



Излучение закрученных фотонов электроном в магнитном поле

Илья Павлов
ilya.pavlov@metalab.ifmo.ru
Руководитель: Дмитрий Карловец

ОИЯИ, Дубна, 06.12.2023

План доклада

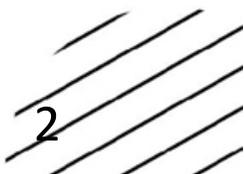
Введение

- Что такое закрученный свет / закрученные частицы
- При чем здесь синхротронное излучение
- При чем здесь квантовая запутанность

Основная часть

- Постановка задачи
- Теоретические результаты
- Применение

Заключение



Плоские волны

Уравнение Гельмгольца

$$(\nabla^2 + k^2)\psi = 0 \quad \psi = e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$$

Уравнение Шрёдингера

$$-\frac{1}{2m}\nabla^2\psi = E\psi \quad \psi = e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}}$$

$$\hat{\mathbf{p}}\psi = \mathbf{p}\psi$$

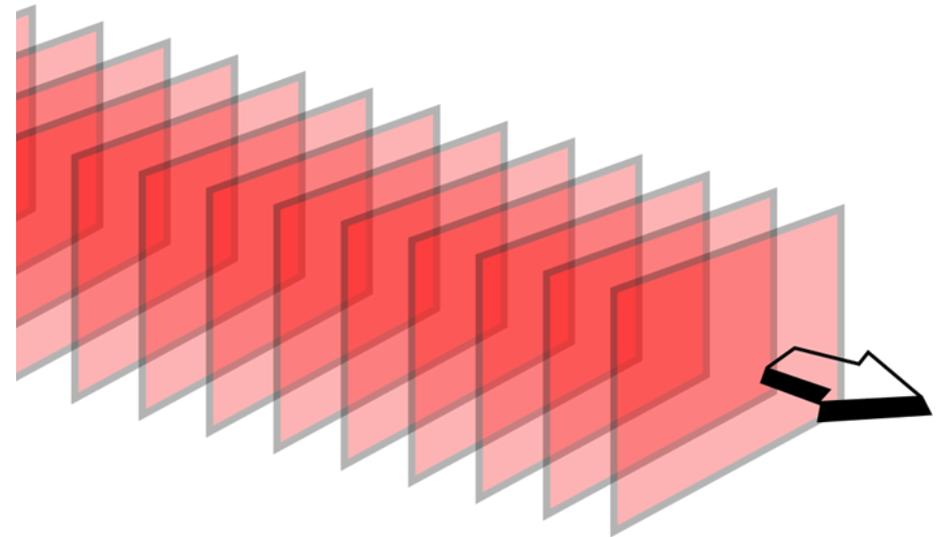


Рис. 1. Плоская волна



Цилиндрические волны

Уравнение Гельмгольца

$$(\nabla^2 + k^2)\psi = 0$$

$$\psi = J_l(k\rho)e^{i(l\varphi_r + k_z z)}$$

$$\hat{l}_z \psi = l\psi$$

- есть угловой момент
(точнее его проекция)

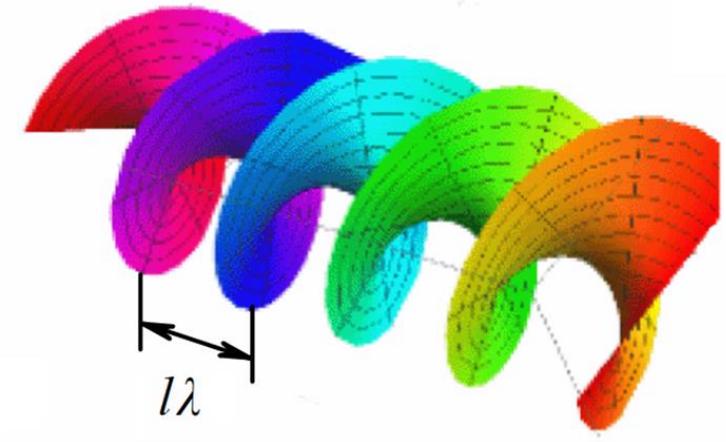
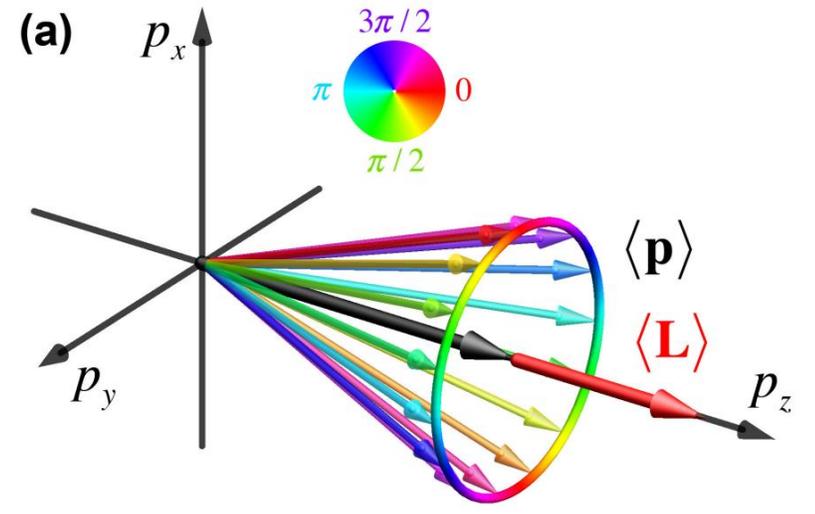


Рис. 2. Цилиндрическая волна



Сравнение волн

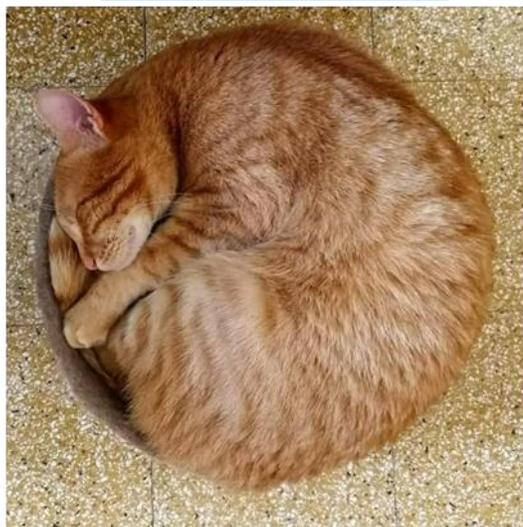
Плоские волны

$$\Psi(p_x, p_y, p_z)$$



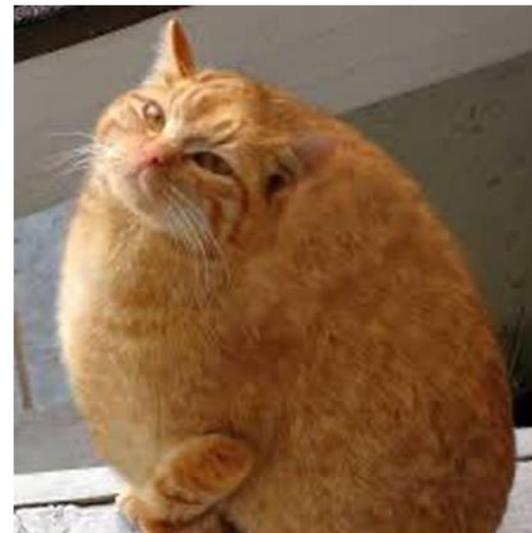
Закрученные волны

$$\Psi(p_z, p_{\perp}, l)$$



Сферические волны

$$\Psi(\omega, j, l)$$



Закрученные фотоны

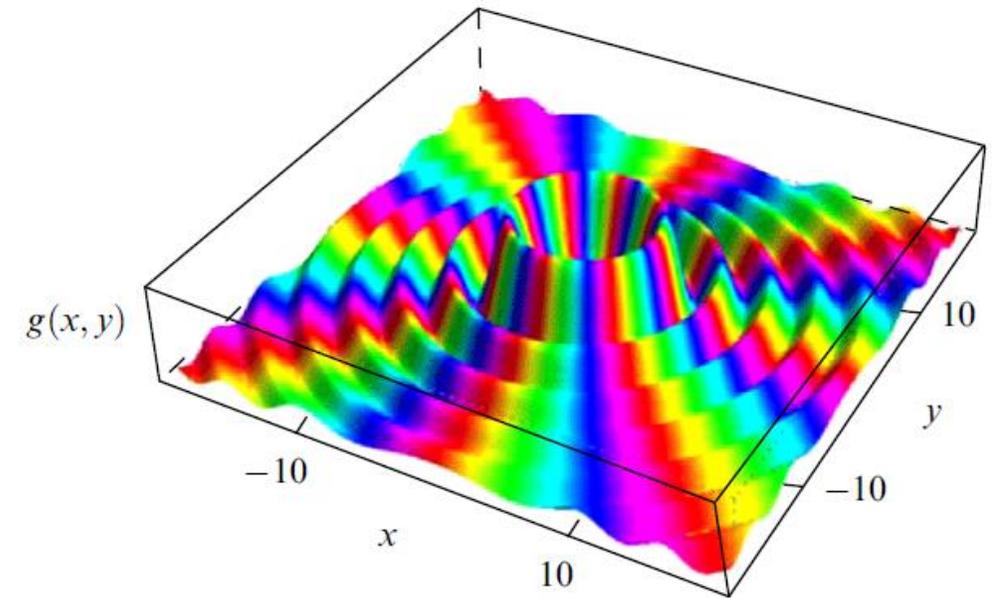
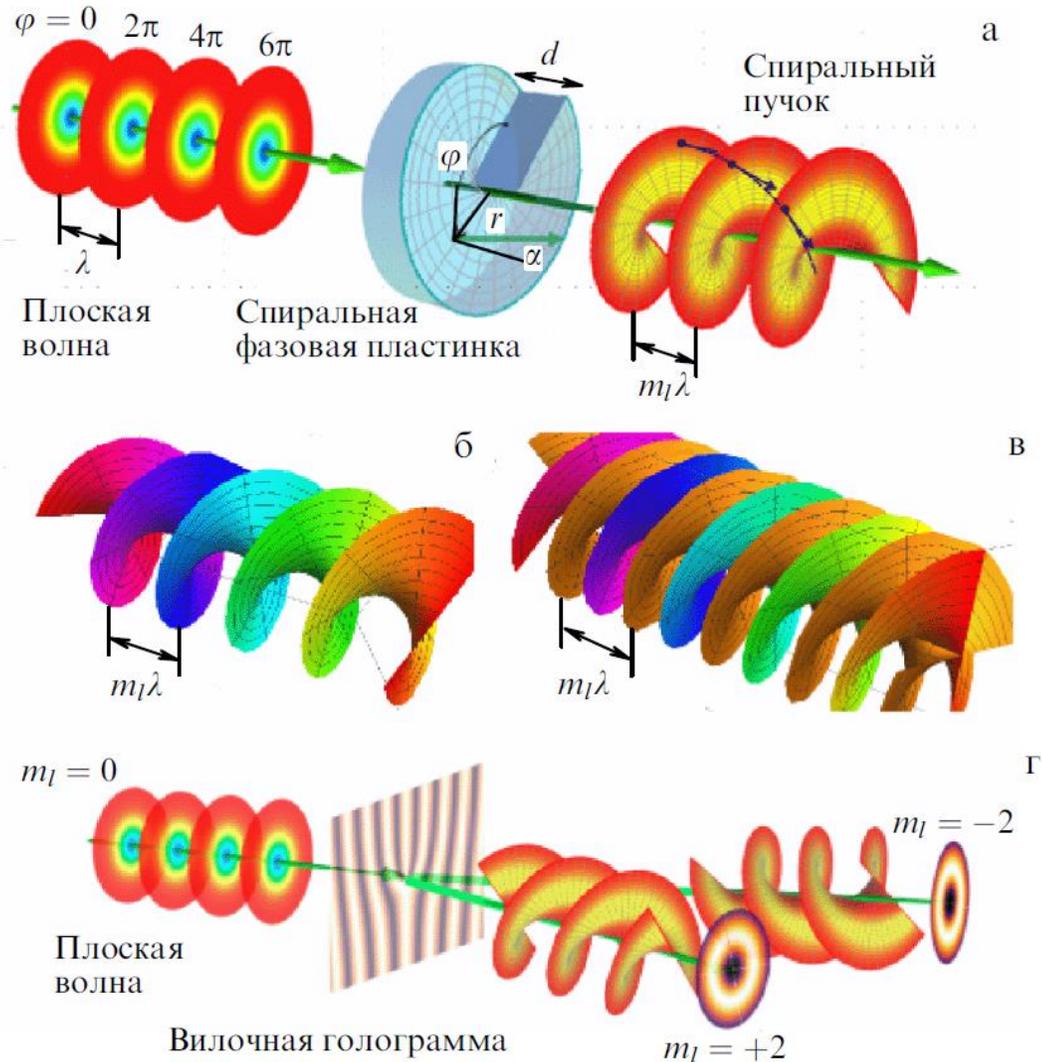
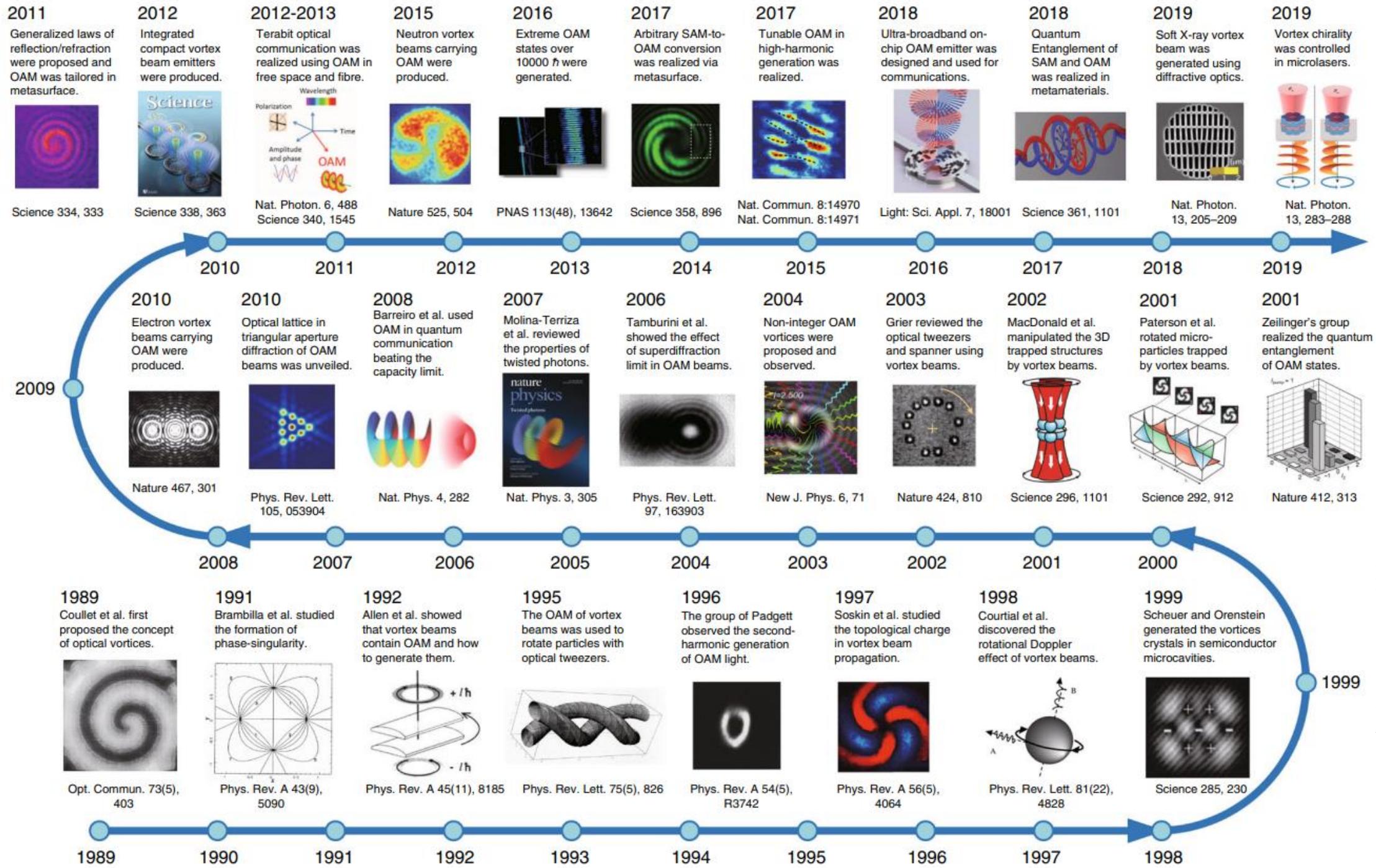
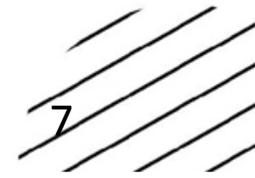


Рис. 2. (В цвете онлайн.) Векторный потенциал (30) закрученного фотона с параметрами $m = 5$, $\sin \theta_k = \kappa/k = 0,2$ и $\Lambda = 1$ [40]. Изображён квадрат модуля y -компоненты векторного потенциала, т.е. функция $g(x, y) = |A_{zmk_z \Lambda}^y(x, y, 0)|^2$ в зависимости от координат x и y в поперечной плоскости (в единицах $1/\kappa$). Фаза векторного потенциала от нуля до 2π указана изменением цвета в соответствии со шкалой радуги.

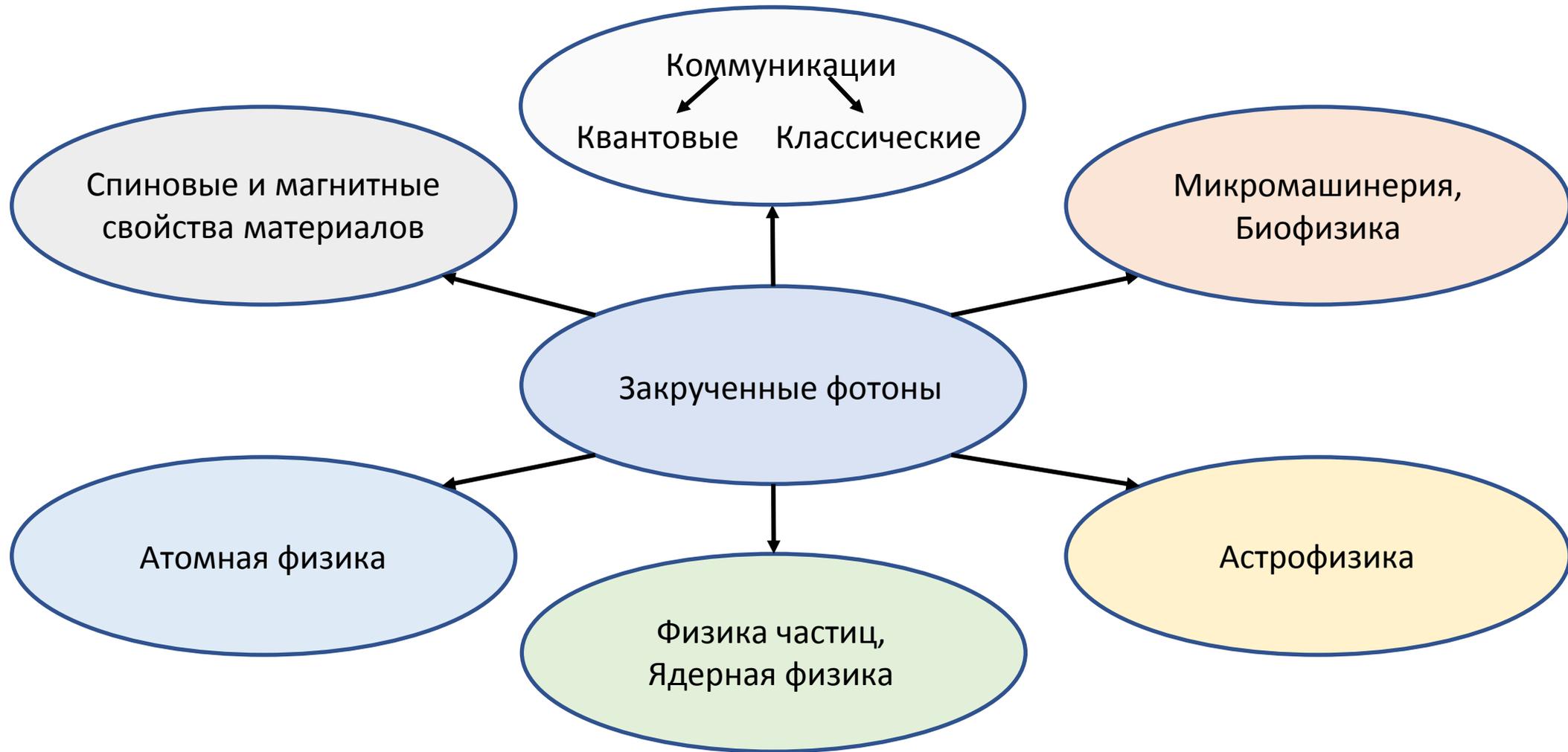




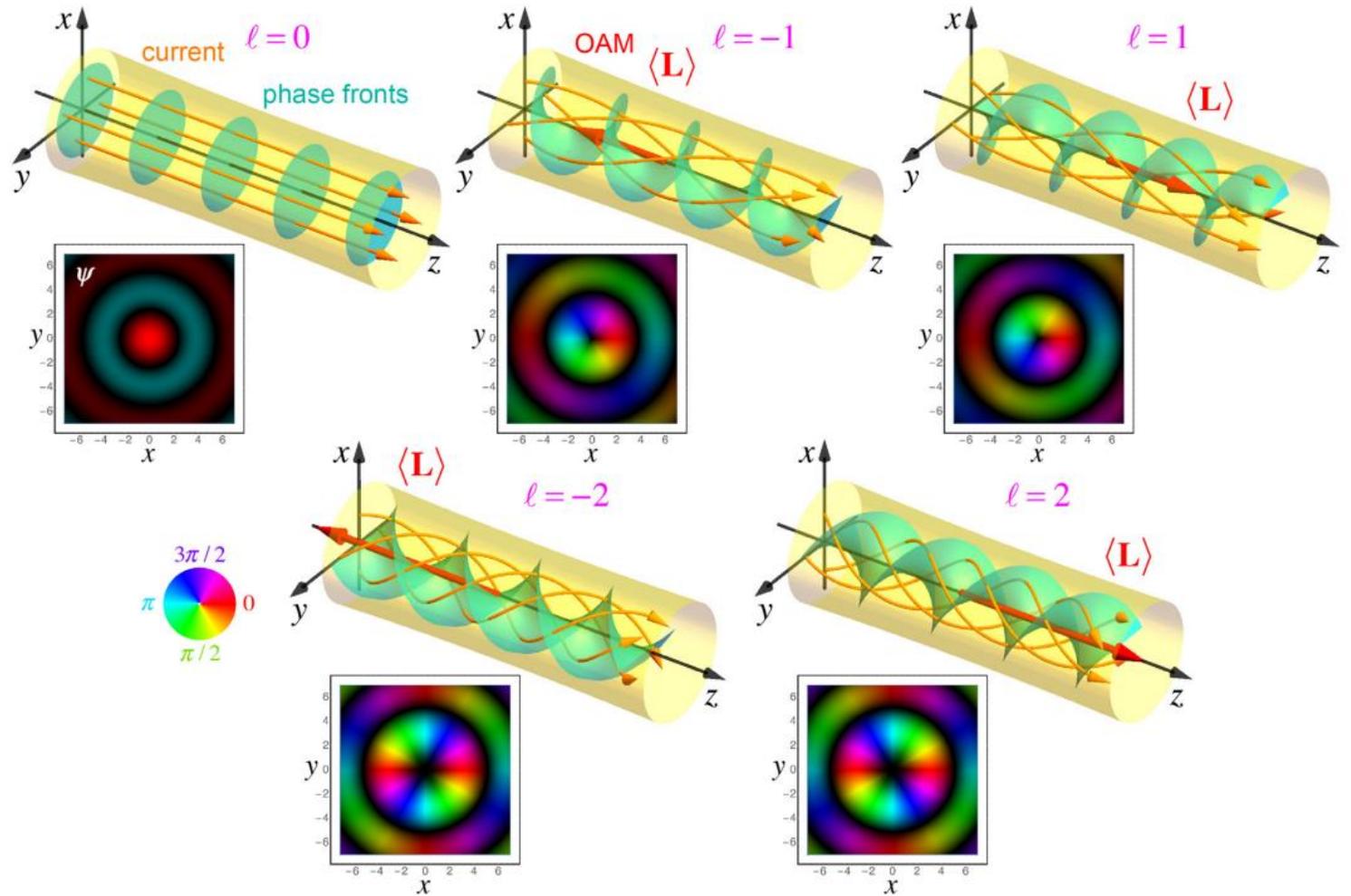
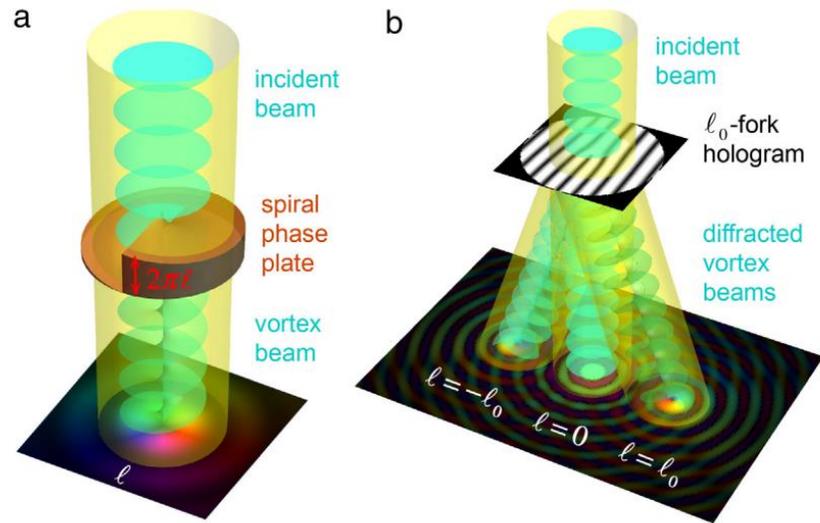
Shen, Y., Wang, X., Xie, Z. *et al.* Optical vortices 30 years on: OAM manipulation from topological charge to multiple singularities. *Light Sci Appl* 8, 90 (2019)



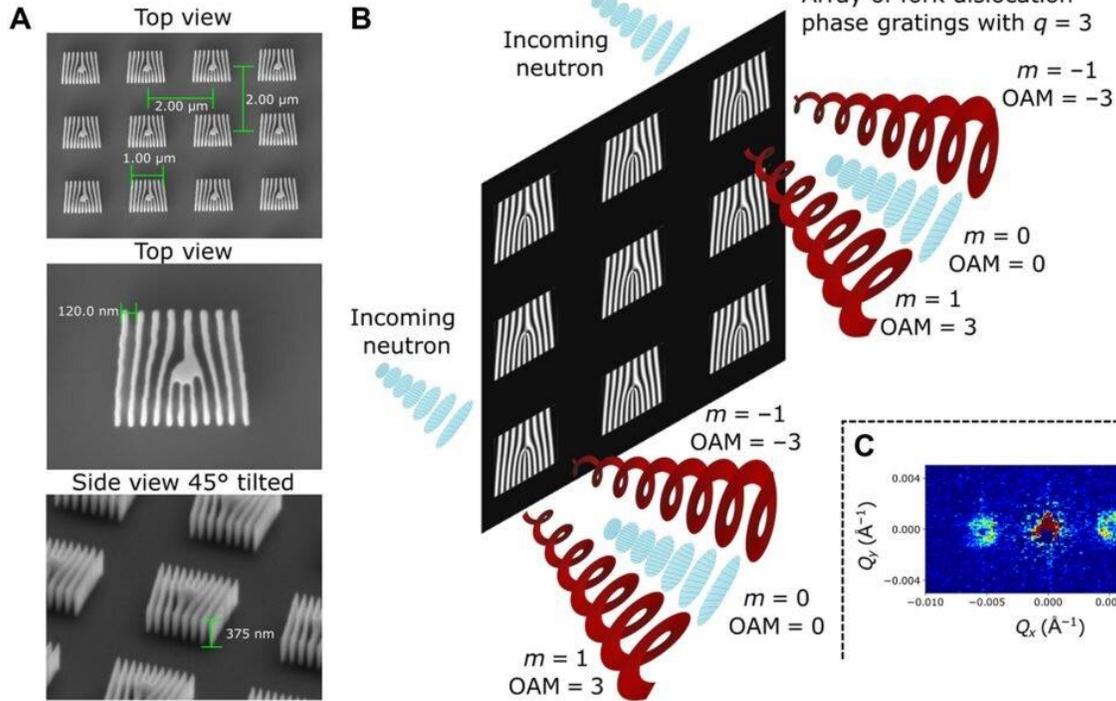
Закрученные фотоны



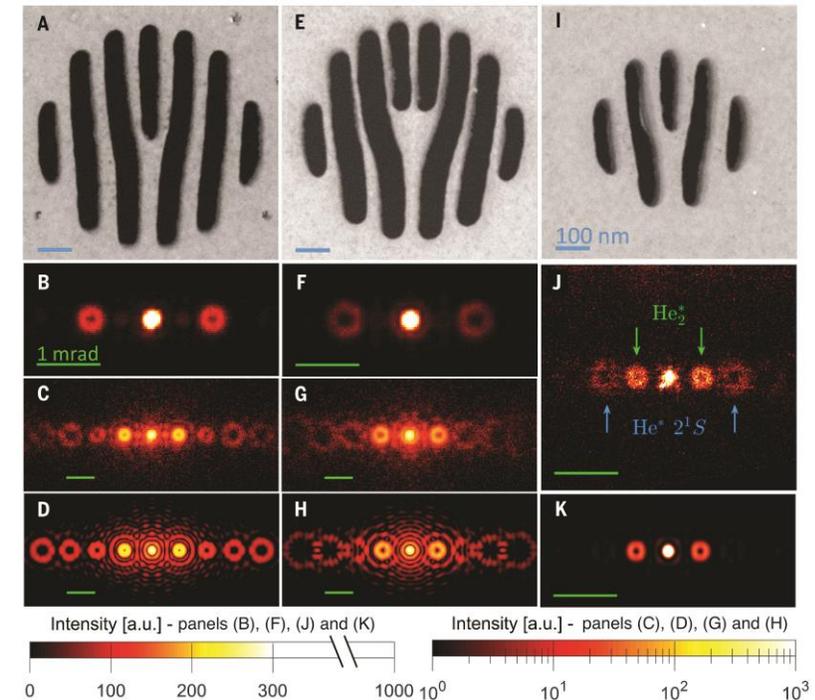
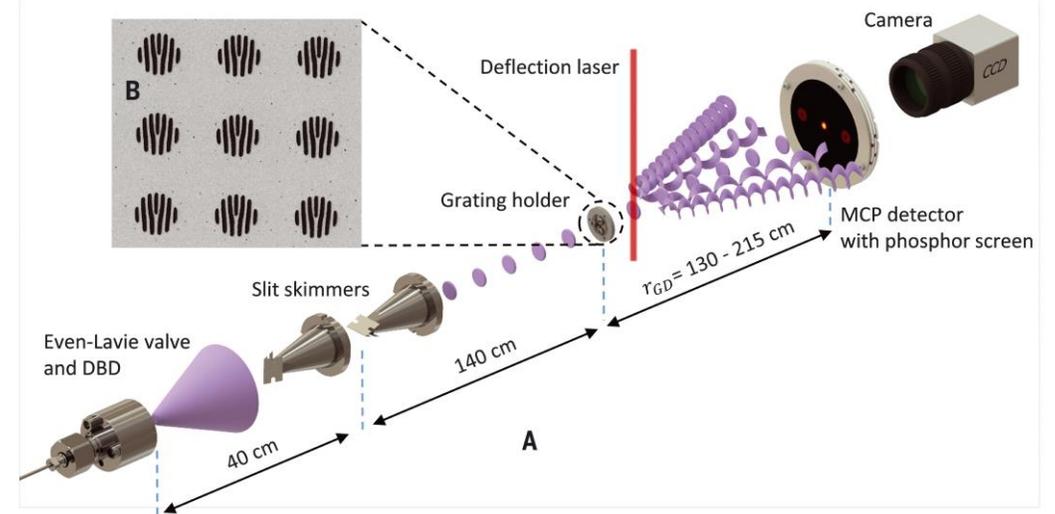
Закрученные электроны



Закрученные whatever...

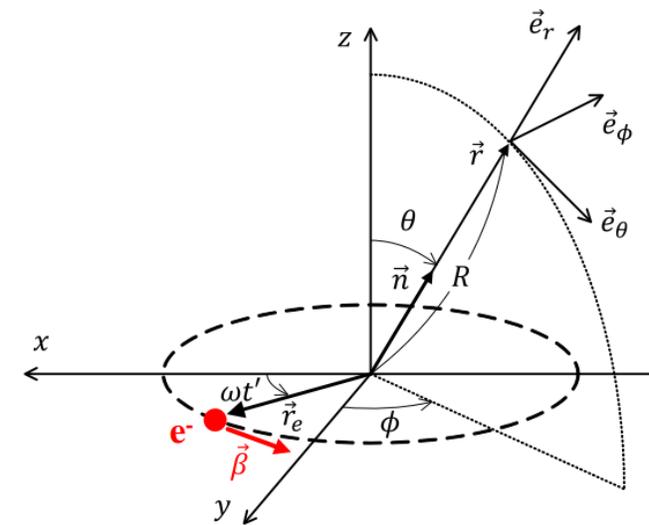


Dusan Sarenac *et al.* Experimental realization of **neutron** helical waves. *Sci. Adv.*8(2022)



Alon Luski *et al.* Vortex beams of **atoms** and **molecules**. *Science* (2021)

Классический электрон излучает угловой момент!



$$\vec{E}(R_0, \theta, \varphi, \omega t) = \operatorname{Re} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{e}{cR} l\omega \{ \varepsilon_+^l(\theta) e^{i(l-1)\varphi} \vec{e}_+ + \varepsilon_-^l(\theta) e^{i(l+1)\varphi} \vec{e}_- + i\varepsilon_z^l(\theta) \vec{e}_z e^{il\varphi} \} e^{-il(\omega t - \frac{R_0}{c})}$$

$$\varepsilon_{\pm}^l(\theta) \equiv \frac{\varepsilon_x^l(\theta) \pm \varepsilon_y^l(\theta)}{\sqrt{2}}$$

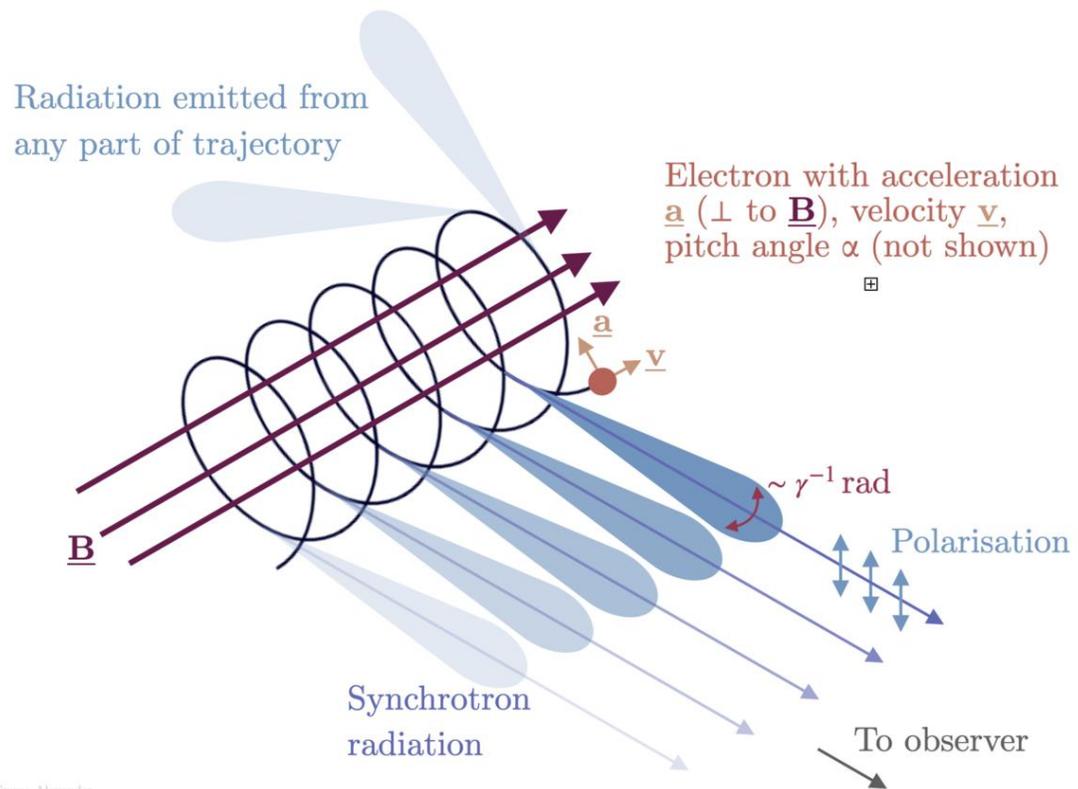
$$= \beta J_l'(l\beta \sin \theta) \pm \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} J_l(l\beta \sin \theta)$$

$$\varepsilon_z^l \equiv \cos \theta J_l(l\beta \sin \theta)$$

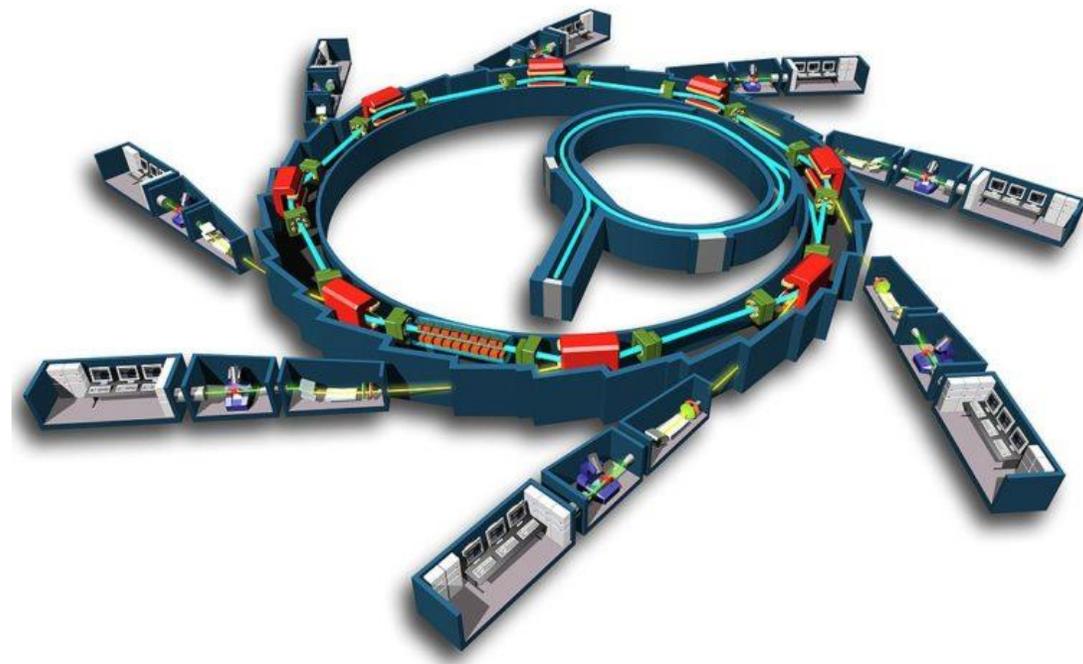
Katoh M. et al. Helical phase structure of radiation from an electron in circular motion //Scientific Reports. – 2017

$$\frac{dL_z}{d\Omega dt} = \frac{q^2 \omega \beta^2 \sin^2 \theta}{32\pi c} \left[\frac{13 - \beta^2}{(1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{5/2}} - 5 \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{7/2}} \right].$$

Синхротронное излучение



Emma Alexander



А что в квантовой теории?

Симметричная калибровка: $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{2} \vec{B} \times \vec{r}$

Состояния Ландау - тоже "закрученные"

$$\Psi_{nl}^{(L)}(\rho, \varphi, t) = N_{nl} \left(\frac{\rho^{|l|}}{\sigma_L^{|l|+1}} \right) L_n^{|l|} \left[\frac{\rho^2}{\sigma_L^2} \right] \exp \left[-\frac{\rho^2}{2\sigma_L^2} + \boxed{il\varphi} - iE_L t \right]$$

(для релятивистского электрона все немного сложнее, но похоже)

Передается ли этот угловой момент излучению?

Какие фотоны излучает электрон?

Постановка задачи об излучении

Традиционная:

- Исследуем излучение фотона в определенную моду (обычно плоскую волну), т.е. **проектируем** состояние фотона на некоторое состояние
- Считаем матричные элементы
- Изучаем угловое распределение интенсивности излучения и вычисляем полную интенсивность



Альтернативная:

- Найдём волновую функцию излученного фотона **самого по себе, независимо от детектора**
- Проверим, что угловой момент электрона передается фотону
- Вычислим вероятность и интенсивность излучения фотонов с конкретной проекцией углового момента

При чем здесь запутанность?

Излучение фотона электроном: $e \rightarrow e' + \gamma$

$$|f\rangle = \hat{S}^{(1)} |i_e\rangle$$

Запутанное состояние системы после излучения (электрон + фотон)

Начальное состояние системы (только электрон)

Нужно распутать частицы!

Предположим, что конечный **электрон измерен** в состоянии $|f_e\rangle$,
а **фотон не измерен**

Хотим найти состояние фотона “самого по себе” – *evolved state*

Evolved state

$$|f'\rangle = \underset{\substack{\nearrow \\ \text{проектор}}}{P(f_e)} \hat{S}^{(1)} |i_e\rangle = \sum_{f_\gamma} |f_e, f_\gamma\rangle \underbrace{\langle f_e, f_\gamma | \hat{S}^{(1)} |i_e\rangle}_{\substack{\parallel \\ S_{fi}^{(1)}}}$$

$$P(f_e) = |f_e\rangle \langle f_e| \otimes \hat{1}_\gamma$$

$$\hat{1}_\gamma = \sum_{\lambda=\pm 1} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega} |\mathbf{k}, \lambda\rangle \langle \mathbf{k}, \lambda| \quad \text{— сумма по полному набору состояний (плоские волны)}$$

Состояние можно факторизовать:

$$|f'\rangle = |f_e\rangle \otimes |\gamma\rangle_{ev}$$

Evolved state фотона:

$$|\gamma\rangle_{ev} = \sum_{\lambda=\pm 1} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega} S_{fi}^{(1)} |\mathbf{k}, \lambda\rangle$$

Волновая функция фотона

Полевой оператор:

$$\hat{\mathbf{A}}(t, \mathbf{r}) = \sum_{\lambda} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \left[\mathbf{A}_{\lambda}(t, \mathbf{r}; \mathbf{k}) \hat{a}_{\lambda}(\mathbf{k}) + \mathbf{A}_{\lambda}^*(t, \mathbf{r}; \mathbf{k}) \hat{a}_{\lambda}^{\dagger}(\mathbf{k}) \right]$$

$$\mathbf{A}_{\lambda}(t, \mathbf{r}; \mathbf{k}) = \frac{\mathbf{e}_{\lambda}(\mathbf{k})}{\sqrt{2\omega}} e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$$

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{r}) = \langle 0 | \hat{\mathbf{A}}(t, \mathbf{r}) | \gamma \rangle_{ev} = \sum_{\lambda} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \mathbf{A}_{\lambda}(t, \mathbf{r}; \mathbf{k}) S_{fi}^{(1)}$$

Тогда вектор

$$\mathbf{A}(\mathbf{k}) = \sum_{\lambda=\pm 1} S_{fi}^{(1)} \mathbf{e}_{\lambda}(\mathbf{k})$$

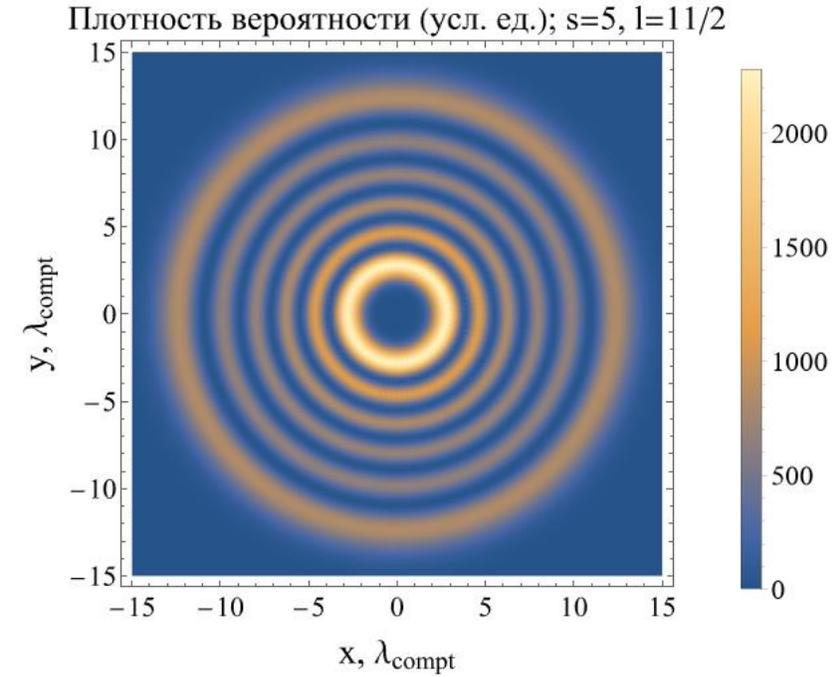
- волновая функция фотона в импульсном представлении

Состояния Ландау (релятивистские)

Возможные решения уравнения Дирака:

$$\Psi_{s,l}^{\uparrow}(x) = N^{\uparrow} \begin{pmatrix} (m + \varepsilon)\Phi_{s,l-1/2}(\rho)e^{-i\varphi/2} \\ 0 \\ p_z\Phi_{s,l-1/2}(\rho)e^{-i\varphi/2} \\ -ieH\Phi_{s,l+1/2}(\rho)e^{i\varphi/2} \end{pmatrix} e^{-it\varepsilon_{s,l} + il\varphi + ip_z z}$$

$$\Psi_{s,l}^{\downarrow}(x) = N^{\downarrow} \begin{pmatrix} 0 \\ (m + \varepsilon)\Phi_{s,l+1/2}(\rho)e^{i\varphi/2} \\ -2i(\ell + s + 1/2)\Phi_{s,l-1/2}(\rho)e^{-i\varphi/2} \\ -p_z\Phi_{s,l+1/2}(\rho)e^{i\varphi/2} \end{pmatrix} e^{-it\varepsilon_{s,l} + il\varphi + ip_z z}$$



проекция полного углового момента (полуцелая)

$$\varepsilon_{s,l} = \sqrt{m^2 + p_z^2 + 2|e|H(s + l + 1/2)}$$

$$\hat{j}_z \Psi_{s,l}^{\uparrow} = \left(\hat{l}_z + \frac{1}{2} \hat{\Sigma}_z \right) \Psi_{s,l}^{\uparrow} = l \Psi_{s,l}^{\uparrow}$$

S-матрица

Матричный элемент перехода:

$$S_{fi}^{(1)} = -ie \int d^4x j_{fi}^\mu(x) A_\mu^*(x)$$

$$j_{fi}^\mu(x) = \bar{\Psi}_f(x) \gamma^\mu \Psi_i(x)$$

$$A^\mu = \frac{1}{\sqrt{2\omega V}} e_\lambda^\mu e^{-ik^\nu x_\nu};$$

Волновой вектор плосковолнового фотона:

$$k^\nu = \omega \{1, \sin \theta \cos \varphi_k, \sin \theta \sin \varphi_k; \cos \theta\}$$

Вектор поляризации:

$$e_\lambda(\mathbf{k}) = \sum_{\sigma=0,\pm 1} e^{-i\sigma\varphi_k} d_{\sigma\lambda}^{(1)}(\theta) \chi_\sigma;$$

$$\chi_0 = (0, 0, 1), \quad \chi_{\pm 1} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (1, \pm i, 0)$$

Состояние излученного фотона

$$|\gamma\rangle_{ev} = \sum_{\lambda=\pm 1} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega} S_{fi}^{(1)} |\mathbf{k}, \lambda\rangle$$

$$S_{fi}^{(1)} = (2\pi)^3 \delta(\omega + \varepsilon' - \varepsilon) \delta(k_z + p'_z - p_z) e^{i(\ell - \ell')\varphi_k} \mathcal{F}(\varepsilon, \varepsilon', p_z, p'_z, s, s', \ell, \ell', k_{\perp}, \theta, \lambda)$$

определенная энергия + определенный продольный импульс

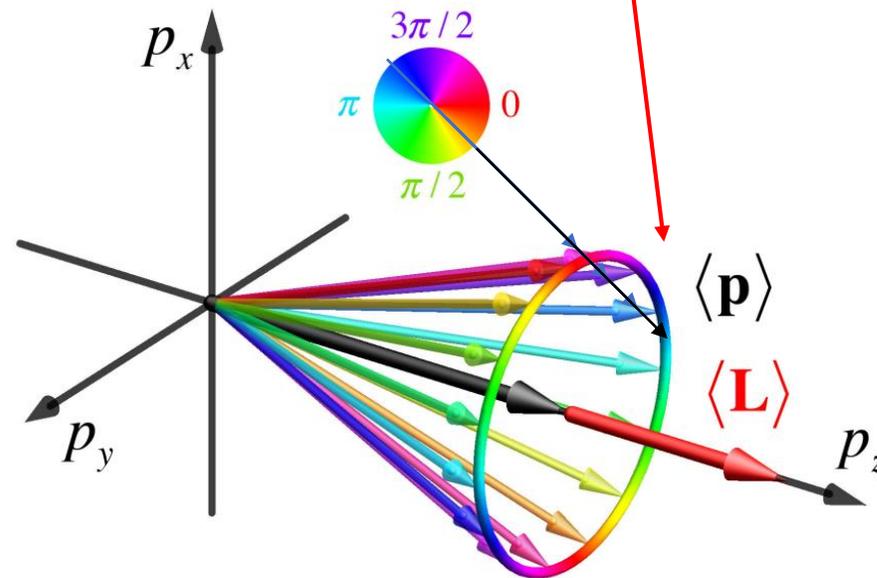


определенный модуль поперечного импульса: $\kappa = \sqrt{(\varepsilon - \varepsilon')^2 - (p_z - p'_z)^2} \geq 0$

$$\delta(\omega + \varepsilon' - \varepsilon) = \delta\left(\sqrt{k_{\perp}^2 + (p_z - p'_z)^2} + \varepsilon' - \varepsilon\right) = \frac{\varepsilon - \varepsilon'}{\kappa} \delta(k_{\perp} - \kappa)$$

Состояние излученного фотона

$$\Rightarrow |\gamma\rangle_{ev} = (\varepsilon - \varepsilon') \sum_{\lambda=\pm 1} \mathcal{F} \int_0^{2\pi} d\varphi_k |\mathbf{k}, \lambda\rangle e^{i(\ell - \ell')\varphi_k}$$



излученный фотон - пучок Бесселя!

Состояние излученного фотона

$$S_{fi}^{(1)} = (2\pi)^3 \delta(\omega + \varepsilon' - \varepsilon) \delta(k_z + p'_z - p_z) e^{i(\ell - \ell')\varphi_k} \mathcal{F}$$

$$\mathbf{A}^{(ev)} = \sum_{\lambda=\pm 1} S_{fi}^{(1)} \mathbf{e}_\lambda(\mathbf{k}) \sim e^{i(\ell - \ell')\varphi_k}$$

$$\hat{j}_z = -i \frac{\partial}{\partial \varphi_k} + \hat{s}_z \quad \hat{s}_z = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{j}_z \mathbf{e}_\lambda(\mathbf{k}) = 0$$

$$\Rightarrow \hat{j}_z \mathbf{A}^{(ev)}(\mathbf{k}) = (\ell - \ell') \mathbf{A}^{(ev)}(\mathbf{k})$$

излученный фотон действительно «закручен»

Состояние излученного фотона

Пучки Бесселя неинтегрируемы - энергия фотона получилась бесконечная...

В реальности состояние электрона "размазано" по импульсу:

$$\Psi_i(x)' = \int_{-\infty}^{\infty} dp_z \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_p^2}} e^{-\frac{(p_z - \langle p_z \rangle)^2}{2\sigma_p^2}} N_i \begin{pmatrix} (m + \varepsilon)\Phi_{s,l-1/2}(\rho)e^{-i\varphi/2} \\ 0 \\ p_z\Phi_{s,l-1/2}(\rho)e^{-i\varphi/2} \\ -ieH\Phi_{s,l+1/2}(\rho)e^{i\varphi/2} \end{pmatrix} e^{-it\varepsilon + il\varphi + ip_z z}$$

Это уже нестационарное состояние.

Состояние излученного фотона

$$|\gamma\rangle'_{ev} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_p^2}} \int_{-\infty}^{\infty} dp_z e^{-\frac{(p_z - \langle p_z \rangle)^2}{2\sigma_p^2}} |\gamma\rangle_{ev}$$

$\omega = \varepsilon - \varepsilon'$

$$\varepsilon = \sqrt{m^2 + p_z^2 + |e|H|(s + \ell + 1/2)}$$

У фотона теперь тоже нет определенной энергии.

Если размазать электрон по продольному импульсу, то фотон размажется **и по продольному, и по поперечному.**

Теперь получается фотон с **конечной энергией.**

Вероятность и интенсивность излучения

Вероятность перехода между состояниями с определенными квантовыми числами:

$$\begin{aligned}\langle \gamma | \gamma \rangle &= \sum_{\lambda, \lambda' = \pm 1} \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{d^3 \mathbf{k}'}{(2\pi)^3} \langle \mathbf{k}', \lambda' | \mathbf{k}, \lambda \rangle S_{fi}^{(1)}(\mathbf{k}, \lambda) S_{fi}^{(1)*}(\mathbf{k}', \lambda') = \\ &= \sum_{\lambda = \pm 1} \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \left| S_{fi}^{(1)} \right|^2 \equiv W_{s', \ell'}^{(1)}(p'_z)\end{aligned}$$

Полная вероятность:
$$W^{(1)} = \sum_{s', \ell'} \int W_{s', \ell'}^{(1)}(p'_z) \frac{dp'_z}{2\pi} L$$

(просуммировали по всем квантовым
числам конечного состояния электрона)

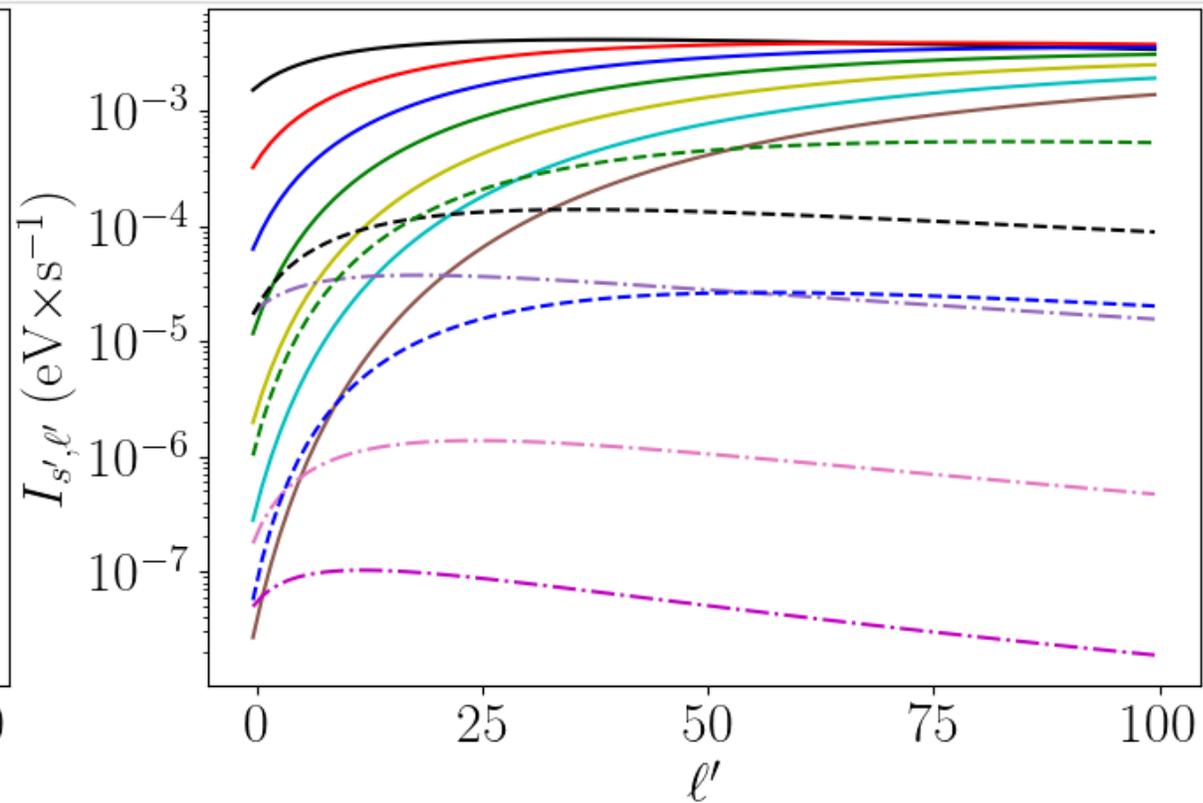
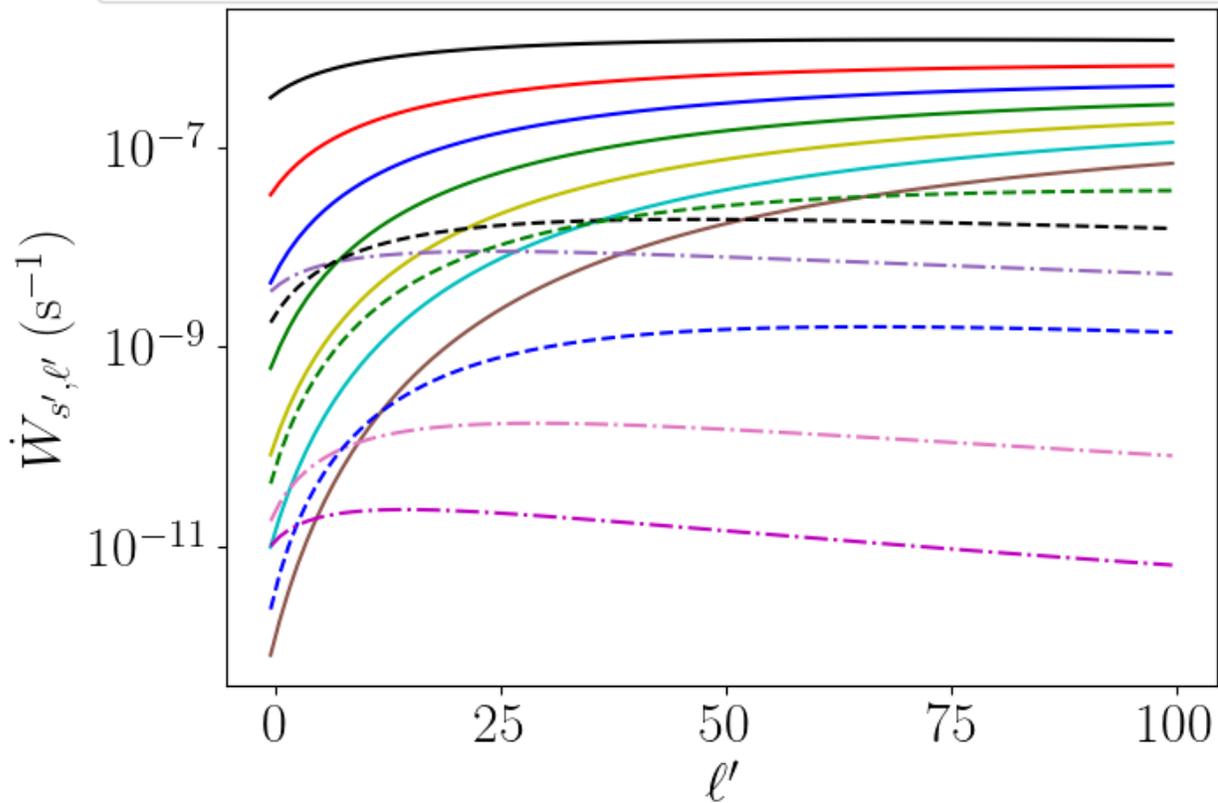
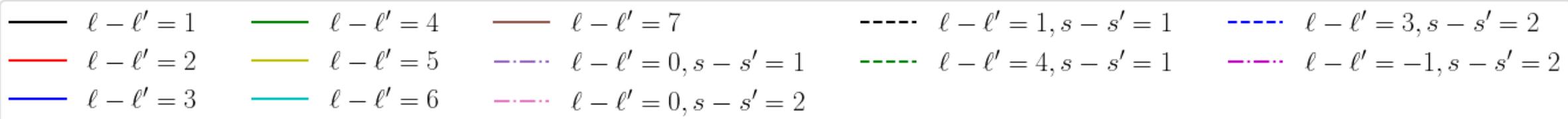
Вероятность и интенсивность излучения

Будем рассматривать **не полную вероятность** - проинтегрируем только по p_z

$$W_{s',\ell'}^{(1)} \equiv \int L \frac{dp'_z}{2\pi} W_{s',\ell'}^{(1)}(p'_z) = \sum_{\lambda=\pm 1} \int \frac{dp'_z}{2\pi} L \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \left| S_{fi}^{(1)} \right|^2$$

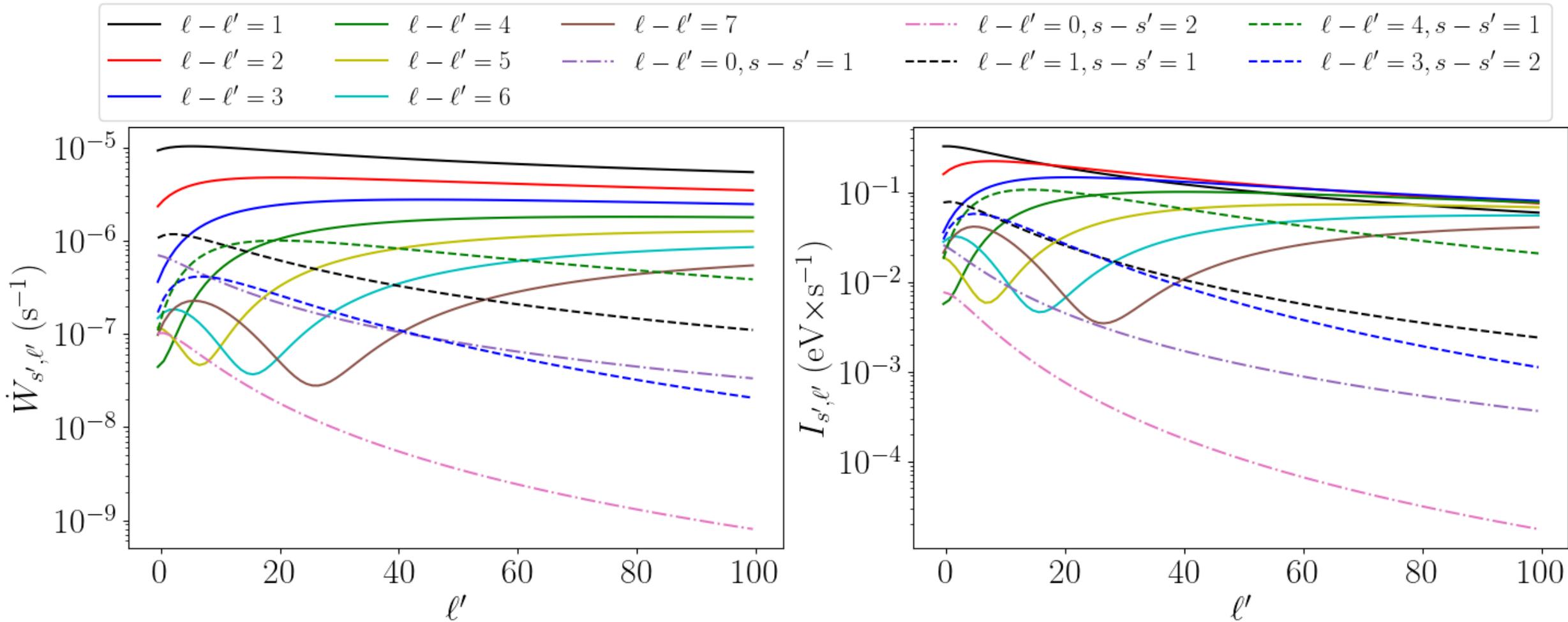
Интервал интегрирования по конечному импульсу электрона определяется условием

$$\kappa = \sqrt{(\varepsilon - \varepsilon')^2 - (p_z - p'_z)^2} \geq 0$$



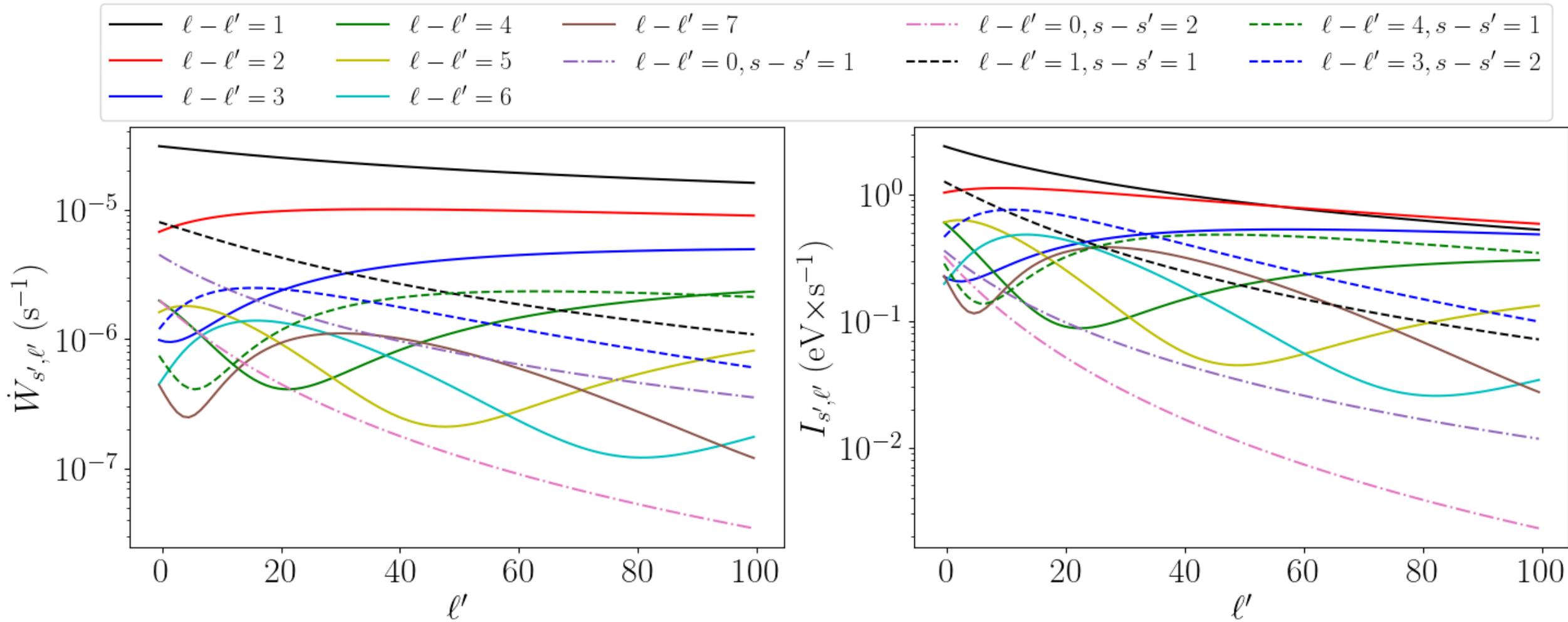
Вероятность и интенсивность излучения фотонов с определенным угловым моментом (без переворота спина).

Параметры: $H = 10^{-2} H_c$, $s = s' = 5$, $p_z = 10^{-3} m$



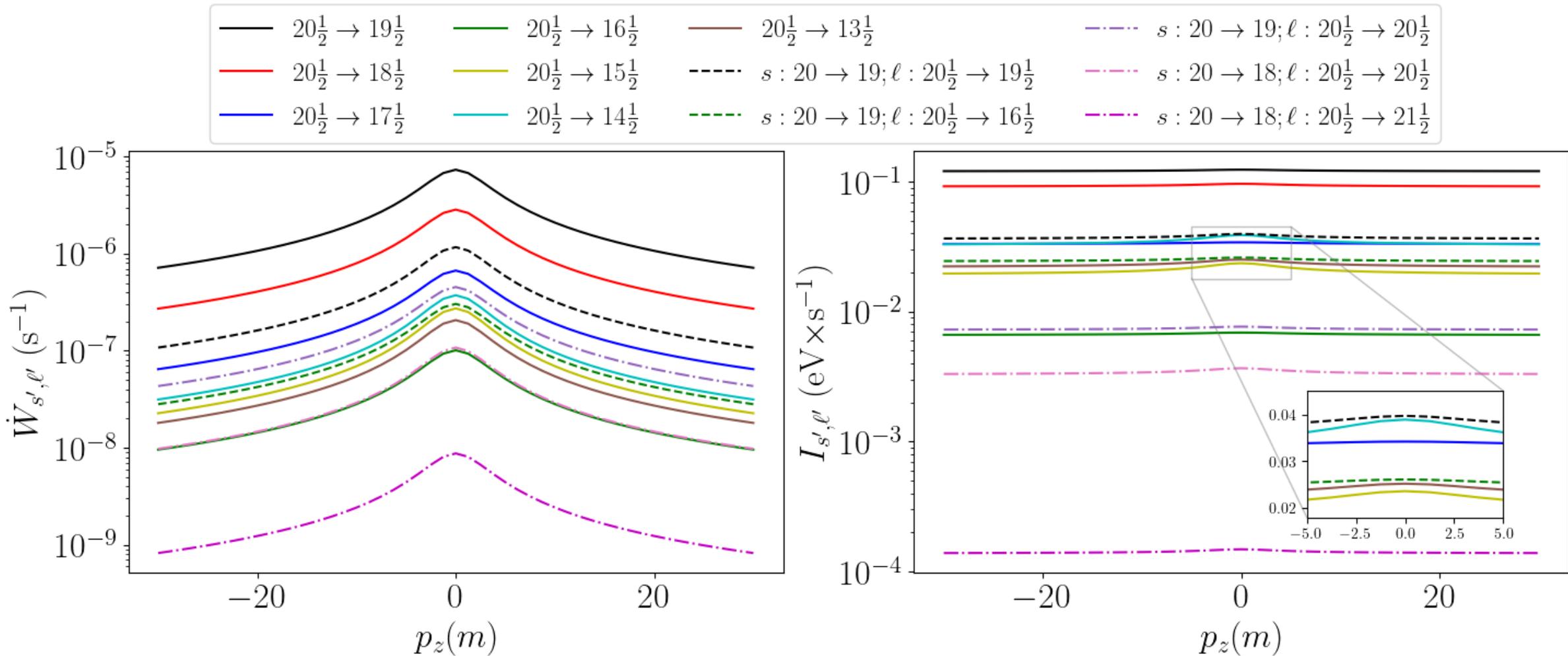
Вероятность и интенсивность излучения фотонов с определенным угловым моментом (без переворота спина).

Параметры: $H = 0.1H_c$, $s = s' = 5$, $p_z = 10^{-3}m$



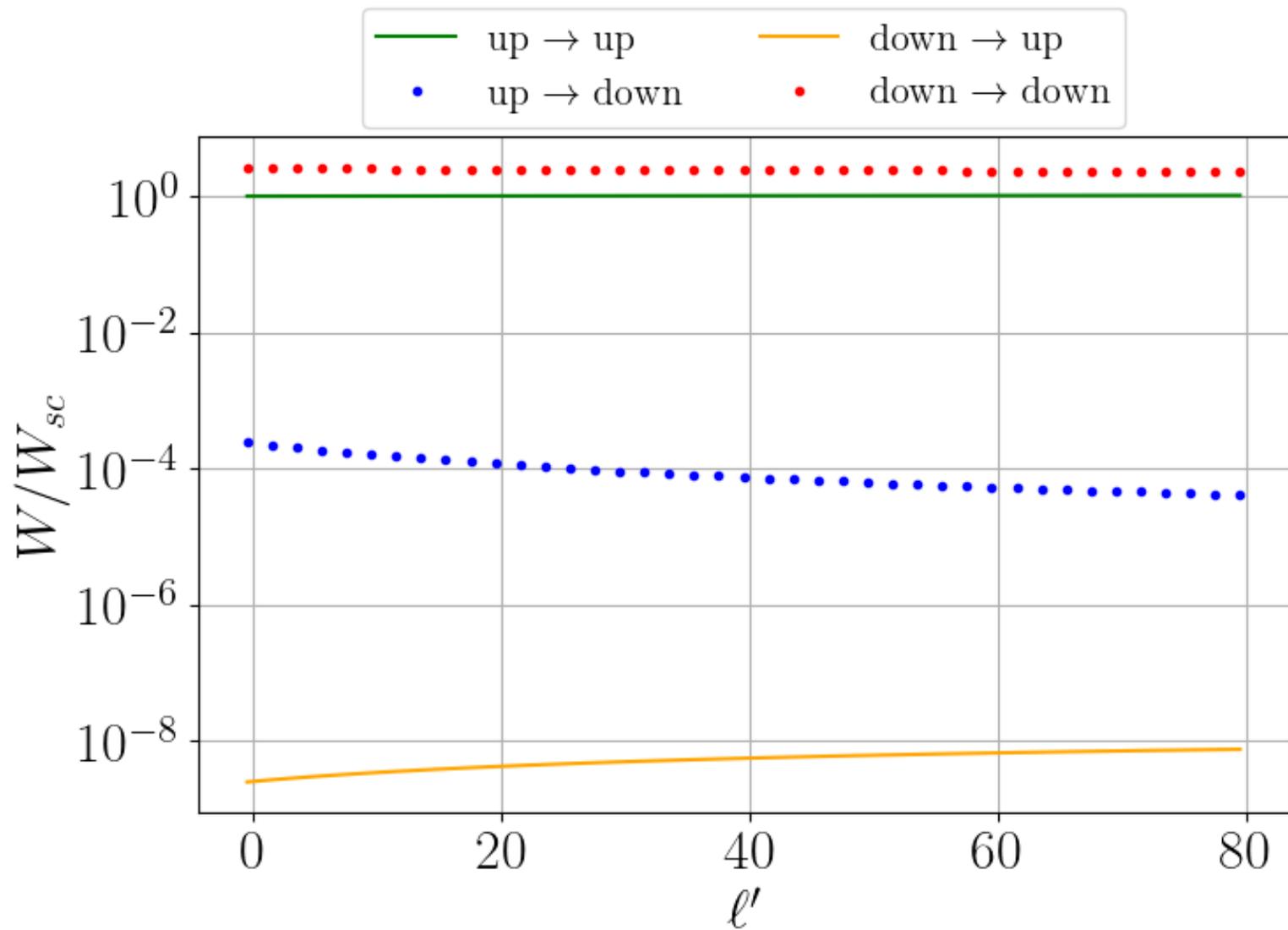
Вероятность и интенсивность излучения фотонов с определенным угловым моментом (без переворота спина).

Параметры: $H = H_c$, $s = s' = 20$, $p_z = 10^{-3}m$



Вероятность и интенсивность излучения фотонов с определенным угловым моментом (без переворота спина).

Параметры: $H = 0.1H_c$, $s = s' = 20$, $p_z = 10^{-3}m$



Вероятность перехода между разными спиновыми состояниями: **самополяризация** электронов.

Вероятность нормирована на вероятность излучения для скалярной частицы.

Параметры: $l - l' = 3, s = s' = 20, H = 0.001H_c$



Применение

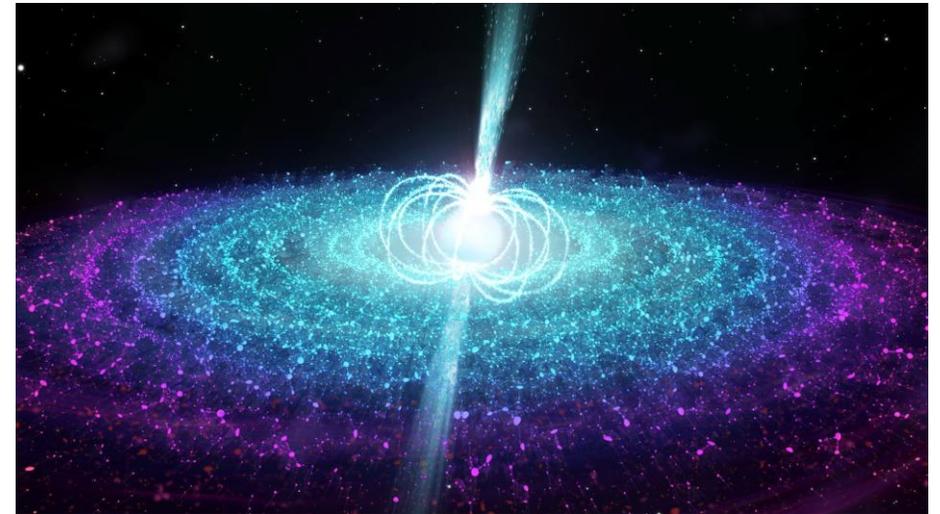
- Лабораторные методы генерации закрученных фотонов
- Астрофизика: нейтронные звезды и т.п. $H \lesssim H_c = 4.4 \times 10^9 T = m^2 / |e|$

В звезде излучается закрученный фотон



Он взаимодействует с веществом
(не как плоская волна):

- Может возбуждать электроны в состояниях Ландау
- Сечение рассеяния отличается от плосковолнового



Заключение

- Электрон в магнитном поле излучает Бесселев пучок, распространяющийся вдоль поля
- **Полный** угловой момент электрона передается фотону
- Большинство излученных фотонов закручено: $\ell - \ell' \gtrsim 1$

Ссылка на препринт статьи:

I. Pavlov, D. Karlovets, arXiv:2311.08553
Emission of twisted photons by a Dirac
electron in a strong magnetic field





Спасибо за внимание!

Контакты:

ilya.pavlov@metalab.ifmo.ru