Кафедра теоретической физики и астрофизики
Физический факультет, БГУ Минск

Дифференциальная геометрия и топология

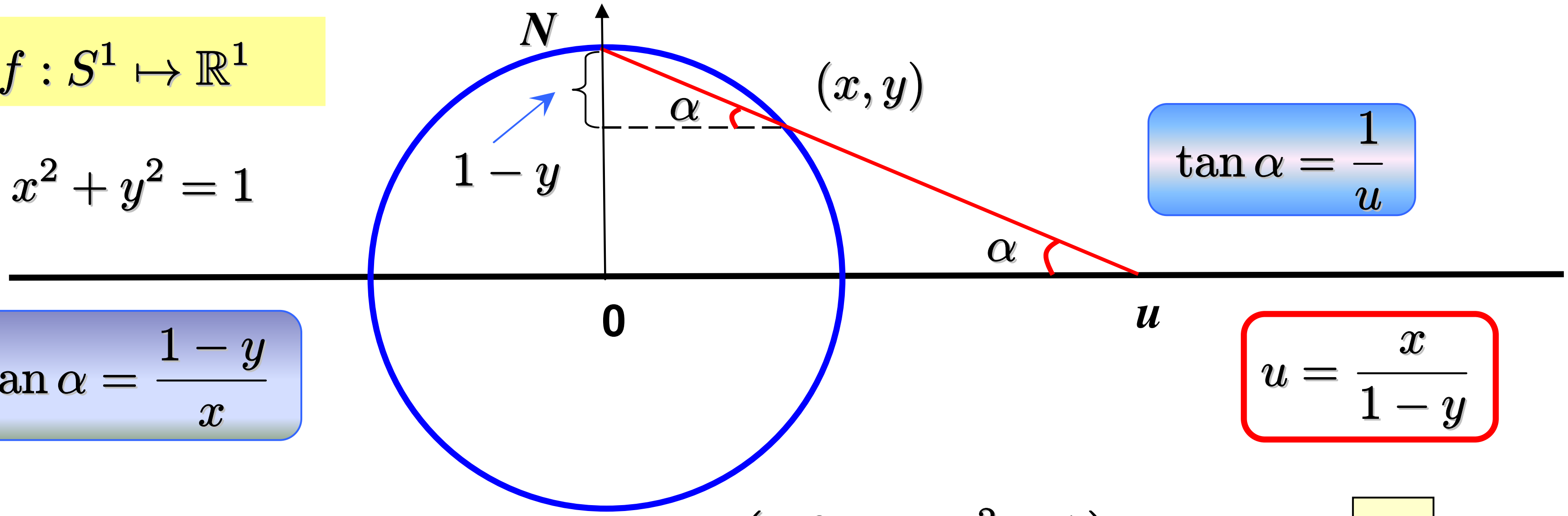
Я М Шнир

все вопросы, комментарии, замечания и протесты:
shnir@maths.tcd.ie

Стереографическая проекция I

- $f : S^1 \mapsto \mathbb{R}^1$

$x^2 + y^2 = 1$



$$\tan\alpha = \frac{1-y}{x}$$

$$\tan\alpha = \frac{1}{u}$$

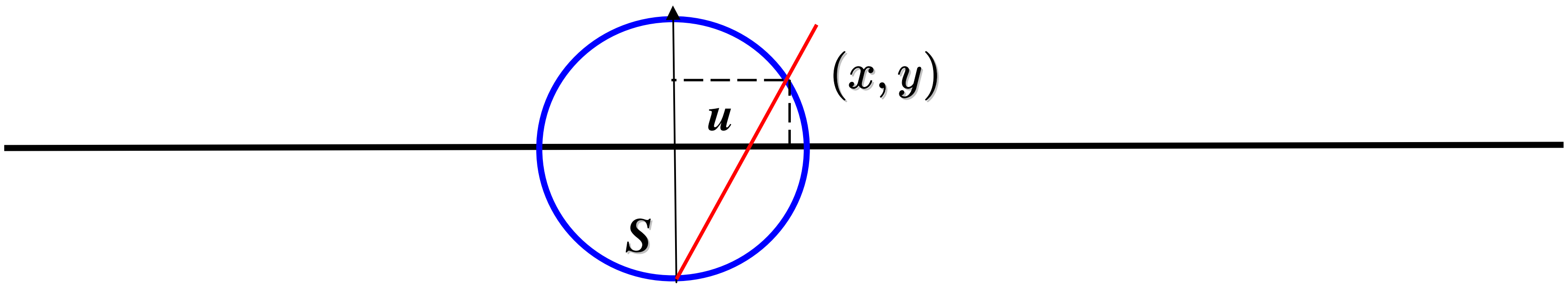
$$\boxed{u = \frac{x}{1-y}}$$

- $f^{-1} : \mathbb{R}^1 \mapsto S^1$ $\Rightarrow$ $(x, y) = \left(\frac{2u}{1+u^2}, \frac{u^2-1}{u^2+1}\right)$

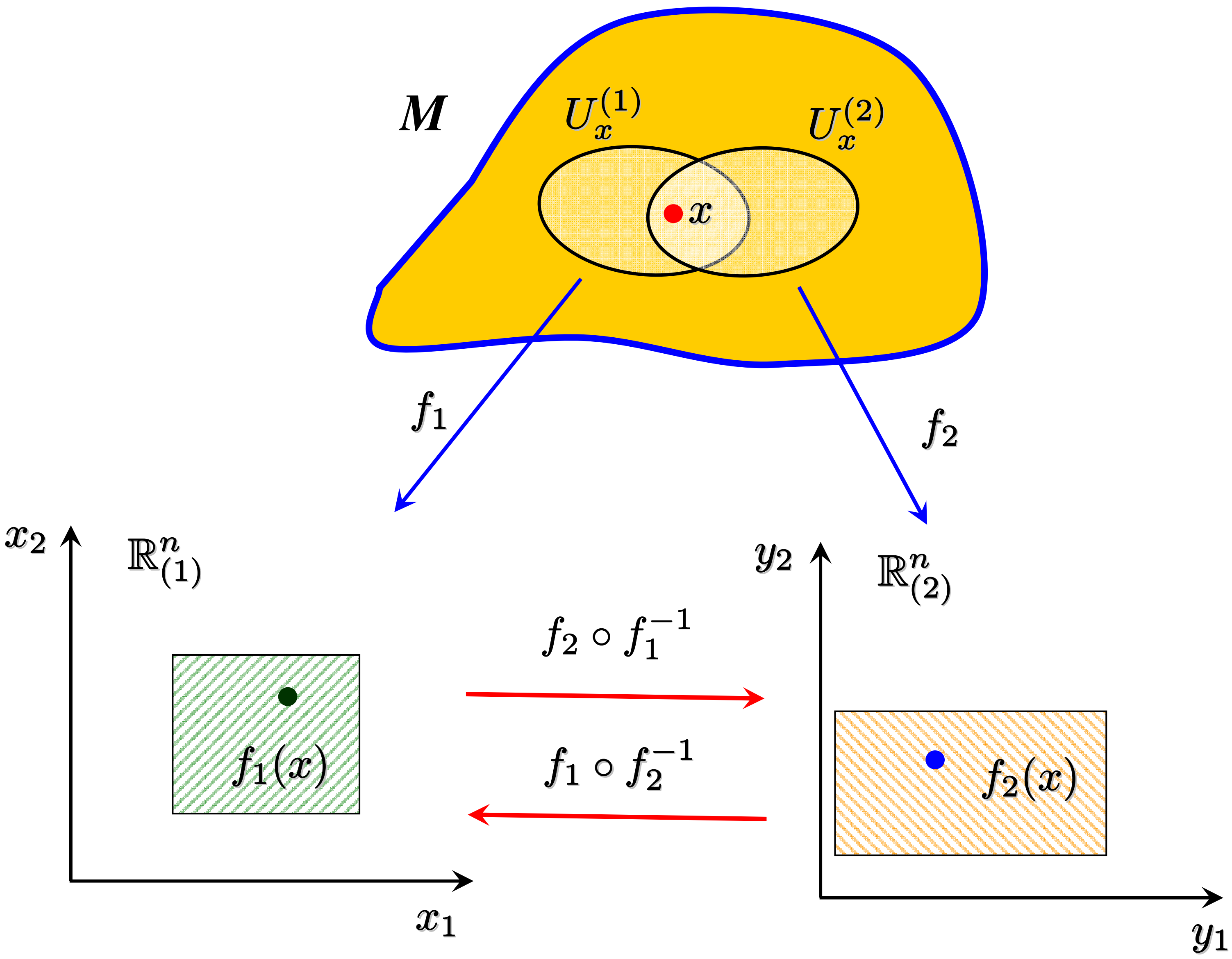
?

Заметим: **Северный полюс проецируется на 2 точки:** $N = (0,1) \mapsto u = \pm\infty$

Задача: Найти «Южную» проекцию $g : S^1 \mapsto \mathbb{R}^1$ **и обратную к ней,** $g^{-1} : \mathbb{R}^1 \mapsto S^1$



Покрытия топологического пространства



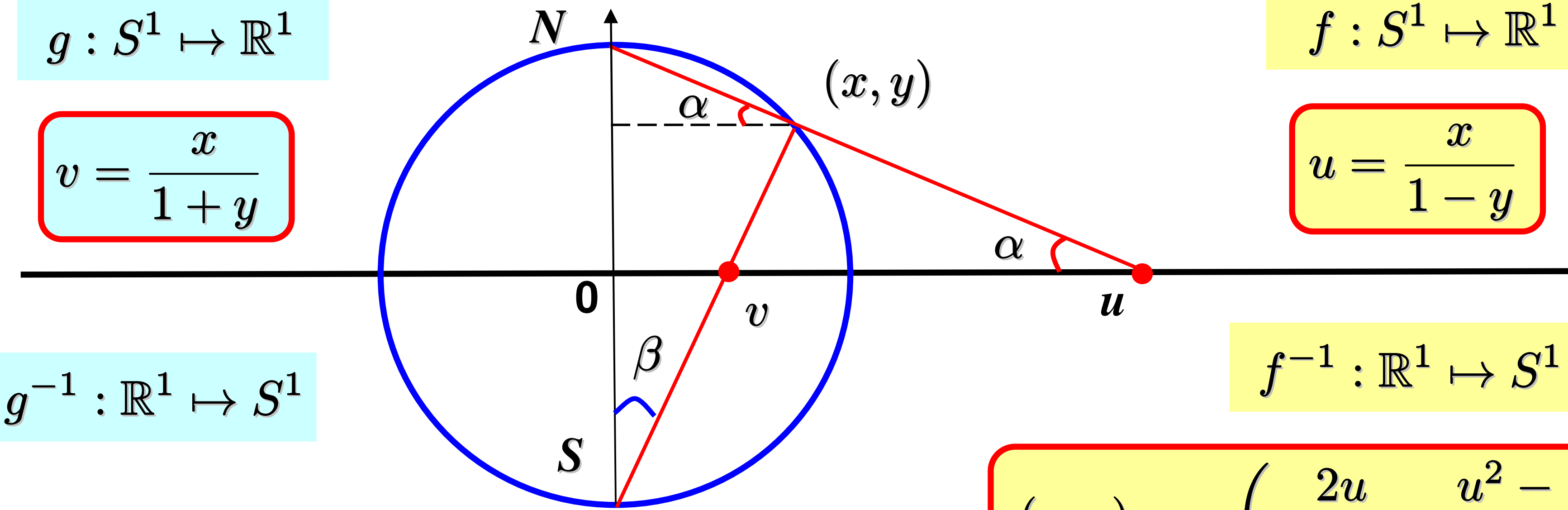
Функции склейки

$g : S^1 \mapsto \mathbb{R}^1$

$$v = \frac{x}{1+y}$$

$g^{-1} : \mathbb{R}^1 \mapsto S^1$

$$(x,y) = \left(\frac{2v}{1+v^2}, \frac{1-v^2}{1+v^2}\right)$$



$f : S^1 \mapsto \mathbb{R}^1$

$$u = \frac{x}{1-y}$$

$f^{-1} : \mathbb{R}^1 \mapsto S^1$

$$(x,y) = \left(\frac{2u}{1+u^2}, \frac{u^2-1}{u^2+1}\right)$$

- **Вопрос:** Что произойдет при отображениях $f \circ g^{-1}$ и $g \circ f^{-1}$?

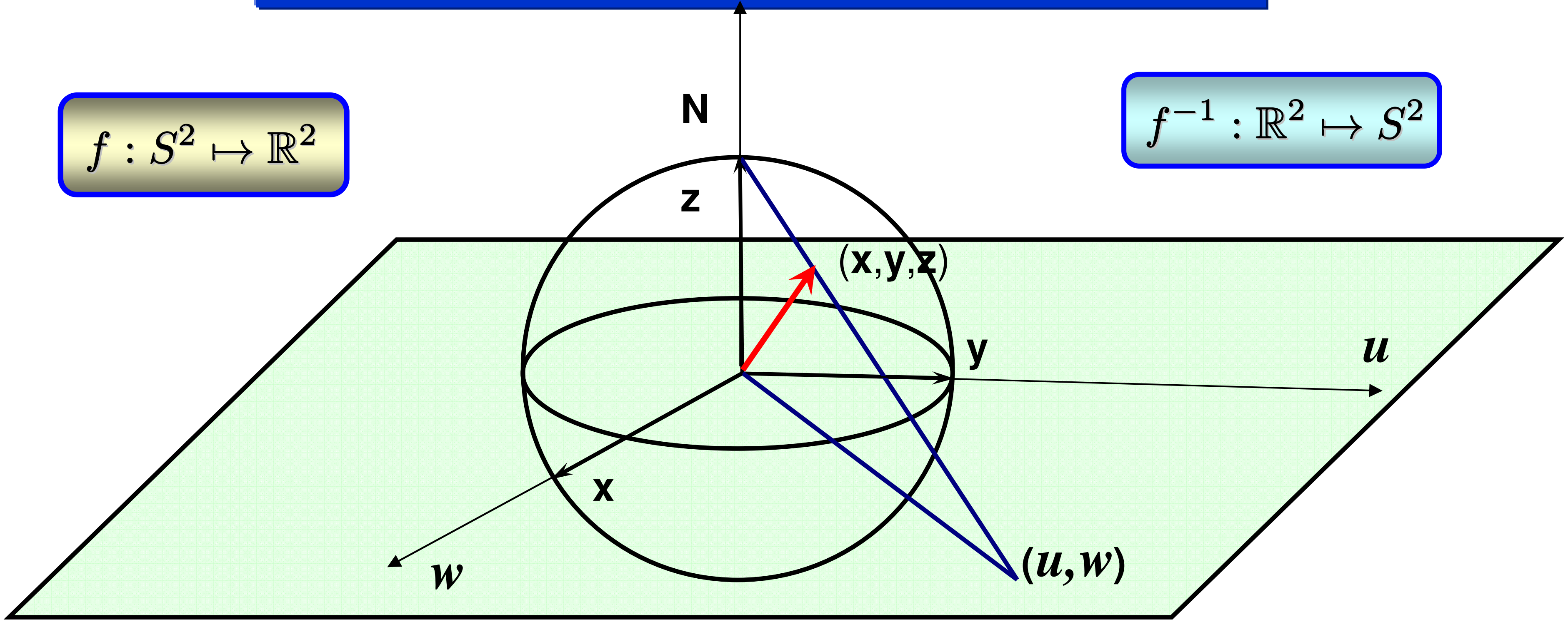
$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x}{1-y} \Rightarrow \dfrac{2u}{1+u^2} : \left(1 - \dfrac{u^2-1}{u^2+1}\right) = \dfrac{1}{u} \\[2ex] \dfrac{x}{1+y} \Rightarrow \dfrac{2v}{1+v^2} : \left(1 - \dfrac{1-v^2}{1+v^2}\right) = \dfrac{1}{v} \end{array}\right\}$$

Функции склейки двух отображений

Стереографическая проекция II

$$f : S^2 \mapsto \mathbb{R}^2$$

$$f^{-1} : \mathbb{R}^2 \mapsto S^2$$



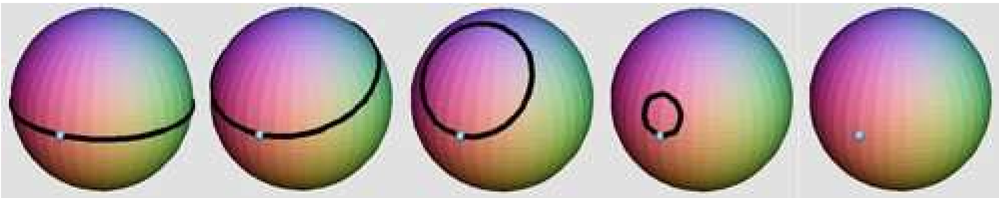
$$(u, w) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right)$$

$$(x, y, z) = \left(\frac{2u}{1+u^2+w^2}, \frac{2w}{1+u^2+w^2}, \frac{1-u^2-w^2}{1+u^2+w^2}\right)$$

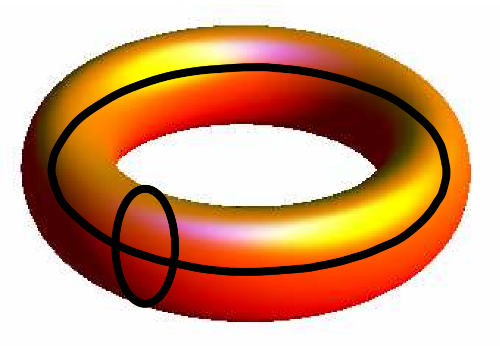
Односвязные пространства

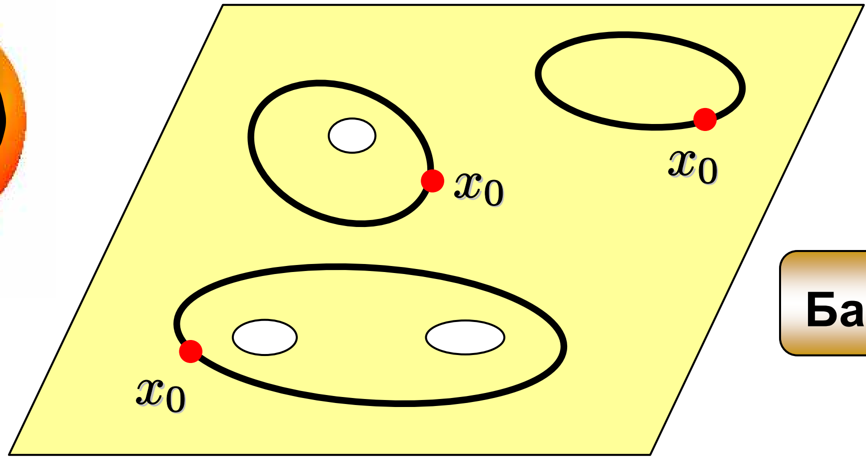
Петля на топологическом пространстве ***M***: непрерывное отображение

$$\boxed{f : [0,1] \mapsto M, \;\; f(0) = f(1)}$$



Односвязное пространство: петля может быть непрерывно стянута в точку





$$f(0) = f(1) = x_0$$

Базисная точка петли

Гомотопия

- *Пусть M и N – два топологических пространства, а f_1 и f_2 - два отображения $f_1 : M \mapsto N, \quad f_2 : M \mapsto N$. Задающие отображения функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ называются <u>гомотопными</u>, если $f_1(x)$ может быть непрерывно деформировано в $f_2(x)$*

<u>Более строгое определение:</u> Имеется непрерывное семейство функций $F(x,t) : (M \times I) \mapsto N, \quad I = [0,1]$, причем

$$\boxed{F(x,0) = f_1(x), \quad F(x,1) = f_2(x)}$$

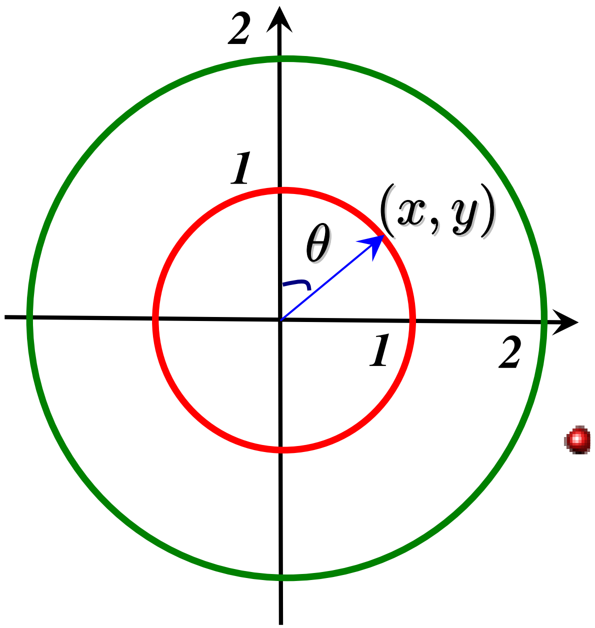
$F(x,t)$ - *гомотопия*

- *Пространства M и N называются <u>гомотопически эквивалентными</u>, если существуют 2 непрерывных отображения $f : M \mapsto N, \quad g : N \mapsto M$, причем $f \circ g = I_N, \quad g \circ f = I_M$*

Замечание: $g \neq f^{-1}, \quad f \neq g^{-1}$ **!**

Гомотопия: примеры

- **Отображения окружностей:** $\boxed{f_1 : S^1 \mapsto \mathbb{R}^2, \quad f_2 : S^1 \mapsto \mathbb{R}^2}$



$$f_1 = (\sin\theta, \cos\theta) \qquad f_2 = (2\sin\theta, 2\cos\theta)$$

Гомотопия: $F(\theta, t) = \Big((1+t)\cos\theta, \quad (1+t)\sin\theta\Big)$

$$F(\theta, 0) = f_1(\theta), \quad F(\theta, 1) = f_2(\theta)$$

- **Замечание:** **Любой интервал** $[-a, a] \in \mathbb{R}^1$ **гомотопен точке** $\{0\}$**:** $F(x, t) = x(1-t)$

$$F(x, 0) = x \in [-a, a], \quad F(x, 1) = \{0\}$$

- **Пространство $\mathbb{R}^n$ с выколотой точкой $\{0\}$ гомотопно сфере S^{n-1} :**

$$F(x, t) = (1-t)x + t\frac{x}{|x|}$$

$$f : \mathbb{R}^n / \{0\} \mapsto S^{n-1}$$

Гомотопия: соотношение эквивалентности

- ***Рефлективность:*** $f \sim f$ ⟹ $F(x,t) = f(x)$
- ***Симметрия:*** если $f \sim g$, то $g \sim f$

Доказательство: пусть $f \sim g$, тогда

$\exists F(x,t) : (M \times I) \mapsto N, \quad I = [0,1]$, причем $F(x,0) = f(x), \quad F(x,1) = g(x)$

Рассмотрим $G(x,t)(M \times I) \mapsto N$, где $G(x,t) = F(x, 1-t)$

Следовательно, $G(x,0) = g(x), \quad G(x,1) = f(x)$ ⟹ $g \sim f$

- ***Транзитивность:*** если $f \sim g$ и $g \sim h$ то $f \sim h$

Доказательство: пусть функции f, g и h соответствуют отображениям $M \mapsto N$

Рассмотрим $H(x,t) = \begin{cases} F(x,2t) & t \in [0,1/2] \\ G(x,2t-1) & t \in [1/2,1] \end{cases}$

Следовательно,

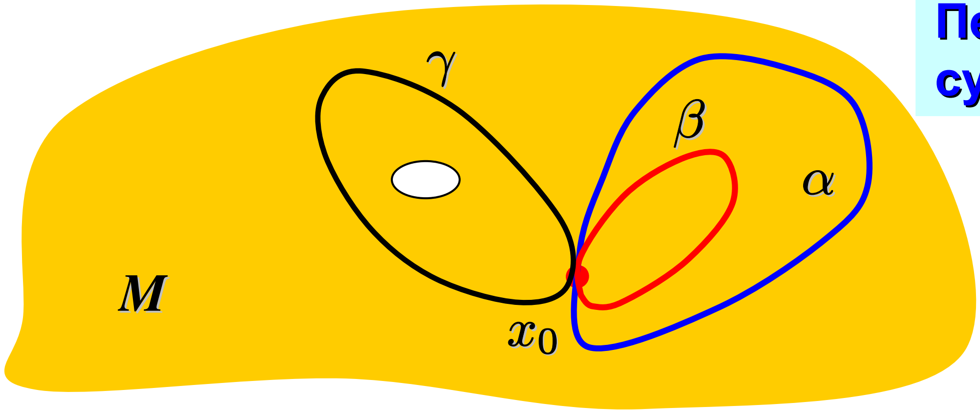
$$H(x,0) = F(x,2t) = f(x), \quad H(x,1/2) = F(x,1) = G(x,0) = g(x), \quad H(x,1) = G(x,1) = h(x)$$

⟹ $f \sim g \sim h$

Гомотопия петель

Рассмотрим 2 петли на пространстве M:

$$\alpha : I \mapsto M,\ \alpha(0) = \alpha(1) = x_0, \quad \beta : I \mapsto M,\ \beta(0) = \beta(1) = x_0$$



Петли α и β гомотопны, если существует непрерывное отображение

$$F : I \times I \mapsto M$$
$$F(s,0) = \alpha(s), \quad F(s,1) = \beta(s)$$
$$F(0,t) = F(1,t) = x_0$$

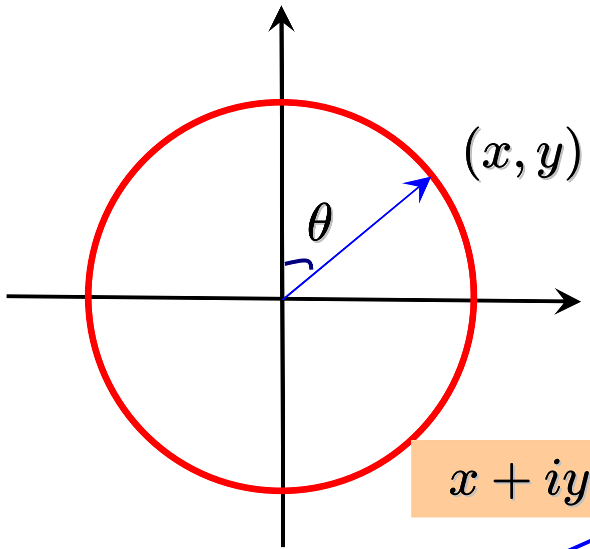
Замечание: Гомотопия петель F устанавливает их эквивалентность, $\alpha \sim \beta$

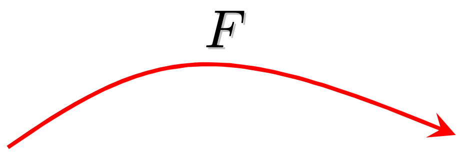
Классы эквивалентности: $\alpha \sim \beta \nsim \gamma$

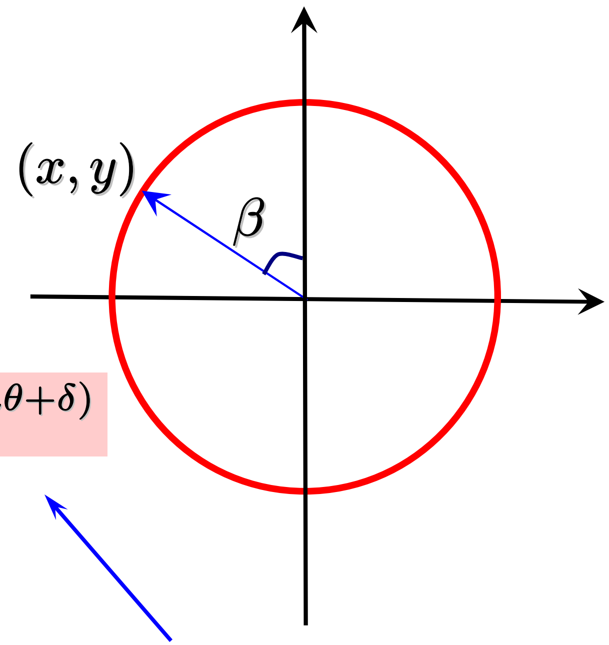
Существование классов эквивалентности означает возможность задания групповой структуры

Классы гомотопии

- **Отображение окружности:** $F : S^1 \mapsto S^1$







$$x + iy \to z = e^{i\theta}$$

$$z = e^{i\beta} = e^{i(n\theta+\delta)}$$

Отображение f точки (x, y) на U^1

n-кратная намотка при отображении

Гомотопия: $F(\theta, t) = e^{i(n\theta+(1-t)\delta)}$

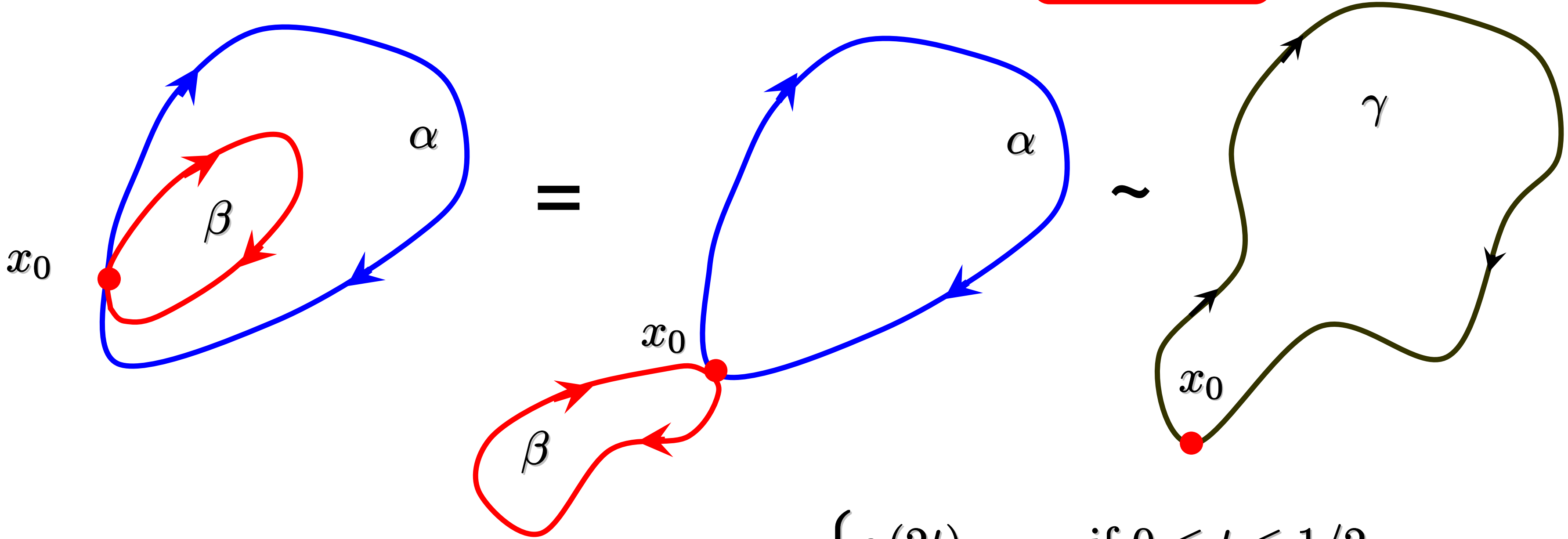
$$F(\theta, 0) = f(\theta), \quad F(\theta, 1) = f(\beta)$$

- **Индекс отображения:** $n = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} d\theta\, f \frac{d}{d\theta} f^{-1}$

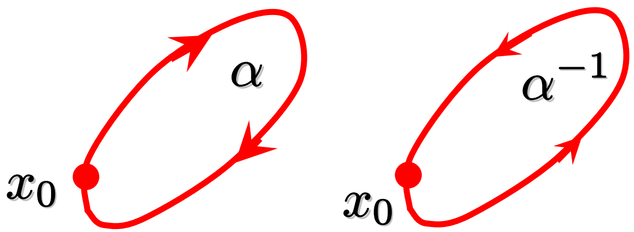
Индекс отображения задает классы гомотопии

Гомотопические группы

Групповая операция в пространстве петель: $\boxed{\alpha \circ \beta = \gamma}$



- ***Произведение 2 петель:*** $\alpha \circ \beta = \gamma = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{if } 0 \le t \le 1/2 \\ \beta(2t-1) & \text{if } 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$

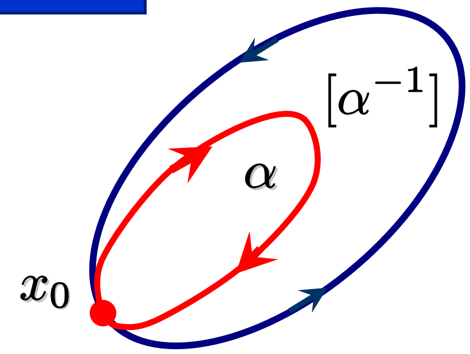


- ***Обратная петля:*** $\alpha^{-1}(t) = \alpha(t-1), \forall t \in I$
- ***Единичный элемент:*** x_0
- ***Ассоциативность:*** $(\alpha \circ \beta) \circ \gamma = \alpha \circ (\beta \circ \gamma)$

$\boxed{\alpha \circ \alpha^{-1} = x_0}$

Гомотопические группы

Замечание: не только произведение петли α и обратной к ней α^{-1} дает единичный элемент!



Сами по себе петли не образуют групповую структуру, ее образуют классы эквивалентности петель $[\alpha]$

Элемент гомотопической группы

$\Pi_1(M, x_0)$

- ***Произведение классов эквивалентности петель:*** $[\alpha]\circ[\beta]=[\alpha\circ\beta]$

- ***Замкнутость:*** $\forall[\alpha],[\beta]\in\Pi_1(M,x_0)[\alpha]\circ[\beta]=[\gamma]\in\Pi_1(M,x_0)$

- ***Обратный класс:*** $[\alpha]^{-1}=[\alpha^{-1}]$

- ***Ассоциативность:*** $([\alpha]\circ[\beta])\circ[\gamma]=[\alpha]\circ([\beta]\circ[\gamma])$

Гомотопическая группа также называется фундаментальной группой топологического пространства M, $\Pi_1(M, x_0)$

Теорема 1: если ***M*** – связное пространство, то фундаментальные группы $\Pi_1(M, x_0)$ и $\Pi_1(M, x_0')$ изоморфны для любых $x_0, x_0' \in M$

Теорема 2: если ***M*** и ***N*** – связные пространства, причем $M \sim N$, $f : M \mapsto N$ то фундаментальные группы $\Pi_1(M, x_0)$ и $\Pi_1(N, f(x_0))$ изоморфны

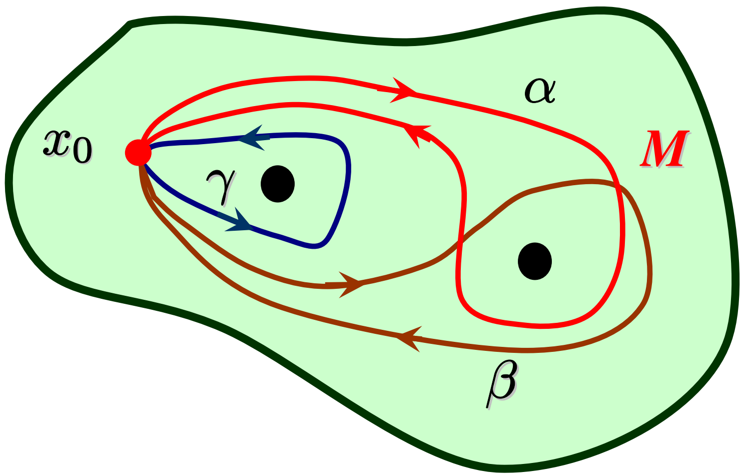
$\Downarrow$

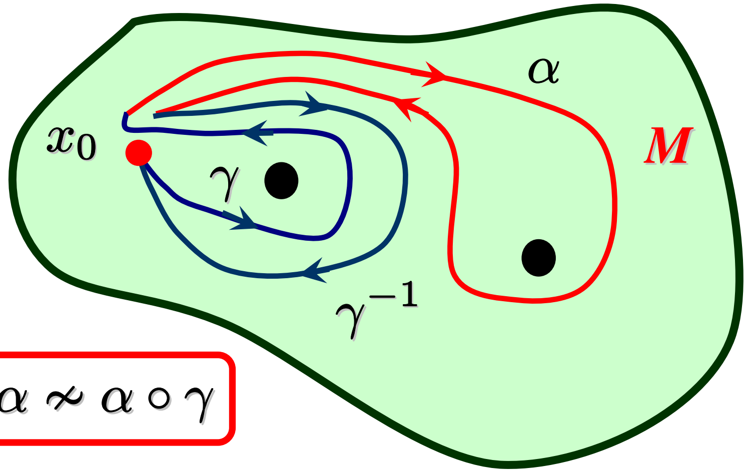
Следствие: ***Фундаментальная группа не меняется при гомеоморфных преобразованиях, она является <u>топологическим инвариантом</u>***

Замечание: ***первая фундаментальная группа может быть и неабелевой***

$$\boxed{\Pi_1(D^2/\{x_1, x_2\})}$$

$$\gamma \circ \alpha \circ \gamma^{-1} \sim \beta$$





$$\boxed{\gamma \circ \alpha \nsim \alpha \circ \gamma}$$

Высшие фундаментальные группы

Пусть ***M*** - топологическое пространство и $I^n = I \times I \times I \times \cdots \times I$ - единичный n-куб с границей δI^n .

- ***n-мерная петля в пространстве*** ***M*** **:** $\alpha^{(n)} : I^n \mapsto M, \quad \alpha^{(n)} : \delta I^n \mapsto x_0 \in M$

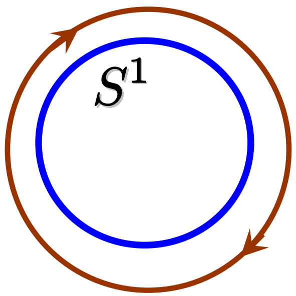
Замечание: $\alpha^{(n)} \sim S^n$

- **Теорема:** ***Высшие фундаментальные группы являются абелевыми:***

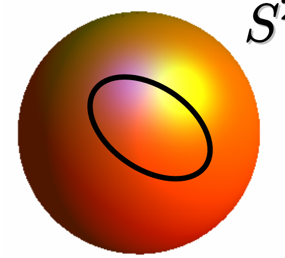
$$\alpha^{(n)} \circ \beta^{(n)} \sim \beta^{(n)} \circ \alpha^{(n)}$$

Примеры фундаментальных групп

$\Pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$



$\Pi_1(S^2) = 0$



S^2

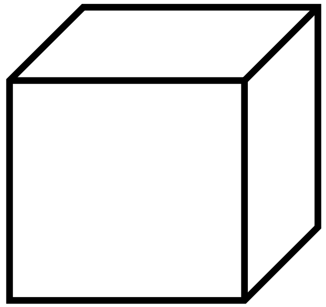
$\Pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$

$\Pi_n(S^m) = 0 \quad n < m$

Задача: **Чему равна фундаментальная группа** $\Pi_1(T^2)$ **?**

Гомология и гомологические группы

Индекс Эйлера: $\chi(M) = V - E + F$

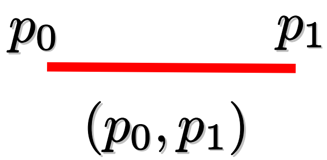


Вопрос: а как обобщить этот индекс на случай произвольных измерений?

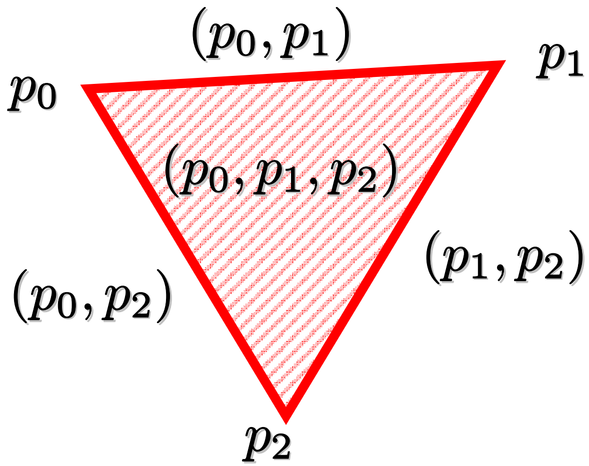
- **Симплекс:** n-мерный геометрический объект, число вершин которого минимально в n-мерном пространстве, *V=n-1* (обобщение треугольника)

d=1

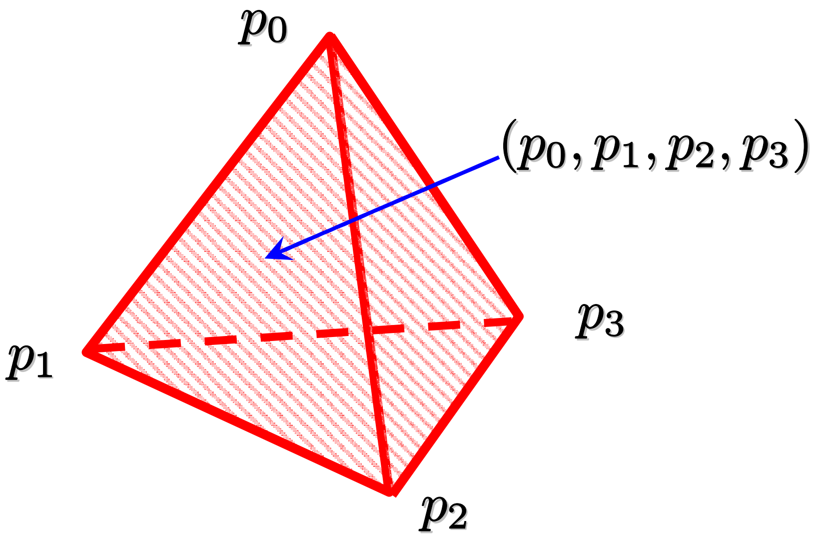
d=1



d=2



d=3

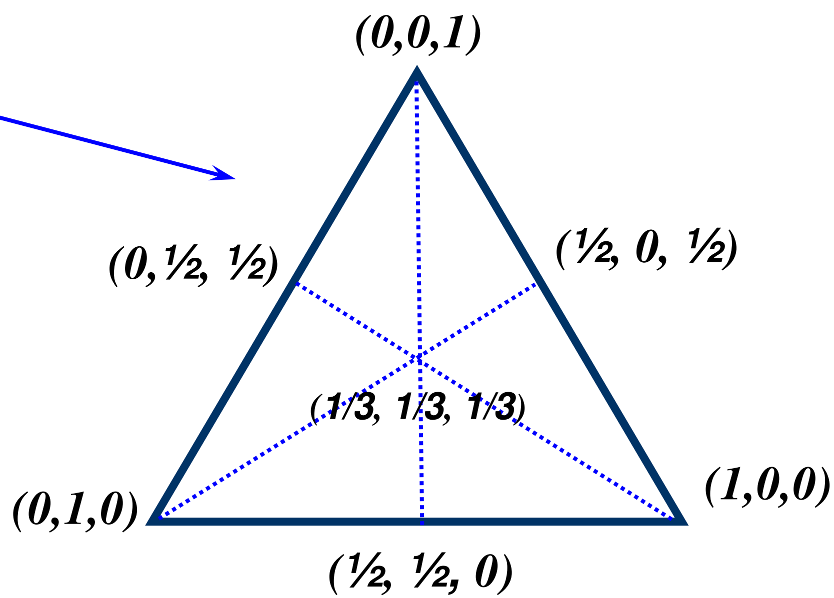


Симплекс

- **k-симплекс** $\sigma_k = (p_0, p_1, \ldots, p_k)$ **в пространстве** $\mathbb{R}^n, \quad n \geq k$

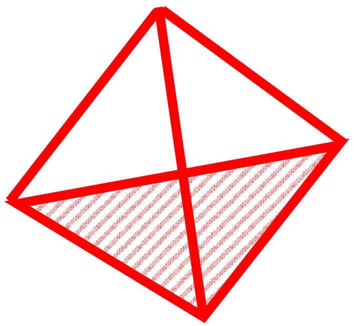
$$\sigma_k = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid x = \sum_{i=0}^{k} C_i p_i, \quad C_i \geq 0, \quad \sum_{i=0}^{k} C_i = 1 \right\}$$

Барицентрические координаты



***Симплекс* в $\mathbb{R}^n$ ограничен и замкнут, то есть компактен**

- **q-грань** σ_q **k-симплекса** σ_k **:**



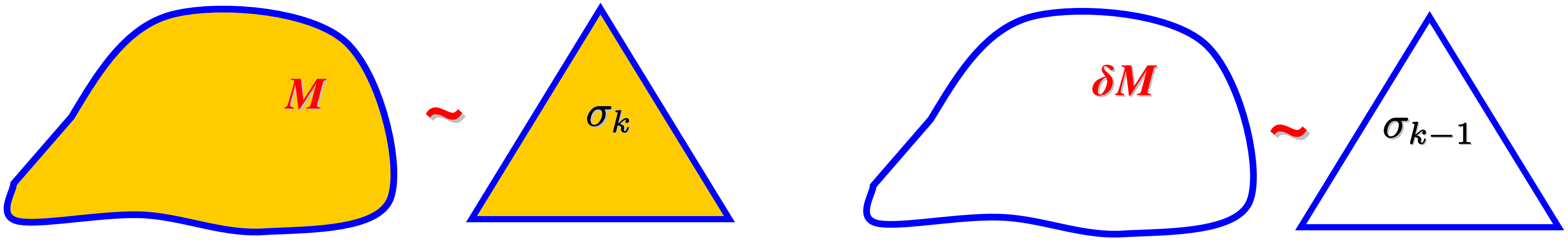
Число q-граней:

$$\binom{k+1}{q+1} = \frac{(k+1)!}{(q+1)!(k-q)!}$$

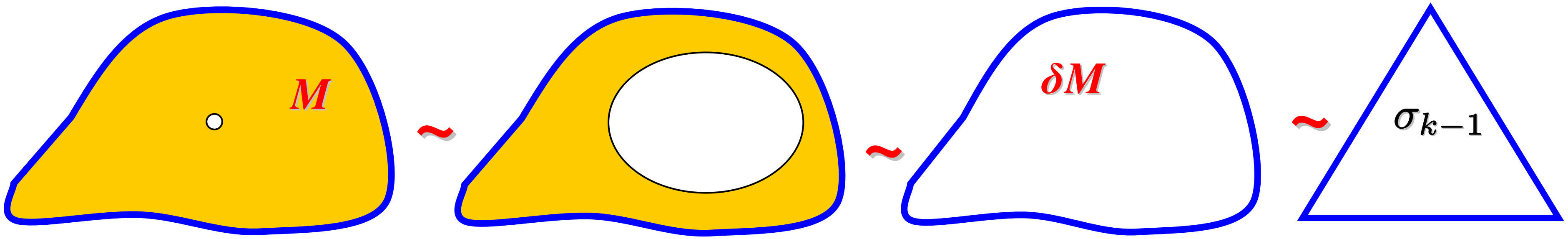
Основная идея гомологического анализа:

1. Компактное односвязное к-мерное топологическое пространство ***M*** гомеоморфно k-симплексу

2. Граница пространства ***δM*** гомеоморфна (k-1)-симплексу



3. пространство ***M*** с выколотой точкой гомеоморфно границе ***δM***

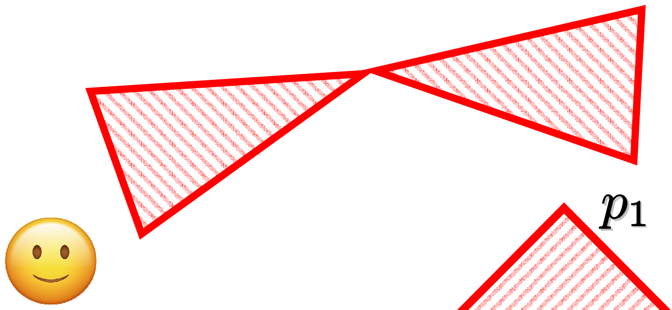


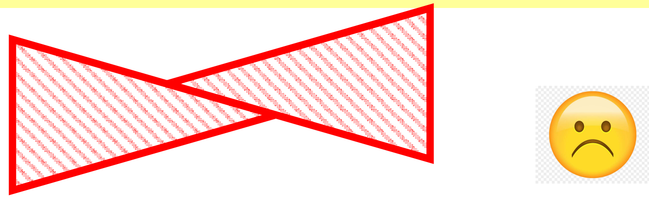
Комплекс

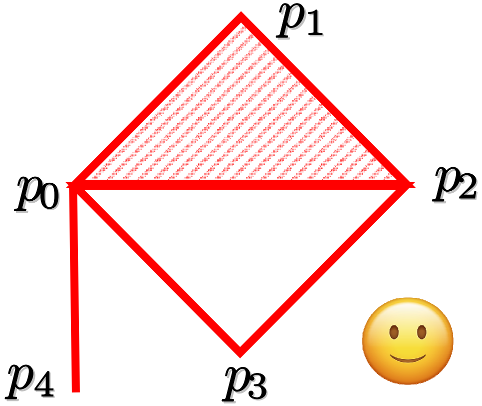
Комплекс K – набор симплексов в $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющий условиям:

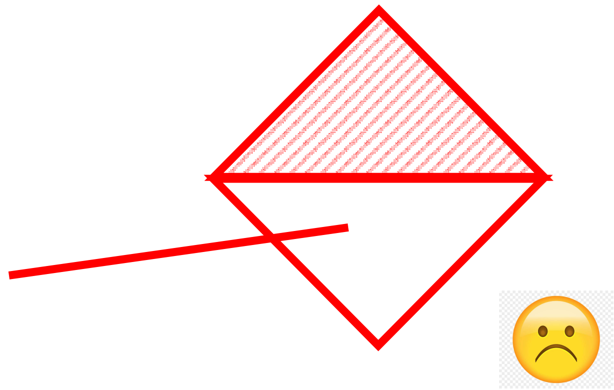
- : $\forall \sigma_k \in K,\ \sigma_r \in K, \forall r \leq k$

- : Если σ и σ' - два симплекса принадлежащих комплексу ***K***, то $\sigma \cap \sigma' = 0$ или $\sigma \cap \sigma' \leq \sigma$ и $\sigma \cap \sigma' \leq \sigma'$, то есть $\sigma \cap \sigma'$ является общей гранью σ и σ' .







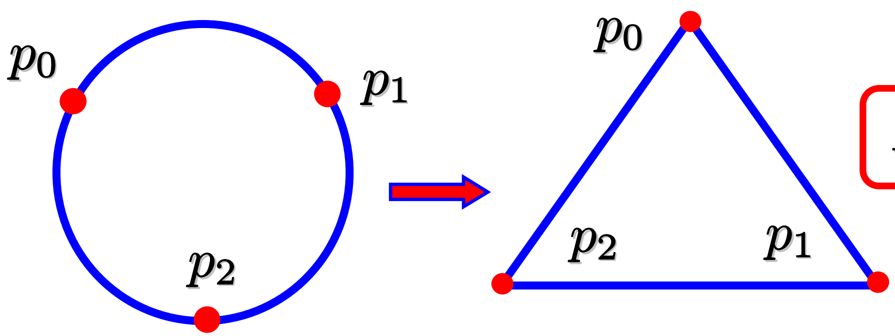


$$K = \{p_0, p_1, p_2, p_3, p_4, (p_0, p_1), (p_0, p_2), (p_0, p_3), (p_0, p_4), (p_0, p_1, p_2)\}$$

Триангуляция

Пусть** M **– n-мерное топологическое пространство. Если определен комплекс** K **и существует гомеоморфизм** $f : K \mapsto M$**, то пара** (f, K) **называется триангуляцией пространства** M **.

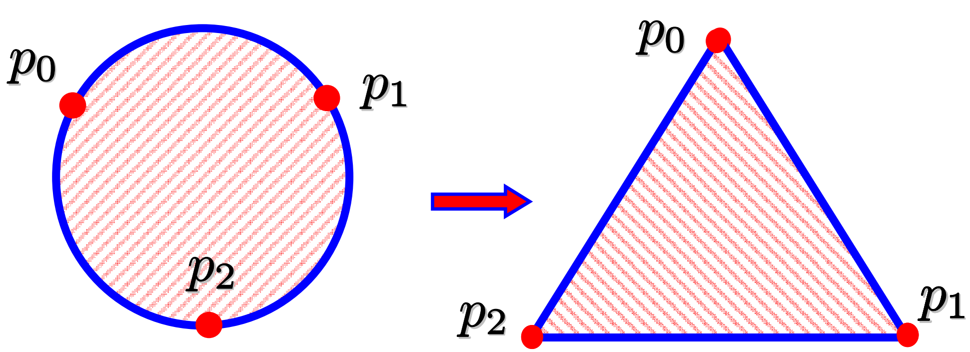
- ***Триангуляция окружности** S^1 **:***



$$K = \{p_0, p_1, p_2, (p_0, p_1), (p_1, p_2), (p_0, p_2)\}$$

- ***Триангуляция диска** D^2 **:***

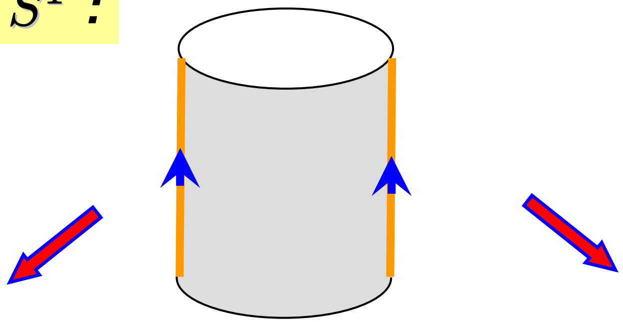
$$K = \{p_0, p_1, p_2, (p_0, p_1), (p_1, p_2), (p_0, p_2), (p_0, p_1, p_2)\}$$

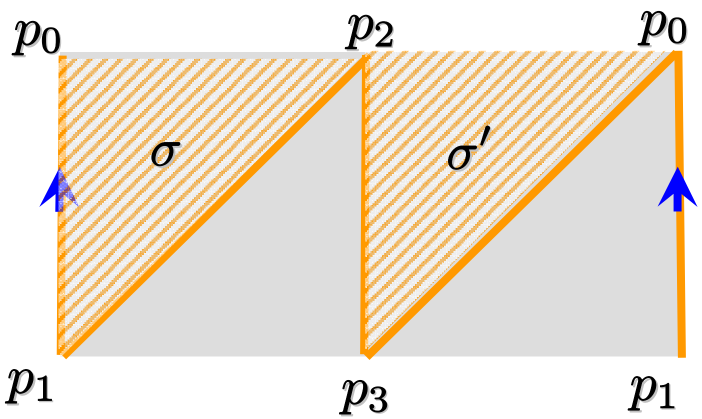


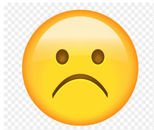
Триангуляция

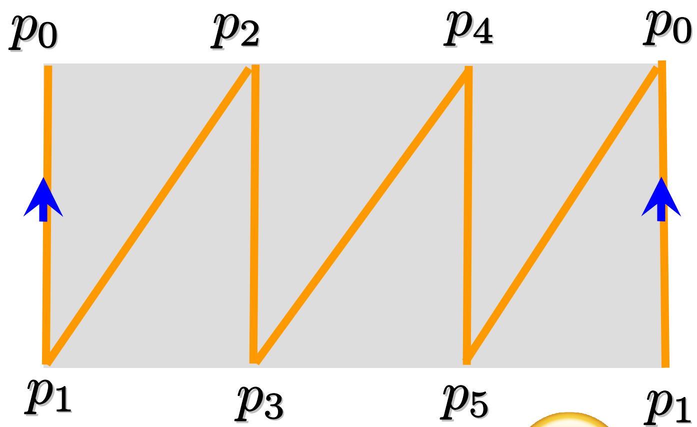
● ***Триангуляция цилиндра*** $I \times S^1$ **:**

$$\sigma \cap \sigma' = (p_0) \cup (p_2)$$









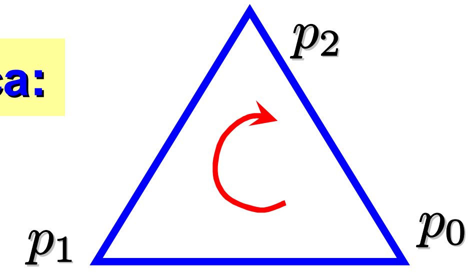
Пересечение симплексов σ и σ' не является ни пустым множеством, ни общей гранью

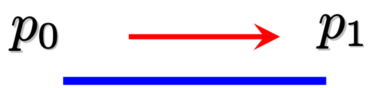
?

Задача: **Построить правильную триангуляцию тора**

Фундаментальная группа топологического пространства M может быть вычислена как фундаментальная группа триангуляции

- **Ориентация симплекса:**



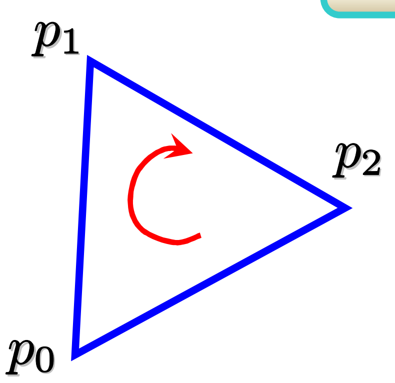


$$(p_0, p_1) = -(p_1, p_0)$$

$$\boxed{\begin{aligned}(p_0, p_1, p_2) &= (p_1, p_2, p_0) = (p_2, p_1, p_0)\\ &= -(p_2, p_1, p_0) = -(p_0, p_2, p_1) = -(p_1, p_0, p_2)\end{aligned}}$$

Рассмотрим набор произвольно ориентированных r-симплексов на комплексе K : $\sigma_r^1, \sigma_r^2, \ldots \sigma_r^n$. <u>Цепью</u> c называется сумма

$$c = g_1\sigma_r^1 + g_2\sigma_r^2 + \cdots + g_n\sigma_r^n, \quad g_i \in \mathbb{Z}$$



$$c_0 = (p_1) + (p_2)$$

$$c_1 = 3(p_0, p_1) + (p_2, p_0)$$

$$c_2 = 2(p_0, p_1, p_2)$$

Ориентированные r-симплексы, образующие комплекс *K*, генерируют абелеву группу – *группу цепей* $C_r(K)$

- **Групповая операция в пространстве цепей:**

$$c=\sum_{i=1}^{n} g_i\sigma_r^i,\quad c'=\sum_{i=1}^{n} g_i'\sigma_r^i \quad \Longrightarrow \quad c+c'=\sum_{i=1}^{n}(g_i+g_i')\sigma_r^i$$

- **Единичный элемент:** $0=\sum_{i=0}^{n} 0\cdot\sigma_r^i$

- **Обратный элемент:** $c=\sum_{i=1}^{n} g_i\sigma_r^i,\quad c^{-1}=-c=\sum_{i=1}^{n}(-g_i)\sigma_r^i$

- **Замкнутость:** $\forall c,c'\in C_r(K),\quad c+c'=c''\in C_r(K)$

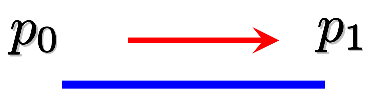
- **Ассоциативность:** $(c+c')+c''=c+(c'+c'')$

Группа цепей изоморфна абелевой группе ранга *r* относительно сложения

Оператор границы

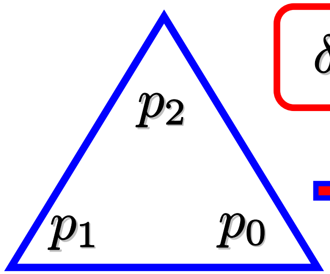
- **Оператор границы δ_r действует на симплекс σ_r, задавая его границу**

$\boxed{\delta_0 p_0 = 0}$ — Точка не имеет границы



$\boxed{\delta^2 \sigma_r \equiv 0}$ — Граница границы равна 0

$$\boxed{\delta_1(p_0, p_1) = p_1 - p_0}$$



$$\boxed{\delta_2(p_0, p_1, p_2) = (p_0, p_1) + (p_1, p_2) + (p_2, p_0)}$$

$$\delta^2(p_0, p_1, p_2) = \delta_1(p_0, p_1) + \delta_1(p_1, p_2) + \delta_1(p_2, p_0)$$
$$= p_1 - p_0 + p_2 - p_1 + p_0 - p_2 = 0$$

Границей ориентированного r-симплекса называется (r-1) цепь

$$\delta_r \sigma_r = \sum_{i=0}^{r} (-1)^i (p_0, p_1, \ldots \hat{p}_i, \ldots, p_r)$$

Группа циклов и группа границы

- Если $c \in C_r(K)$ и $\delta_r c = 0$ то цепь *c* называют *r* - ***циклом***

- **Набор r–циклов $Z_r(K)$ образует подгруппу группы цепей $C_r(K)$ - группу циклов**

- Если $\exists d \in C_{r+1}(K)$, и $c = \delta_{r+1} d$, то цепь *c* называют *r* - ***границей***

- **Набор r–границ $B_r(K)$ образует подгруппу группы цепей $C_r(K)$ - группу границ**

Лемма: $\delta_r(\delta_{r+1} c) = 0, \quad \forall c \in C_{r+1}(K)$ → *каждая граница – это цикл,* $B_r(K) \subset Z_r(K)$

Доказательство: рассмотрим $\sigma = (p_0, p_1, \ldots p_r, p_{r+1}) \in C_{r+1}(K)$. Тогда

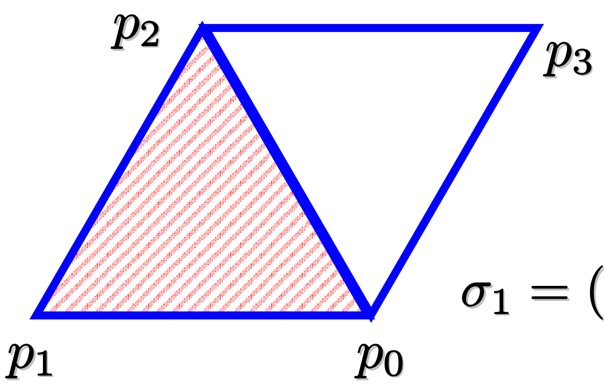
$$\delta_r(\delta_{r+1}\sigma) = \sum_{i=0}^{r+1} (-1)^i \delta_r(p_0, p_1, \ldots \hat{p}_i, \ldots, p_{r+1})$$

$$= \sum_{i=0}^{r+1} (-1)^i \left(\sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j (p_0, p_1, \ldots \hat{p}_j, \ldots \hat{p}_i, \ldots, p_{r+1}) + \sum_{j=i+1}^{r+1} (-1)^{j-1} (p_0, p_1, \ldots \hat{p}_i, \ldots \hat{p}_j, \ldots, p_{r+1}) \right)$$

$$= \sum_{j<i}^{r+1} (-1)^{i+j} (p_0, p_1, \ldots \hat{p}_j, \ldots \hat{p}_i, \ldots, p_{r+1}) - \sum_{j>i}^{r+1} (-1)^{i+j} (p_0, p_1, \ldots \hat{p}_i, \ldots \hat{p}_j, \ldots, p_{r+1}) = 0$$

Замечание 1: граница любого симплекса – это цикл.

Замечание 2: граница комплекса - это r-цикл, гомологически эквивалентный нулю.



$(p_0, p_1, p_2) \longrightarrow (p_0, p_1) + (p_1, p_2) + (p_2, p_0)$

$\sigma_2(K)$ граница $\delta_2 \sigma_2(K) \in Z(K)$

$\sigma_1 = (p_0, p_2) + (p_2, p_3) + (p_3, p_0) \in K \notin Z(K)$ **!**

- Оператор границы δ_r задает гомоморфизм группы цепей

$$\delta_r : C_r(K) \mapsto C_{r-1}(K)$$

- Группа циклов является ядром гомоморфизма, $Z_r(K) = \mathrm{Ker}\ \delta$,
  а группа границ – его образом: $B_r(K) = \mathrm{Im}\ \delta$

- Так как $B_r(K)$ - подгруппа $Z_r(K)$,то можно определить фактор-группу

$$\boxed{H_r = Z_r / B_r = \mathrm{Ker}\ \delta / \mathrm{Im}\ \delta} \longleftarrow$$

Гомологическая группа комплекса K
r – порядок группы

Вычисление группы гомологий

Элементы группы гомологий: классы эквивалентности r-циклов, которые не являются границей $(r+1)$-цепей

Замечание: *Группа гомологии является конечной абелевой группой*

Группа гомологии комплекса K на топологическом пространстве M не меняется при его гомеоморфных преобразованиях, она не зависит от способа триангуляции и является топологическим инвариантом

Примеры вычисления группы гомологии

$K = \{p_0\}$ ⇒ *Группа цепей на K:* $C_0(K) = \{ap_0,\ \forall a \in \mathbb{Z}\} \sim \mathbb{Z}$

- *Группа циклов на K и группа границ:* $Z_0(K) = C_0(K) \sim \mathbb{Z}, \quad B_0(K) = \{0\}$

⇒ $$\boxed{H_0(K) = Z_0/B_0 = C_0(K) = \mathbb{Z}}$$

Вычисление группы гомологий

- $K = \{p_0, p_1, (p_0, p_1)\}$

Группы цепей на K:
$$\begin{cases} C_0(K) = \{ap_0 + bp_1,\ \forall a, b \in \mathbb{Z}\} \sim \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \\ C_1(K) = \{c(p_0, p_1),\ \forall c \in \mathbb{Z}\} \sim \mathbb{Z} \end{cases}$$

Группа циклов на K:
$$\begin{cases} Z_0(K) = C_0(K) \sim \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \\ Z_1(K) = 0 \end{cases}$$

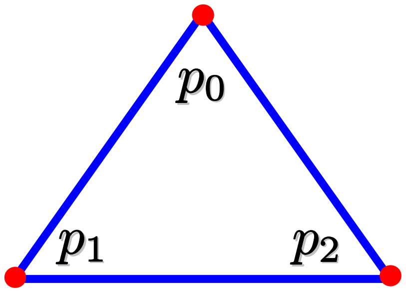
$$z = n(p_0, p_1) \in Z_1(K); \Rightarrow \delta_1 z = np_1 - np_0 = 0 \Rightarrow n = 0 \Rightarrow Z_1(K) = 0$$

Группа границ K:
$$\begin{cases} B_0(K) = \{m(p_0 - p_1),\ \ \forall m \in \mathbb{Z}\} \sim \mathbb{Z} \\ B_1(K) = 0 \end{cases}$$

Гомологические группы K
$$\boxed{\begin{array}{l} H_0 = Z_0/B_0 \sim \mathbb{Z} \\ H_1 = Z_1/B_1 = Z_1 = 0 \end{array}}$$

Гомологические группы окружности

- $K = \{p_0, p_1, p_2, (p_0,p_1), (p_1,p_2), (p_0,p_2)\}$



Группы цепей на K:

$$\begin{cases} C_0(K) = \{ap_0 + bp_1 + cp_2,\ \forall a,b,c \in \mathbb{Z}\} \sim \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \\ C_1(K) = \{a(p_0,p_2) + b(p_2,p_1) + c(p_1,p_0),\ \forall a,b,c \in \mathbb{Z}\} \sim \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \end{cases}$$

Группа циклов на K:

$$\begin{cases} Z_0(K) = C_0(K) \sim \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} \\ Z_1(K) = \{a[(p_0,p_2) + (p_2,p_1) + (p_1,p_0)],\ \forall a \in \mathbb{Z}\} \sim \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$z = a(p_0,p_2) + b(p_2,p_1) + c(p_1,p_0) \in Z_1(K)$$

$$\delta_1 z = a(p_2 - p_0) + b(p_1 - p_2) + c(p_0 - p_1) = 0, \Rightarrow a = b = c$$

Группа границ K:

$$\begin{cases} B_0(K) = \{m(p_0 - p_2) + n(p_2 - p_1) + k(p_1 - p_0),\ \forall m,n,k \in \mathbb{Z}\} \sim \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \\ B_1(K) = 0 \end{cases}$$

Гомологические группы S^1

$$\boxed{\begin{aligned} H_0 &= Z_0/B_0 \sim \mathbb{Z} \\ H_1 &= Z_1/B_1 = Z_1 = \mathbb{Z} \end{aligned}}$$

Вычисление группы гомологий

- **Теорема:** *Для любого связного комплекса* $H_0 = Z_0/B_0 \sim \mathbb{Z}$

Задача: **Чему равна группы гомологии ленты Мёбиуса?**

?

Несколько результатов:

$$H_0(T^2) = \mathbb{Z}; \qquad H_1(T^2) = \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}, \qquad H_2(T^2) = \mathbb{Z}$$

$$H_0(S^2) = \mathbb{Z}; \qquad H_1(S^2) = 0, \qquad H_2(S^2) = \mathbb{Z}$$

$$H_0(\mathbb{R}P^2) = \mathbb{Z}; \qquad H_1(\mathbb{R}P^2) = \mathbb{Z}_2, \qquad H_2(\mathbb{R}P^2) = 0$$

Наиболее общая структура гомологической группы:

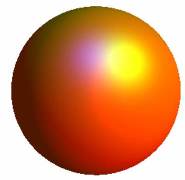
$$H_r(K) \sim \underbrace{\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\cdots\oplus\mathbb{Z}}_{k}\ \mathbb{Z}_{n_1}\oplus\mathbb{Z}_{n_2}\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}_{n_q}\oplus$$

Абелева группа ранга k

Подгруппа кручения ранга q

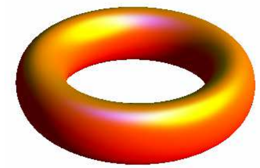
Числа Бетти

- ***Число Бетти:*** $b_r(K) = \dim\, H_r(K)$



$$H_0(S^2) = \mathbb{Z}; \quad H_1(S^2) = 0, \quad H_2(S^2) = \mathbb{Z}$$

$$b_0(S^2) = 1, \quad b_0(S^2) = 0, \quad b_2(S^2) = 1$$



$$H_0(T^2) = \mathbb{Z}; \quad H_1(T^2) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \quad H_2(T^2) = \mathbb{Z}$$

$$b_0(T^2) = 1, \quad b_0(T^2) = 2, \quad b_2(T^2) = 1$$

Теорема Эйлера-Пуанкаре: пусть K – n-мерный комплекс и N_r – число входящих в него r- симплексов. Тогда

$$\chi(K) = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r b_r(K)$$

Рецепт вычисления топологического индекса

- **Выполнить триангуляцию топологического пространства *K***
- **Определить группы циклов и группы границ** $Z_r(K), \quad B_r(K)$
- **Вычислить соответствующие гомологические группы** $H_r = Z_r / B_r$
- **Определить числа Бетти** $b_r(K) = \dim H_r(K)$
- **Вычислить индекс Эйлера, воспользовавшись теоремой Эйлера-Пуанкаре:**

$$\chi(K) = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r b_r(K)$$