

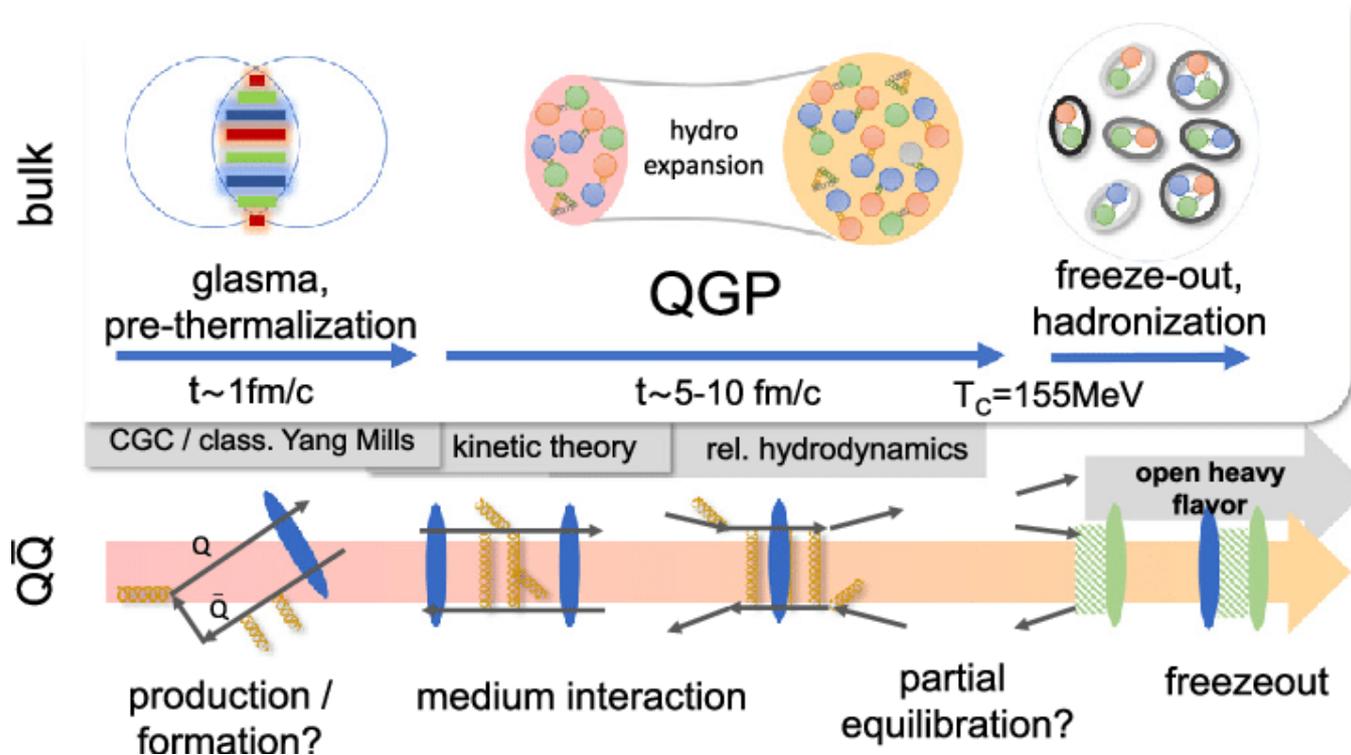
# Флуктуационные явления в анизотропной гидродинамике

Коваленко А. М.

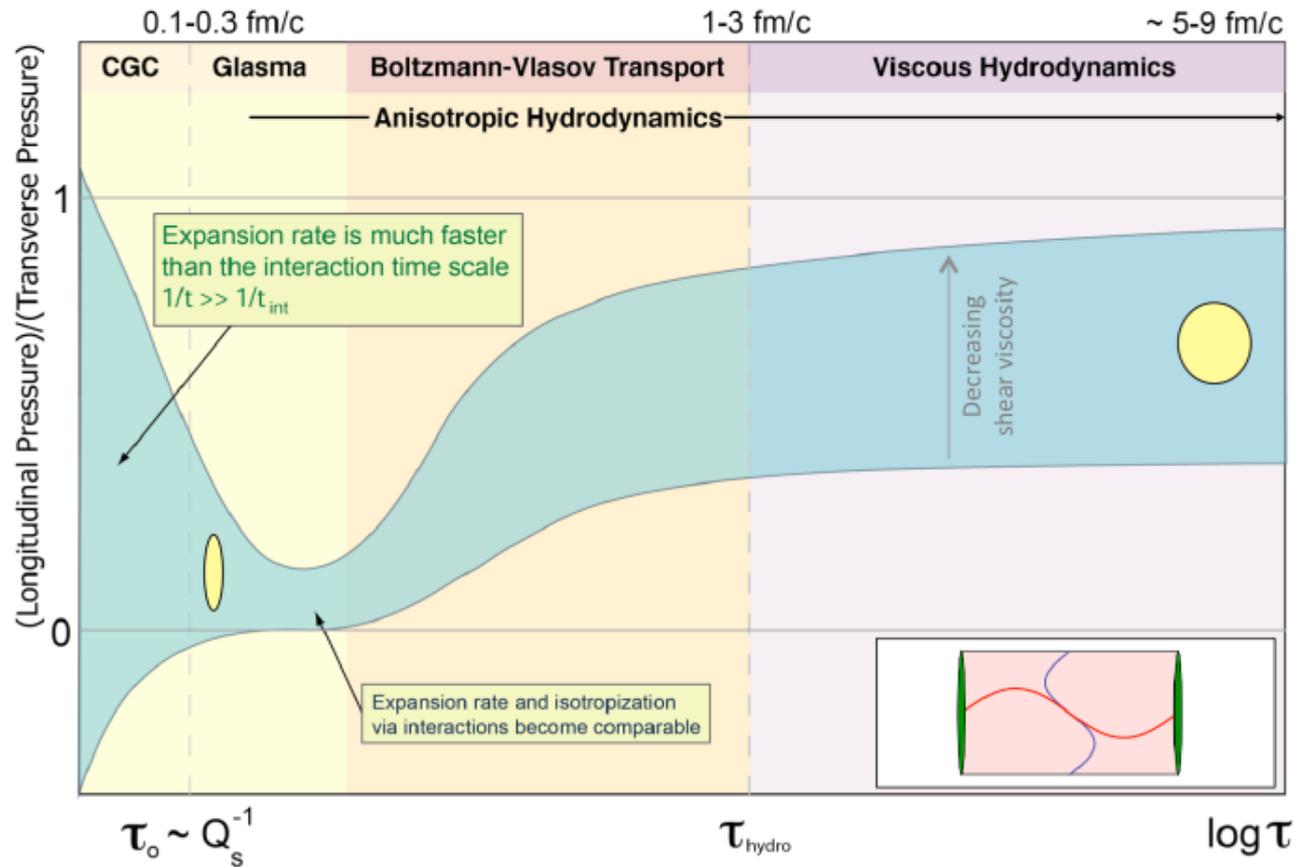
Научный руководитель: доктор физ.-мат. наук,  
Леонидов А. В.

13 декабря 2023г. ОИЯИ

# Столкновения тяжёлых ядер



# Столкновения тяжёлых ядер



# Проблемы гидродинамического описания

Проблемы диссипативной гидродинамики:

- Разница давлений в рамках диссипативных теорий приводила к появлению отрицательного давления. То есть существуют области фазового пространства, где одночастичная функция распределения становилась отрицательной.
- Рост гидродинамических поправок, которые становились соизмеримы с вкладами от идеальной жидкости.
- Фактически, анизотропия приводила к необходимости учёта градиентов всех порядков.

# Анизотропная гидродинамика

Тензор энергии-импульса:

$$T_{LRF}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_{\perp} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_{\parallel} \end{pmatrix}$$

# Анизотропная гидродинамика

Тензор энергии-импульса:

$$T_{LRF}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_{\perp} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_{\parallel} \end{pmatrix}$$

Базис векторов:

$$U_{LRF}^{\mu} = (1, 0, 0, 0)$$

$$X_{LRF}^{\mu} = (0, 1, 0, 0)$$

$$Y_{LRF}^{\mu} = (0, 0, 1, 0)$$

$$Z_{LRF}^{\mu} = (0, 0, 0, 1)$$



$$U^{\mu} = (u_0 \cosh \vartheta, u_x, u_y, u_0 \sinh \vartheta)$$

$$X^{\mu} = (u_{\perp} \cosh \vartheta, \frac{u_0 u_x}{u_{\perp}}, \frac{u_0 u_y}{u_{\perp}}, u_{\perp} \sinh \vartheta)$$

$$Y^{\mu} = (0, -\frac{u_y}{u_{\perp}}, \frac{u_x}{u_{\perp}}, 0)$$

$$Z^{\mu} = (\sinh \vartheta, 0, 0, \cosh \vartheta)$$

$$u_0 = \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}$$

$$\vartheta = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + v_z}{1 - v_z}$$

# Анизотропная гидродинамика

Метрический тензор может быть выражен следующим образом:

$$g^{\mu\nu} = U^\mu U^\nu - X^\mu X^\nu - Y^\mu Y^\nu - Z^\mu Z^\nu$$

Тензор энергии-импульса симметричен и может быть выражен как

$$T^{\mu\nu} = a g^{\mu\nu} + \sum_i a_i X_i^\mu X_i^\nu + \sum_{\gamma>\rho} a_{\gamma\rho} (X_\gamma^\mu X_\rho^\nu + X_\rho^\mu X_\gamma^\nu)$$

# Анизотропная гидродинамика

Метрический тензор может быть выражен следующим образом:

$$g^{\mu\nu} = U^\mu U^\nu - X^\mu X^\nu - Y^\mu Y^\nu - Z^\mu Z^\nu$$

Тензор энергии-импульса симметричен и может быть выражен как

$$T^{\mu\nu} = a g^{\mu\nu} + \sum_i a_i X_i^\mu X_i^\nu + \sum_{\gamma>\rho} a_{\gamma\rho} (X_\gamma^\mu X_\rho^\nu + X_\rho^\mu X_\gamma^\nu)$$

$$a = \varepsilon,$$

$$T_{LRF}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_\perp & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_\perp & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_\parallel \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{aligned} -a + a_1 &= P_\perp, \\ -a + a_2 &= P_\perp, \\ -a + a_3 &= P_\parallel. \end{aligned}$$



$$T^{\mu\nu} = (\varepsilon + P_\perp)U^\mu U^\nu - P_\perp g^{\mu\nu} + (P_\parallel - P_\perp)Z^\mu Z^\nu$$

Видно, что вектор  $Z^\mu$  выделяет направление Oz в модели, которое будем также называть осью (направлением) анизотропии.

# Анизотропная гидродинамика

Одночастичная функция распределения:

$$f_{\text{aniso}}(x, p) = f_{\text{iso}} \left( \frac{\sqrt{p^\mu \Xi_{\mu\nu}(x) p^\nu}}{\Lambda(x)}, \frac{\mu(x)}{\Lambda(x)} \right)$$

LRF:  $p^\mu \Xi_{\mu\nu}(x) p^\nu \longrightarrow \mathbf{p}^2 + \xi(x) p_{\parallel}$ , где  $\xi(x)$  - параметр анизотропии.

Тензор энергии-импульса:

$$T^{\mu\nu} = \int Dp p^\mu p^\nu f(p, x) \longrightarrow T^{\mu\nu} = (\varepsilon + P_{\perp}) U^\mu U^\nu - P_{\perp} g^{\mu\nu} - (P_{\perp} - P_{\parallel}) Z^\mu Z^\nu$$

где введён базис векторов

$U_{LRF}^\mu = (1, 0, 0, 0)$		$U^\mu = (u_0 \cosh \vartheta, u_x, u_y, u_0 \sinh \vartheta)$	$u_0 = \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}$
$X_{LRF}^\mu = (0, 1, 0, 0)$	<div style="display: inline-block; text-align: center;">             буст  </div>	$X^\mu = (u_{\perp} \cosh \vartheta, \frac{u_0 u_x}{u_{\perp}}, \frac{u_0 u_y}{u_{\perp}}, u_{\perp} \sinh \vartheta)$	$\vartheta = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + v_z}{1 - v_z}$
$Y_{LRF}^\mu = (0, 0, 1, 0)$		$Y^\mu = (0, -\frac{u_y}{u_{\perp}}, \frac{u_x}{u_{\perp}}, 0)$	
$Z_{LRF}^\mu = (0, 0, 0, 1)$		$Z^\mu = (\sinh \vartheta, 0, 0, \cosh \vartheta)$	

# Анизотропная гидродинамика

Величины факторизуются на анизотропную и изотропную части:

$$\varepsilon(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} p_0 f_{iso} \left( \frac{\sqrt{p^2 + \xi(x)p_{\parallel}^2}}{\Lambda(x)} \right) \longrightarrow \begin{aligned} \varepsilon(\Lambda, \xi) &= R(\xi)\varepsilon_{iso}(\Lambda) \\ P_{\perp}(\Lambda, \xi) &= R_{\perp}(\xi)P_{iso}(\Lambda) \\ P_{\parallel}(\Lambda, \xi) &= R_{\parallel}(\xi)P_{iso}(\Lambda) \end{aligned}$$

где

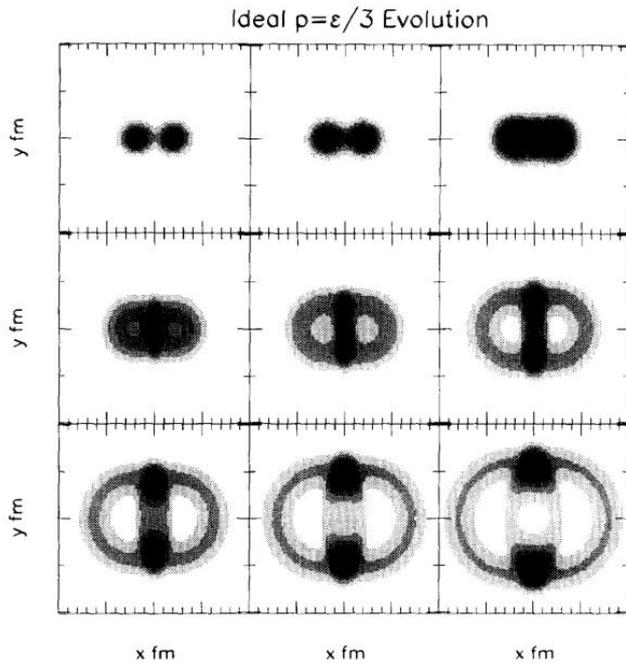
$$R_{\perp}(\xi) = \frac{3}{2\xi} \left( \frac{1 + (\xi^2 - 1)R(\xi)}{1 + \xi} \right)$$

$$R_{\parallel}(\xi) = \frac{3}{\xi} \left( \frac{(\xi + 1)R(\xi) - 1}{1 + \xi} \right)$$

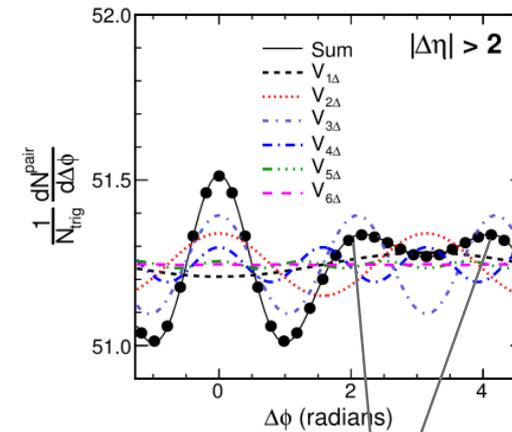
$$R(\xi) = 2R_{\perp}(\xi) + R_{\parallel}(\xi) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1 + \xi} + \frac{\arctan \sqrt{\xi}}{\sqrt{\xi}} \right) \longleftrightarrow \varepsilon = 2P_{\perp} + P_{\parallel}$$

Ультра-релятивистский  
случай

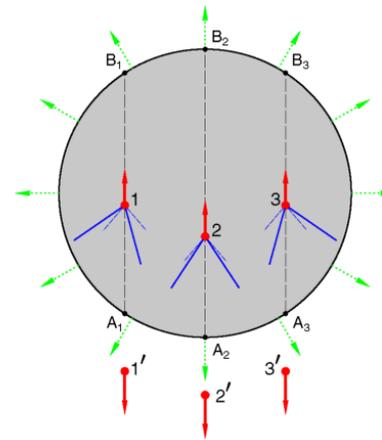
# Звуковые явления



Miklos Gyulassy, Dirk H. Rischke, Bin Zhang  
 «Hot spots and turbulent initial conditions of  
 quark-gluon plasmas in nuclear collisions»

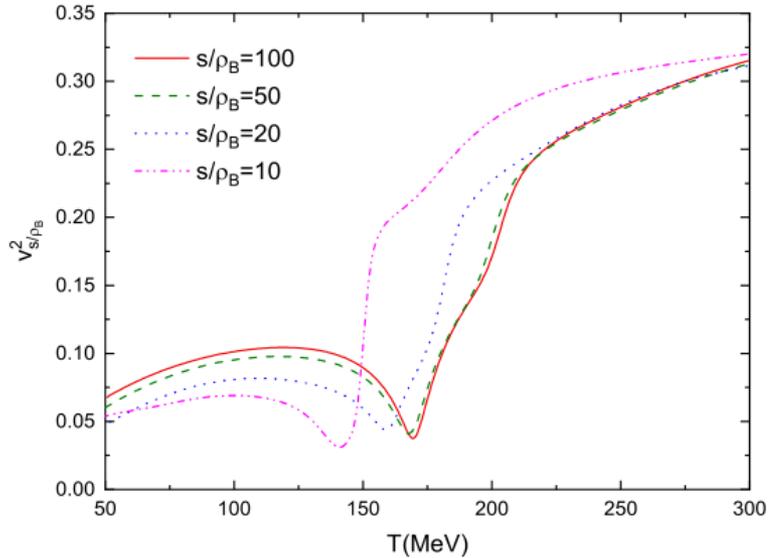


Двугорбая структура

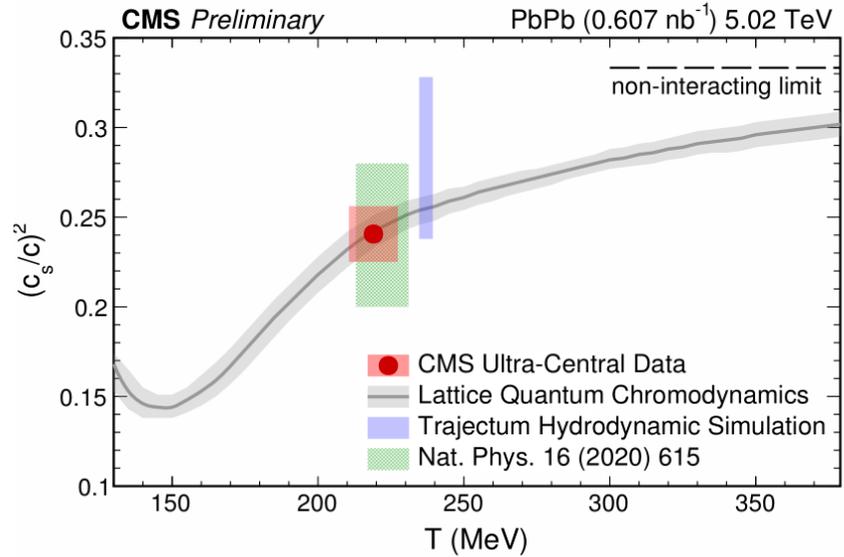


L.M. Satarov, Horst Stoecker, I.N. Mishustin.  
 «Mach shocks induced by partonic jets in  
 expanding quark-gluon plasma»

# Скорость звука



Wei-bo He et al., «Speed of sound in QCD matter»,  
Phys.Rev.D 105 (2022) 9, 094024



CMS Collaboration, Extracting the speed of sound in the strongly interacting matter created in ultrarelativistic nuclear collisions,  
11.09.2023

# Волновое уравнение

Разложим температуру около некоторого постоянного состояния:

$$\Lambda(x) = \Lambda^{(0)} + \Lambda^{(1)}(x) + \dots$$

Тогда, если принять  $\xi \approx const$ , получим разложение для остальных величин

$$\varepsilon(x, \xi) = R(\xi) \left( \varepsilon_{\text{iso}}(\Lambda^{(0)}) + \left. \frac{\partial \varepsilon_{\text{iso}}(\Lambda)}{\partial \Lambda} \right|_{\Lambda=\Lambda^{(0)}} \Lambda^{(1)}(x) + \dots \right)$$

Линеаризуя уравнения движения  $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ , придём к волновому уравнению

$$\boxed{(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \kappa \partial_z^2) n^{(1)} = (\kappa + 2) \partial_t^2 n^{(1)}}$$

где

$$\kappa = \frac{P_{\parallel}}{P_{\perp}}$$

Приходим к разным скоростям звука

$$c_{s\perp} = \frac{1}{\sqrt{2 + \kappa}} = \sqrt{\frac{R_{\perp}(\xi)}{3R(\xi)}}$$

$$c_{s\parallel} = \frac{\sqrt{\kappa}}{\sqrt{2 + \kappa}} = \sqrt{\frac{R_{\parallel}(\xi)}{3R(\xi)}}$$

# Волновое уравнение

Линеаризуя уравнения движения  $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ , придём к волновому уравнению

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \kappa \partial_z^2) n^{(1)} = (\kappa + 2) \partial_t^2 n^{(1)}$$

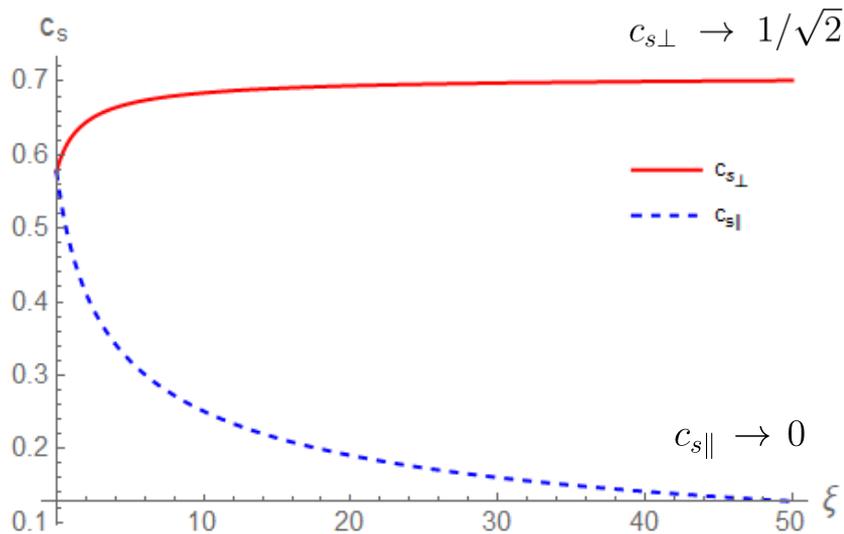
где

$$\kappa = \frac{P_{\parallel}}{P_{\perp}}$$

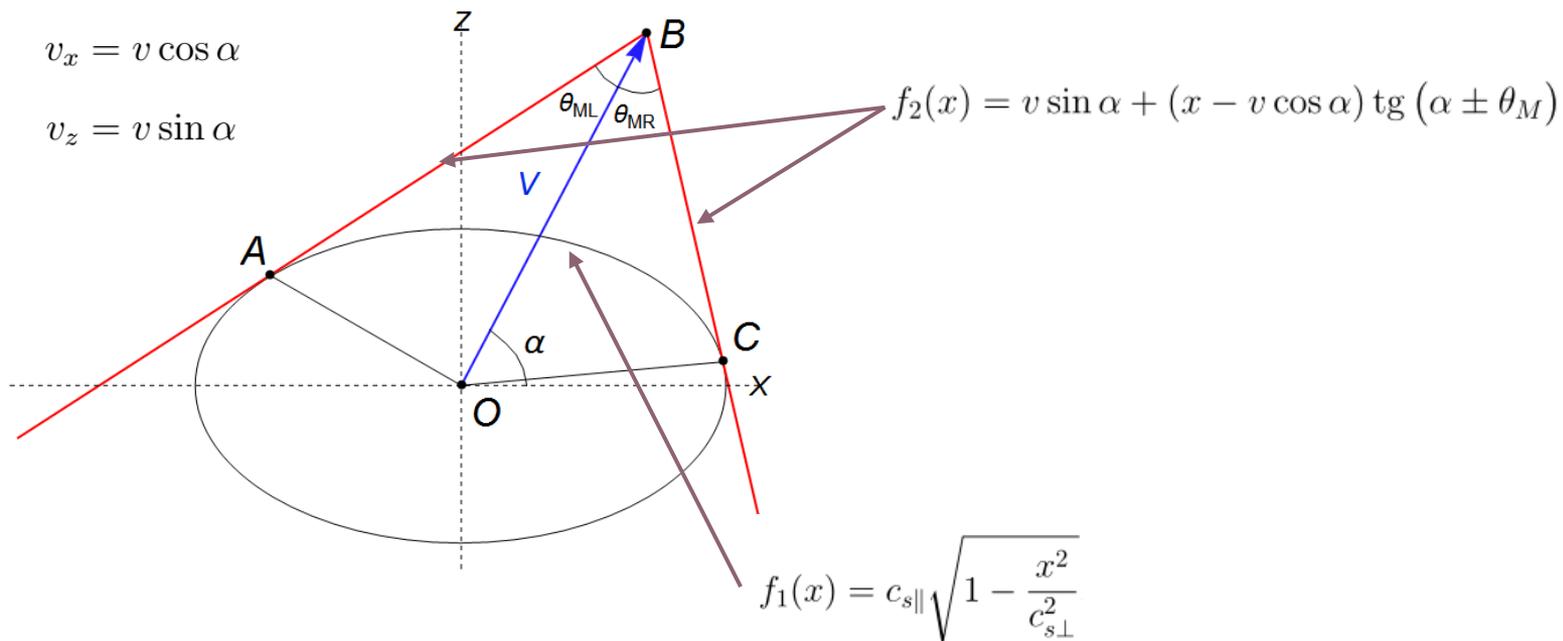
Приходим к разным скоростям звука

$$c_{s\perp} = \frac{1}{\sqrt{2 + \kappa}} = \sqrt{\frac{R_{\perp}(\xi)}{3R(\xi)}}$$

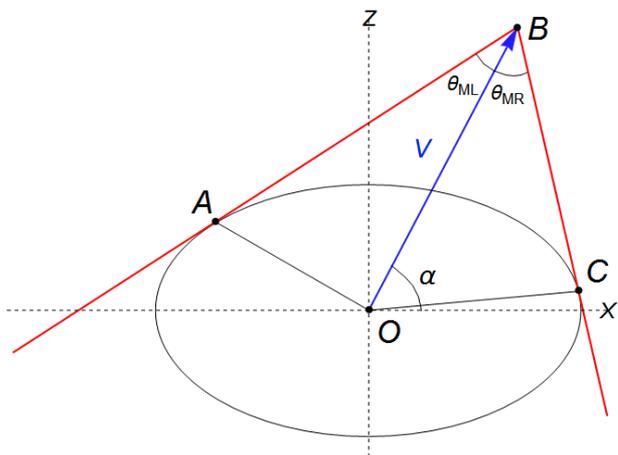
$$c_{s\parallel} = \frac{\sqrt{\kappa}}{\sqrt{2 + \kappa}} = \sqrt{\frac{R_{\parallel}(\xi)}{3R(\xi)}}$$



# Конус Маха



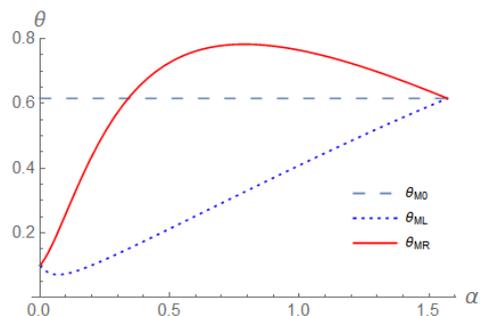
# Конус Маха



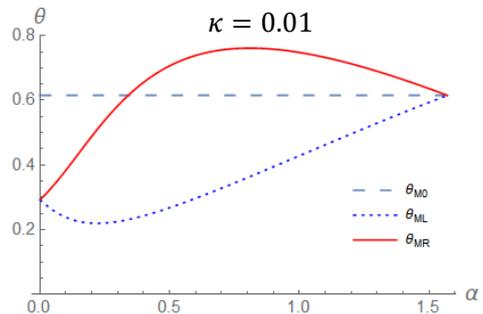
$$v_x = v \cos \alpha$$

$$v_z = v \sin \alpha$$

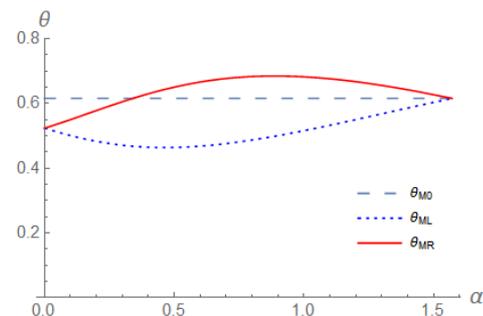
$$\operatorname{tg} \theta_M = \pm \frac{\sin \alpha \cos \alpha (\kappa - 1) \pm \sqrt{v^2 (\kappa \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) (\kappa + 2) - \kappa}}{v^2 (\kappa + 2) - \kappa \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}$$



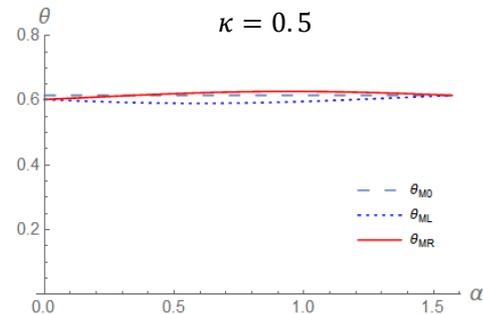
$\kappa = 0.01$



$\kappa = 0.1$



$\kappa = 0.5$



$\kappa = 0.9$

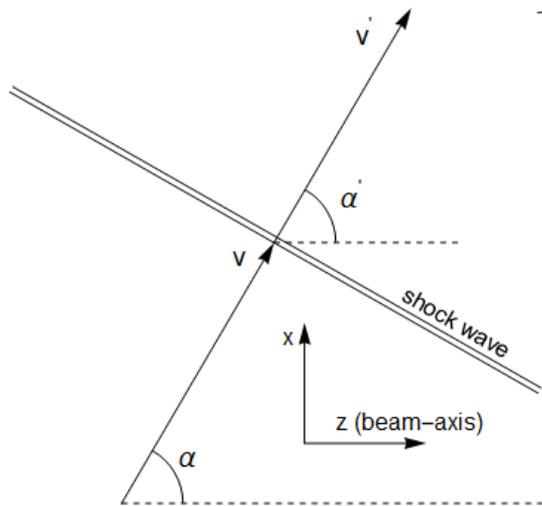
M. Kirakosyan, A. Kovalenko, A. Leonidov.  
 Sound propagation and Mach cone in anisotropic hydrodynamics.  
 The European Physical Journal C, 79:434. 2019.

# Ударные волны

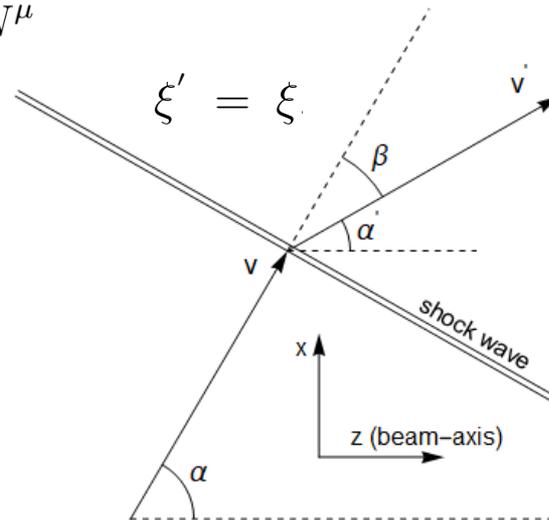
Будем рассматривать ударные волны сжатия  $P' > P, S' > S$

Сохранение проекции тензора энергии-импульса на нормаль к поверхности разрыва:

$$T_{\mu\nu}N^\mu = T'_{\mu\nu}N^\mu$$



Изотропный случай



Анизотропный случай

Проблемой в теории Израэля-Стюарта является неспособность адекватно описать ударные волны. Описание ударных волн имеет непрерывный характер до достижения определённой критической точки, после которой решения становятся разрывными, как в случае идеальной жидкости.

# Изотропный случай

Из уравнения  $T_{\mu\nu}N^\mu = T'_{\mu\nu}N^\mu$  для тензора  $T_{\mu\nu} = (\varepsilon + P)U^\mu U^\nu - P g^{\mu\nu}$  получим

$$v_x = \sqrt{\frac{3\sigma + 1}{3(\sigma + 3)}}, \quad v'_x = \sqrt{\frac{\sigma + 3}{3(3\sigma + 1)}},$$

где  $\sigma = P'/P$ .

Введём также относительную разность скоростей

$$\delta_{\text{iso}} = \frac{v'_x - v_x}{v_x} = -\frac{2}{3\sigma + 1}(\sigma - 1)$$

и их произведение

$$\rho_{\text{iso}} = v_x v'_x = \frac{1}{3} = c_s^2$$

# Граничные случаи

Поперечный случай (нормаль перпендикулярная оси анизотропии):

$$v_x(\sigma, \xi) = \sqrt{\frac{R_{\perp}(3\sigma R + R_{\perp})}{3R(R_{\perp}\sigma + R)}}, \quad v'_x(\sigma, \xi) = \sqrt{\frac{R_{\perp}(R_{\perp}\sigma + R)}{3R(3\sigma R + R_{\perp})}}$$

$$\delta_{\perp}(\xi) = \frac{v'_x - v_x}{v_x} = -(\sigma - 1) \frac{3R - R_{\perp}}{3\sigma R + R_{\perp}}$$

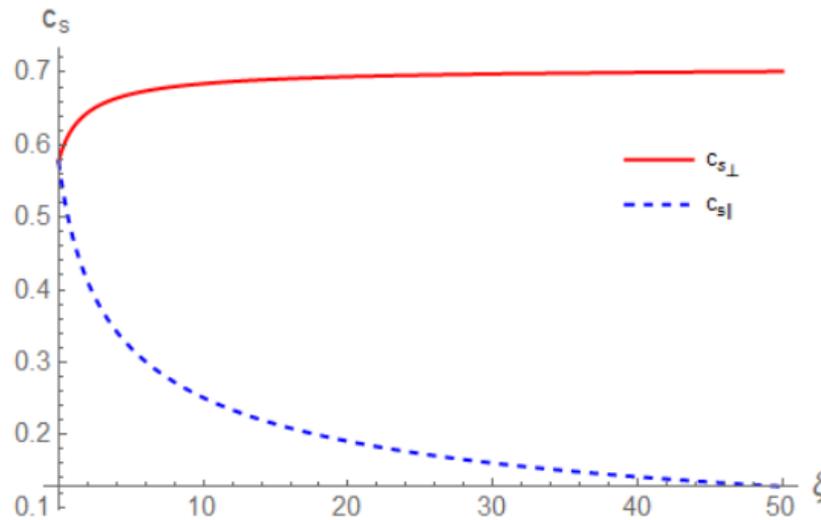
Продольный случай (нормаль параллельна оси анизотропии):

$$v_z(\sigma, \xi) = \sqrt{\frac{R_{\parallel}(\sigma R + R_{\parallel})}{3R(R_{\parallel}\sigma + R)}}, \quad v'_z(\sigma, \xi) = \sqrt{\frac{R_{\parallel}(R_{\parallel}\sigma + R)}{3R(3\sigma R + R_{\parallel})}}$$

$$\delta_{\parallel}(\xi) = \frac{v'_z - v_z}{v_z} = -(\sigma - 1) \frac{3R - R_{\parallel}}{3\sigma R + R_{\parallel}}$$

# Граничные случаи

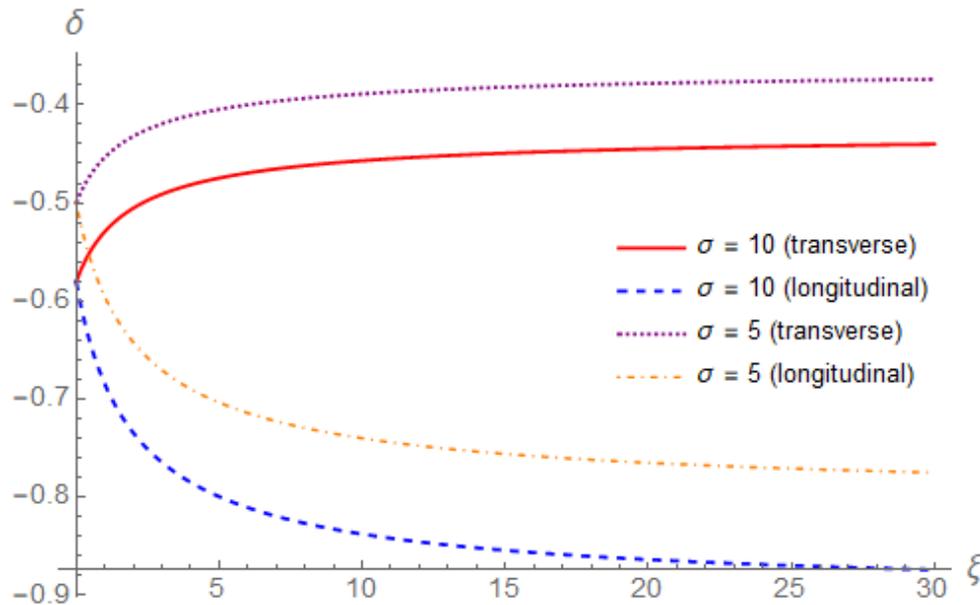
$$\rho_{\text{iso}} = v_x v'_x = \frac{1}{3} = c_s^2 \left\{ \begin{array}{l} \rho_{\perp}(\xi) = v_x v'_x = \frac{R_{\perp}}{3R} \\ \rho_{\parallel}(\xi) = v_z v'_z = \frac{R_{\parallel}}{3R} \end{array} \right. \quad c_{s\perp}^2 = \frac{R_{\perp}}{3R}, \quad c_{s\parallel}^2 = \frac{R_{\parallel}}{3R}$$



# Граничные случаи

$$\delta_{\perp}(\xi) = \frac{v'_x - v_x}{v_x} = -(\sigma - 1) \frac{3R - R_{\perp}}{3\sigma R + R_{\perp}}$$

$$\delta_{\parallel}(\xi) = \frac{v'_z - v_z}{v_z} = -(\sigma - 1) \frac{3R - R_{\parallel}}{3\sigma R + R_{\parallel}}$$



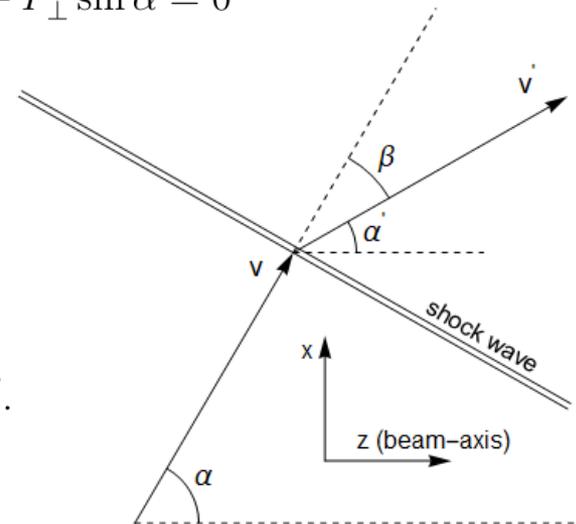
# Произвольное направление нормали

Система уравнений на  $\gamma, \vartheta, \alpha'$  с входными параметрами  $\xi, \sigma, \alpha$ :

1.  $-(3P_{\perp} + P_{\parallel}) \cosh \gamma \cosh \vartheta (\sinh \gamma \sin \alpha + \cosh \gamma \sinh \vartheta \cos \alpha) +$   
 $+ (3P'_{\perp} + P'_{\parallel}) \cosh \gamma' \cosh \vartheta' (\sinh \gamma' \sin \alpha + \cosh \gamma' \sinh \vartheta' \cos \alpha) +$   
 $+ (P_{\perp} - P_{\parallel}) \sinh \vartheta \cosh \vartheta \cos \alpha - (P'_{\perp} - P'_{\parallel}) \sinh \vartheta' \cosh \vartheta' \cos \alpha = 0$
2.  $-(3P_{\perp} + P_{\parallel}) \cosh \gamma \sinh \vartheta (\sinh \gamma \sin \alpha + \cosh \gamma \sinh \vartheta \cos \alpha) -$   
 $+ (3P'_{\perp} + P'_{\parallel}) \cosh \gamma' \sinh \vartheta' (\sinh \gamma' \sin \alpha + \cosh \gamma' \sinh \vartheta' \cos \alpha) + P'_{\perp} \cos \alpha +$   
 $+ (P_{\perp} - P_{\parallel}) \cosh \vartheta \cosh \vartheta \cos \alpha - (P'_{\perp} - P'_{\parallel}) \cosh \vartheta' \cosh \vartheta' \cos \alpha = 0$
3.  $-(3P_{\perp} + P_{\parallel}) \sinh \gamma (\sinh \gamma \sin \alpha + \cosh \gamma \sinh \eta \cos \alpha) - P_{\perp} \sin \alpha +$   
 $+ (3P'_{\perp} + P'_{\parallel}) \sinh \gamma' (\sinh \gamma' \sin \alpha + \cosh \gamma' \sinh \vartheta' \cos \alpha) + P'_{\perp} \sin \alpha = 0$
4.  $\vartheta = \operatorname{arcsinh} [\tanh \gamma \operatorname{ctg} \alpha], \quad \vartheta' = \operatorname{arcsinh} [\tanh \gamma' \operatorname{ctg} \alpha']$

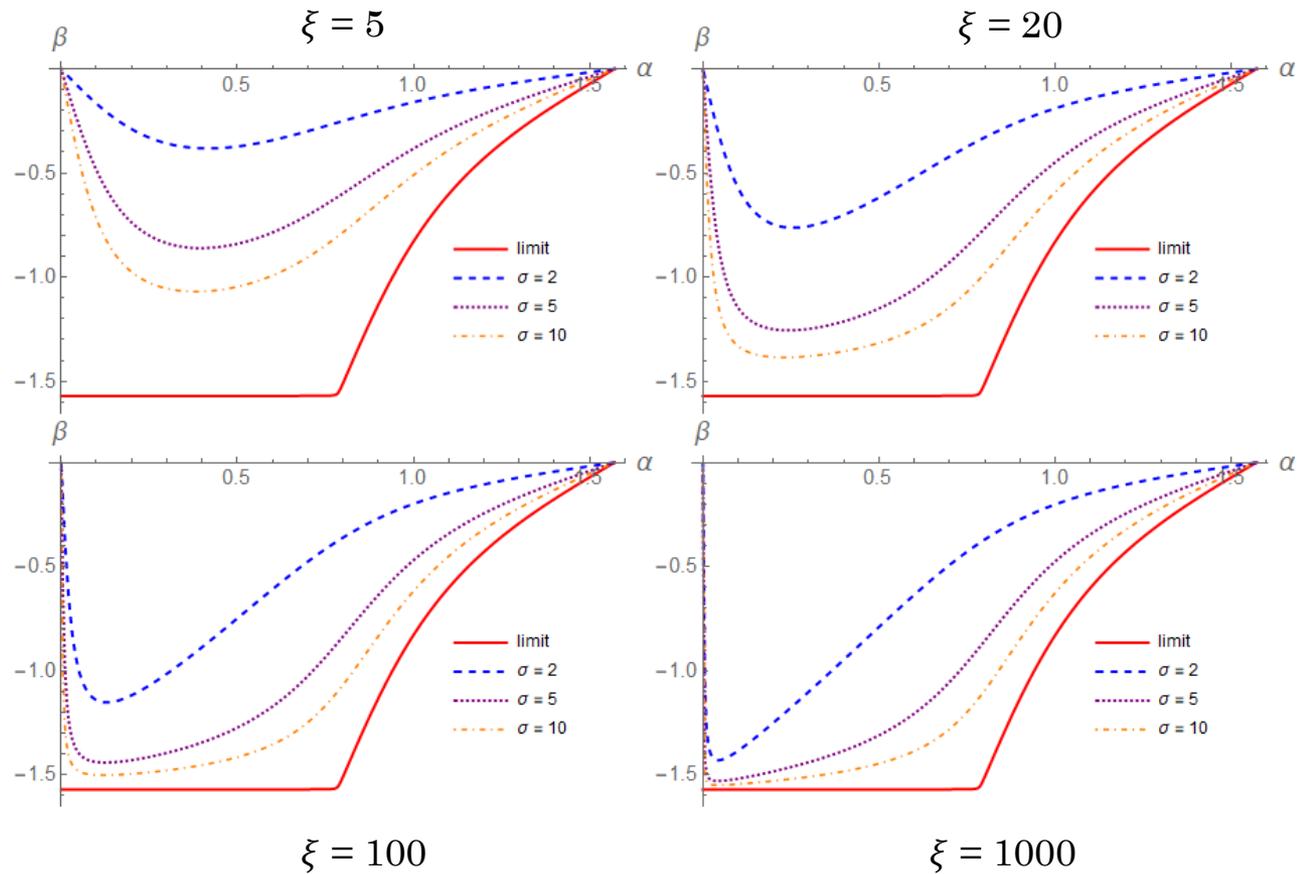
$$v_x = \frac{u_x}{u_0} = \frac{\tanh \gamma}{\cosh \vartheta} = v \sin \alpha, \quad v_z = \frac{u_z}{u_0} = \tanh \vartheta = v \cos \alpha,$$

$$v'_x = \frac{u'_x}{u'_0} = \frac{\tanh \gamma'}{\cosh \vartheta'} = v' \sin \alpha', \quad v'_z = \frac{u'_z}{u'_0} = \tanh \vartheta' = v' \cos \alpha'.$$

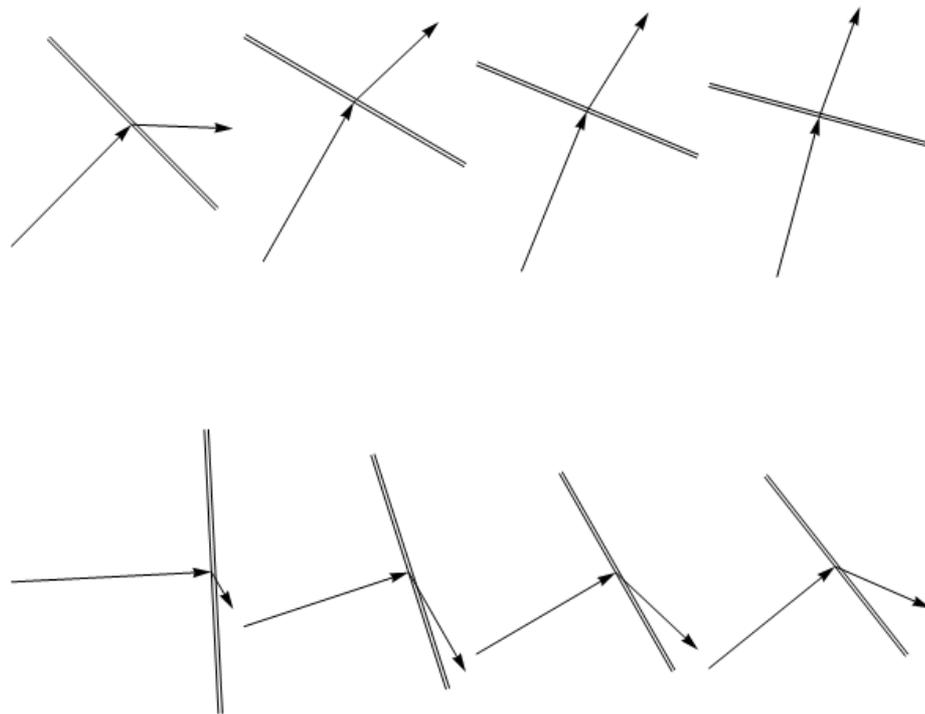
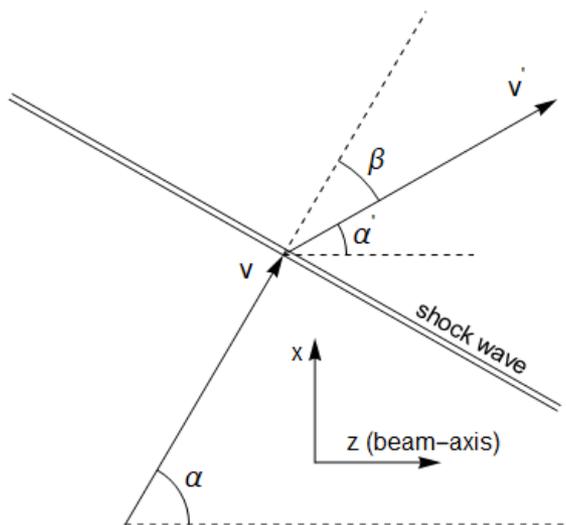


# Преломление потока

$$\beta(\xi) = \alpha'(\xi) - \alpha$$

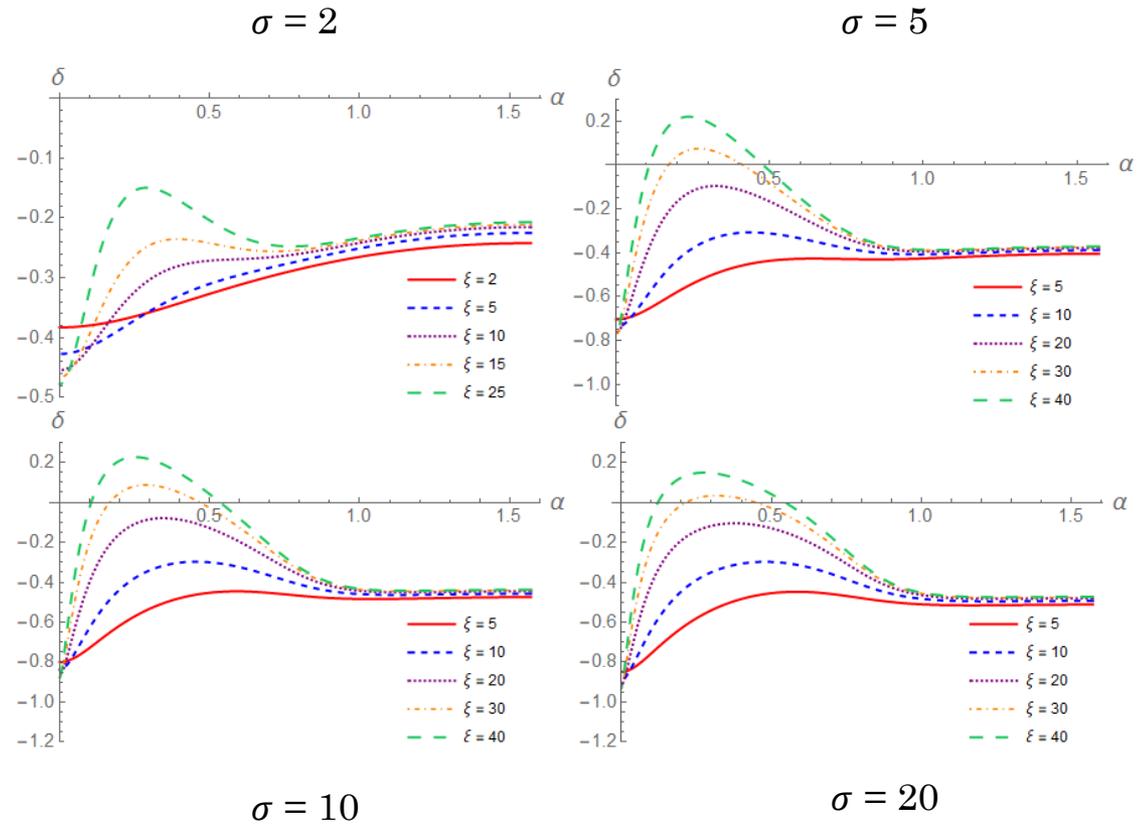


# Преломление потока



# Поведение скоростей

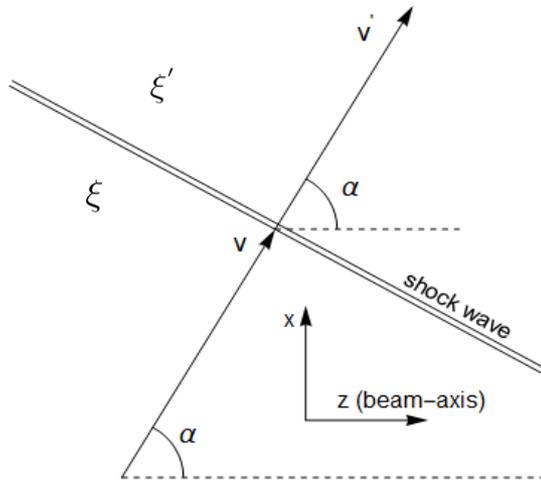
$$\delta_{\alpha\alpha'}(\xi) = \frac{|\mathbf{v}'(\xi|\alpha)| - |\mathbf{v}(\xi|\alpha')|}{|\mathbf{v}(\xi|\alpha)|}$$



# Ударные волны при $\xi \neq \xi'$

При рассмотрении системы с постоянной анизотропией мы можем потерять информацию, например, о процессе изотропизации системы.

Пусть ударная волна, нормаль которой направлена под углом  $\alpha$ , не отклоняет поток. Тогда получим 3 уравнения на  $v$ ,  $v'$ ,  $\xi'$ .



При  $\alpha = \pi/2$  одно из уравнений сводится к

$$R_{\parallel}(\xi') - R_{\perp}(\xi') = \frac{R_{\parallel}(\xi) - R_{\perp}(\xi)}{\sigma}$$

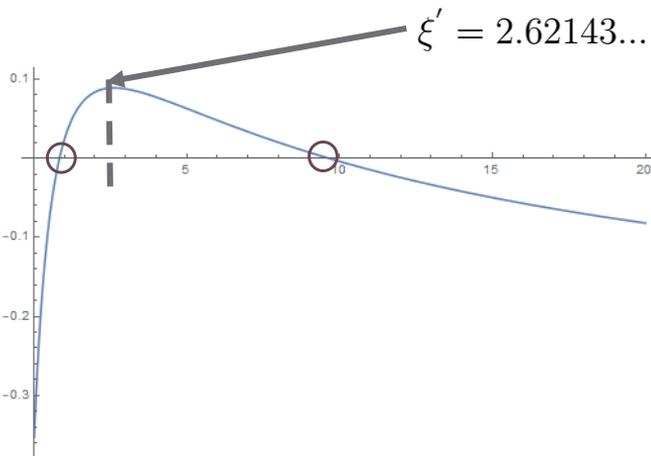
# Ударные волны при $\xi \neq \xi'$

При  $\alpha = \pi/2$  мы получим следующее уравнение:  $R_{\parallel}(\xi') - R_{\perp}(\xi') = \frac{R_{\parallel}(\xi) - R_{\perp}(\xi)}{\sigma}$

Решение уравнения для  $\xi'$  всегда будет давать два корня для  $\sigma \geq 1$ , за исключением случая, когда для  $\sigma = 1$  имеем  $\xi' = \xi = \xi_{crit}$ , где  $\xi_{crit} \approx 2.62143$  является решением уравнения

При  $\sigma = 1$  ударная волна не существует, что соответствует решению  $\xi' = \xi$ . Выбирая один из двух корней уравнения при  $\sigma > 1$  мы хотим получить решение  $\xi' \rightarrow \xi$  при  $\sigma \rightarrow 1$ . Таким образом, точка  $\xi_{crit}$  разделяет два пространства решений. Если  $\xi < \xi_{crit}$ , то для непрерывного предела  $\sigma \rightarrow 1$  необходимо выбрать левое решение  $\xi' < \xi_{crit}$ , так как только в этом случае выполняется условие  $\xi' \rightarrow \xi$  при  $\sigma \rightarrow 1$ . И наоборот, если  $\xi > \xi_{crit}$ , то мы должны выбрать правое решение.

**Таким образом, для  $\sigma > 1$ , при плавном изменении  $\xi$  мы теряем непрерывность решения по  $\xi'$  всякий раз, когда  $\xi$  переходит через точку  $\xi_{crit}$ .**



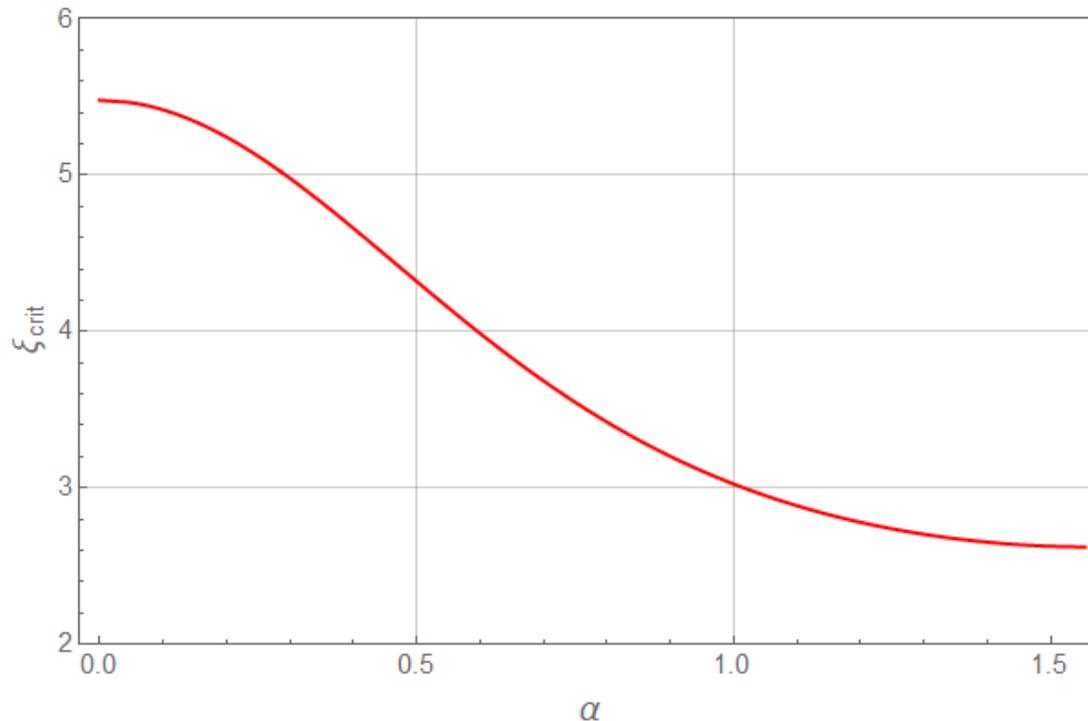
Более того, для предела  $\xi \rightarrow 0$  обнаружим, что левое решение  $\xi' \rightarrow 0$ . Однако для правого решения нет возможности перейти к изотропному пределу  $\xi \rightarrow 0$ , так как мы работаем в другом пространстве решений.

# Ударные волны при $\xi \neq \xi'$

Аналогичное следствие можно получить для уравнений при  $\alpha = 0$ .

Численными методами можно найти значения  $\xi_{crit}$  для любых  $\alpha$ .

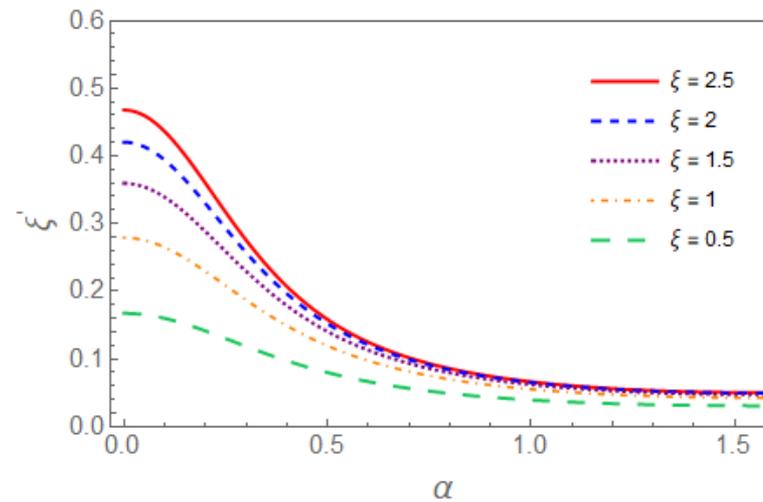
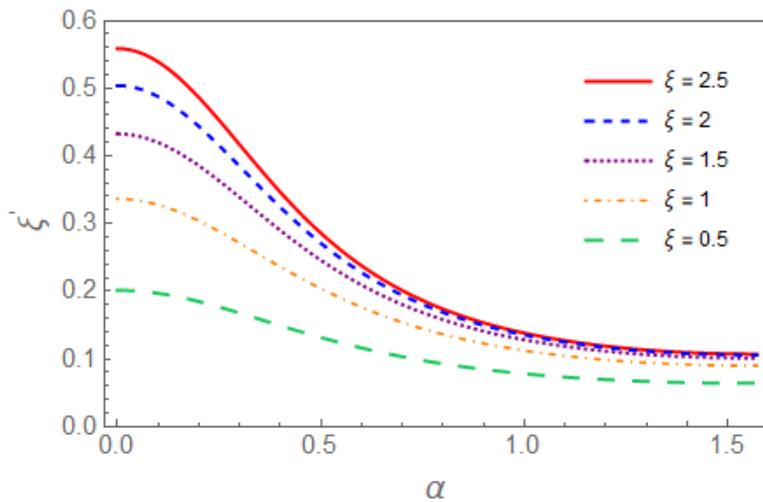
Поскольку мы выбираем «левое» решение, то значение  $\xi_{crit}$  является ограничением сверху.



# Ударные волны при $\xi \neq \xi'$

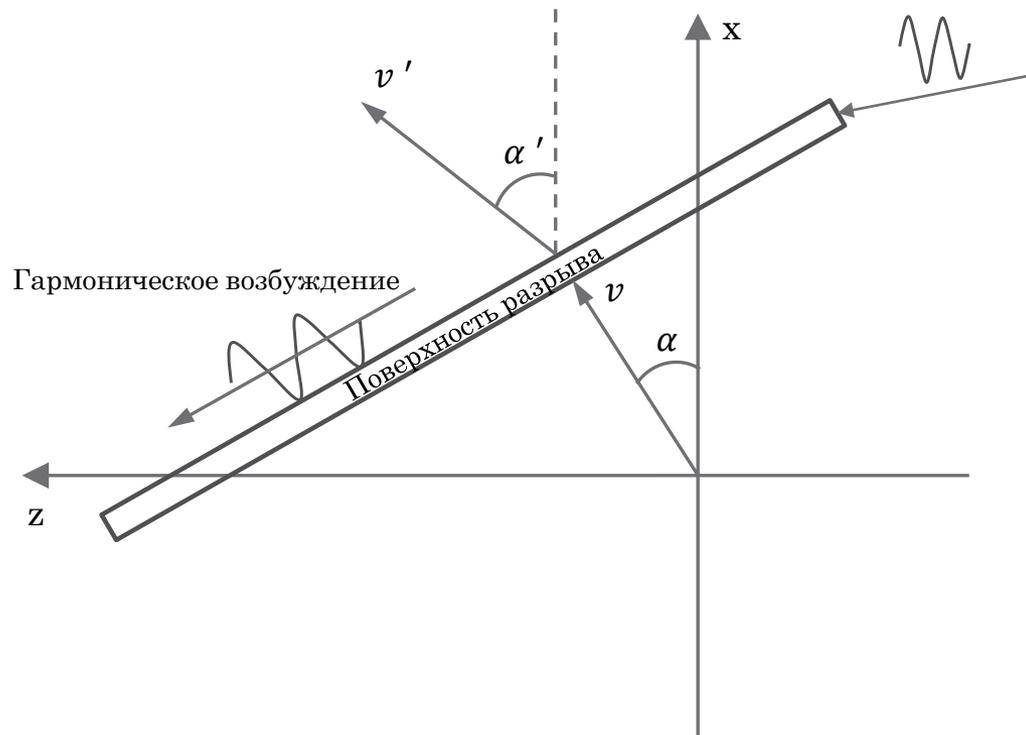
Разрывные уравнения ударных волн приводят к решению  $\xi' < \xi$ .

Таким образом, генерация ударных волн данного типа приводит к изотропизации среды.



A. Kovalenko. Critical Point from Shock Waves Solution in Relativistic Anisotropic Hydrodynamics. Preprint arxiv: 2309.11215

# Устойчивость ударных волн



# Устойчивость ударных волн

Введём возмущение поверхности разрыва:  $z - \eta e^{-i(\omega t + kx + ly)} = 0$

$$T^{\mu\nu} = (\varepsilon + P)U^\mu U^\nu - P g^{\mu\nu}$$

$$U^\mu = (u_0, u_x, u_y, u_z)$$



$$u_0(t, x, y, z) = u_0 + \delta u_0(t, x, y, z),$$

$$u_x(t, x, y, z) = \delta u_x(t, x, y, z),$$

$$u_y(t, x, y, z) = \delta u_y(t, x, y, z),$$

$$u_z(t, x, y, z) = u_z + \delta u_z(t, x, y, z),$$

$$P(t, x, y, z) = P + \delta P(t, x, y, z).$$

# Устойчивость ударных волн

Введём возмущение поверхности разрыва:  $z - \eta e^{-i(\omega t + kx + ly)} = 0$

$$T^{\mu\nu} = (\varepsilon + P)U^\mu U^\nu - P g^{\mu\nu}$$

$$U^\mu = (u_0, u_x, u_y, u_z)$$



$$u_0(t, x, y, z) = u_0 + \delta u_0(t, x, y, z),$$

$$u_x(t, x, y, z) = \delta u_x(t, x, y, z),$$

$$u_y(t, x, y, z) = \delta u_y(t, x, y, z),$$

$$u_z(t, x, y, z) = u_z + \delta u_z(t, x, y, z),$$

$$P(t, x, y, z) = P + \delta P(t, x, y, z).$$

Мы хотим исследовать режим, в котором  $k, l$  – действительные числа, а  $\text{Im } \omega > 0$ .

Причём будем требовать, чтобы при  $z \rightarrow \pm\infty$   
 $\mathbf{W} = (\delta P, \delta u_x, \delta u_y, \delta u_z) \rightarrow 0$ .

Если в какой-то области это условие выполнено, то в этой области ударная волна является неустойчивой.

A. M. Anile and G. Russo  
Linear stability for plane relativistic shock waves  
The Physics of Fluids 30, 1045 (1987)

# Устойчивость ударных волн

$$W(t, x, y, z) = Y(z)e^{-i(\omega t + kx + ly)}$$

Получим уравнения движения для возмущённой задачи

$$A^\mu \partial_\mu W = 0 \quad \longrightarrow \quad (\omega A_0 + kA_1 + lA_2 + i\partial_z A_3)Y(z) = 0$$

Будем считать, что для функции  $Y(z)$  возможно преобразование Лапласа, тогда

$$\hat{Y}(q) = \int_0^\infty e^{-qz} Y(z) dz \quad \text{для } \Lambda_+ : z > 0 \quad (\text{после ударной волны})$$

$$\hat{Y}(q) = \int_0^\infty e^{-qz} Y(-z) dz \quad \text{для } \Lambda_- : z < 0 \quad (\text{до ударной волны})$$

# Устойчивость ударных волн

$$W(t, x, y, z) = \mathbf{Y}(z)e^{-i(\omega t + kx + ly)}$$

Получим уравнения движения для возмущённой задачи

$$A^\mu \partial_\mu W = 0 \quad \longrightarrow \quad (\omega A_0 + kA_1 + lA_2 + i\partial_z A_3)\mathbf{Y}(z) = 0$$

Будем считать, что для функции  $\mathbf{Y}(z)$  возможно преобразование Лапласа, тогда

$$\hat{\mathbf{Y}}(q) = \int_0^\infty e^{-qz} \mathbf{Y}(z) dz \quad \text{для } \Lambda_+ : z > 0 \quad (\text{после ударной волны})$$

$$\hat{\mathbf{Y}}(q) = \int_0^\infty e^{-qz} \mathbf{Y}(-z) dz \quad \text{для } \Lambda_- : z < 0 \quad (\text{до ударной волны})$$

Тогда получим уравнение вида

$$A_3^{-1} A \hat{\mathbf{Y}}(m) = \pm i \mathbf{Y}(0), \quad \text{для } \Lambda_\pm$$

$$q = \mp im$$

Получим характеристическое уравнение

$$(\omega A_0 + kA_1 + lA_2 + i\partial_z A_3)\mathbf{Y}(z) = 0 \quad \longrightarrow \quad \Delta = \det A = \det (\omega A_0 + kA_1 + lA_2 + mA_3)$$

$$\Delta = \det A = 0$$

# Устойчивость ударных волн

Решение характеристического уравнения даст двойной корень  $m_0 = m_1$  и два корня кубического уравнения:

$$m_0 = m_1 = -\frac{\omega}{v},$$

$$m_2 = \frac{-v\omega(1 - c_s^2) + c_s\sqrt{1 - v^2}\sqrt{(k^2 + l^2)(v^2 - c_s^2) + \omega^2(1 - v^2)}}{v^2 - c_s^2},$$

$$m_3 = \frac{-v\omega(1 - c_s^2) - c_s\sqrt{1 - v^2}\sqrt{(k^2 + l^2)(v^2 - c_s^2) + \omega^2(1 - v^2)}}{v^2 - c_s^2}.$$

$\operatorname{Re} \omega \geq 0, \operatorname{Im} \omega > 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re} m_{0,1} \leq 0, \operatorname{Im} m_{0,1} < 0$  для  $\Lambda_{\pm}$ ,

$\operatorname{Re} \omega \geq 0, \operatorname{Im} \omega > 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re} m_2 \leq 0, \operatorname{Im} m_2 < 0$  для  $\Lambda_{-}$ ,

$\operatorname{Re} \omega \geq 0, \operatorname{Im} \omega > 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re} m_2 \leq 0, \operatorname{Im} m_2 < 0$  для  $\Lambda_{+}$ ,

$\operatorname{Re} \omega \geq 0, \operatorname{Im} \omega > 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re} m_3 \leq 0, \operatorname{Im} m_3 < 0$  для  $\Lambda_{-}$ ,

$\operatorname{Re} \omega \geq 0, \operatorname{Im} \omega > 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re} m_3 \geq 0, \operatorname{Im} m_3 > 0$  для  $\Lambda_{+}$ .

# Устойчивость ударных волн

Уравнение после преобразование Лапласа имеет вид:

$$A_3^{-1} A \widehat{Y}(m) = \pm i Y(0), \quad \text{для } \Lambda_{\pm}$$

$$\det(A_3^{-1} A) = (m - m_0)^2 (m - m_2) (m - m_3)$$

Выражения для  $Y(0)$  можно найти из

$$N_{\mu} T^{\mu\nu} = N_{\mu} T'^{\mu\nu}$$

$$\operatorname{Re} \omega \geq 0, \operatorname{Im} \omega > 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re} m_{0,1} \leq 0, \operatorname{Im} m_{0,1} < 0 \quad \text{для } \Lambda_{\pm},$$

$$\operatorname{Re} \omega \geq 0, \operatorname{Im} \omega > 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re} m_2 \leq 0, \operatorname{Im} m_2 < 0 \quad \text{для } \Lambda_{-},$$

$$\operatorname{Re} \omega \geq 0, \operatorname{Im} \omega > 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re} m_2 \leq 0, \operatorname{Im} m_2 < 0 \quad \text{для } \Lambda_{+},$$

$$\operatorname{Re} \omega \geq 0, \operatorname{Im} \omega > 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re} m_3 \leq 0, \operatorname{Im} m_3 < 0 \quad \text{для } \Lambda_{-},$$

$$\operatorname{Re} \omega \geq 0, \operatorname{Im} \omega > 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re} m_3 \geq 0, \operatorname{Im} m_3 > 0 \quad \text{для } \Lambda_{+}.$$

Тогда получим

$$Y^0(0) = \delta P' = -2i\eta\omega(\varepsilon' + P')c_s^2 \frac{(u_0 u'_z - u'_0 u_z)(u_0 u'_0 - u_z u'_z)}{(c_s^2 - (1 - c_s^2)u_z^2)u_z u_0} u'_z u'_0,$$

$$Y^1(0) = \delta u'_x = i\eta k \frac{u_0 u'_z - u'_0 u_z}{u_0},$$

$$Y^2(0) = \delta u'_y = i\eta l \frac{u_0 u'_z - u'_0 u_z}{u_0},$$

$$Y^3(0) = \delta u'_z = i\eta\omega \frac{(u_0 u'_z - u'_0 u_z)(u_0 u'_0 - u_z u'_z)}{(c_s^2 - (1 - c_s^2)u_z^2)u_z u_0} (u_z'^2 + c_s^2(1 + u_z'^2))u'_0.$$

# Устойчивость ударных волн

Уравнение после преобразование Лапласа имеет вид:

$$A_3^{-1} A \hat{Y}(m) = \pm i Y(0), \quad \text{для } \Lambda_{\pm}$$

$$\det(A_3^{-1} A) = (m - m_0)^2 (m - m_2) (m - m_3)$$

По формуле Крамера получим

$$\hat{Y}(m) = \frac{C_1}{m - m_0} + \frac{C_2}{m - m_2} + \frac{C_3}{m - m_3}$$

$$\rightarrow \frac{1}{2i\pi} \int e^{-qz} \frac{1}{\pm iq - m_i} dq \sim e^{\mp im_i z}$$

$$\operatorname{Re} \omega \geq 0, \operatorname{Im} \omega > 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re} m_{0,1} \leq 0, \operatorname{Im} m_{0,1} < 0 \quad \text{для } \Lambda_{\pm},$$

$$\operatorname{Re} \omega \geq 0, \operatorname{Im} \omega > 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re} m_2 \leq 0, \operatorname{Im} m_2 < 0 \quad \text{для } \Lambda_{-},$$

$$\operatorname{Re} \omega \geq 0, \operatorname{Im} \omega > 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re} m_2 \leq 0, \operatorname{Im} m_2 < 0 \quad \text{для } \Lambda_{+},$$

$$\operatorname{Re} \omega \geq 0, \operatorname{Im} \omega > 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re} m_3 \leq 0, \operatorname{Im} m_3 < 0 \quad \text{для } \Lambda_{-},$$

$$\operatorname{Re} \omega \geq 0, \operatorname{Im} \omega > 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re} m_3 \geq 0, \operatorname{Im} m_3 > 0 \quad \text{для } \Lambda_{+}.$$

# Устойчивость ударных волн

Уравнение после преобразование Лапласа имеет вид:

$$A_3^{-1} A \hat{Y}(m) = \pm i Y(0), \quad \text{для } \Lambda_{\pm}$$

$$\det(A_3^{-1} A) = (m - m_0)^2 (m - m_2) (m - m_3)$$

По формуле Крамера получим

$$\hat{Y}(m) = \frac{C_1}{m - m_0} + \frac{C_2}{m - m_2} + \frac{C_3}{m - m_3}$$

$$\rightarrow \frac{1}{2i\pi} \int e^{-qz} \frac{1}{\pm iq - m_i} dq \sim e^{\mp im_i z}$$

$$\operatorname{Re} \omega \geq 0, \operatorname{Im} \omega > 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re} m_{0,1} \leq 0, \operatorname{Im} m_{0,1} < 0 \quad \text{для } \Lambda_{\pm},$$

$$\operatorname{Re} \omega \geq 0, \operatorname{Im} \omega > 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re} m_2 \leq 0, \operatorname{Im} m_2 < 0 \quad \text{для } \Lambda_{-},$$

$$\operatorname{Re} \omega \geq 0, \operatorname{Im} \omega > 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re} m_2 \leq 0, \operatorname{Im} m_2 < 0 \quad \text{для } \Lambda_{+},$$

$$\operatorname{Re} \omega \geq 0, \operatorname{Im} \omega > 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re} m_3 \leq 0, \operatorname{Im} m_3 < 0 \quad \text{для } \Lambda_{-},$$

$$\operatorname{Re} \omega \geq 0, \operatorname{Im} \omega > 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re} m_3 \geq 0, \operatorname{Im} m_3 > 0 \quad \text{для } \Lambda_{+}.$$

Для  $\Lambda_{-}$  ( $z < 0$ ) получим  $C_1, C_2, C_3 = 0$ .

Для  $\Lambda_{+}$  ( $z > 0$ ) получим  $C_3 = 0$

Из уравнения  $C_3 = 0$  получаем условия на волновые числа

Из характеристического уравнения получаем область значений волновых чисел

# Устойчивость ударных волн

Из уравнения  $C_3 = 0$  получаем условия на волновые числа

Из характеристического уравнения получаем область значений волновых чисел

Мы найдём, что уравнение  $C_3 = 0$  эквивалентно уравнению

$$\varphi^2 - 2v'\varphi - (1 - v'^2) = 0$$

Где  $\varphi = \Omega/m$ ,  $\Omega = \omega + vt$ .

Решениями этого уравнения являются два действительных корня

$$\varphi_{1,2} = v' \pm 1$$

# Устойчивость ударных волн

Из уравнения  $C_3 = 0$  получаем условия на волновые числа

Из характеристического уравнения получаем область значений волновых чисел

Мы найдём, что уравнение  $C_3 = 0$  эквивалентно уравнению

$$\varphi^2 - 2v'\varphi - (1 - v'^2) = 0$$

Где  $\varphi = \Omega/m$ ,  $\Omega = \omega + vt$ .

Решениями этого уравнения являются два действительных корня

$$\varphi_{1,2} = v' \pm 1$$

$\text{Re } \omega \geq 0, \text{Im } \omega > 0 \Leftrightarrow \text{Re } m_{0,1} \leq 0, \text{Im } m_{0,1} < 0$  для  $\Lambda_{\pm}$ ,

$\text{Re } \omega \geq 0, \text{Im } \omega > 0 \Leftrightarrow \text{Re } m_2 \leq 0, \text{Im } m_2 < 0$  для  $\Lambda_-$ ,

$\text{Re } \omega \geq 0, \text{Im } \omega > 0 \Leftrightarrow \text{Re } m_2 \leq 0, \text{Im } m_2 < 0$  для  $\Lambda_+$ ,

$\text{Re } \omega \geq 0, \text{Im } \omega > 0 \Leftrightarrow \text{Re } m_3 \leq 0, \text{Im } m_3 < 0$  для  $\Lambda_-$ ,

$\text{Re } \omega \geq 0, \text{Im } \omega > 0 \Leftrightarrow \text{Re } m_3 \geq 0, \text{Im } m_3 > 0$  для  $\Lambda_+$ .



Характеристическое уравнение



$$\text{Re } \varphi \geq v'$$

$$v' \leq \varphi \leq \frac{c_s(1 - v'^2)}{(1 - c_s v')}$$

# Устойчивость ударных волн

Для анизотропного случая будем иметь, как и ранее, два граничных случая:

- Нормаль параллельна оси анизотропии
- Нормаль перпендикулярна направлению анизотропии

В первом режиме имеем почти полную аналогию с изотропным случаем.

Характеристическое уравнение даёт корни:

$$m_{0,1} = -\frac{\omega}{v},$$

$$m_2 = \frac{1 - v^2}{4(v^2 - c_{s\parallel}^2)} \left( -4v\omega(1 - c_{s\parallel}^2) + 2\sqrt{2} \sqrt{2c_{s\parallel}^2\omega^2 + \frac{(1 - c_{s\parallel}^2)(k^2 + l^2)(v^2 - c_{s\parallel}^2)}{1 - v^2}} \right)$$

$$m_3 = \frac{1 - v^2}{4(v^2 - c_{s\parallel}^2)} \left( -4v\omega(1 - c_{s\parallel}^2) - 2\sqrt{2} \sqrt{2c_{s\parallel}^2\omega^2 + \frac{(1 - c_{s\parallel}^2)(k^2 + l^2)(v^2 - c_{s\parallel}^2)}{1 - v^2}} \right)$$

где

$$c_{s\parallel} = \frac{R_{\parallel}}{3R}$$

В конечном итоге получаем тот же результат, что и в изотропном случае.

# Устойчивость ударных волн

Для анизотропного случая будем иметь, как и ранее, два граничных случая:

- Нормаль параллельна оси анизотропии
- Нормаль перпендикулярна направлению анизотропии

Во втором режиме нетривиальная часть характеристического уравнения представляет собой кубическое уравнение. Корни данного уравнения исследуются графически.

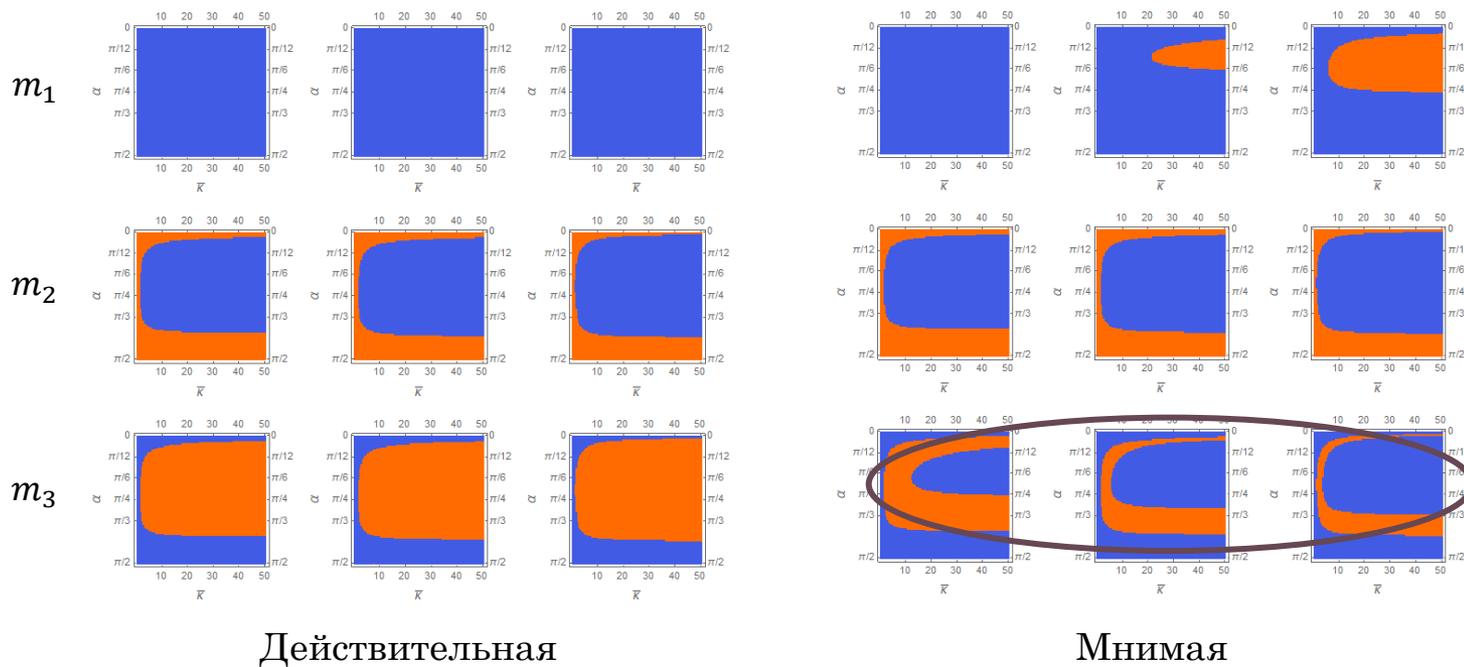
Несмотря на то, что нормаль к ударной волне перпендикулярна оси анизотропии, данное выделенное направление всё равно проявляет себя в виде кубического уравнения на волновые числа.

Дальнейшее исследование и анализ приводят к тому же уравнению на  $\varphi$ .

# Устойчивость ударных волн

Для анизотропного случая с произвольным полярным углом наклона нормали к поверхности разрыва вычисления производились численно.

Графики действительных и мнимых частей характеристического уравнения имеют вид:



A. Kovalenko,  
Linear Stability of Shock Waves in Ultrarelativistic Anisotropic Hydrodynamics  
Eur. Phys. J. C 83, 754 (2023).

# Выводы

- Получено волновое уравнение, из которого следуют две различные скорости распространения звука в среде ввиду разности продольного и поперечного давлений.
- Аналитически показано, что конус Маха в рамках релятивистской анизотропной гидродинамики является ассиметричным. Выведены выражения для двух углов Маха случае постоянного параметра анизотропии.
- Получены аналитические решения для ударных волн сжатия в поперечном и продольном случаях расположения нормали к поверхности разрыва относительно оси пучка. Показано, что имеет место ослабление ударной волны в поперечном случае и её усиление в продольном.
- При неизменном параметре анизотропии для произвольного полярного угла было показано, что в рамках релятивистской анизотропной гидродинамики происходит преломление прошедшего через поверхность разрыва потока в сторону оси анизотропии. Также было показано, что для больших значений анизотропии и большом отношении изотропных давлений имеет место ускорение потока после прохождения поверхности разрыва, что указывает на проявление некоторых свойств волн разрежения. Что, в свою очередь, может указывать на возможные ограничения параметров задачи.
- Было показано, что в случае изменяемой анизотропии и отсутствии явления преломления потока возникает разделение пространства решений. Адекватное описание становится возможным при наложении ограничения на параметр анизотропии. Также было показано, что генерация ударных волн может привести к изотропизации системы.

# Список публикаций

1. M. Kirakosyan, A. Kovalenko, A. Leonidov. Sound propagation and Mach cone in anisotropic hydrodynamics. *The European Physical Journal C*, 79:434. (2019)
2. A. Kovalenko, A. Leonidov. Shock waves in relativistic anisotropic hydrodynamics. *The European Physical Journal C*, 82, 378 (2022)
3. A. Kovalenko. Stability of Shock Waves in Anisotropic Hydrodynamics. *Physics of Particles and Nuclei*, 52, 569–570 (2021)
4. A. Kovalenko. Linear Stability of Shock Waves in Ultrarelativistic Anisotropic Hydrodynamics. *European Physical Journal C*, 83, 754 (2023)
5. A. Kovalenko. Critical Point from Shock Waves Solution in Relativistic Anisotropic Hydrodynamics. Preprint arxiv: 2309.11215