Кафедра теоретической физики и астрофизики
Физический факультет, БГУ Минск

Дифференциальная геометрия и топология

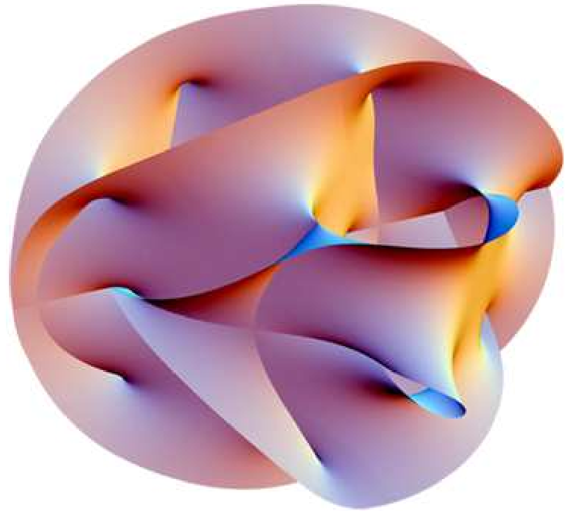
Я М Шнир

все вопросы, комментарии, замечания и протесты:
shnir@maths.tcd.ie

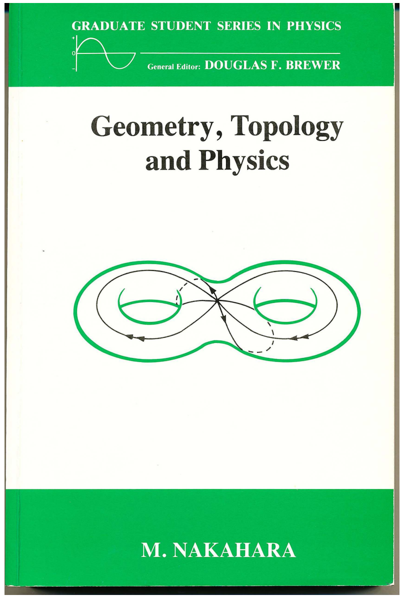
План лекций

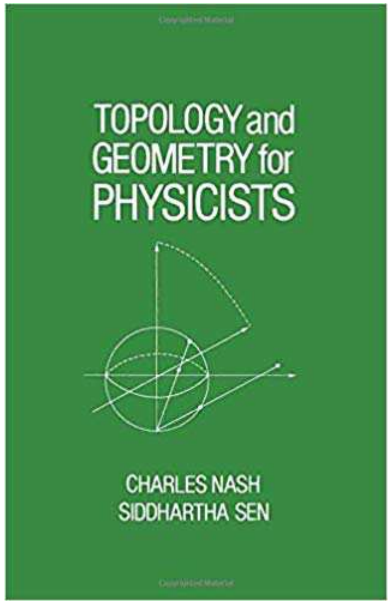
"Mathematics is the part of physics where experiments are cheap"
V.I.Arnold

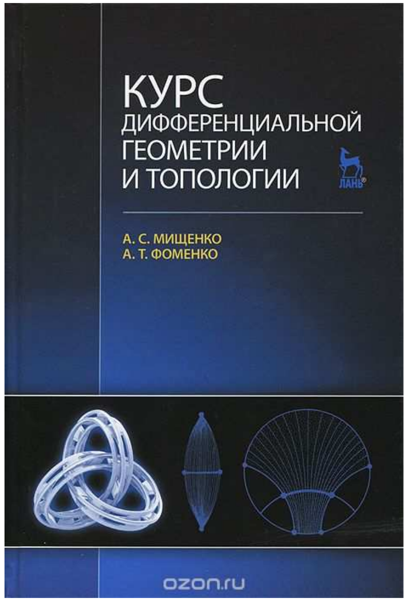
- Топологические пространства и дифференцируемые многообразия.
- Дифференциальные формы и их приложения
- Векторные поля и группы диффеоморфизмов.
- Элементы теории гомотопических групп.
- Расслоенные пространства.



Литература


GRADUATE STUDENT SERIES IN PHYSICS
General Editor: DOUGLAS F. BREWER
Geometry, Topology and Physics
M. NAKAHARA

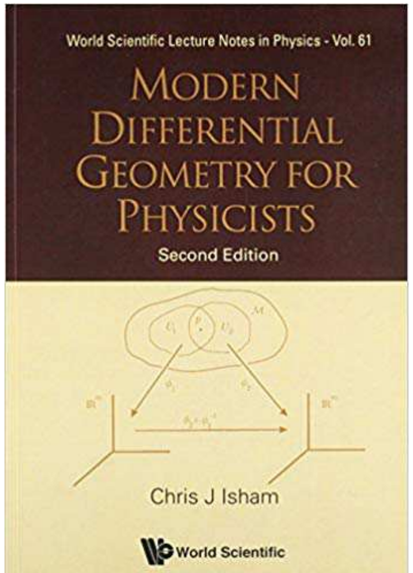

TOPOLOGY and GEOMETRY for PHYSICISTS
CHARLES NASH
SIDDHARTHA SEN

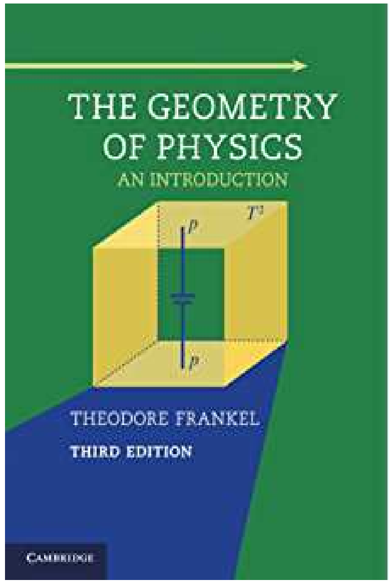

КУРС ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ И ТОПОЛОГИИ
ЛАНЬ
А. С. МИЩЕНКО
А. Т. ФОМЕНКО
ozon.ru


Б.А.ДУБРОВИН
С.П.НОВИКОВ
А.Т.ФОМЕНКО
СОВРЕМЕННАЯ ГЕОМЕТРИЯ


Б. ШУТЦ
ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ
S


ТОМ I
Ш. КОБАЯСИ
К. НОМИДЗУ
ОСНОВЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ


World Scientific Lecture Notes in Physics - Vol. 61
MODERN DIFFERENTIAL GEOMETRY FOR PHYSICISTS
Second Edition
Chris J Isham
World Scientific


THE GEOMETRY OF PHYSICS
AN INTRODUCTION
THEODORE FRANKEL
THIRD EDITION
CAMBRIDGE

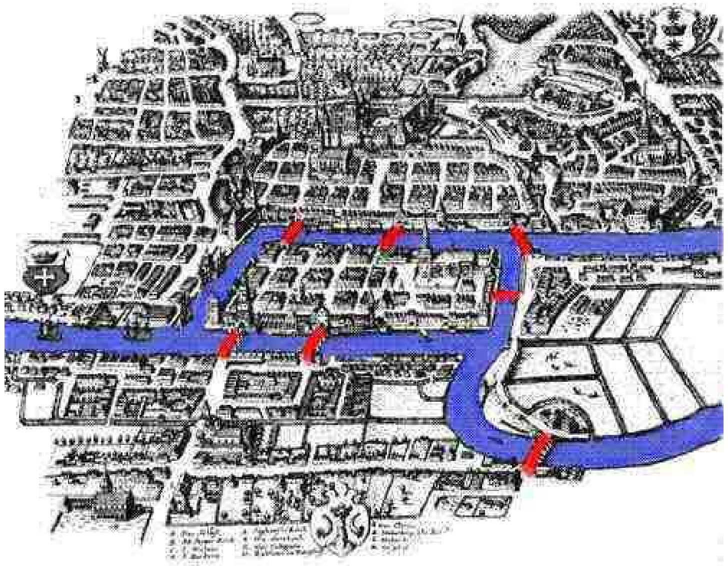
Дифференциальная геометрия и топология

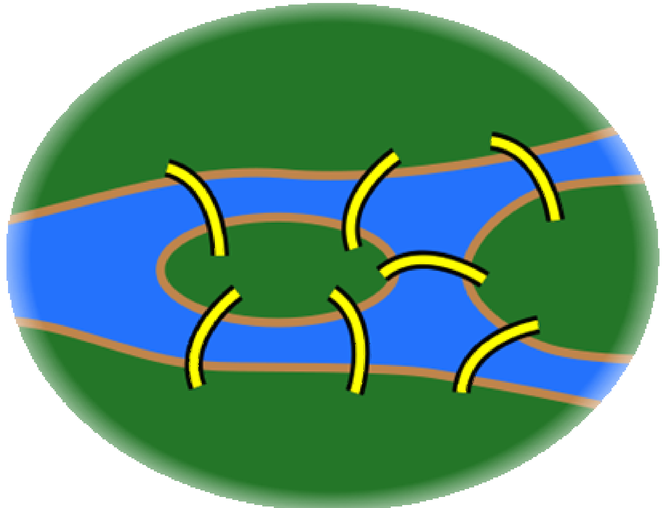
Задача: описание и классификация пространств произвольной размерности

- **Задача дифференциальной геометрии:**
  Описание локальных свойств пространств безотносительно к выбору конкретной системы координат

- **Задача топологии:**
  Описание глобальных свойств пространств и их классификация

К истокам: Эйлер и задача о мостах Кенигсберга

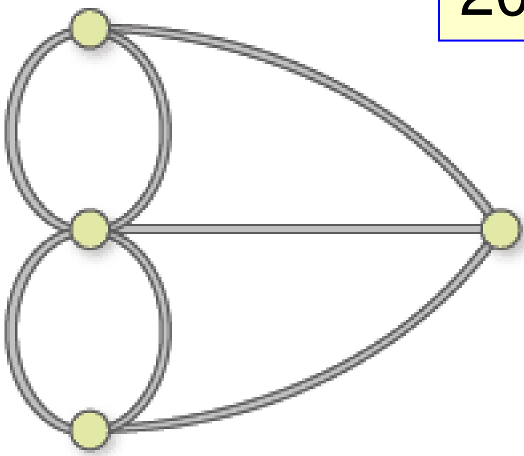




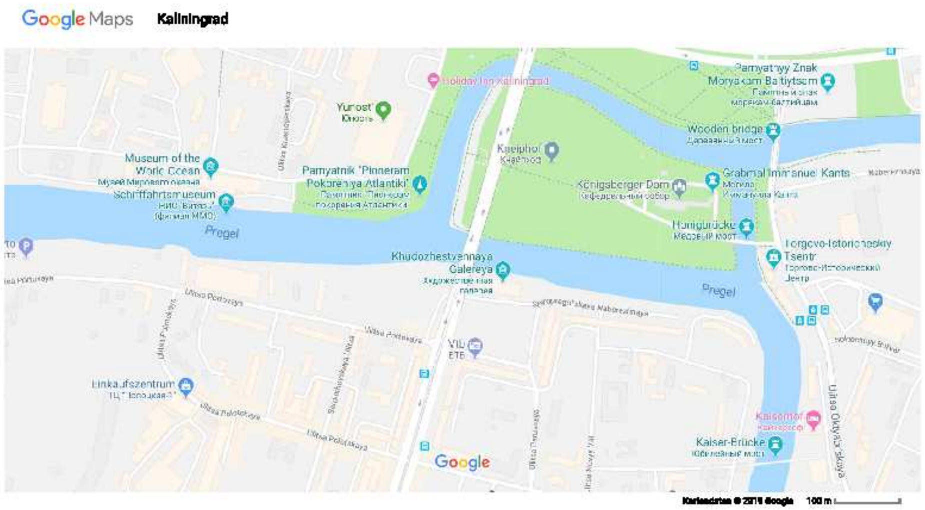
Kaliningrad - Google Maps

https://www.google.com/maps/place/Kaliningrad,+Oblast+Kaliningrad,+Russland/@54.7053427,20....

1736

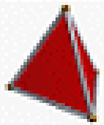
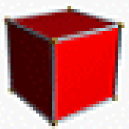
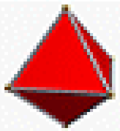
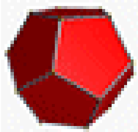
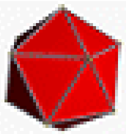


2019

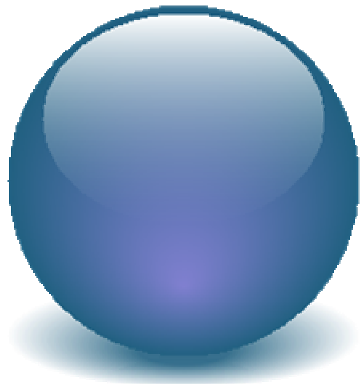


Индекс Эйлера

The Euler characteristic for convex polyhedra always equals 2

Name	Image	Vertices V	Edges E	Faces F	Euler characteristic: $V - E + F$
Tetrahedron		4	6	4	2
Hexahedron or cube		8	12	6	2
Octahedron		6	12	8	2
Dodecahedron		20	30	12	2
Icosahedron		12	30	20	2

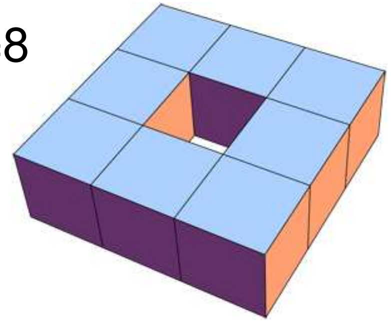
$$\boxed{\chi(S^2) = 2}$$



Индекс Эйлера

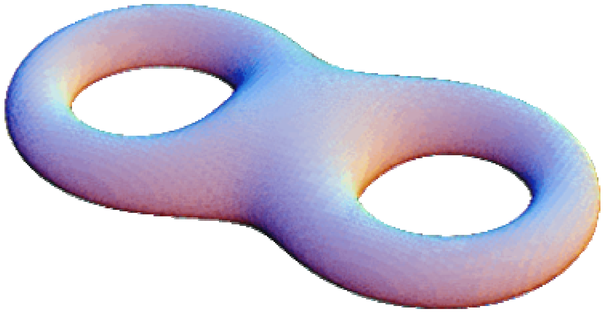
- **Тор:**

V=16, E=24, F=8



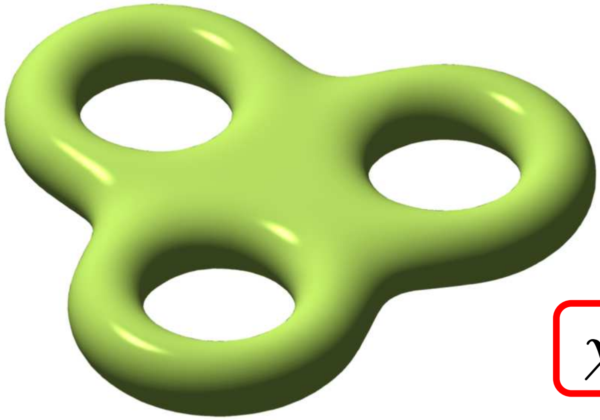
$$\chi(T^2) = 0$$

- **Поверхность 2го класса:**



$$\chi(M_{g=2}) = -2$$

- **Поверхность 3го класса:**

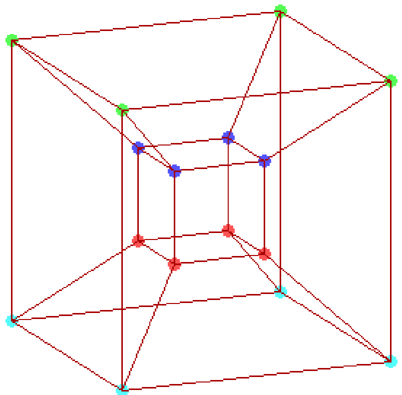


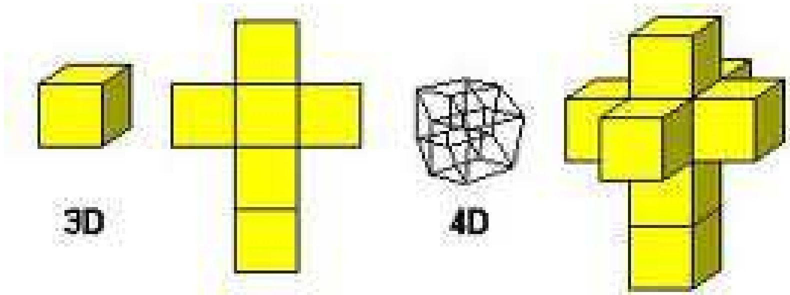
$$\chi(M_{g=3}) = -4$$

$$\chi = 2 - 2g$$

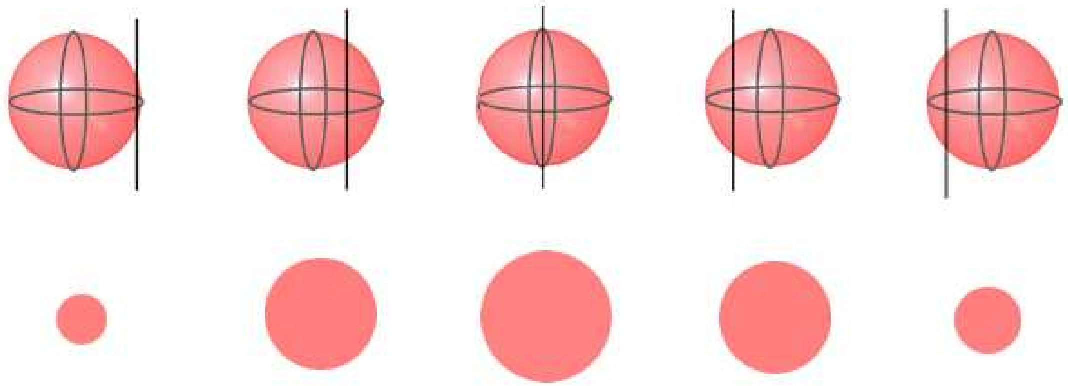
Высшие размерности

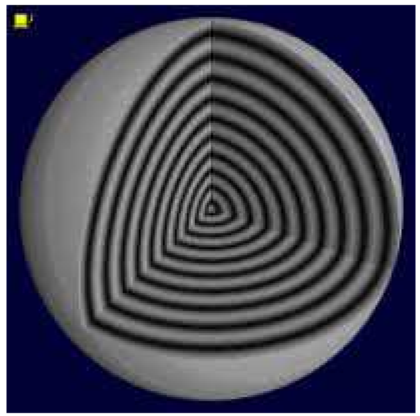
Гиперкуб в d=4





Гиперсфера S^3

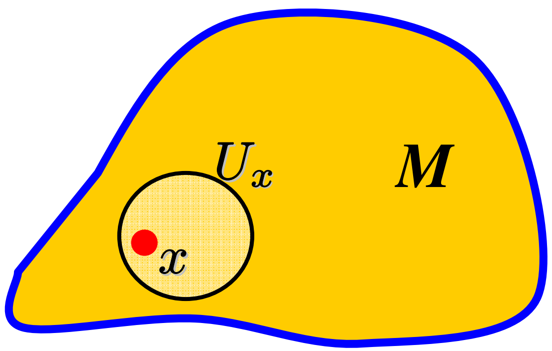


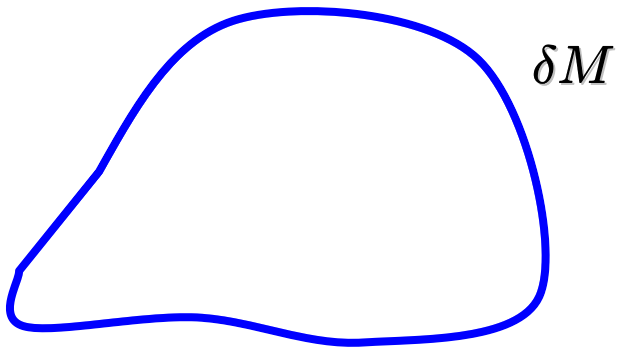


- **Вопрос:** **Какая топологическая характеристика у гиперповерхностей?**

Основные понятия топологии

- **Множество M:** пространство, которое локально выглядит как евклидово пространство $\mathbb{R}^n$.
- **Точка x:** элемент множества M, $x \in M$
- **Окрестность точки x:** множество U_x, содержащее эту точку и близкие к ней
- **Граница множества δM:** множество всех точек, расположенных как угодно близко как к точкам самого множества M, так и к точкам за его пределами.





Основные понятия топологии

- ***Открытое множество:*** ***Множество М, каждая точка которого входит в него со своей окрестностью*** U_x ***.***

$$M \cap \delta M = 0 \Rightarrow$$ ***M*** **– открытое множество**

- ***Дополнение к множеству:*** ***Множество всех точек*** x***, которые не входит в М:*** $M^c = \{\forall x \notin M\}$

- ***Замкнутое (закрытое) множество:*** ***Множество М, дополнение к которому является открытым множеством.***

$$\delta M \subset M \Rightarrow$$ ***M*** **– закрытое множество**

- ***Отображение:*** ***правило, сопоставляющее одно множество другому множеству:*** $f : M \mapsto N$

Основные понятия топологии

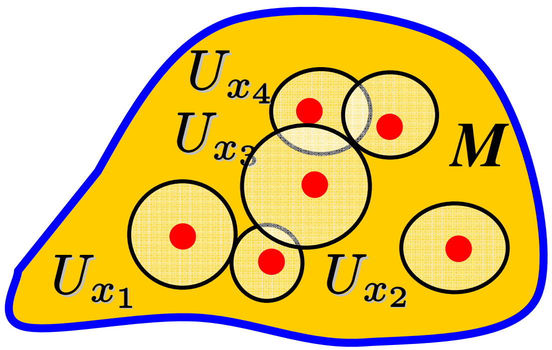
Определение топологического пространства

- Пусть **U** - набор подмножеств (окрестностей) в множестве **M**

  Пара (M, U) задает топологическое пространство, если **U** удовлетворяет условиям:

- $\{0, M\} \in U$
- **Для любого конечного, или бесконечного набора** $\{U_{x_i}\}$ **выполняется** $\cup_i U_{x_i} \in U$
- **Для любого конечного набора** $\{U_{x_1}, U_{x_2}, \ldots U_{x_n}\}$ **выполняется** $\forall i, j = 1, 2 \ldots n \ \ U_{x_i} \cap U_{x_j} \in U$

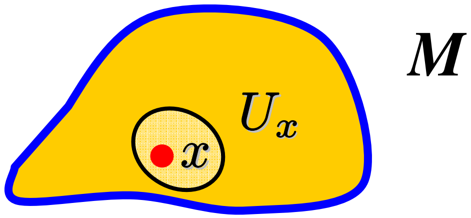
В дальнейшем будем полагать, что инфините-зимальные окрестности U_{x_i} точки x всегда являются евклидовыми пространствами $\mathbb{R}^n$



Топологические пространства

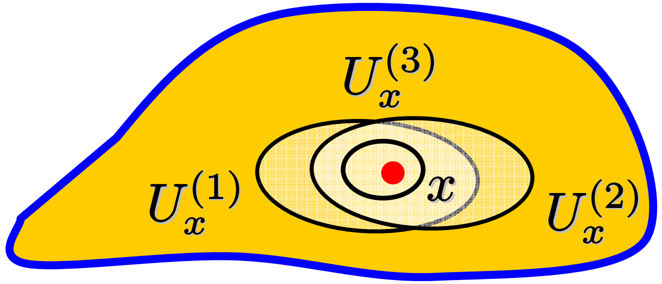
Хаусдорфово пространство

- **Аксиома 1:** $\forall x, \in M,\ \exists\, U_x,\quad x \in U_x$



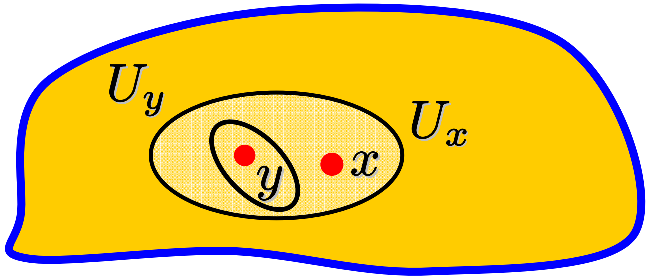
- **Аксиома 2:** *если* $U_x^{(1)}, U_x^{(2)}$ *- две окрестности точки* x*, то*

$\exists U_x^{(3)} \subset U_x^{(1)} \cap U_x^{(2)}$



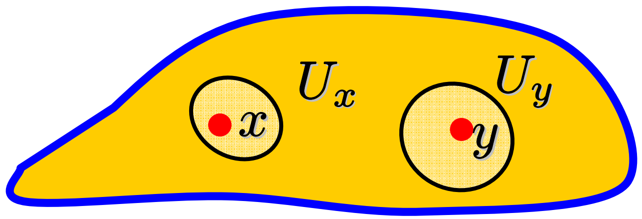
- **Аксиома 3:** *пусть* $x \in U_x,\ y \in U_x$

Тогда $\exists U_y,\ y \in U_y \subset U_x$



- **Дополнительная аксиома отдельности:**

$\forall x, x' \in M,\ \exists\, U_x, U_{x'},\quad U_x \cap U_{x'} = 0$



Топологические пространства

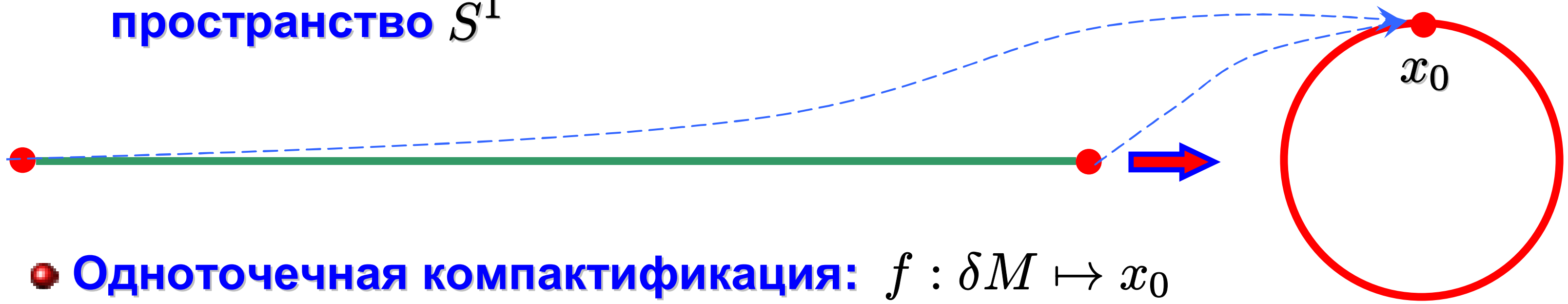
- ***Топологическое пространство является компактным, если оно (i) ограничено и (ii) замкнуто***
- **Альтернативное (нестрогое!) определение: Компактное пространство можно накрыть конечным набором локальных покрытий** $\{U_{x_i}\}$

- ***Топологическое пространство является связным, если оно не может быть представлено как*** $M = M_1 \cup M_2$, ***где*** M_1 ***и*** M_2 - ***открытые пространства, и*** $M_1 \cap M_2 = 0$
- **Альтернативное (нестрогое!) определение: любые 2 точки топологического пространства могут быть соединены непрерывной кривой**

$$\boxed{\forall x, y \in M \ \exists f : [0,1] \mapsto M, \quad f(0) = x, \ f(1) = y}$$

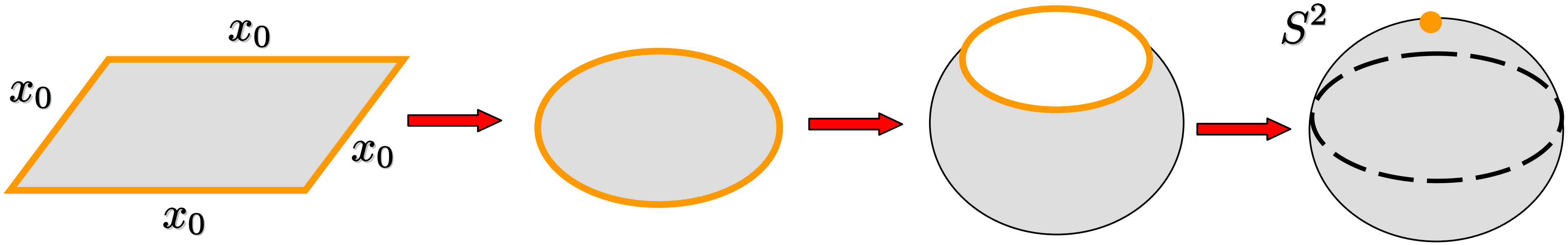
Компактификации и склейки

- **Пример некомпактного пространства:** $\mathbb{R}^1$
  Отождествление $x = -\infty, \quad x = \infty$ **преобразует его в компактное пространство** S^1

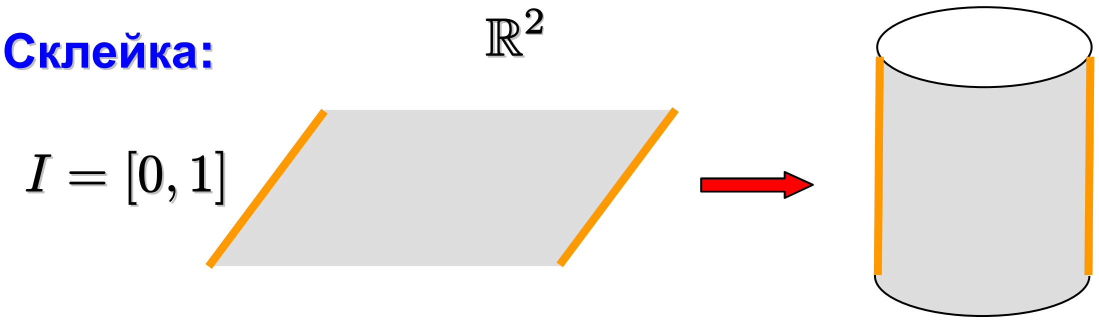


- **Одноточечная компактификация:** $f : \delta M \mapsto x_0$

Компактификация плоскости $\mathbb{R}^2$:



- **Склейка:**

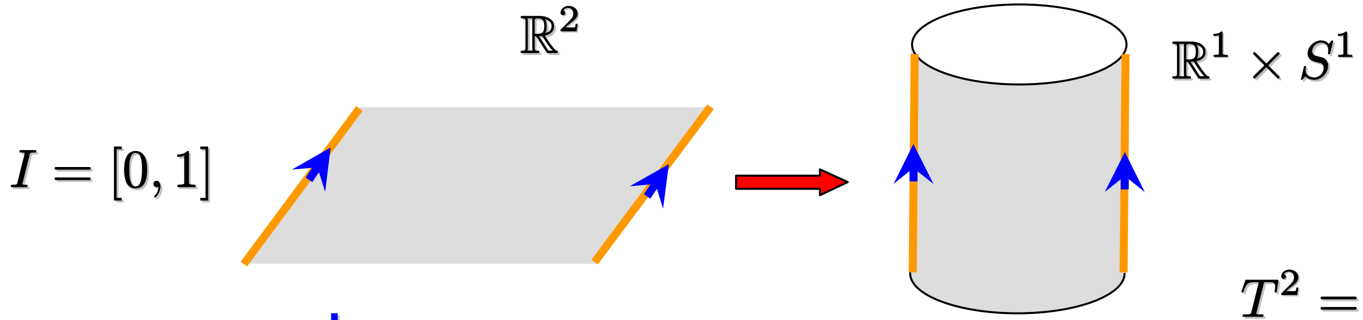


Произведение 2 пространств:

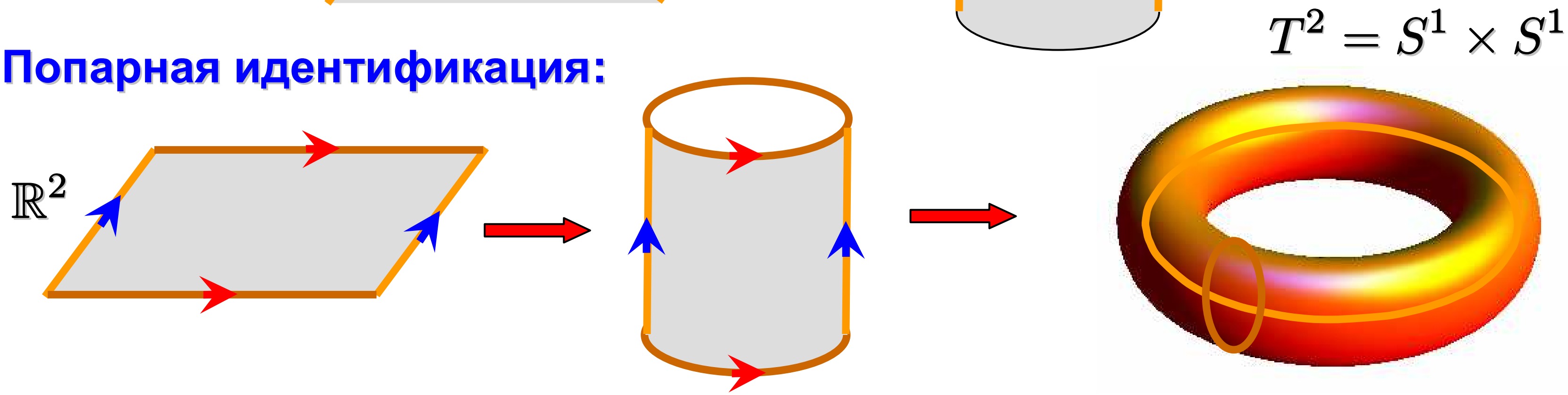
$\mathbb{R}^1 \times S^1$

Ориентируемые и неориентируемые пространства

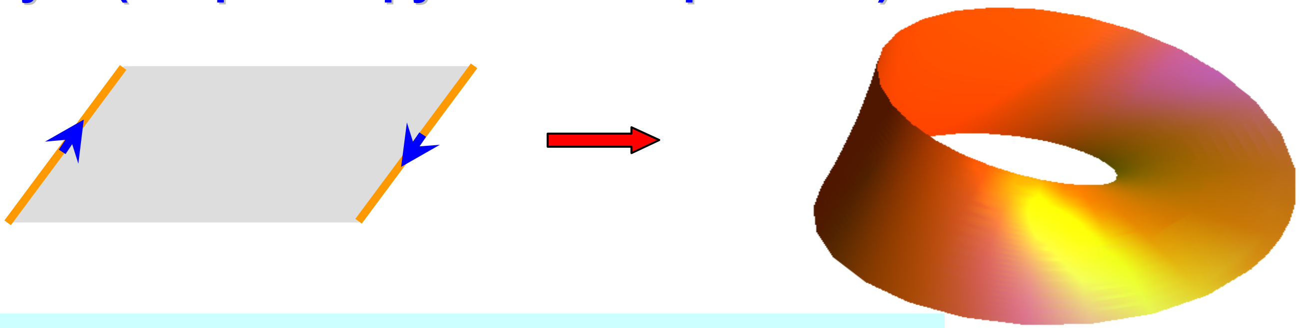
- **Ориентация при склейке:**



- **Попарная идентификация:**



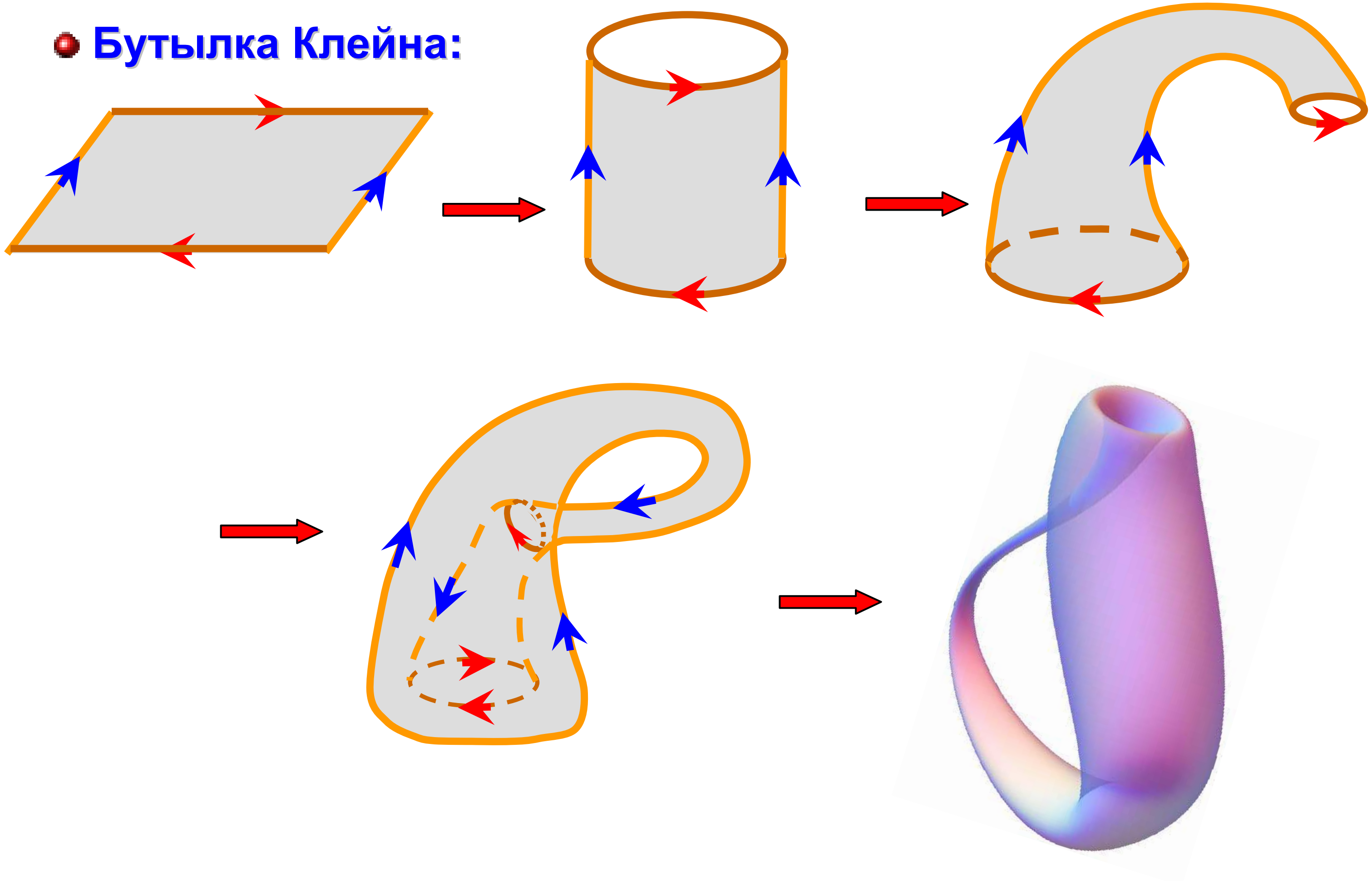
- **Лента Мёбиуса (неориентируемая поверхность):**



- **Вопрос:** Какой индекс Эйлера у ленты Мёбиуса?

Неориентируемые пространства

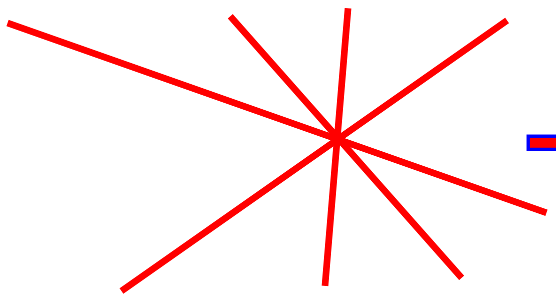
- **Бутылка Клейна:**

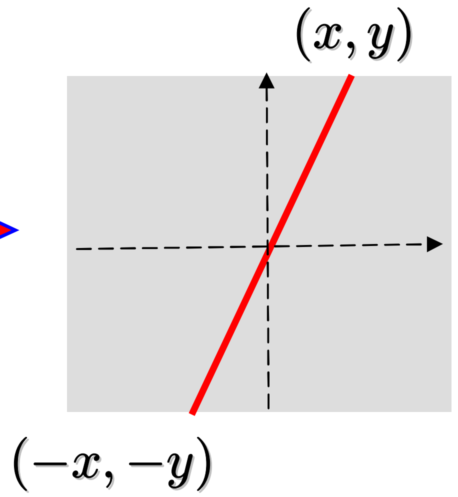


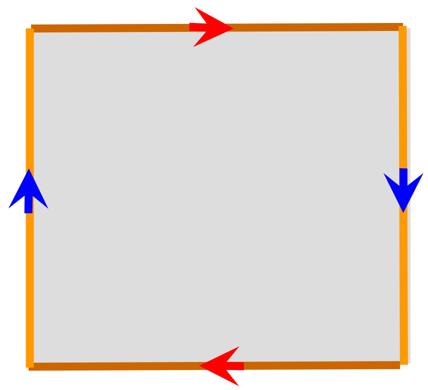
- **Вопрос:** Какой индекс Эйлера у бутылки Клейна?

Неориентируемые пространства

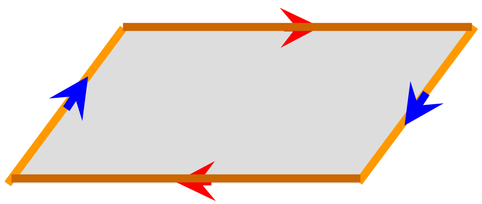
- **Проективная плоскость:** ***Пространство, точками которого являются неориентированные прямые, проходящие через начало координат***

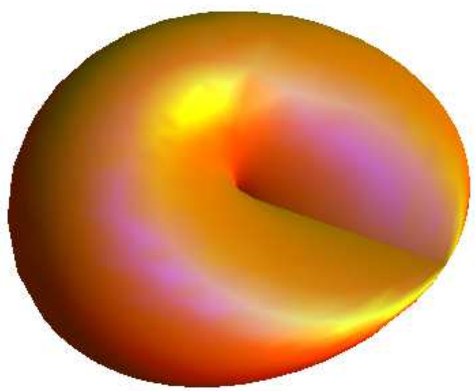


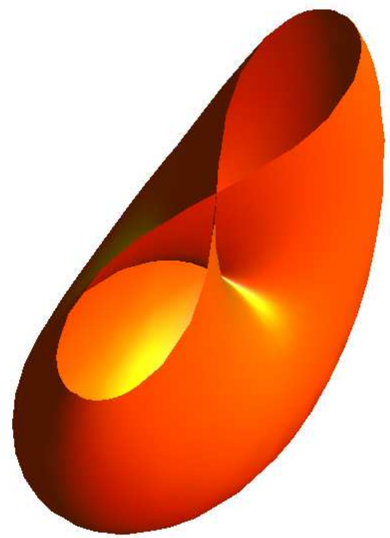




$\mathbb{R}P^2$



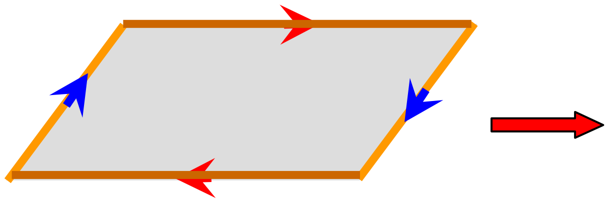


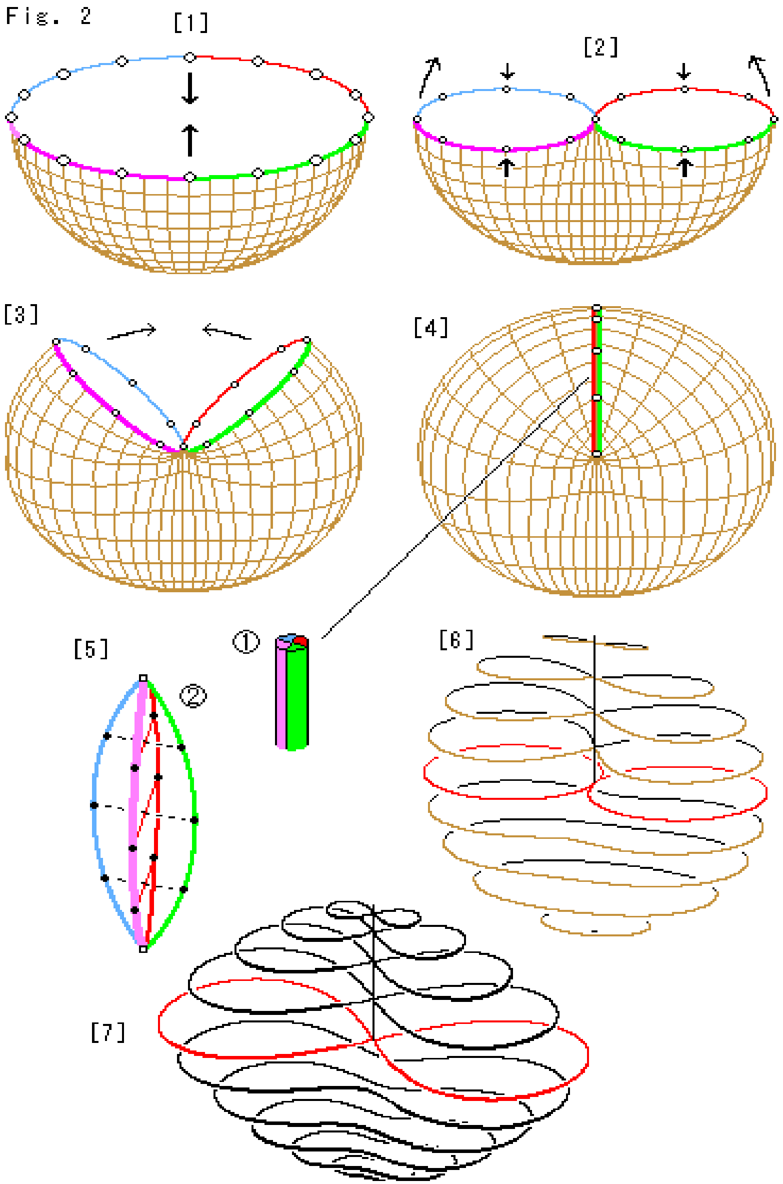


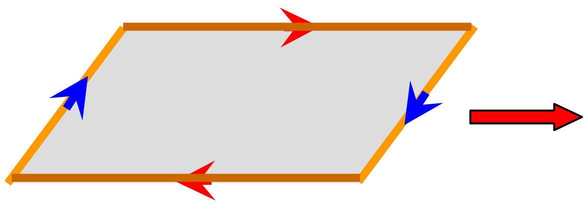
Перекрученная сфера

Проективная плоскость

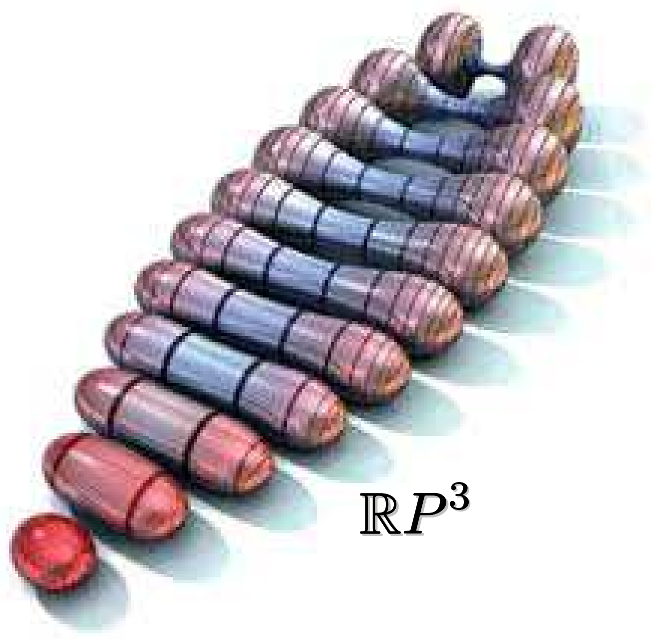
$\mathbb{R}P^2$



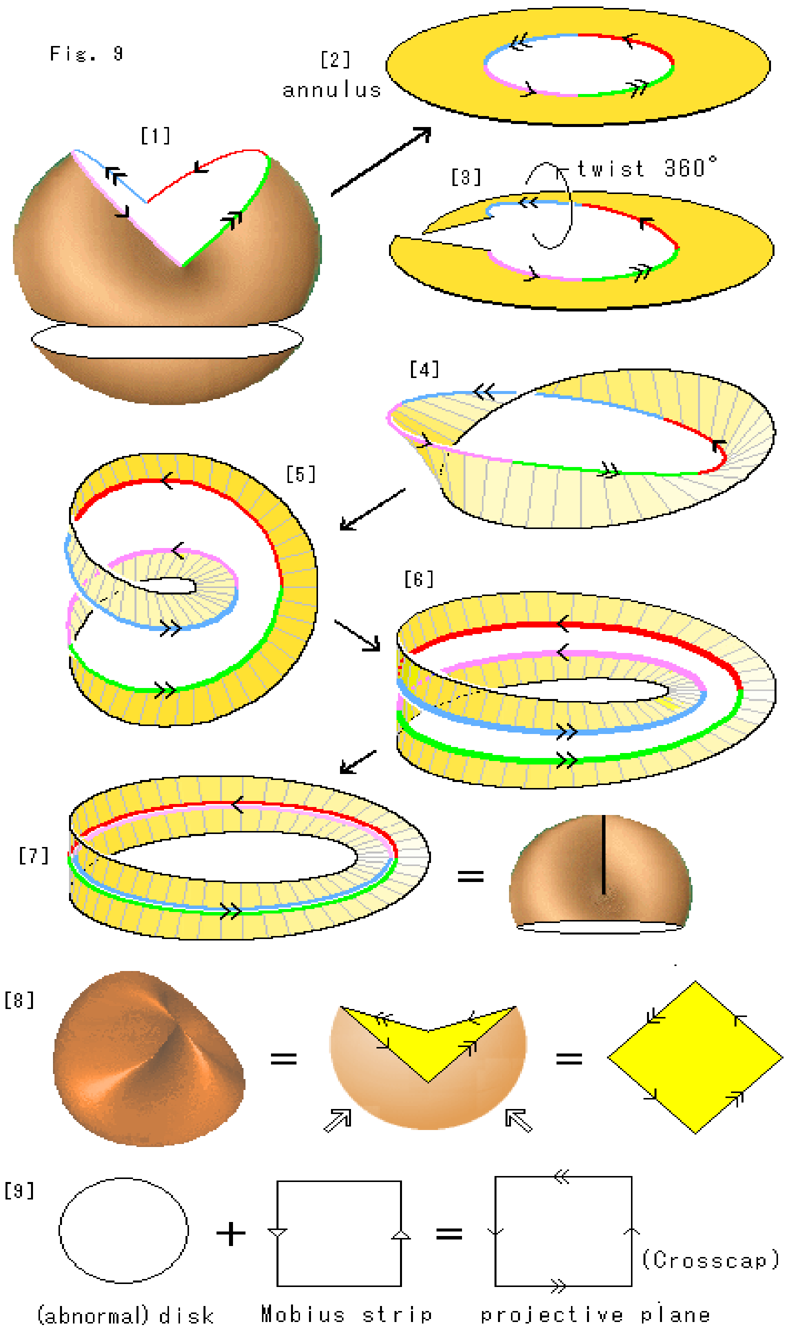




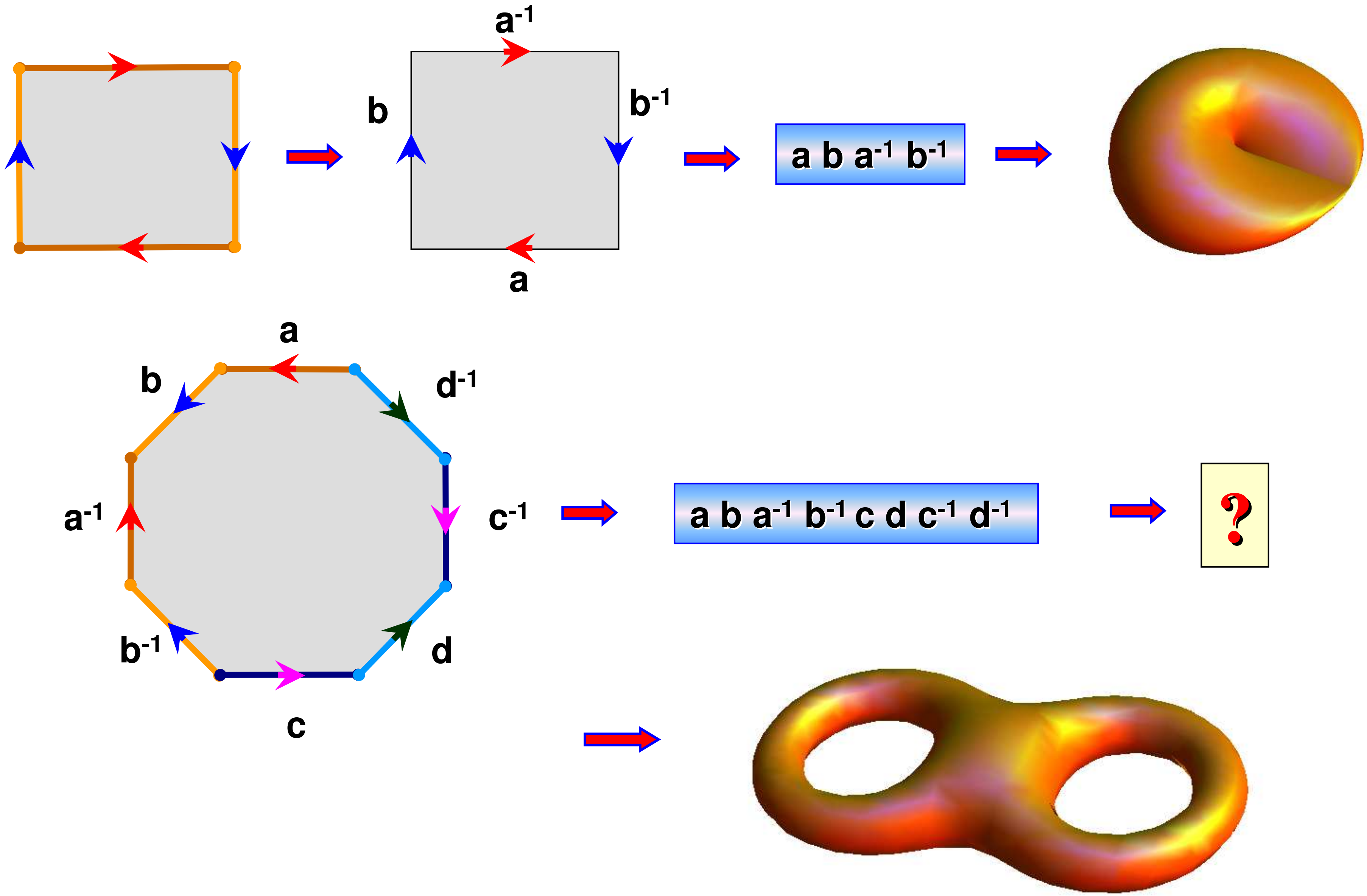
$\mathbb{R}P^2$



$\mathbb{R}P^3$

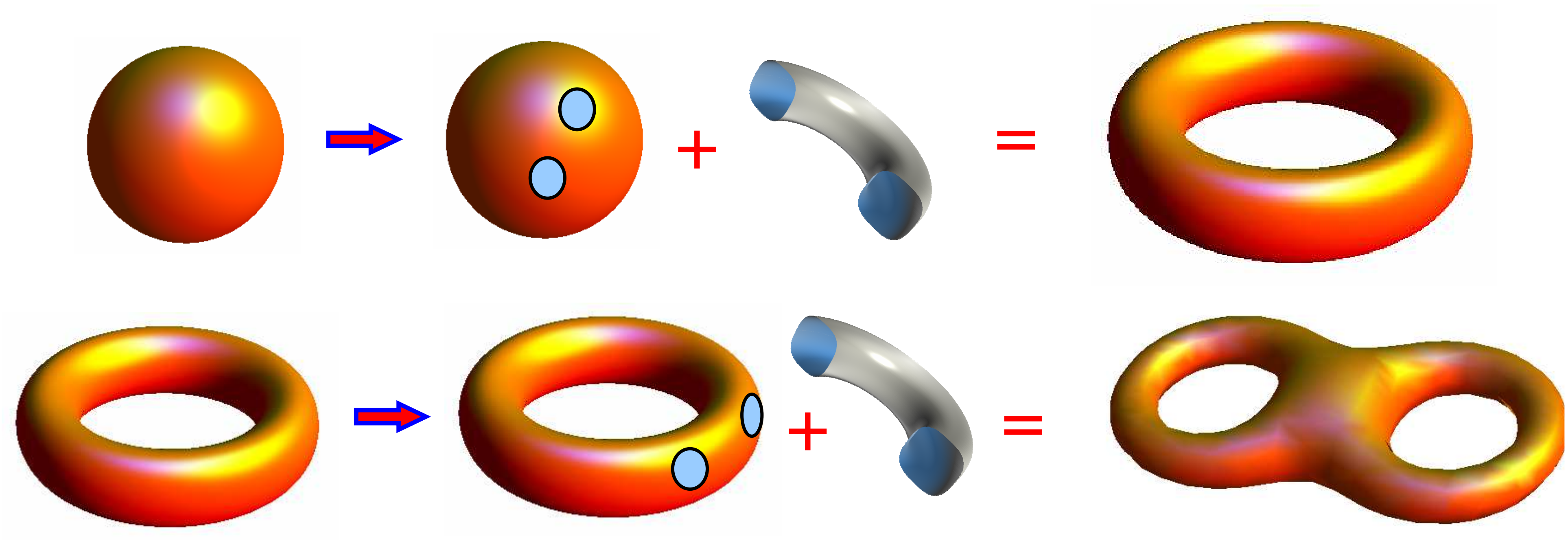


Если из $\mathbb{R}P^2$
вырезать диск, то
остается лента Мёбиуса



a⁻¹
b
b⁻¹
a
a b a⁻¹ b⁻¹
a
b
d⁻¹
a⁻¹
c⁻¹
b⁻¹
d
c
a b a⁻¹ b⁻¹ c d c⁻¹ d⁻¹
?

Приклейка ручек и вырезание дырок



- ***Теорема классификации: любая замкнутая поверхность гомеоморфна***

> • ***сфере***
> • ***или сфере с конечным числом ручек (тор + тор+ тор…)***
> • ***или сфере с конечным числом вырезанных дисков***
> ***и приклеенных полос Мёбиуса (проективные пространства)***

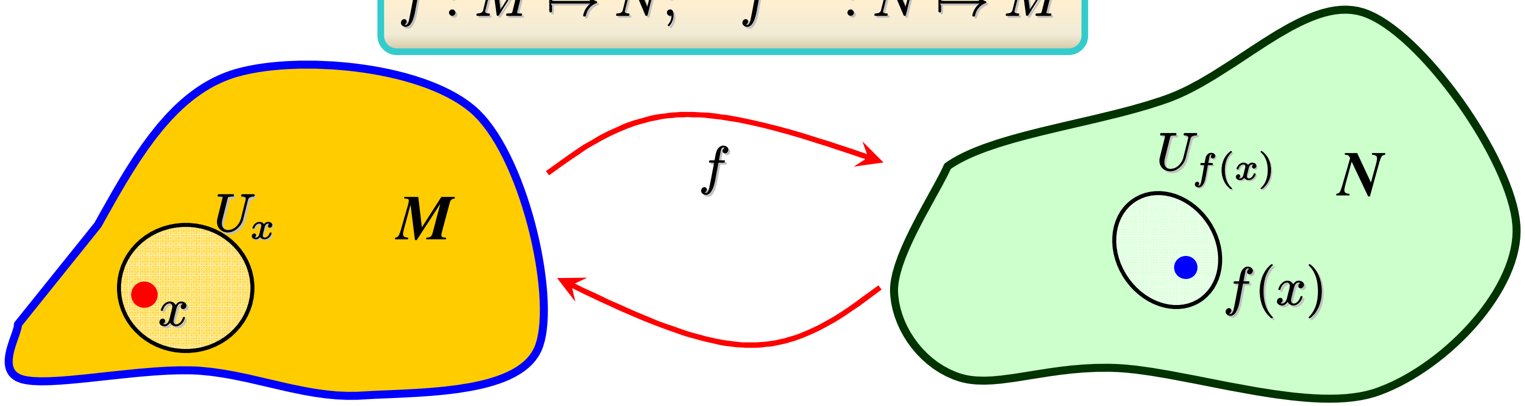
1900

Лемма Пуанкаре: Всякое односвязное компактное трёхмерное многообразие без края гомеоморфно трёхмерной сфере.

Гомеоморфизм и диффеоморфизм

Гомеоморфизм: взаимно однозначное (1↔1) и взаимно непрерывное отображение топологических пространств (биекция)

$$f : M \mapsto N; \quad f^{-1} : N \mapsto M$$



Замечание: ***гомеоморфизм – это соотношение эквивалентности:***

- ***Рефлексивность:*** $M \sim M$
- ***Симметрия:*** **если** $M \sim N$ **,то** $N \sim M$
- ***Транзитивность:*** **если** $M \sim N$ **и** $N \sim K$**,то** $M \sim K$

Если функция f, задающая биективное отображение топологических пространств и обратная к ней f^{-1} являются гладкими, то отображение называется диффеоморфизмом

Гомеоморфизм: Примеры

- **Открытый диск гомеоморфен плоскости:** $D^2 = \{(x,y) | x^2 + y^2 < 1\} \sim \mathbb{R}^2$

$f : D^2 \mapsto \mathbb{R}^2$

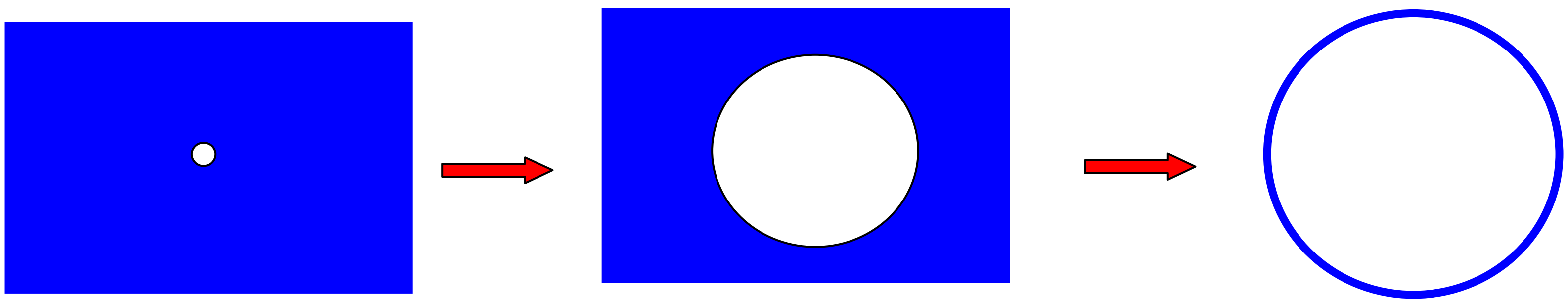
$$f(x,y) = \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \right)$$

$f^{-1} : \mathbb{R}^2 \mapsto D^2$

$$f^{-1}(x,y) = \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \right)$$

Задача: **Проверить, что** $f \circ f^{-1} = I$

- ***Плоскость с выколотой точкой гомеоморфна окружности:*** $\mathbb{R}^2 / \{0\} \sim S^1$



$$(x,y) \mapsto \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)$$

Гомеоморфизм: Примеры

- ***Открытый отрезок $I = (-1, 1)$ гомеоморфен $\mathbb{R}^1$:***

$$\forall x \in I\ \exists\ f : I \mapsto \mathbb{R}^1, \qquad f(x) = \tan \frac{\pi x}{2}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^1\ \ \exists f^{-1} : \mathbb{R}^1 \mapsto I, \qquad f^{-1}(x) = \frac{2}{\pi} \arctan x$$

- ***Окружность S^1 гомеоморфна квадрату T:*** $\qquad f : S^1 \mapsto T$

$$S^1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ \ x^2 + y^2 = 1\right\}$$

$$f(x, y) = \left(\frac{x}{|x| + |y|}, \frac{y}{|x| + |y|}\right)$$

$$T = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ \ |x| + |y| = 1\right\}$$

$$f^{-1}(x, y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$$

- ***Кружка гомеоморфна бублику:***