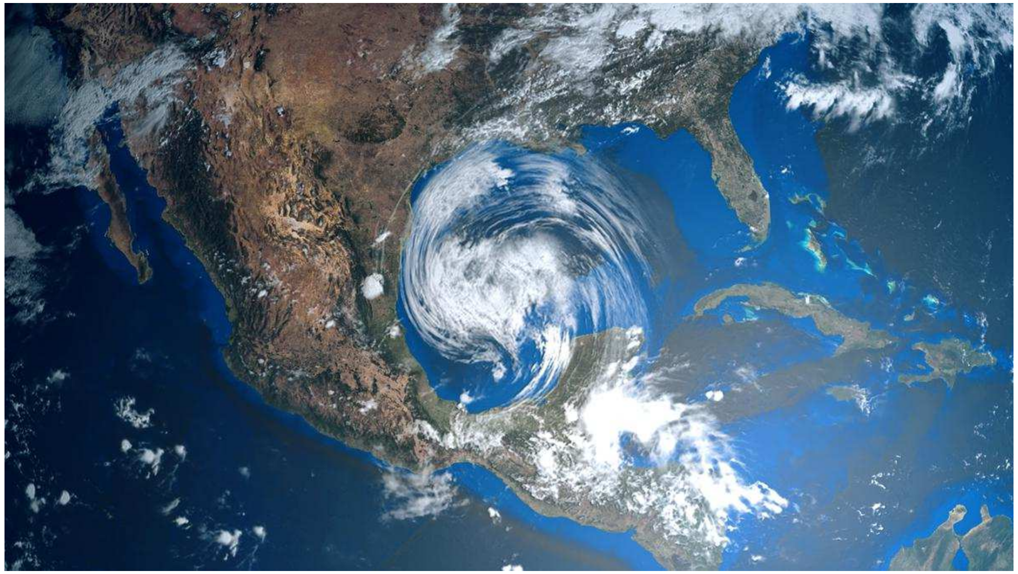
Теорема о причесывании ежа:

Произвольное векторное поле на сфере S^2 <u>всегда</u> имеет особые точки

$$\sigma_k \cdot \hat{r}_k = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta e^{-i\varphi} \\ \sin\theta e^{i\varphi} & -\cos\theta \end{pmatrix} \to U^{-1}\sigma_3 U \qquad U = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & \sin\frac{\theta}{2} e^{-i\varphi} \\ -\sin\frac{\theta}{2} e^{i\varphi} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

- **Следствие:** на Земле всегда где-то дует ветер

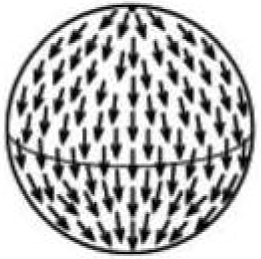
$$\sum_k i_{x_0}^{(k)} = \chi(M) = 2g - 2$$



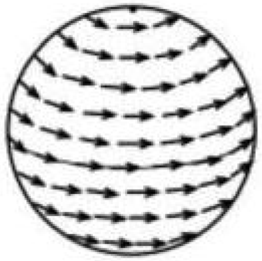
- **Теорема Хопфа-Пуанкаре:**

сумма индексов векторного поля на компактном топологическом пространстве $\mathbb{M}$ равна его индексу Эйлера $\chi(\mathbb{M})$

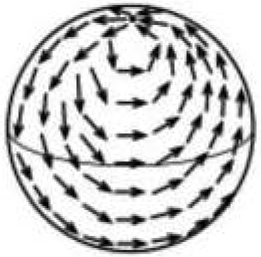
- **Варианты для сферы S^2 :**



{1,-1}



{1,1}



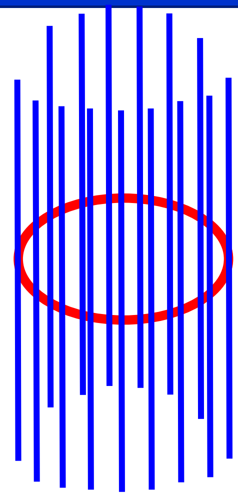
{2,0}

Расслоенные пространства

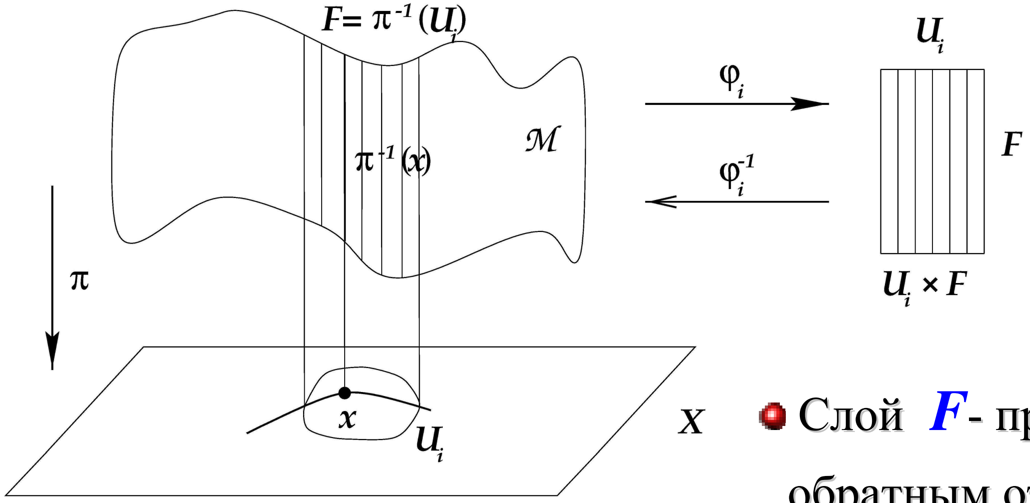
- **Пространства, которые локально выглядят как произведение 2 топологических пространств, называются *расслоенными пространствами***

Пример: касательное расслоение над пространством $\mathbb{X}$

$$\mathcal{M} = \mathbb{R} \times S^1$$



$$\bigcup_{x \in \mathbb{M}} T_x(\mathbb{M})$$



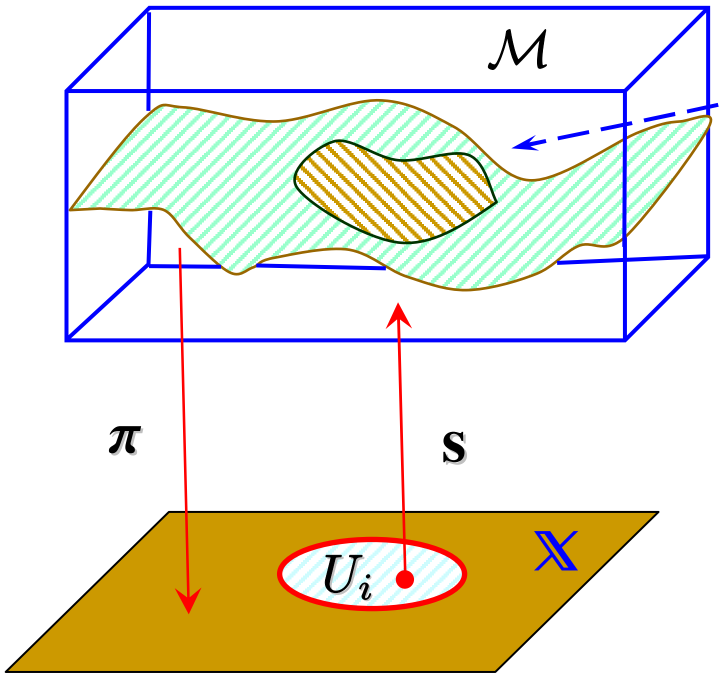
Fibre bundle setup:

- Расслоенное пространство $\mathbb{M}$
- Пространство $\mathbb{X}$ – база
- Проекция на базу π: $\mathbb{M} \rightarrow \mathbb{X}$
- Слой F- пространство, гомеоморфное всем обратным отображениям, $F = \pi^{-1}(x), x \in \mathbb{X}$
- Структурная группа $\mathbf{G}$ всех гомеоморфизмов слоя $\mathbf{F}$
- Набор локальных покрытий $\{U_i\}$ пространства $\mathbb{X}$ с гомеоморфизмом $\phi_i : \pi^{-1}(U_i) \mapsto U_i \times F$, причем $\pi\phi^{-1}(x, f) = x, \quad x \in \mathbb{X}, \quad f \in F$

Сечение расслоения:
непрерывное отображение $s : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{M}$, причем $\pi_s(x) = x, \quad \forall x \in \mathbb{X}$

Сечение = “Подъем в расслоение“

Локальное сечение: подъем окрестности U_i



Структурная группа G: группа Ли в слое, позволяющая перейти от одного набора $\{U_i, \varphi_i\}$ к другому, $\{U_j, \varphi_j\}, \quad U_i \cap U_j \neq 0$

Напомним: топология задается склейкой

$$g_{ij} = \varphi_i \circ \phi_j^{-1} : (U_i \cap U_j) \times F \mapsto (U_i \cap U_j) \times F$$

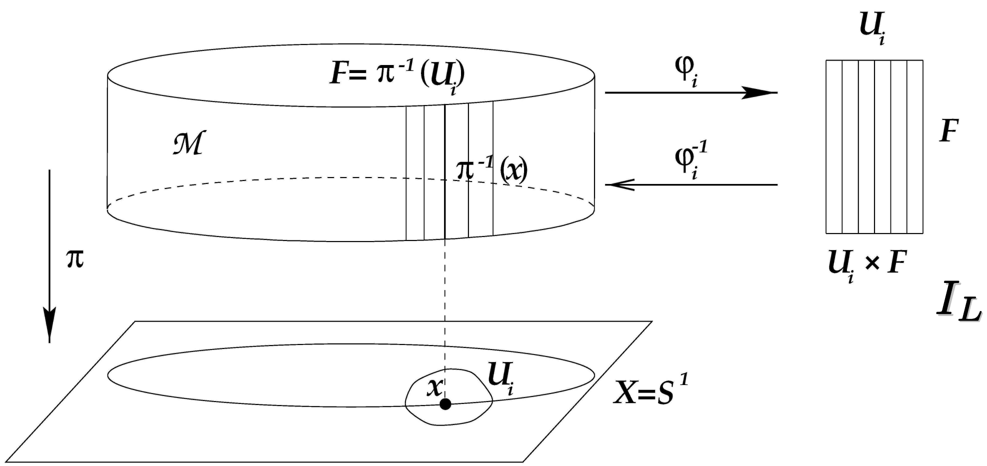
$$g_{ij} = g_{ji}^{-1}, \quad g_{ii} = 1, \quad g_{ij} g_{jk} = g_{ik}$$

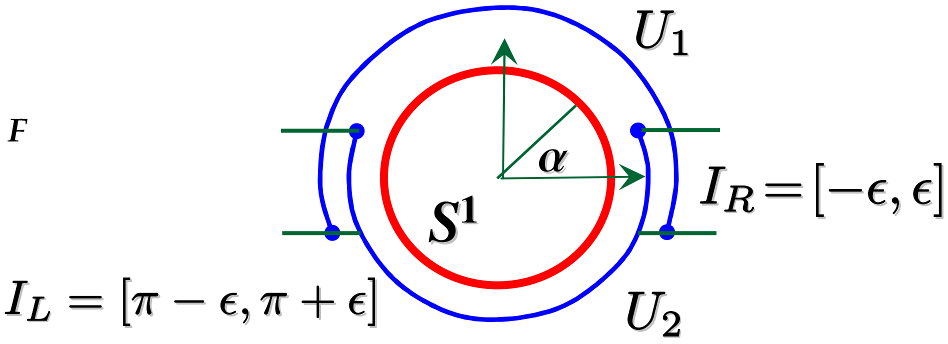
- **Тривиальное расслоение:** $\mathcal{M} = \mathbb{X} \times \mathbb{R}^n, \quad g_{ij} = 1 \; \forall i, j$
- **Линейное расслоение:** $\mathcal{M} = \mathbb{X} \times \mathbb{R}^1$
- **Векторное расслоение:** $\mathcal{M} = \mathbb{X} \times V$

Замечание: имеется представление структурной группы G в векторном пространстве V – в качестве при этом слоя выступает многообразие, на котором задано действие группы – это **ассоциированное расслоение**

Пространство база: S^1

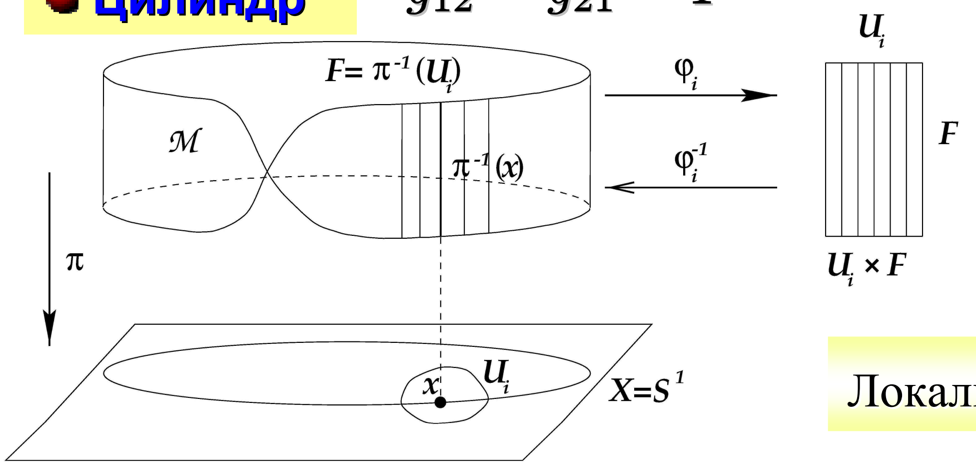
Пространство слой: $F = [-1, 1]$

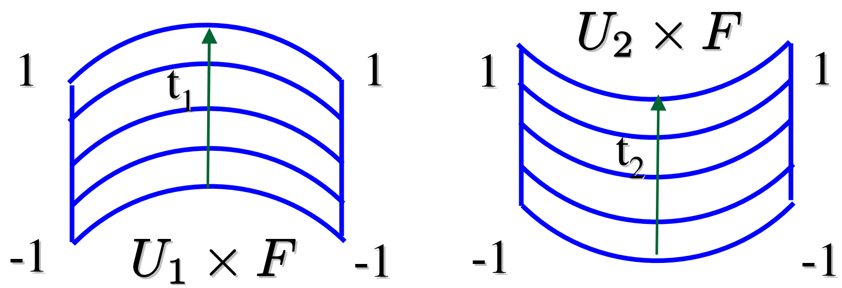




$$\begin{cases} U_1 = \{\alpha | -\epsilon < \alpha < \pi + \epsilon\} \\ U_2 = \{\alpha | \pi - \epsilon < \alpha < 2\pi + \epsilon\} \end{cases}$$

Цилиндр $g_{12} = g_{21} = 1$





Локальные карты с координатами (α, t_1), (α, t_2)

Лента Мёбиуса

Области перекрытия: $U_1 \cap U_2 = I_L \cup I_R$ $t_i = g_{ij} t_j$

$g_{12} = -g_{21} = 1$

Структурная группа: $Z_2 = \{-1, 1\}$

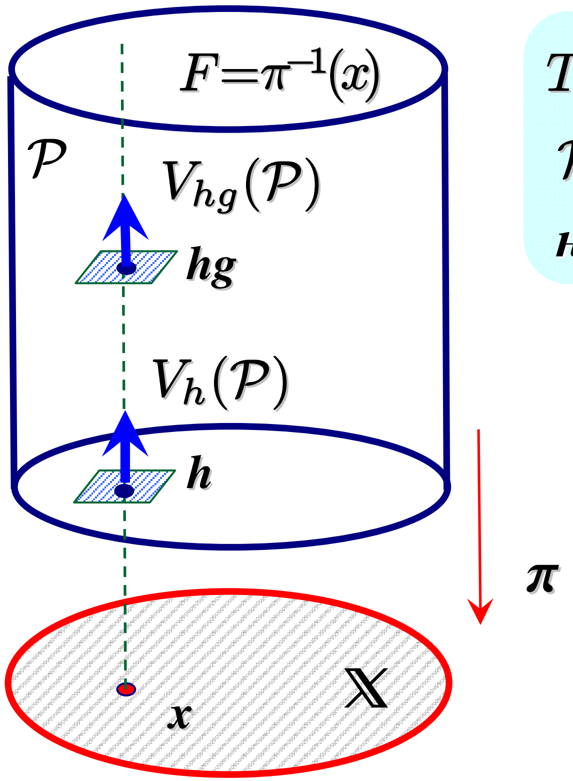
Главное расслоение $\mathcal{P}(\mathbb{X}, G)$ **: слой совпадает со структурной группой**

- **Группа G действует на главном расслоении сама на себя свободно справа:** $R_g h \equiv hg \qquad \forall h, g \in G$

(действие группы не выводит за пределы слоя)

- **Для правого действия группы** $(hg_1)g_2 = h(g_1 g_2) \quad \forall h, g_1, g_2 \in G$
- **Действие группы G задает соотношения эквивалентности:**

$$h \sim h' \quad \forall h' = R_g h$$



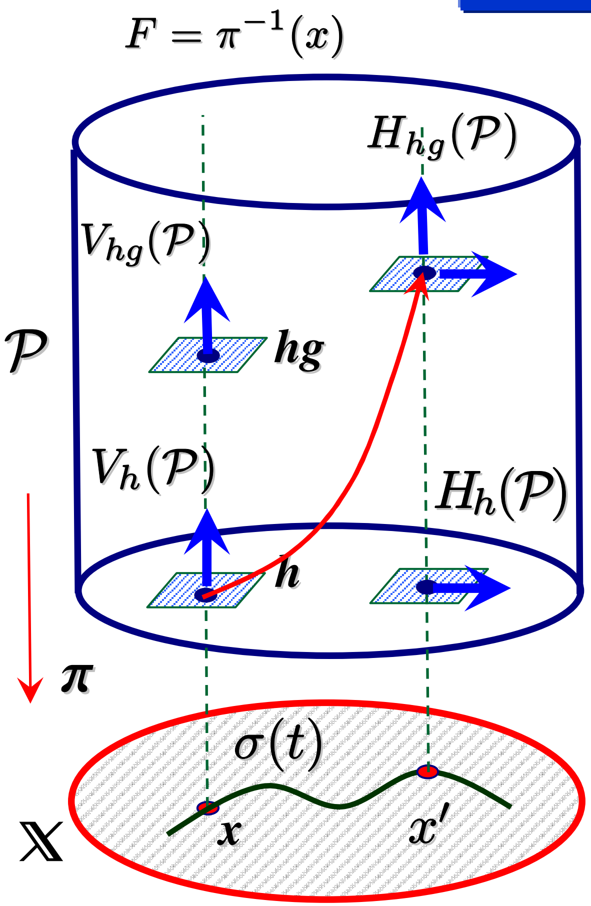
$T_h(\mathcal{P})$ *- пространство, касательное к расслоению $\mathcal{P}$ в точке слоя h, оно разбивается на вертикальное и горизонтальные подпространства:*

$$T_h(\mathcal{P}) = V_h(\mathcal{P}) \oplus H_h(\mathcal{P})$$

Действие структурной группы задает «вертикальное» движение вдоль слоя

Задача: ***определить «горизонтальное» движение в расслоении - от одного слоя к другому***

Связность



Связность задает «горизонтальное» направление в расслоении $\mathcal{P}$ (правило __связи__ касательных к нему пространств)

- **Замечание 1:** Структурная группа – это группа Ли:

$$R_g h = h e^{tA} = \sigma(t, h)$$ ⟸ Поток вдоль слоя F

- **Замечание 2:** Поток генерирует векторное поле

$$X_A f(h) := \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f(he^{tA})$$

f - произвольная гладкая функция, $f : \mathcal{P} \mapsto \mathbb{R}^n$

Векторное поле $\mathbf{X}$ сохраняет структуру алгебры Ли:

$$[X_a, X_b] = f^{abc} X_c, \quad X_a \in V_h(\mathcal{P})$$

- **Замечание 3:** дуальным к касательному пространству $V_h(\mathcal{P})$ является пространство r-форм ω на слое G

Каноническая 1-форма на группе Ли: $\omega = g^{-1}dg, \quad g \in G$

Пример: *каноническая 1-форма на группе $SU(2)$:*

$$g(\theta,\phi,\psi) = e^{i\frac{\sigma_3}{2}\phi}e^{i\frac{\sigma_2}{2}\theta}e^{i\frac{\sigma_3}{2}\psi} = \begin{pmatrix} z_1 & \bar{z}_2 \\ -z_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} z_1 = \cos\frac{\theta}{2}e^{\frac{i}{2}(\psi+\phi)} \\ z_2 = \sin\frac{\theta}{2}e^{\frac{i}{2}(\psi-\phi)} \end{cases}$$

$$dg = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \left[-\sin\frac{\theta}{2}d\theta + i\cos\frac{\theta}{2}(d\psi+d\phi)\right]e^{\frac{i}{2}(\psi+\phi)} & \left[\cos\frac{\theta}{2}d\theta - i\sin\frac{\theta}{2}(d\psi-d\phi)\right]e^{-\frac{i}{2}(\psi-\phi)} \\ \left[-\cos\frac{\theta}{2}d\theta + i\sin\frac{\theta}{2}(d\phi-d\psi)\right]e^{\frac{i}{2}(\psi-\phi)} & -\left[\sin\frac{\theta}{2}d\theta + i\cos\frac{\theta}{2}(d\psi+d\phi)\right]e^{-\frac{i}{2}(\psi+\phi)} \end{pmatrix}$$

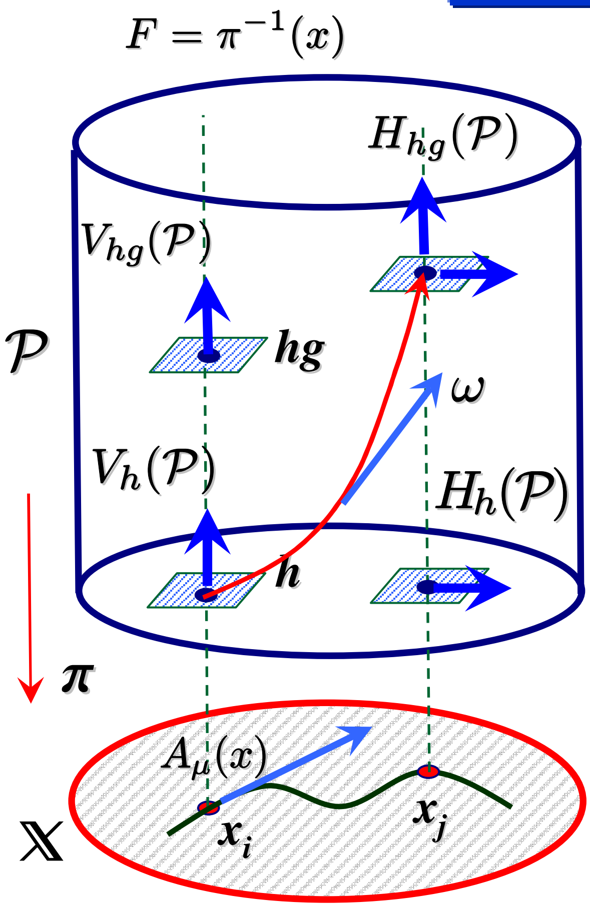
Домашнее задание: показать, что $\omega = g^{-1}dg = \frac{i}{2}\omega^k\sigma_k$ **, где**

$$\boxed{\omega^1 = \sin\theta\cos\psi d\phi - \sin\psi d\theta, \quad \omega^2 = \sin\theta\sin\psi d\phi + \cos\psi d\theta, \quad \omega^3 = \cos\theta d\phi + d\psi}$$

Замечание: ***ω дуальна векторному полю V на группе SU(2):*** $\omega_k(V^k) = \frac{1}{2i}\sigma^k$

$$\begin{cases} V_1 = \dfrac{\cos\psi}{\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\phi} - \sin\psi\dfrac{\partial}{\partial\theta} - \cos\psi\cot\theta\dfrac{\partial}{\partial\psi}; \\ V_2 = \dfrac{\sin\psi}{\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\phi} + \cos\psi\dfrac{\partial}{\partial\theta} - \sin\psi\cot\theta\dfrac{\partial}{\partial\psi}; \\ V_3 = \dfrac{\partial}{\partial\psi} \end{cases}$$

Связность



$$\boxed{T_h(\mathcal{P}) = V_h(\mathcal{P}) \oplus H_h(\mathcal{P})}$$

$$\dim V_h(\mathcal{P}) = \dim G = d, \quad \dim H_h(\mathcal{P}) = \dim \mathbb{X} = n$$

- **Базис** $T_h\mathcal{P}$ ⇒ $\dfrac{\partial}{\partial x_\mu} + C_{\mu ij}\dfrac{\partial}{\partial g_{ij}}$ $\qquad g_{ij} = g \in G$

Задача: определить явный вид коэффициентов $C_{\mu ij}$

- **Произвольное векторное поле в расслоении:**

$$V = \alpha_{ij}\frac{\partial}{\partial g_{ij}} + \beta^\mu\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} + C_{\mu ij}\frac{\partial}{g_{ij}}\right) \in T_h(\mathcal{P})$$

- **Произвольная форма в расслоении:**

$$\omega = g_{ij}^{-1}(dg)_{ij} + g_{ij}^{-1}\ \left(A_\mu^a T_{ik}^a\ dx^\mu\right)\ g_{kj} \in T_h^*(\mathcal{P})$$

$$(\omega, V) = g_{ij}^{-1}\left(\alpha_{ij} + \beta^\mu C_{\mu ij}\right) + \beta^\mu g_{ij}^{-1}\ A_\mu^a T_{ik}^a\ g_{kj}$$

- **Заметим:** **если** $V \in H_h(\mathcal{P})$ **, то** $(\omega, V) = 0, \quad \alpha_{ij} = 0$

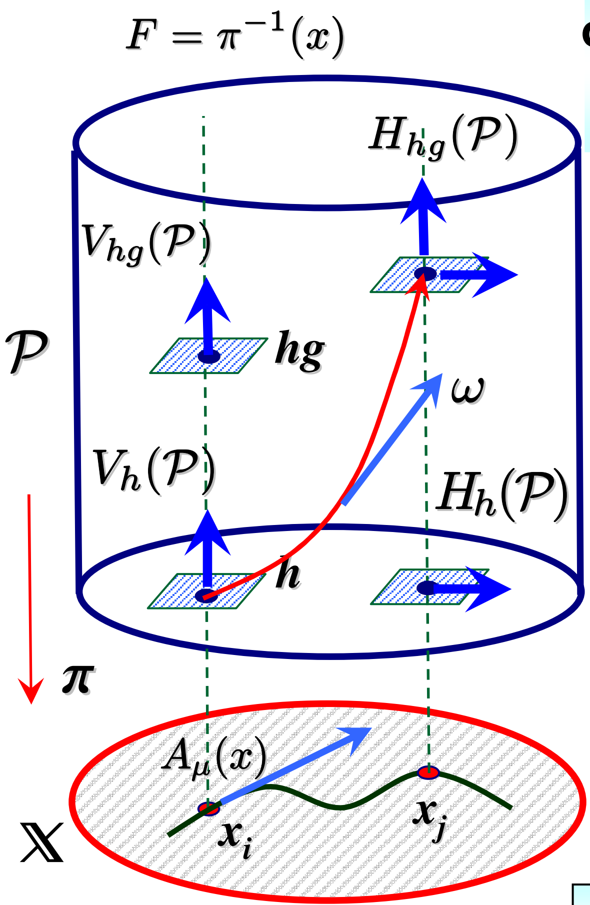
⇒ $g_{ij}^{-1}\beta^\mu C_{\mu ij} + \beta^\mu g_{ij}^{-1}\ A_\mu^a T_{ik}^a\ g_{kj} = 0$ **, то есть** $\boxed{C_{\mu ij} = -A_\mu^a T_{ik}^a\ g_{kj}}$

Каноническая 1-форма связности:

$$\boxed{\omega = g^{-1}dg + g^{-1}(\pi^{-1}A)g,} \quad g \in G, \quad A = A^a_\mu T^a dx^\mu$$

1-форма в алгебре группы G

Pull-back: $s^*\omega = A$



Форма ω уникально определена в расслоении $\mathcal{P}$, но форма A локально задана на базе $\mathbb{X}$

$$g^{-1}dg + g^{-1}(\pi^{-1}A(x_i))g = (g')^{-1}dg' + (g')^{-1}(\pi^{-1}A(x_j))g'$$

Напомним: g - координата в слое, $g' = hg \quad h \in G$
и $dg' = dh\ g + h\ dg$

$$g^{-1}dg + g^{-1}Ag = g^{-1}h^{-1}\,(dh\ g + h\ dg) + g^{-1}h^{-1}A'hg$$

- **При переходе от локальной окрестности точки x_i к окрестности точки x_j:**

$$\boxed{A = h^{-1}A'h + h^{-1}dh}$$

Афинные преобразования формы А

- ***<u>Ковариантная внешняя производная</u> r-формы $D\omega$: объект, который преобразуется под действием преобразований группы G так же, как и сама форма ω***

- ***ω - инвариант преобразований группы G***

$$\omega' = \omega \qquad (D\omega)' = D\omega = d\omega$$

- ***ω преобразуется как вектор относительно преобразований из G***

$$\omega' = g\omega, \quad (D\omega)' = g(D\omega) \qquad D\omega = d\omega + A\wedge\omega; \quad A' = g^{-1}Ag + g^{-1}dg$$

Замечание: $(dg)g^{-1} + g(dg^{-1}) = 0$

Калибровочное преобразование вектор-потенциала $A_\mu = A_\mu^a T^a$

- ***Действие ковариантной внешней производной генерирует форму степени r+1, например для 1-формы A***

$$F = DA = dA + A\wedge A, \quad F' = (DA)' = g^{-1}(DA)g = g^{-1}Fg$$

2-форма <u>*кривизны*</u>

Проекция кривизны на локальную карту в базе определяет тензор напряженности поля

$$\boxed{F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial^\nu A_\mu^a + f^a{}_{bc}A_\mu^b A_\mu^c}$$

Расслоение Хопфа

Сфера S^3:

$$x_\mu x^\mu = 1 \quad \begin{cases} x_1 = \cos\frac{\theta}{2}\cos\alpha, & x_2 = \cos\frac{\theta}{2}\sin\alpha, \\ x_3 = \sin\frac{\theta}{2}\cos(\phi+\alpha), & x_4 = \sin\frac{\theta}{2}\sin(\phi+\alpha) \end{cases}$$

$$z_1 = x_1 + ix_2 = \cos\frac{\theta}{2}e^{i\alpha}$$

$$z_2 = x_3 + ix_4 = \sin\frac{\theta}{2}e^{i(\alpha+\phi)}$$

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2}e^{i\alpha} \\ \sin\frac{\theta}{2}e^{i(\alpha+\phi)} \end{pmatrix}, \qquad \bar{z}z = 1$$

Координаты двумерной комплексной плоскости

- ***Каноническая 1-форма на сфере S^3 :*** $\omega = -i\bar{z}\wedge dz = d\alpha + \frac{1}{2}(1-\cos\theta)\,d\phi$
- ***2-форма кривизны:*** $\Omega = d\omega = -id\bar{z}\wedge dz = \frac{1}{2}\sin\theta d\theta\wedge d\phi$

- **Вопрос:** это выражение ничего не напоминает? А куда делся угол α ???

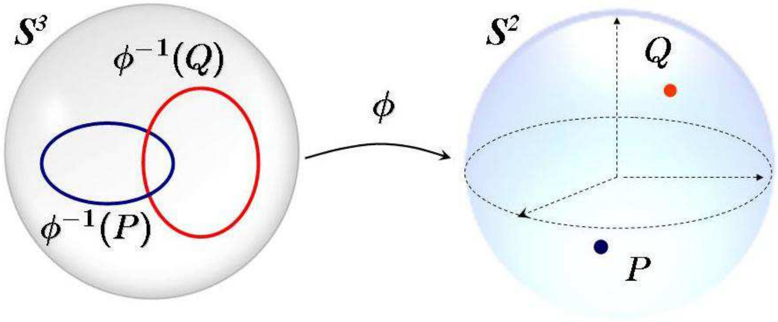
Отображение Хопфа: $n_k = \bar{z}\sigma_k z$

$$\begin{cases} n_1 = 2(x_1x_3 + x_2x_4) = \sin\theta\cos\phi \\ n_2 = 2(x_1x_4 - x_2x_3) = \sin\theta\sin\phi \\ n_3 = 2(x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2) = \cos\theta \end{cases}$$

n_k - единичный вектор на сфере S^2

Отображение Хопфа $S^3 \to S^2$

Расслоение Хопфа сферы S^3 :   база – S^2 , слой – S^1



Отображение Хопфа ставит в соответствие каждой петле на сфере S^3 точку на сфере S^2

Замечание: S^1 - это групповое пространство абелевой группы U(1)

- **Группа гомотопии отображения Хопфа** $\pi_3(S^2) = \mathbb{Z}$

- **Обратная стереографическая проекция из $\mathbb{R}^3$ на $\mathbb{S}^3$:**

$$\phi^{-1}(x,y,z) = (x_3, x_4, x_2, x_1) = \left(\frac{2x}{1+r^2}, \quad \frac{2y}{1+r^2}, \quad \frac{2z}{1+r^2}, \quad \frac{1-r^2}{1+r^2}\right)$$

$$\begin{cases} n_1 = \dfrac{4(2yz + x(1-r^2))}{(1+r^2)^2}, \\ n_2 = \dfrac{4(-2xz + y(1-r^2))}{(1+r^2)^2}, \\ n_3 = 1 - \dfrac{8(x^2+y^2)}{(1+r^2)^2} \end{cases}$$

<u>Проекция отображения Хопфа из S^3 на $\mathbb{R}^3$</u>