Кафедра теоретической физики и астрофизики
Физический факультет, БГУ Минск

Дифференциальная геометрия и топология

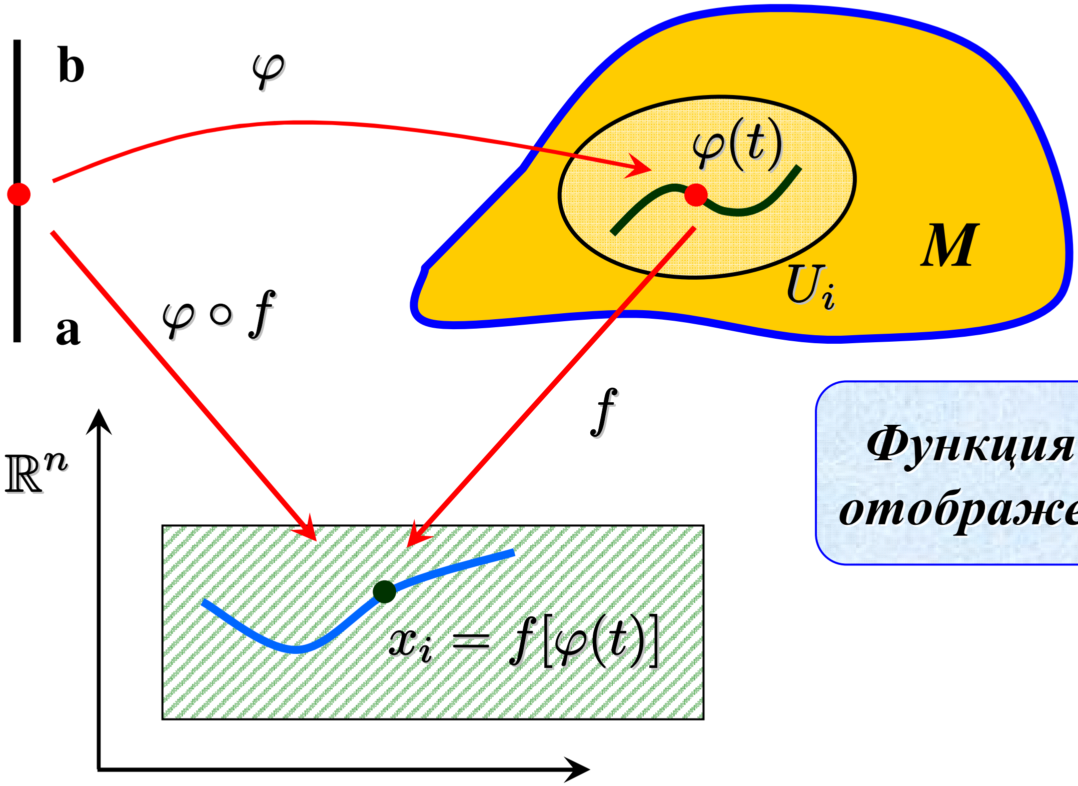
Я М Шнир

все вопросы, комментарии, замечания и протесты:

shnir@maths.tcd.ie

Векторные поля на многообразиях

Кривая на n-мерном пространстве M - это отображение φ: (a,b) → *M*:



$t \in [0,1]$

$a \mapsto \varphi(0)$

$b \mapsto \varphi(1)$

Функция - это гладкое отображение f: *M* → ℝ$^{\mathrm{n}}$:

- **Векторное поле на пространстве *M* задается касательными векторами**

$$v_i = \frac{dx_i}{dt} = \frac{d}{dt} f[\varphi(t)] \in T_p(M)$$

$T_p(M)$ и $T_p^*(M)$

Базис касательного пространства $T_p(M)$ в выбранной локальной карте: $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \dfrac{\partial}{\partial x_2}, \dots \dfrac{\partial}{\partial x_n}\right\}$

Замечание 1: $T_p(M)$ **- это линейное векторное пространство V**

- **Векторное поле на пространстве M:** $\mathcal{V} = v_i \dfrac{\partial}{\partial x_i} \in T_p(M)$

- **Кокасательное пространство $T_p^*(M)$: пространство линейных отображений** $f : V \mapsto \mathbb{R}^n$

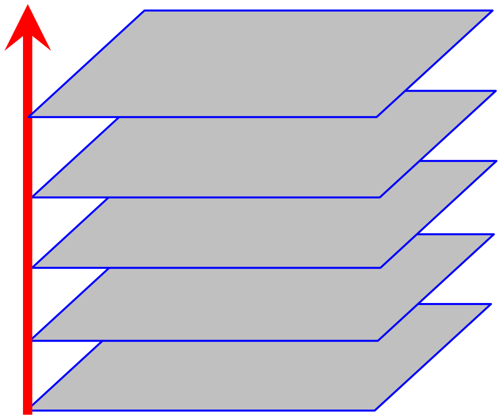
Базис кокасательного пространства $T_p^*(M)$ в выбранной локальной карте: $\{dx_1, dx_2 \dots dx_n\}$

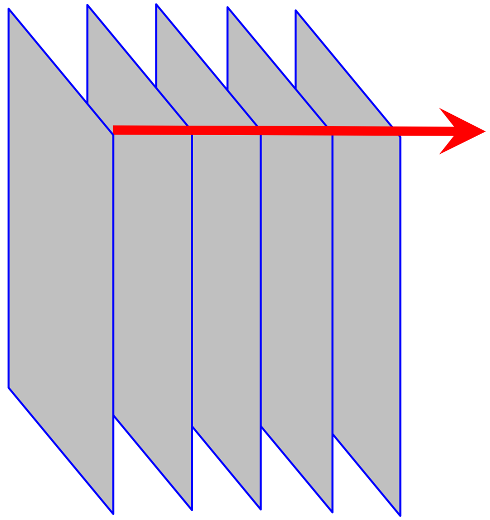
- **Элемент кокасательного пространства: линейная форма** $\omega = \omega_i dx^i \in T_p^*(M)$

Замечание 2: **связь между векторными пространствами $T_p(M)$ и $T_p^*(M)$ требует дополнительного определения скалярного произведения**

$$(\quad , \quad) : V \otimes V \mapsto \mathbb{R}; \qquad \left(dx^i, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \delta^i_j$$

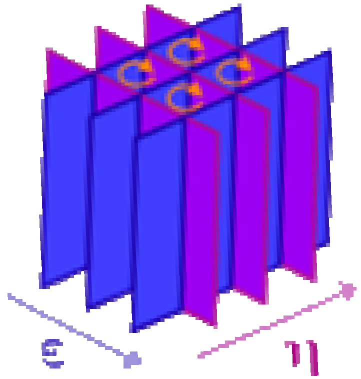
Визуализация дифференциальных форм





- ***1-форма в*** $\mathbb{R}^3$

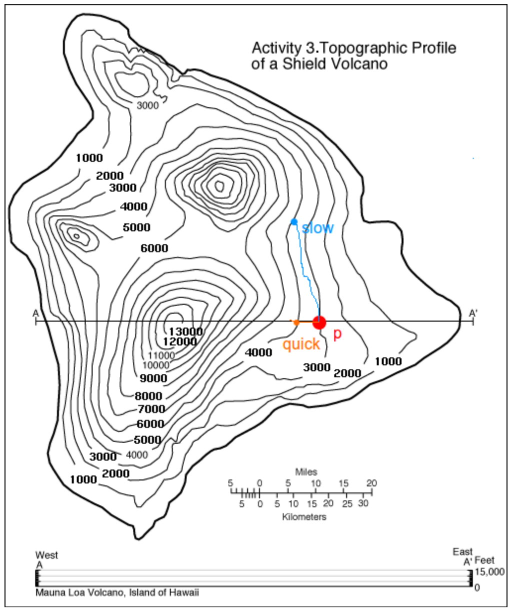
$$\varepsilon = \varepsilon(x, y, z)dx$$

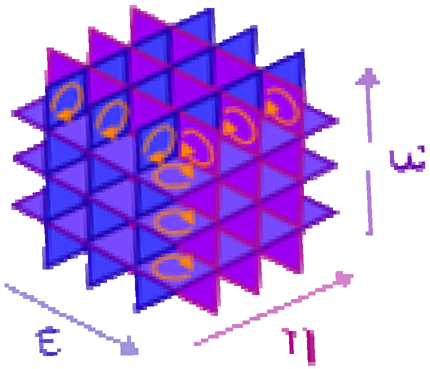


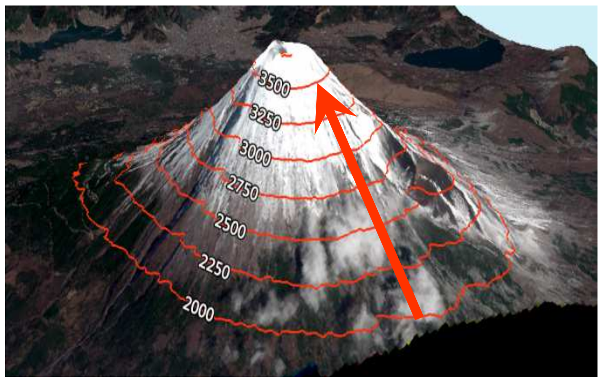
- ***2-форма*** $\varepsilon \wedge \eta$

- ***1-форма в*** $\mathbb{R}^3$

$$\eta = \eta(x, y, z)dy$$







- ***3-форма*** $\varepsilon \wedge \eta \wedge \omega$

Операции над дифференциальными формами

- **Внешнее произведение:**

$$dx^\mu \wedge dx^\nu \equiv dx^\mu \otimes dx^\nu - dx^\nu \otimes dx^\mu$$

- **Дифференциальные формы высшего ранга:**
  - **Билинейная форма:** $\omega = \dfrac{1}{2} \sum\limits_{\mu,\nu} \omega_{\mu\nu}(x) dx^\mu \wedge dx^\nu \in T_p^*(M) \otimes T_p^*(M)$
  - **r-форма:** $\omega = \dfrac{1}{r!} \sum\limits_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_r} \omega_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_r}(x) dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_r} \in \underbrace{T_p^*(M) \otimes \cdots \otimes T_p^*(M)}_{r}$

Замечание: ***набор всех r-форм в пространстве*** $T_p^*(M)$ ***размерности n задает векторное пространство*** Λ^r ***размерности***

$$\dim \Lambda^r = \begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

- **Внешнее произведение форм:**

$$\omega_1 = f(x_i) dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$$

$$\omega_2 = g(x_i) dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_q}$$

Градуированная коммутативность:

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = (-1)^{pq}\, \omega_2 \wedge \omega_1$$

Внешнее дифференцирование форм:

$$\omega = f(x_i)dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \xrightarrow{d} d\omega = \frac{1}{p!}\frac{\partial f}{\partial x_k}dx^k \wedge dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$$

$d : \Lambda^p \mapsto \Lambda^{p+1}$

Полностью антисимметричный тензор ранга *p*: $f(x_i) = f_{i_1,i_2,\ldots i_p}(x_i)$

p-форма *r-форма*

Градуированное правило Лейбница: $d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^p \omega_1 \wedge d\omega_2$

Внешнее дифференцирование:

- ***Линейно:*** $d(a\omega_1 + b\omega_2) = ad\omega_1 + bd\omega_2, \quad \forall a,b \in \mathbb{C}$
- ***Нильпотентно:*** $d^2\omega \equiv 0$

Замкнутая форма: $d\omega = 0$

Точная форма: $\omega = d\alpha$

Лемма Пуанкаре: любая замкнутая форма <u>локально</u> является точной формой

Внутреннее произведение r-формы $\omega \in \Lambda^r$ и вектора $\mathcal{V} = v_k \dfrac{\partial}{\partial x_k} \in T_p(M)$:

$$\boxed{i_v : \Lambda^r \mapsto \Lambda^{r-1}}$$

$$i_v\omega = \frac{1}{(r-1)!} \sum_{k,i_2,\dots i_r} v^k \omega_{k,i_2,i_3,\dots i_r}\, dx^{i_2} \wedge dx^{i_3} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} =$$

$$= \frac{1}{r!} \sum_{a=1}^{r} (-1)^{a-1} v^{i_a} \sum_{i_1,i_2\dots i_r} \omega_{i_1,i_2\dots i_r} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx^{i_a}} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}$$

Внутреннее произведение:

- **Линейно по формам:** $i_v(\omega_1 + \omega_2) = i_v\omega_1 + i_v\omega_2, \quad \forall \omega \in \Lambda^r$
- **Линейно по векторному полю:** $i_{v+w}\omega = i_v\omega + i_w\omega, \quad \forall v, w \in T_p(M)$
- **Антисимметрично:** $i_v \circ i_w = -i_w \circ i_v; \qquad i_v^2 = 0$

Градуированное правило Лейбница: $i_v(\omega_1 \wedge \omega_2) = i_v\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^p \omega_1 \wedge i_v\omega_2$

p-форма *r-форма*

Примеры вычисления внутреннего произведения:

- ***1-форма в*** $\mathbb{R}^3$**:** $\omega = \omega_x dx + \omega_y dy + \omega_z dy;$
- ***Векторное поле, касательное к*** $\mathbb{R}^3$**:** $\mathcal{V} = v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}$

$$\boxed{i_v \omega = v_x \omega_x + v_y \omega_y + v_z \omega_z = (\mathcal{V}, \omega)}$$

- ***2-форма в*** $\mathbb{R}^3$**:** $\omega = \omega_{xy} dx \wedge dy + \omega_{yz} dy \wedge dz + \omega_{zx} dz \wedge dx$

$$\boxed{i_v \omega = \frac{1}{2} \omega_{kj} (v^k dx^j - v^j dx^k)}$$

Задача: **Чему равно внутреннее произведение** $\mathcal{V}$ **и 3-формы в** $\mathbb{R}^3$**?**

?

Рассмотрим 2 векторных поля на $\mathbb{R}^3$ *и 2-форму* ω*:*

$$\begin{cases} \mathcal{V} = v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \\ \mathcal{U} = u_x \frac{\partial}{\partial x} + u_y \frac{\partial}{\partial y} + u_z \frac{\partial}{\partial z} \end{cases} \Rightarrow$$

$$i_u i_v \omega = \frac{1}{2} \omega_{kj} i_u (v^k dx^j - v^j dx^k) =$$

$$= v^k u^j \omega_{kj} = \omega(\mathcal{V}, \mathcal{U})$$

Интегрирование форм

- **Интегрирование форм определяется как операция, обратная к внешнему дифференцированию:** $\mathbf{d} \quad \leftrightarrow \quad \int$
- **Элемент объема пространства М,** $\dim M = n$

n-форма $\omega = \frac{1}{n!}\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} dx^{i_1} \wedge dx_2^i \wedge \cdots \wedge dx_n^i = dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n \in T_p^*(M)$

Пусть ***f(x)*** – произвольная гладкая функция на **M**, тогда интеграл от n-формы ***f ω*** по локальной окрестности ***U*** на **M** определяется как

$$\int_U \omega = \int_U f(x) dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n = O(U) \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dV$$

Ориентация *O*(*U*) = ±1

- <u>**Теорема Стокса:**</u> **пусть M – ориентируемое компактное пространство с непустой границей δM,** $\dim M = n$ **и имеется *n-1* форма** $\omega \in \Lambda^{n-1}$

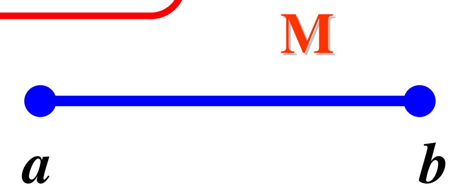
Тогда

$$\boxed{\int_M d\omega = \int_{\delta M} \omega}$$

Теорема Стокса: примеры

$$\int\limits_{M} d\omega = \int\limits_{\delta M} \omega, \qquad \dim\, M = n, \qquad \omega \in \Lambda^{n-1}$$

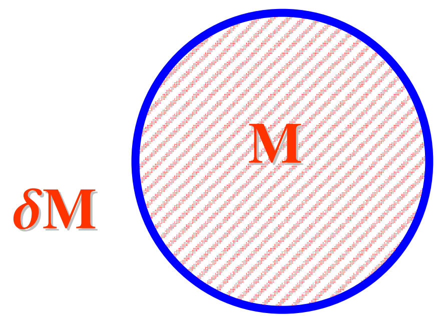
- ***n=1:*** $\quad M = [a,b], \qquad \delta M = \{a,b\}$



0-форма $\quad \omega = f(x)$

$$\Rightarrow \int\limits_{M} d\omega = \int\limits_{a}^{b} \frac{d\omega}{dx} dx = \omega(b) - \omega(a) = \int\limits_{\delta M} \omega$$

- ***n=2:*** $\quad M = \left\{ (x_1, x_2) \middle| x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \right\}, \qquad \delta M = S^1$



1-форма

$$\omega = \omega_i(x) dx^i, \quad d\omega = \partial_j \omega_i(x) dx^j \wedge dx^i = \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} \right) dx^1 \wedge dx^2$$

$$= \frac{1}{2} \left(\partial_i \omega_j - \partial_j \omega_i \right) dx^i \wedge dx^j$$

Замечание: сопоставим форме ω планарные компоненты вектора потенциала $\omega_i(x_1, x_2) \Longrightarrow A_i(x_1, x_2)$

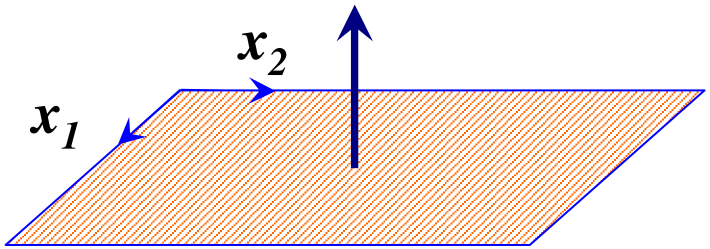
Магнитное поле:

$$B^k = \varepsilon^{ijk}\partial_i A_j; \qquad \vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \mathrm{rot}\ \vec{A}$$

$$\frac{1}{2}\left(\partial_i\omega_j - \partial_j\omega_i\right) dx^i \wedge dx^j \Longrightarrow \frac{1}{2}\left(\partial_i A_j - \partial_j A_i\right) dx^i \wedge dx^j = \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk} B_k dx_i \wedge dx_j = B_k dS^k$$

$$B_k = (0, 0, B(x_1, x_2)), \qquad dS^k = \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk} dx^i \wedge dx^j$$

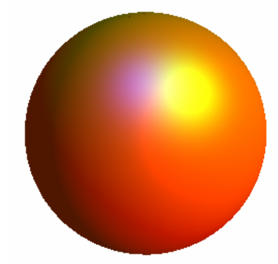
Вектор нормали



$$\int\limits_M d\omega = \int\limits_{D^2} (\nabla \times \vec{A})\ d\vec{S} = \int\limits_{D^2} \vec{B}\ d\vec{S} = \int\limits_{S^1} \vec{A} d\vec{x} = \int\limits_{\delta M} \omega$$

Теорема Стокса: Поток магнитного поля через диск равен циркуляции потенциала на его границе

- ***n=3:*** $M=\left\{(x_1,x_2,x_3)\middle| x_1^2+x_2^2+x_3^2\le 1\right\},\qquad \delta M=S^2$



2-форма

$$\omega=\omega_{12}dx^1\wedge dx^2+\omega_{23}dx^2\wedge dx^3+\omega_{31}dx^3\wedge dx^1=\frac{1}{2}\omega_{ij}dx^i\wedge dx^j$$

$$d\omega=\frac{1}{2}\partial_k\omega_{ij}dx^k\wedge dx^i\wedge dx^j$$

Замечание: сопоставим форме ω компоненты вектора электрического поля $E_1\to\omega_{23},\quad E_2\to\omega_{31},\quad E_3\to\omega_{12};\qquad \vec{E}=(E_1,E_2,E_3)$

$$\omega=\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}E_k dx_i\wedge dx_j=E_k dS^k=\vec{E}\cdot\vec{S}$$

$$d\omega=\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\,\partial^l E_k dx_l\,\wedge dx_i\wedge dx_j=\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\varepsilon_{lij}\,\partial^l E_k\,dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3$$

$$=\delta_l^k\,\partial^l E_k\,dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3=\boxed{\nabla\cdot\vec{E}\,dV}$$

Теорема Стокса = закон Гаусса

$$\boxed{\int_M d\omega=\int_{Ball}(\nabla\times\vec{E})\,dV=\int_{S^2}\vec{E}\,d\vec{S}=\int_{\delta M}\omega}$$

Дуальность Ходжа

$\dim M = n$

$\omega \in \Lambda^r$ - векторное пространство размерности

$$\dim \Lambda^r = \begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Замечание: **пространства Λ^r и Λ^{n-r} имеют одну и ту же размерность**

Sir William Vallance Douglas Hodge

- **Операция дуальности Хожда - это изоморфизм между Λ^r и Λ^{n-r}**

$$\Lambda^r \xrightarrow{\star} \Lambda^{n-r}$$

$$\omega = dx^1 \wedge dx^2 \cdots \wedge dx^r \quad \Longrightarrow \quad \star\,\omega = dx^{r+1} \wedge dx^{r+2} \wedge \cdots \wedge dx^n$$

$$\star dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r} = \frac{1}{(n-r)!} \varepsilon^{i_1 i_2 \ldots i_r}{}_{i_{r+1} i_{r+2} \ldots i_n}\; dx^{i_{r+1}} \wedge dx^{i_{r+2}} \wedge \cdots \wedge dx^{i_n}$$

!

$$\varepsilon^{i_1 i_2 \ldots i_r}{}_{i_{r+1} i_{r+2} \ldots i_n} = g^{i_1 k_1} g^{i_2 k_2} \ldots g^{i_r k_r} \varepsilon_{k_1 k_2 \ldots k_r i_{r+1} \ldots i_n}$$

Метрика на пространстве $\mathbb{M}$: симметричное билинейное отображение

$$g : T_p(M) \otimes T_p(M) \mapsto \mathbb{R} \qquad \forall \mathcal{V},\mathcal{U} \in T_p(M), \quad (\mathcal{V},\mathcal{U}) \mapsto g(\mathcal{V},\mathcal{U})$$

- ***В локальных координатах на карте U:*** $g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j, \quad g_{ij} = g_{ji}$

- **Евклидова метрика на $\mathbb{R}^4$:** $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\,(1,1,1,1), \quad \det g = 1$

- **Метрика Миньковского на $\mathbb{M}^4$:** $g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\,(-1,1,1,1), \quad \det g = -1$

Замечание: $\varepsilon_{12\ldots n} = \sqrt{|g|}$

$$\varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} \varepsilon^{i_1 i_2 \ldots i_n} = \begin{cases} n! & \text{in } \mathbb{R}^n \\ -n! & \text{in } \mathbb{M}^n \end{cases} \qquad \varepsilon^{12\ldots n} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{|g|}} & \text{in } \mathbb{R}^n \\ -\dfrac{1}{\sqrt{|g|}} & \text{in } \mathbb{M}^n \end{cases}$$

r-форме $\omega = \dfrac{1}{r!} \omega_{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_r} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_r}$ дуальна (n-r)-форма

$$\star\omega = \frac{1}{r!(n-r)!} \omega_{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_r} \varepsilon^{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_r}{}_{\mu_{r+1} \mu_{r+2} \ldots \mu_n} \, dx^{\mu_{r+1}} \wedge dx^{\mu_{r+2}} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_n}$$

Двойное применение операции дуальности Ходжа:

$$\star\star\omega = \frac{1}{r!(n-r)!}\omega_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_r}\varepsilon^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_r}{}_{\mu_{r+1}\mu_{r+2}\ldots\mu_n} \ \star\, dx^{\mu_{r+1}}\wedge dx^{\mu_{r+2}}\wedge\cdots\wedge dx^{\mu_n}$$

Напомним:

r-форма

(n-r)-форма

$$\star dx^{i_1}\wedge dx^{i_2}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r} = \frac{1}{(n-r)!}\varepsilon^{i_1 i_2\ldots i_r}{}_{i_{r+1}i_{r+2}\ldots i_n}\ dx^{i_{r+1}}\wedge dx^{i_{r+2}}\wedge\cdots\wedge dx^{i_n}$$

$$\star dx^{\mu_{r+1}}\wedge dx^{\mu_{r+2}}\wedge\cdots\wedge dx^{\mu_n} = \frac{1}{r!}\varepsilon^{\mu_{r+1}\mu_{r+2}\ldots\mu_n}{}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_r}\ dx^{\nu_1}\wedge dx^{\nu_2}\wedge\cdots\wedge dx^{\nu_r}$$

$$\boxed{\star\star\omega = \frac{1}{r!r!(n-r)!}\omega_{\mu_1\ldots\mu_r}\boxed{\varepsilon^{\mu_1\ldots\mu_r}{}_{\mu_{r+1}\ldots\mu_n}\varepsilon^{\mu_{r+1}\ldots\mu_n}{}_{\nu_1\ldots\nu_r}}\ dx^{\nu_1}\wedge\cdots\wedge dx^{\nu_r}}$$

- **Очень полезная формула в $\mathbb{R}^n$:**

r(n-r) перестановок индексов !

$$\boxed{\varepsilon^{\mu_1\ldots\mu_r}{}_{\mu_{r+1}\ldots\mu_n}\varepsilon_{\nu_1\ldots\nu_r}{}^{\mu_{r+1}\ldots\mu_n}\ dx^{\nu_1}\wedge\cdots\wedge dx^{\nu_r} = r!(n-r)!\ dx^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge dx^{\mu_r}}$$

Задача 1: Проверьте эту формулу.

Задача 2: Как выглядит ее аналог в пространстве Миньковского $\mathbb{M}^n$?

$$\omega = \frac{1}{r!}\omega_{\mu_1\dots\mu_r}\, dx^{\mu_1}\wedge\dots\wedge dx^{\mu_r}$$

$\mathbb{R}^n$

$$\star\star\omega = (-1)^{r(n-r)}\frac{1}{r!}\omega_{\mu_1\dots\mu_r}\, dx^{\mu_1}\wedge\dots\wedge dx^{\mu_r}$$

$\mathbb{M}^n$

$$\star\star\omega = (-1)^{r(n-r)+1}\frac{1}{r!}\omega_{\mu_1\dots\mu_r}\, dx^{\mu_1}\wedge\dots\wedge dx^{\mu_r}$$

Примеры вычисления дуальных форм:

$\mathbb{R}^3$:

$\varepsilon_{123} = 1$

- $\star dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3 =$
- $\star dx^i\wedge dx^j =$
- $\star dx^i =$
- $\star 1 =$

$\mathbb{M}^4$:

$\varepsilon_{0123} = -1$

- $\star 1 =$
- $\star dx^0\wedge dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3 =$
- $\star dx^0 =$

$$= dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3$$

- $\star dx^1 =$

$$= \varepsilon_{1203}dx^2\wedge dx^0\wedge dx^3 = dx^0\wedge dx^2\wedge dx^3$$

…и еще несколько примеров в $\mathbb{M}^4$:

- $\star dx^1 \wedge dx^2 = ?$
- $\star dx^0 \wedge dx^2 = ?$
- $\star dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^3 = ?$

Внутреннее произведение форм:

$$\alpha_r, \beta_r \in \Lambda^r(M)$$

$$(\alpha_r, \beta_r) = \int\limits_M \alpha_r \wedge (\star\beta_r)$$

Координатное представление ($\mathbb{R}^n$):

$$(\alpha_r, \beta_r) = \frac{1}{r!r!(n-r)!} \int\limits_M \alpha_{\mu_1\ldots\mu_r} \beta_{\nu_1\ldots\nu_r} \varepsilon^{\nu_1\ldots\nu_r}{}_{\nu_{r+1}\ldots\nu_n} \varepsilon^{\mu_1\ldots\mu_r\nu_{r+1}\ldots\nu_n} dx^1 \wedge \ldots dx^n$$

Модификация Очень Полезной Формулы в $\mathbb{R}^n$:

$$\beta_{\nu_1\ldots\nu_r} \varepsilon^{\nu_1\ldots\nu_r}{}_{\nu_{r+1}\ldots\nu_n} \varepsilon^{\mu_1\ldots\mu_r\nu_{r+1}\ldots\nu_n} = r!(n-r)!\beta^{\mu_1\ldots\mu_r}$$

$$\Downarrow$$

$$(\alpha_r, \beta_r) = \frac{1}{r!} \int dV \alpha_{\mu_1\ldots\mu_r} \beta^{\mu_1\ldots\mu_r}$$

Замечание: внутреннее произведение
- симметрично: $(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$
- положительно: $(\alpha, \alpha) \geq 0$

Сопряженная производная

Рассмотрим внутреннее произведение вида $(d\alpha_{r-1}, \beta_r) = \int\limits_M d\alpha_{r-1} \wedge (\star\beta_r)$

Градуированное правило Лейбница:

$$= (-1)^r \int\limits_M \alpha_{r-1} \wedge d(\star\beta_r) + \int\limits_M \cancel{d(\alpha_{r-1} \wedge (\star\beta_r))}$$

Теорема Стокса: $\int\limits_M d(\alpha_{r-1} \wedge (\star\beta_r)) = \int\limits_{\delta M} \cancel{\alpha_{r-1} \wedge (\star\beta_r)}$

Граница $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{M}^n$? $\delta M = 0$

- ***Определим операцию*** $\star^{-1}$ ***, обратную к дуальности Ходжа:*** $\star\star^{-1} = 1$

Напомним - на $\mathbb{R}^n$ $\star\star\omega = (-1)^{r(n-r)}\omega$ ***, а на*** $\mathbb{M}^n$ $\star\star\omega = (-1)^{r(n-r)+1}\omega$

$$\boxed{\star^{-1}\omega = (-1)^{r(n-r)} \star\omega}$$

$$\boxed{\star^{-1}\omega = (-1)^{r(n-r)+1} \star\omega}$$

$$(d\alpha_{r-1},\beta) = (-1)^r \int\limits_M \alpha_{r-1} \wedge d(\star\beta_r) \;=\; \int\limits_M \alpha_{r-1} \wedge \star\left[\,(-1)^r \star^{-1} d \,\star\, \beta_r\right]$$

Вставка единицы: $\star\star^{-1} = 1$

Сопряженная производная:

$$(-1)^r \star^{-1} \, d \star \equiv \delta$$

$$\boxed{(d\alpha_{r-1},\beta) = \int\limits_M \alpha_{r-1} \wedge \star\, \delta\beta_r = (\alpha_{r-1}, \delta\beta_r)}$$

Замечание: $\quad d : \Lambda^r \mapsto \Lambda^{r+1} \quad \Longleftrightarrow \quad \delta : \Lambda^r \mapsto \Lambda^{r-1}$

в $\mathbb{R}^n$ $\quad \delta := (-1)^r \star^{-1} \, d \star = (-1)^r (-1)^{p(n-p)} \star \, d \star$

p - ранг формы $d(\star\beta)$

- **Ранг β: r** ⟹ • **Ранг $\star\beta$: n-r** ⟹ • **Ранг $d(\star\beta)$: n-r+1 ≡ p**

$$(-1)^{p(n-p)} = (-1)^{(r-1)(n-r+1)} = (-1)^{nr+n+1}$$

⟹ в $\mathbb{R}^4$ $\quad \boxed{\delta = -\star \, d \star}$

С точностью до четных членов!

В частности - (1-r)r - **четное**

Оператор Лапласа

$$\boxed{\Delta = (d+\delta)^2 = d\delta + \delta d}$$

- ***1-форма в*** $\mathbb{R}^3$ $\quad \omega = \omega_i(x) dx^i, \quad d\omega = \partial_j \omega_i(x) dx^j \wedge dx^i$ ***2-форма***

n=3, r=2

$$\delta d\omega = (-1)^{nr+n+1} \star\ d \star \left(\partial_j \omega_i dx^j \wedge dx^i\right) = \star\, d \left(\varepsilon^{ji}{}_k \partial_j \omega_i dx^k\right) =$$

$$= \star \left(\varepsilon^{ji}{}_k \partial_n \partial_j \omega_i\ dx^n \wedge dx^k\right) = \varepsilon^{ji}{}_k \varepsilon_m{}^{nk} \partial_n \partial_j \omega_i\ dx^m = (\delta_{jm}\delta_{in} - \delta_{jn}\delta_{im}) \partial_n \partial_j \omega_i\ dx^m$$

$$= \boxed{\partial_i \partial_m \omega_i dx^m - \partial_n \partial_n \omega_m dx^m}$$

n=3, r=1

$$d\delta\omega = d\left[(-1)^{nr+n+1} \star\ d\ \star \omega_i\ dx^i\right] = -d\left[\star\ d\ \left(\frac{1}{2}\omega_i\ \varepsilon^i{}_{jm} dx^j \wedge dx^m\right)\right]$$

$$= -\frac{1}{2} d\left[\star\left(\partial_n \omega_i\ \varepsilon^i{}_{jm}\ dx^n \wedge dx^j \wedge dx^m\right)\right] = -\frac{1}{2} d\left[\varepsilon^i{}_{jm} \varepsilon_{njm}\ \partial_n \omega_i\right] = -d\ [\partial_i \omega_i]$$

$$= \boxed{-\partial_m \partial_i \omega_i dx^m}$$

- **Оператор Лапласа:** $\quad \Delta\omega = -\partial_n \partial_n \omega$

- $\star\,\Delta = \Delta\,\star; \qquad d\Delta = \Delta d; \qquad \delta\Delta = \Delta\delta$

- $$\Lambda^{r-1} \underset{\delta_{r-1}}{\overset{d_{r-1}}{\rightleftarrows}} \Lambda^r \xrightarrow{\Delta_r} \Lambda^r \underset{\delta_r}{\overset{d_r}{\rightleftarrows}} \Lambda^{r+1}$$

- *Оператор Лапласа положительно определен на пространстве r-форм:*

$$(\omega, \Delta\,\omega) = (\omega, d\delta\,\omega) + (\omega, \delta d\,\omega) = (\delta\,\omega, \delta\,\omega) + (d\,\omega, d\,\omega) \geq 0$$

- *Если* $\Delta\omega = 0$ *, то* $\delta\omega = 0$ *и* $d\omega = 0$

Гармоническая форма: $\Delta\omega = 0$

- **Формы на группах Ли:**

$$\omega = \frac{1}{r!}\omega_{i_1 \dots i_r} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r}; \qquad \omega_{i_1 \dots i_r} = \omega^a_{i_1 \dots i_r} T^a$$

Генераторы группы Ли: $[T_a, T_b] = f^{abc} T_c$

- **Внешнее умножение форм:**

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = (-1)^{pq}\ \omega_2 \wedge \omega_1$$

- **Внешнее дифференцирование форм:**

$$d : \Lambda^p \mapsto \Lambda^{p+1}$$

- **Внутреннее произведение формы ω и векторного поля *V* :**

$$i_v : \Lambda^r \mapsto \Lambda^{r-1}$$

- **Операция дуальности Ходжа:**

$$\Lambda^r \xrightarrow{\star} \Lambda^{n-r}$$

- **Интерирование форм:**

$$\int\limits_M d\omega = \int\limits_{\delta M} \omega$$

- **Внутреннее произведение форм:**

$$(\alpha_r, \beta_r) = \int\limits_M \alpha_r \wedge (\star\beta_r)$$

- **Сопряженная производная формы:**

$$\delta : \Lambda^r \mapsto \Lambda^{r-1} \qquad (d\alpha, \beta) = (\alpha, \delta\beta)$$

Задача: Сила F в классической механике Ньютона – это вектор или 1-форма ? А как насчет скорости?

?

Пример использования дифференциальных форм: классическая электродинамика Максвелла в $\mathbb{M}^4$

$$x_\mu = (ct, x_1, x_2, x_3)$$
$$g_{\mu\nu} = \text{diag}\,(-1, 1, 1, 1)$$

- **Напомним:** тензор электромагнитного поля

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ -E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ -E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}{}_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & B_1 & B_2 & B_3 \\ -B_1 & 0 & -E_3 & E_2 \\ -B_2 & E_3 & 0 & -E_1 \\ -B_3 & -E_2 & E_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Уравнения Максвелла:
$$\begin{cases} \partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \\ \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0 \end{cases}$$

4-ток: $j_\mu = (\rho, \vec{j})$

- ***1-форма потенциала в $\mathbb{M}^4$:*** $A = A_\mu(x)dx^\mu = A_0 dx^0 + A_i dx^i$

- ***2-форма поля в $\mathbb{M}^4$:*** $F = dA = \dfrac{1}{2} F_{\mu\nu}(x) dx^\mu \wedge dx^\nu$

Замечание: *Форма F замкнутая, dF=0*

Физический смысл?

Рассмотрим $E = E_i dx^i,\qquad B = \frac{1}{2} B_{ij} dx^i \wedge dx^j,$ **где** $B_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk} B^{jk}$

1-форма электрического поля

2-форма магнитного поля

$$\boxed{F = E \wedge dx^0 + B}$$

- $dE \wedge dx^0 = \partial_j E_i\ dx^j \wedge dx^i \wedge dx^0 = \frac{1}{2}\left(\partial_i E_j - \partial_j E_i\right) dx^0 \wedge dx^i \wedge dx^j$

- $dB = \frac{1}{2}\partial_i B_{jk}\ dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k + \frac{1}{2}\partial_0 B_{jk}\ dx^0 \wedge dx^j \wedge dx^k =$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\partial_i B_{jk}\ dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + \frac{1}{2}\partial_0 B_{jk}\ dx^0 \wedge dx^j \wedge dx^k$$

$$= \partial_i B_i\ dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + \varepsilon_{ijk}\partial_0 B^i\ dx^0 \wedge dx^j \wedge dx^k$$

$$dF = \boxed{\frac{1}{2}\left(\partial_i E_j - \partial_j E_i + \varepsilon_{ijk}\partial_0 B^i\right)} dx^0 \wedge dx^i \wedge dx^j + \boxed{\partial_i B_i} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = 0$$

- **Это выражение ничего не напоминает?**

- **Первая пара уравнений Максвелла:**

$$\boxed{F = dA \longrightarrow dF = 0} \Rightarrow \begin{cases} \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{dt} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \end{cases}$$

Замечание: ***эти уравнения не являются динамическими!***

- $$\boxed{F = E\wedge dx^0 + B = E_i\, dx^i \wedge dx^0 + \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk} B^{jk} \star dx^i \wedge dx^0 = E_i\, dx^i \wedge dx^0 + B_i \star dx^i \wedge dx^0}$$

$\Rightarrow$ $$\boxed{\star F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} \star dx^\mu \wedge dx^\nu = E_i \star dx^i \wedge dx^0 - B_i\, dx^i \wedge dx^0 = \frac{1}{2}\widetilde{F}_{\mu\nu}\, dx^\mu \wedge dx^\nu}$$

- **Электромагнитная дуальность:** $F \Longleftrightarrow \widetilde{F}$**, или** $\begin{cases} \vec{E} \Longrightarrow -\vec{B}; \\ \vec{B} \Longrightarrow \vec{E} \end{cases}$

Напомним - в $\mathbb{M}^4$ $\quad \star dx^0 \wedge dx^i = -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk} dx^j \wedge dx^k, \quad \star dx^i \wedge dx^j = \varepsilon_{ijk}\, dx^0 \wedge dx^k$

$$d\star F = \varepsilon_{ijk}\partial_0 E_i\, dx^0 \wedge dx^j \wedge dx^k + \varepsilon_{ijk}\partial_n E_i\, dx^n \wedge dx^j \wedge dx^k - \partial_j B_i\, dx^j \wedge dx^i \wedge dx^0$$

$$= \boxed{\frac{1}{2}\left(\partial_i B_j - \partial_j B_i - \varepsilon_{ijk}\partial_0 E^i\right)} dx^0 \wedge dx^i \wedge dx^j - \boxed{\partial_i E_i}\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$$

Заметим: $d\star F$ - 3 форма $\Rightarrow$ $d\star F = J$

Произвольная 3 форма: $J = \frac{1}{3!} J_{\mu\nu\sigma}\, dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\sigma = \rho - \jmath \wedge dx^0$

3-форма плотности заряда

2-форма тока
$\jmath = \frac{1}{2}\jmath_{ik}\, dx^i \wedge dx^k$

Напомним: в $\mathbb{M}^4$ $\delta = \star\, d\, \star$ $\Rightarrow$ $\delta F = \star J \equiv j$

Вторая пара уравнений Максвелла: $\delta F = j$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} \vec{\nabla} \times \vec{B} = j + \dfrac{\partial \vec{E}}{dt} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho \end{cases}$

Замечание: $\delta^2 F = \delta j = 0$ *- сохранение тока*

$$\delta j = \star d \star j dx^\mu = \frac{1}{4!}\partial_\alpha j^\alpha\ \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho \wedge dx^\sigma = 0$$

Лагранжиан: $L = dA \wedge \star dA - A \wedge J = \frac{1}{2} F \wedge \star F + A \wedge \star j$

Уравнения поля: $\frac{\partial L}{\partial A} = -J,\quad \frac{\partial L}{\partial dA} = \star dA$ $\Rightarrow$ $d\star dA - J = 0$

Задача: Рассмотрим 1-форму потенциала $A = A_i dx^i$ на пространстве $\mathbb{R}^2/\{0\}$

$$A_1 = -\frac{x_2}{r^2}, \qquad A_2 = \frac{x_1}{r^2}, \qquad r^2 = x_1^2 + x_2^2 \qquad F = dA \quad ?$$

$$dA = \partial_j A_i dx^j \wedge dx^i = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{x_i}{r^2}\right) dx^1 \wedge dx^2 = \left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{x_1}{r^2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{x_2}{r^2}\right)\right\} dx^1 \wedge dx^2 = 0$$

Форма A – замкнутая, является ли она точной? $A = d\omega$?

$$\omega = \operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1}$$

Не является непрерывной на $\mathbb{R}^2/\{0\}$

Физический смысл?

- **Интегральная форма уравнений Максвелла:**

$$\int_{\mathbb{M}^4} dF = \oint_{\delta\mathbb{M}^4} F = 0 \qquad \int_{\mathbb{M}^4} d\star F = \oint_{\delta\mathbb{M}^4} \star F = Q$$

- **Калибровочная инвариантность:** $A \longrightarrow A + d\lambda, \quad F \longrightarrow F$

- **<u>А как насчет релятивистской инвариантности?</u>**