

Вычисление аномального аксиального тока на основе ковариантной функции Вигнера и равновесного термодинамического оператора плотности

*Г. Ю. Прохоров*¹

*О. В. Теряев*¹



Киральные явления в релятивистской гидродинамике

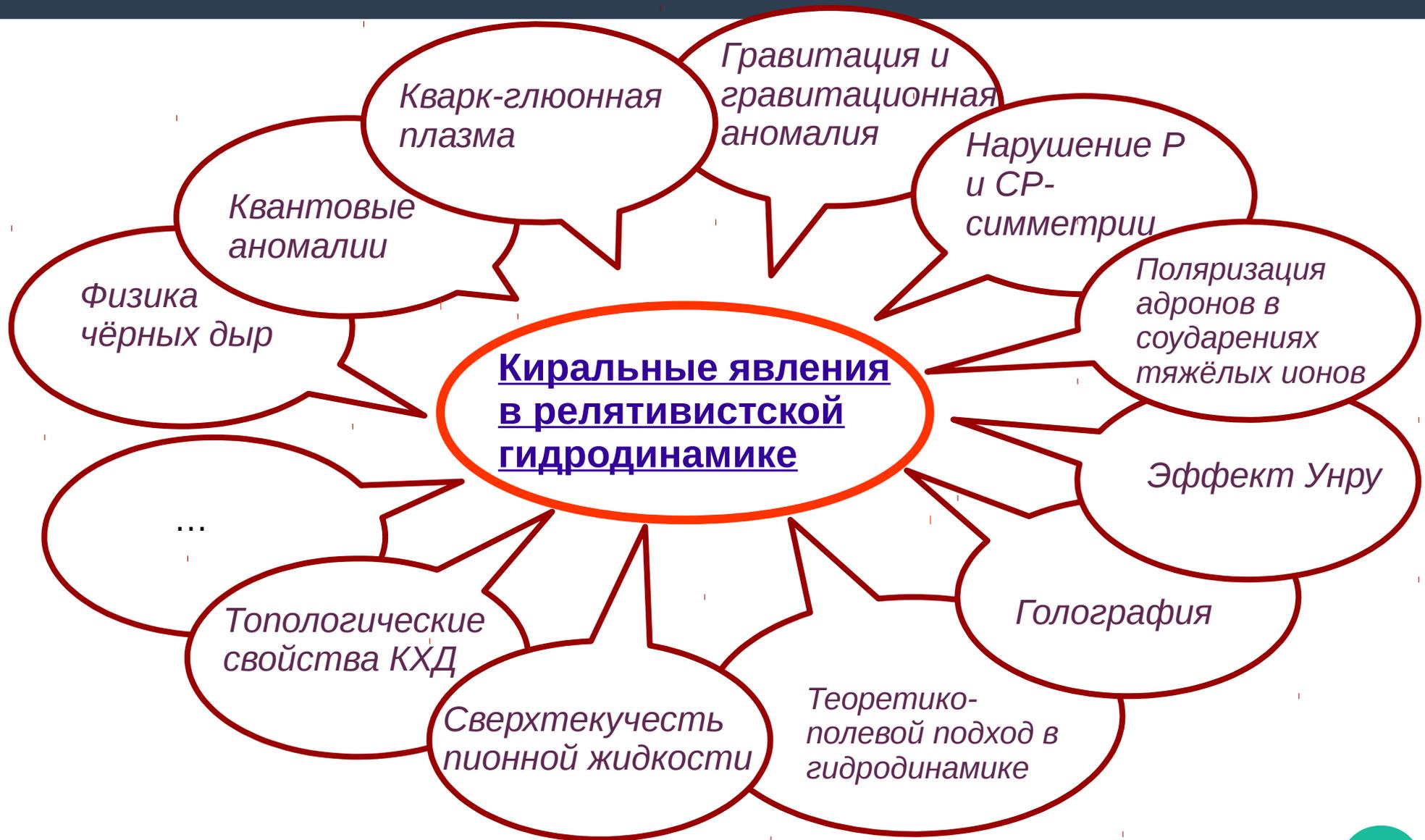
Исследование Кирального Магнитного (CME) и Вихревого (CVE) эффектов

- *A. Vilenkin, Phys. Rev. D 21 (1980) 2260. doi:10.1103/PhysRevD.21.2260*
- *A. Vilenkin, Phys. Rev. D 22 (1980) 3080. doi:10.1103/PhysRevD.22.3080*
- *D. T. Son and P. Surowka, Phys. Rev. Lett. 103 (2009) 191601 doi:10.1103/PhysRevLett.103.191601 [arXiv:0906.5044 [hep-th]].*
- *A. V. Sadofyev, V. I. Shevchenko and V. I. Zakharov, Phys. Rev. D 83 (2011) 105025 doi:10.1103/PhysRevD.83.105025 [arXiv:1012.1958 [hep-th]].*
- *K. Fukushima, D. E. Kharzeev, and H. J. Warringa, Phys.Rev. D 78, 074033 (2008).*
- *K. Landsteiner, E. Megias, F. Pena-Benitez: Gravitational Anomaly and Transport. Phys. Rev. Lett. 107, 021601 (2011), arXiv:1103.5006 [hep-ph].*
- *Karpenko, I. et al. Eur.Phys.J. C77 (2017) no.4, 213 arXiv:1610.04717 [nucl-th]*
- *O. Rogachevsky, A. Sorin and O. Teryaev, Phys. Rev. C 82 (2010) 054910 doi:10.1103/PhysRevC.82.054910 [arXiv:1006.1331 [hep-ph]].*
- ***Prokhorov, George et al. arXiv:1707.02491 [hep-th], to be published in PhysRevD.***

Некоторые приложения теории киральных явлений

- **Обнаружение киральных эффектов = проверка физики, которая за ними лежит.**
- **Поляризация адронов в соударениях тяжёлых ионов.**
- **Киральные батареи.**

Области физики, проявляющиеся в киральных явлениях



Достижение Соны и Суровки

D. T. Son and P. Surowka, Phys. Rev. Lett. 103 (2009) 191601 doi:10.1103/PhysRevLett.103.191601 [arXiv:0906.5044 [hep-th]]. (формулы на слайде)

L. D. Landau and E. M. Lifshitz, Fluid Mechanics, Pergamon, New York (1959).

Закон сохранения энергии/импульса во внешнем электромагнитном поле

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = F^{\nu\lambda} j_\lambda$$

+

Квантовая аномалия в дивергенции аксиального тока

$$\partial_\mu j^\mu = C E^\mu B_\mu$$

Второй закон термодинамики $\partial_\mu s^\mu \geq 0$

Идеальная жидкость

$$T^{\mu\nu} = (\epsilon + P) u^\mu u^\nu + P g^{\mu\nu} + \tau^{\mu\nu},$$

$$j^\mu = n u^\mu + \nu^\mu,$$

Вязкость+электропроводность
+аксиальная аномалия

$$\nu^\mu = -\sigma T P^{\mu\nu} \partial_\nu \left(\frac{\mu}{T} \right) + \sigma E^\mu + \xi \omega^\mu + \xi_B B^\mu,$$

$$s^\mu = s u^\mu - \frac{\mu}{T} \nu^\mu + D \omega^\mu + D_B B^\mu,$$

Киральный вихревой эффект CVE

Киральный магнитный эффект CME

$$\xi = C \left(\mu^2 - \frac{2}{3} \frac{\mu^3 n}{\epsilon + P} \right)$$

Киральные явления как проявления аксиальной аномалии в эффективной теории поля

A. V. Sadofyev, V. I. Shevchenko and V. I. Zakharov, *Phys. Rev. D* 83 (2011) 105025
 doi:10.1103/PhysRevD.83.105025 [arXiv:1012.1958 [hep-th]]. (формулы на слайде)

Химический потенциал как эффективное внешнее электромагнитное поле $qA^\mu \rightarrow \mu u^\mu$

Гидродинамика как эффективная теория поля в реальном времени

$$S_{eff} = \int dx (i\bar{\psi}\gamma^\rho D_\rho\psi + \mu u_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu\psi + \mu_5 u_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi)$$

Аксиальная аномалия в гидродинамике

$$\partial_\mu j_5^\mu = -\frac{1}{4\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} (\partial^\mu (A^\nu + \mu u^\nu) \partial^\alpha (A^\beta + \mu u^\beta) + \partial^\mu \mu_5 u^\nu \partial^\alpha \mu_5 u^\beta)$$

$$\partial_\mu j^\mu = -\frac{1}{2\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial^\mu (A^\nu + \mu u^\nu) \partial^\alpha \mu_5 u^\beta$$

Киральные эффекты в векторном токе

$$j^\mu = n u^\mu + \frac{\mu\mu_5}{\pi^2} \omega^\mu + \frac{\mu_5}{2\pi^2} B^\mu$$

Киральные эффекты в аксиальном токе

$$j_5^\mu = n_5 u^\mu + \frac{\mu^2 + \mu_5^2}{2\pi^2} \omega^\mu + \frac{\mu}{2\pi^2} B^\mu$$

Исследованные вопросы и методы

- Эффекты вращения и ускорения в аксиальном токе.
- Сохранение аксиального заряда во вращающихся и ускоренно движущихся системах отсчёта.
- Поляризация Λ -гиперонов в соударениях тяжёлых ионов.

Методы

- Ковариантная функция Вигнера для систем, характеризующихся тензором термальной завихрённости.
- Метод равновесного квантового оператора плотности, учитывающего эффекты, связанные с тензором термальной завихрённости.

Теория возмущений в приложении к теории поля при конечных температурах.

Тензор термальной завихрённости

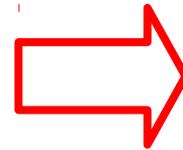
F. Becattini, V. Chandra, L. Del Zanna and E. Grossi, *Annals Phys.* 338 (2013) 32
doi:10.1016/j.aop.2013.07.004 [arXiv:1303.3431 [nucl-th]].

$$\beta_\mu = \frac{u_\mu}{T}$$

4-вектор обратной температуры

Глобальное термодинамическое равновесие

$$b_\mu = \text{const} \quad \varpi_{\mu\nu} = \text{const}$$



$$\beta_\mu = b_\mu + \varpi_{\mu\nu} x_\nu$$

$$\varpi_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu \beta_\nu - \partial_\nu \beta_\mu)$$

$$\varpi_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \omega^\alpha u^\beta + \alpha_\mu u_\nu - \alpha_\nu u_\mu$$

Ускорение

$$\alpha_\mu = \varpi_{\mu\nu} u^\nu$$

$$\alpha_\mu = \frac{a_\mu}{T}$$

$$a^\mu = (0, \mathbf{a})$$

Завихрённость

$$\omega_\mu = -\frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} u^\nu \varpi^{\alpha\beta}$$

$$\omega_\mu = \frac{\omega_\mu}{T} \quad \omega^\mu = (0, \mathbf{w})$$

Градиент температуры

Ковариантная функция Вигнера: способ описания системы в квантовой кинетической теории

F. Becattini, V. Chandra, L. Del Zanna and E. Grossi, Annals Phys. 338 (2013) 32 doi:10.1016/j.aop.2013.07.004 [arXiv:1303.3431 [nucl-th]].

Функция Вигнера для полей Дирака

$$W(x, k)_{AB} = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4y e^{-ik \cdot y} \langle : \Psi_A(x - y/2) \bar{\Psi}_B(x + y/2) : \rangle$$



Содержит основную термодинамическую информацию о системе



Взаимодействие слабое, W имеет неоднородности только на макроскопических масштабах



$$W(x, k) = \frac{1}{2} \int \frac{d^3p}{\varepsilon} \left(\delta^4(k - p) U(p) f(x, p) \bar{U}(p) - \delta^4(k + p) V(p) \bar{f}^T(x, p) \bar{V}(p) \right)$$



Средние значения операторов

$$\langle : \bar{\Psi}(x) A \Psi(x) : \rangle = \int d^4k \operatorname{tr}(A W(x, k))$$



$$f(x, p) = \frac{1}{e^{\beta(x) \cdot p - \xi(x)} + 1}$$

Распределение Ферми-Дирака при локальном термодинамическом равновесии

Анзац функции Вигнера, учитывающий тензор термальной завихрённости

Функция $X(x,p)$

$$f(x, p) = \frac{1}{8\pi^3} \frac{1}{2m} \bar{U}(p) X(x, p) U(p)$$

Генераторы Лоренц-преобразований спиноров

$$\Sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{4} [\gamma_\mu, \gamma_\nu]$$

Анзац функции Вигнера

$$X(x, p) = \left(\exp[\beta \cdot p - \xi(x)] \exp \left[-\frac{1}{2} \varpi(x) : \Sigma \right] + I \right)^{-1}$$



- Предел с нулевым тензором термальной завихрённости

$$f(x, p) = \frac{1}{e^{\beta(x) \cdot p - \xi(x)} + 1}$$

- Нерелятивистский предел

F. Becattini and L. Tinti, Annals Phys. 325 (2010) 1566 doi:10.1016/j.aop.2010.03.007 [arXiv:0911.0864 [gr-qc]].

Анзац функции Вигнера, учитывающий тензор термальной завихрённости

Примеры расчёта поправок на тензор термальной завихрённости

- Векторный заряд

$$j^0(x) = 2 \int d^3p (n_F - \bar{n}_F) + \varpi(x) : \varpi(x) \frac{1}{4} \int d^3p [n_F(1 - n_F)(1 - 2n_F) - \bar{n}_F(1 - \bar{n}_F)(1 - 2\bar{n}_F)]$$

- Аксиальный ток

$$j_A^\mu(x) = w^\mu W^A$$

$$W^A = \frac{1}{2\pi^2|\beta|} \int_0^\infty \frac{dp}{E_p} (n_F(E_p - \mu) + n_F(E_p + \mu)) (2p^2 + m^2) \rightarrow \frac{T^3}{6} + \frac{T\mu^2}{2\pi^2}$$

CVE

*M. Buzzegoli, E. Grossi and F. Becattini,
JHEP 1710 (2017) 091 doi:10.1007/JHEP10(2017)091
[arXiv:1704.02808 [hep-th]].*

Аксиальный ток

Аксиальный ток выражается через интеграл с функцией Вигнера

$$\langle : j_\mu^5 : \rangle = -\frac{1}{16\pi^3} \epsilon_{\mu\alpha\nu\beta} \int \frac{d^3 p}{\varepsilon} p^\alpha \left\{ \underbrace{\text{tr}(X \Sigma^{\nu\beta}) - \text{tr}(\bar{X} \Sigma^{\nu\beta})}_{\text{могут быть вычислены аналитически за пределами теории возмущений}} \right\}$$

Могут быть вычислены аналитически
за пределами теории возмущений

Удобно ввести скалярные комбинации, построенные из тензора термальной завихренности

$$g_1 = \frac{1}{4} \left(\sqrt{(\varpi : \varpi)^2 + (\varpi : \tilde{\varpi})^2} + \varpi : \varpi \right)^{1/2}$$

$$g_2 = \frac{1}{4} \left(\sqrt{(\varpi : \varpi)^2 + (\varpi : \tilde{\varpi})^2} - \varpi : \varpi \right)^{1/2}$$

Аксиальный ток масса не равна нулю

$$\langle : j_\mu^5 : \rangle = C_1 w_\mu + \text{sgn}(\varpi : \tilde{\varpi}) C_2 \alpha_\mu ,$$

$$C_1 = \frac{1}{4\pi^2} \frac{g_2 \cosh(g_1) \sin(g_2) + g_1 \sinh(g_1) \cos(g_2)}{g_1^2 + g_2^2} (I_1(\xi) + I_1(-\xi)) +$$

$$\frac{1}{8\pi^2} \frac{g_1 \sinh(2g_1) + g_2 \sin(2g_2)}{g_1^2 + g_2^2} (I_2(\xi) + I_2(-\xi)) ,$$

$$C_2 = \frac{1}{4\pi^2} \frac{g_2 \sinh(g_1) \cos(g_2) - g_1 \cosh(g_1) \sin(g_2)}{g_1^2 + g_2^2} (I_1(\xi) + I_1(-\xi)) +$$

$$\frac{1}{8\pi^2} \frac{g_2 \sinh(2g_1) - g_1 \sin(2g_2)}{g_1^2 + g_2^2} (I_2(\xi) + I_2(-\xi)) ,$$

$$I_1(\xi) = \int \frac{dp \mathbf{p}^2 \cosh(\frac{\varepsilon}{T} - \xi)}{\left(\cosh(\frac{\varepsilon}{T} - \xi - g_1) + \cos(g_2) \right) \left(\cosh(\frac{\varepsilon}{T} - \xi + g_1) + \cos(g_2) \right)} ,$$

$$I_2(\xi) = \int \frac{dp \mathbf{p}^2}{\left(\cosh(\frac{\varepsilon}{T} - \xi - g_1) + \cos(g_2) \right) \left(\cosh(\frac{\varepsilon}{T} - \xi + g_1) + \cos(g_2) \right)} .$$

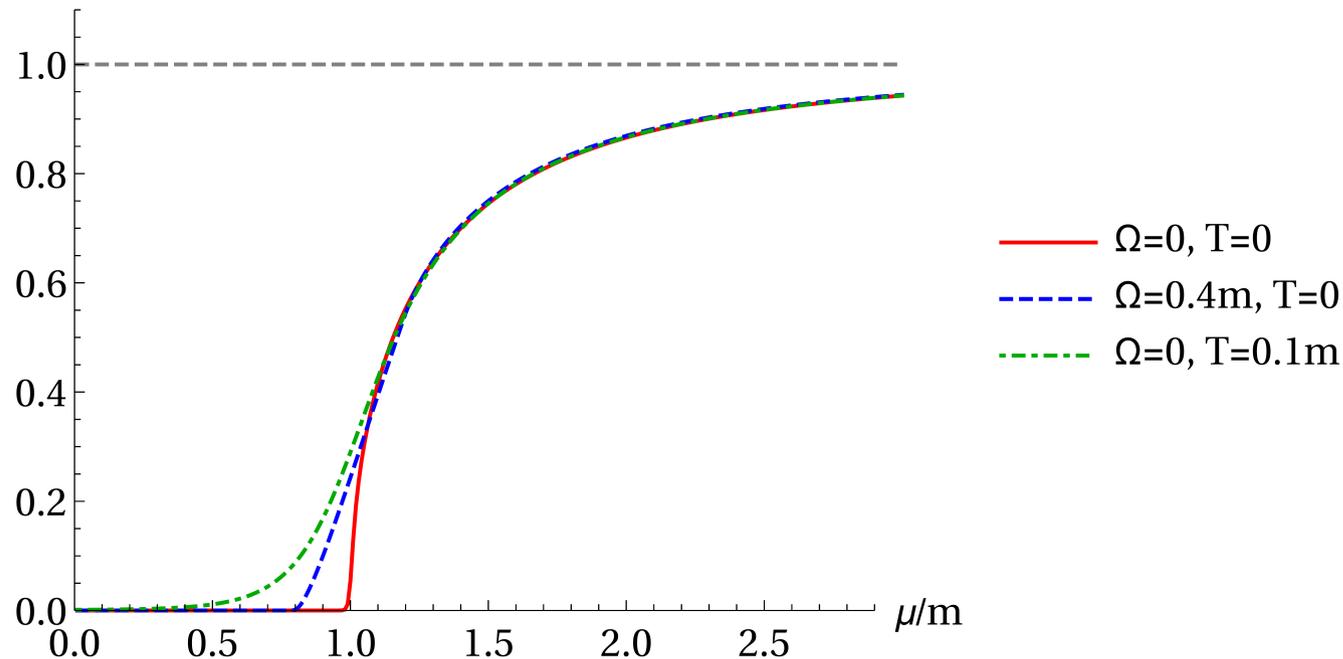
2 члена: вдоль
4-ускорения (1 порядка)
и завихрённости
(3 порядка
по $\varpi_{\mu\nu}$)

Сходящийся 1-
мерный интеграл
от элементарной
функции

Аксиальный ток масса не равна нулю

$$\frac{W_A(\mu, T, m, \Omega)}{T^2/6 + \mu^2/(2\pi^2)}$$

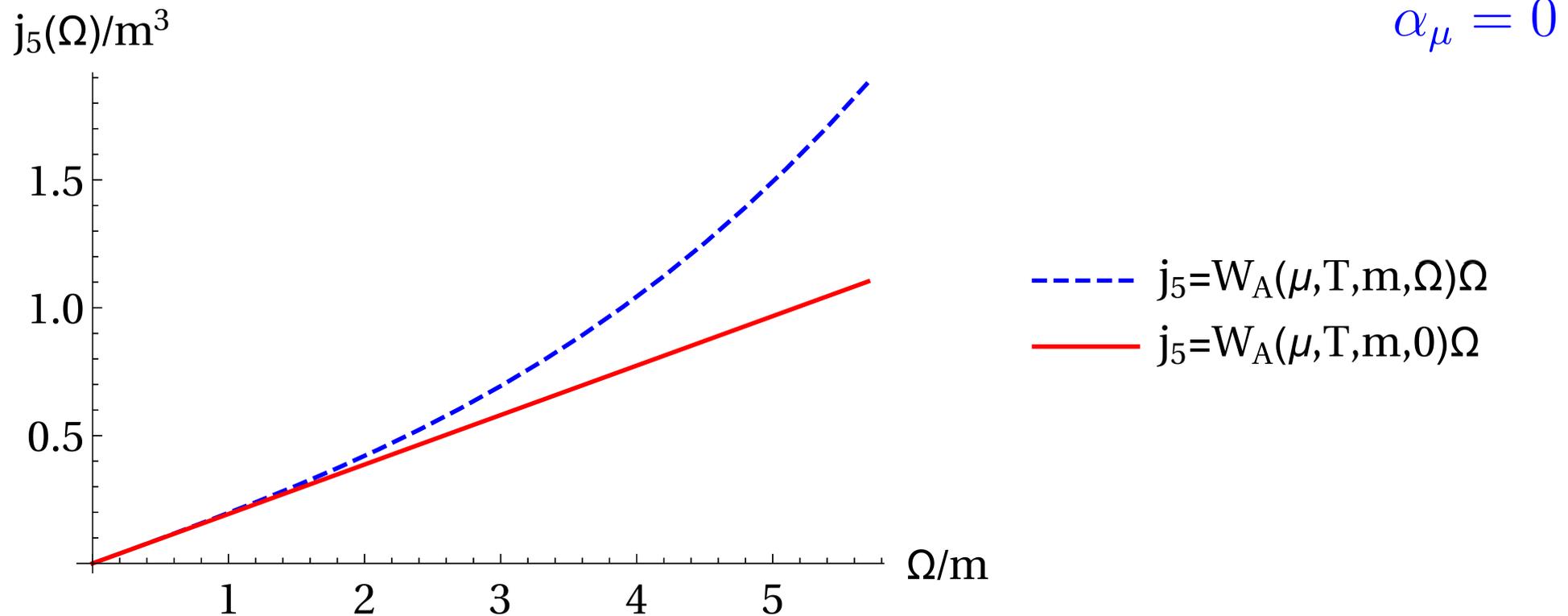
$$\alpha_\mu = 0$$



Аксиальный ток, как функция хим-потенциала при различных значениях скорости вращения и температуры

- *Наличие ступеньки при хим-потенциале, равном массе*
- *Ступенька размывается с ростом температуры или скорости вращения*

Аксиальный ток масса не равна нулю

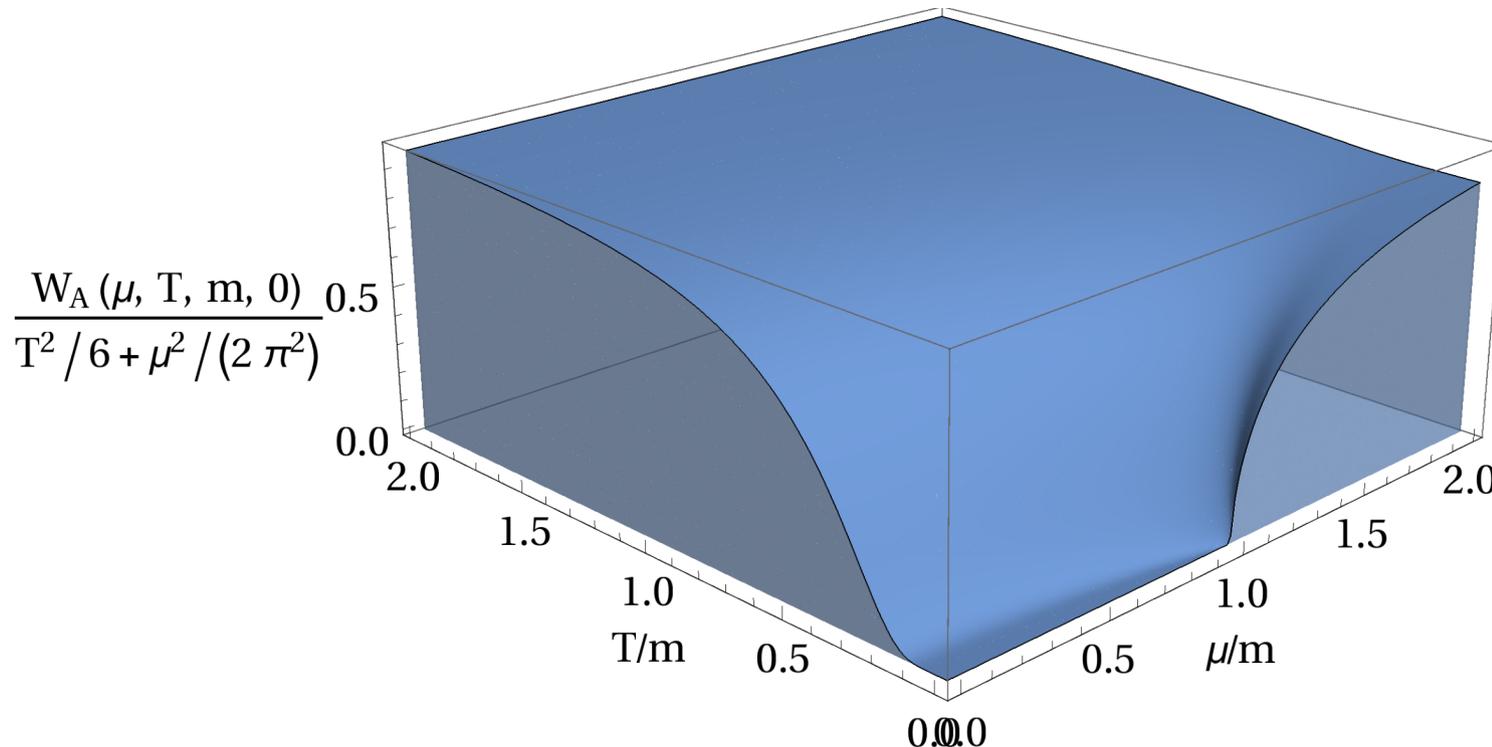


Типичное поведение аксиального тока, как функции температуры при произвольных значениях параметров в сравнении с обычным CVE

- Аксиальный ток увеличивается за счёт роста W^A с ростом скорости вращения

Аксиальный ток масса не равна нулю

$$\alpha_\mu = 0$$



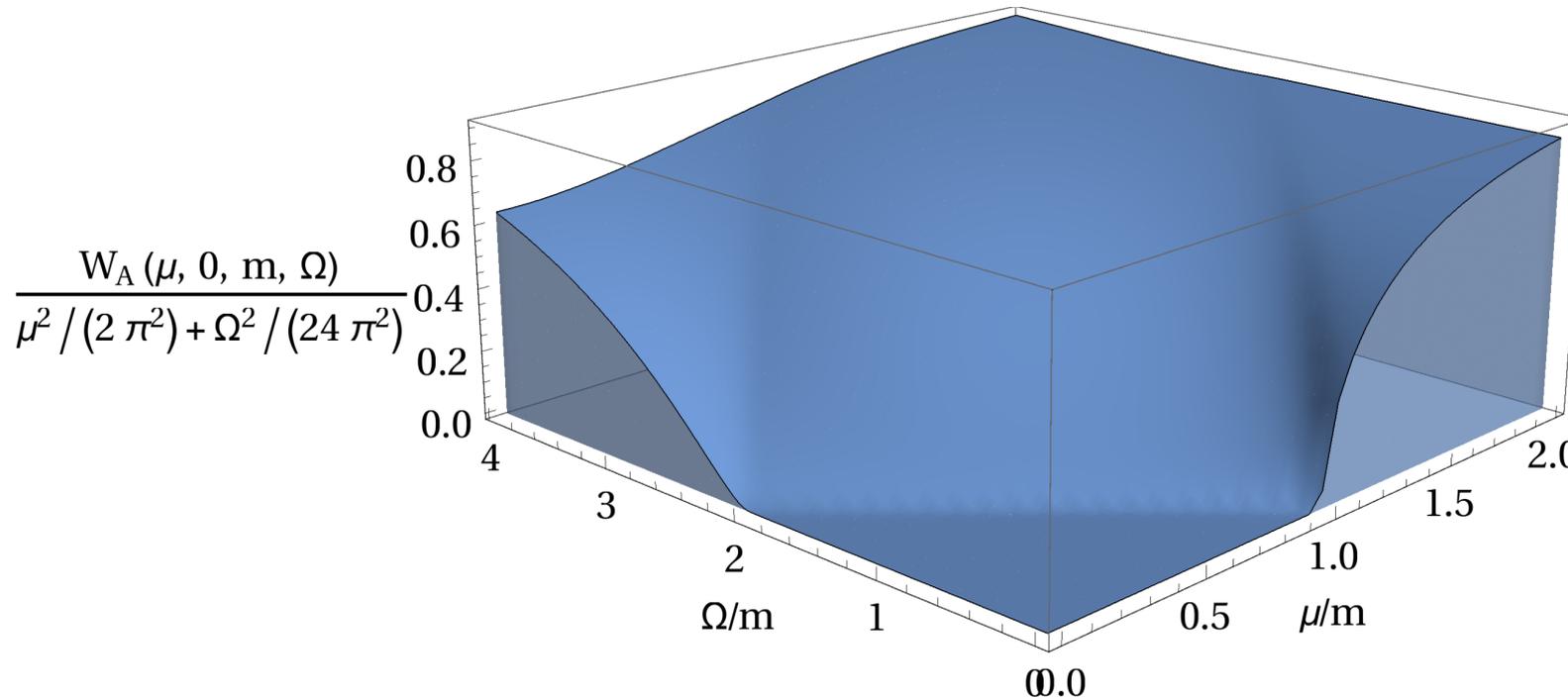
Коэффициент в аксиальном токе, как функции температуры и химического потенциала, нормированный на обычный CVE при нулевой скорости вращения

W^A совпадает с результатом

M. Buzzegoli, E. Grossi and F. Becattini,
JHEP 1710 (2017) 091 doi:10.1007/JHEP10(2017)091 [arXiv:1704.02808 [hep-th]].

- **Ступенька при хим-потенциале равном массе**
- **Ступенька размывается с ростом температуры**
- **Асимптотически стремится к обычному CVE при нулевой массе при температуре и хим-потенциале много больших массы**

Аксиальный ток масса не равна нулю



$$\alpha_\mu = 0$$

Коэффициент в аксиальном токе, как функции скорости вращения и химического потенциала, нормированный на формулу при нулевой температуре и массе

- **Плато, где аксиальный ток равен нулю, ограниченное прямой $\Omega = 2(m - \mu)$**
- **Асимптотически стремится результату при нулевой массе и при температуре и скорости вращения много больших массы**

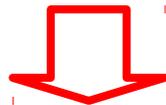
Предел безмассовых фермионов

Интегралы по импульсу находятся аналитически и выражаются через полилогарифмы

$$\langle : j_\mu^5 : \rangle = -\frac{T^3}{4\pi^2(g_1^2 + g_2^2)} \left((g_1 + ig_2)\text{Li}_3(-e^{g_1 - ig_2 - \xi}) - (g_1 - ig_2)\text{Li}_3(-e^{-g_1 - ig_2 - \xi}) + \dots \right)$$

Замечательное свойство полилогарфмов

$$\text{Li}_3(-e^{-x}) - \text{Li}_3(-e^x) = \frac{\pi^2}{6}x + \frac{1}{6}x^3$$



$$\langle : j_\mu^5 : \rangle = \left(\frac{1}{6} \left[T^2 + \frac{a^2 - \omega^2}{4\pi^2} \right] + \frac{\mu^2}{2\pi^2} \right) \omega_\mu + \frac{1}{12\pi^2} (\omega \cdot a) a_\mu$$

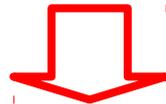
- **Простая аналитическая формула для аксиального тока, выведенная за пределами теории возмущений.**
- Сокращаются члены высших порядков по хим-потенциалу, температуре и термальной завихрённости.
- Максимальный порядок по ускорению и скорости вращения: 3.

Предел безмассовых фермионов

Диагонализация

$$\varphi_\mu = \frac{a_\mu}{2\pi} + \frac{i\omega_\mu}{2\pi}$$

Комплексная суперпозиция векторов ускорения и завихрённости



$$\langle : j_\mu^5 : \rangle = 2\pi \operatorname{Im} \left[\left(\frac{1}{6} (T^2 + \varphi^2) + \frac{\mu^2}{2\pi^2} \right) \varphi_\mu \right]$$

- Симметрия между завихрённостью и ускорением – аналог симметрии между магнитным и электрическим полем в электродинамике

Предел безмассовых фермионов сравнение с другими подходами

Обычный CVE, слагаемое
вдоль завихренности
первого порядка

Слагаемое 3 порядка по
завихренности,
соответствует

Слагаемое 3 порядка
вдоль 4-ускорения,
приводит к ненулевой
дивергенции

$$\langle : j_\mu^5 : \rangle = \langle : j_\mu^5 : \rangle_{\text{Tvort}} + \langle : j_\mu^5 : \rangle_{\text{vort}} + \langle : j_\mu^5 : \rangle_{\text{acc}},$$

$$\langle : j_\mu^5 : \rangle_{\text{Tvort}} = \left(\frac{T^2}{6} + \frac{\mu^2}{2\pi^2} \right) \omega_\mu, \quad \langle : j_\mu^5 : \rangle_{\text{vort}} = \frac{a^2 - \omega^2}{24\pi^2} \omega_\mu,$$

$$\langle : j_\mu^5 : \rangle_{\text{acc}} = \frac{1}{12\pi^2} (\omega \cdot a) a_\mu.$$

*M. Buzzegoli, E. Grossi and F. Becattini,
JHEP 1710 (2017) 091
doi:10.1007/JHEP10(2017)091
[arXiv:1704.02808 [hep-th]].*

A. Vilenkin, Phys. Rev. D 20 (1979) 1807. doi:10.1103/PhysRevD.20.1807

A. Vilenkin, Phys. Rev. D 21 (1980) 2260. doi:10.1103/PhysRevD.21.2260

Несохранение
аксиального заряда
при $(\omega \cdot a) \neq 0$

$$\partial^\mu \langle : j_\mu^5 : \rangle = \partial^\mu \langle : j_\mu^5 : \rangle_{\text{acc}} = \frac{1}{6\pi^2} (\omega \cdot a) (a^2 + \omega^2)$$

Ковариантная функция Вигнера

ВЫВОД

- Полученная формула подтверждает все известные результаты по выводу CVE.
- Простота полученной формулы.
- Кубический член по завихрённости в точности совпадает с 2 другими выводами аксиального тока, сделанными А. Виленкиным.
- Симметрия между завихрённостью и ускорением.
- **Несохранение аксиального заряда в случае, когда ускорение и скорость вращения не равны нулю и не перпендикулярны.**
- **Использован анзац для функции Вигнера.**
- **Использовано приближение для функции Вигнера.**



НЕОБХОДИМО ИСПОЛЬЗОВАТЬ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ НЕЗАВИСИМЫЙ ПОДХОД ДЛЯ ПРОВЕРКИ ПОЛУЧЕННОГО РЕЗУЛЬТАТА

Второй подход: равновесный оператор плотности

- Термодинамика может быть выведена из теории поля, построенной в терминах континуального интеграла в мнимом времени
- Центральную роль играет оператор плотности
- **Общая ковариантная форма оператора плотности для среды в локальном термодинамическом равновесии**

$$\hat{\rho} = \frac{1}{Z} \exp \left[- \int_{\Sigma} d\Sigma_{\mu} \left(\hat{T}^{\mu\nu}(x) \beta_{\nu}(x) - \zeta(x) \hat{j}^{\mu}(x) \right) \right] \Rightarrow \text{Максимальна} \quad S = -\text{tr}(\hat{\rho} \log \hat{\rho})$$

D.N. Zubarev, A.V. Prozorkevich and S.A. Smolyanskii, Derivation of nonlinear generalized equations of quantum relativistic hydrodynamics, Theor. Math. Phys. 40 (1979) 821.

При условии $\nabla_{\mu} \beta_{\nu} + \nabla_{\nu} \beta_{\mu} = 0 \quad \nabla_{\mu} \zeta = 0 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \beta_{\mu}(x) &= b_{\mu} + \varpi_{\mu\nu} x^{\nu} & \zeta &= \text{const.} \\ b_{\mu} &= \text{const} & \varpi_{\mu\nu} &= \text{const} \end{aligned}$$

$\hat{\rho}$ не зависит от выбора гиперповерхности $d\Sigma_{\mu}$

глобальное термодинамическое равновесие

Оператор плотности для среды с тензором термальной завихрённости

Условия глобального равновесия

$$\nabla_\mu \beta_\nu + \nabla_\nu \beta_\mu = 0 \quad \nabla_\mu \zeta = 0$$



Форма оператора плотности для среды, обладающей вращением и ускорением

$$\hat{\rho} = \frac{1}{Z} \exp \left[-b_\mu \hat{P}^\mu + \frac{1}{2} \varpi_{\mu\nu} \hat{J}^{\mu\nu} + \zeta \hat{Q} \right]$$

Тензор термальной завихрённости

- *F. Becattini and E. Grossi, Phys. Rev. D 92 (2015) 045037 [arXiv:1505.07760] [INSPIRE].*
- *F. Becattini, arXiv:1712.08031 [gr-qc], to appear in Phys. Rev. D.*

Оператор 4-импульса

Генераторы преобразований Лоренца

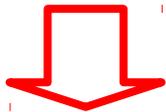
$$\hat{J}^{\mu\nu} = \int_\Sigma d\Sigma_\lambda \left(x^\mu \hat{T}^{\lambda\nu} - x^\nu \hat{T}^{\lambda\mu} \right)$$

Оператор заряда

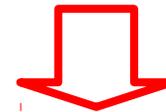
Пределные случаи

$$\hat{\rho} = \frac{1}{Z} \exp \left[-b_\mu \hat{P}^\mu + \frac{1}{2} \varpi_{\mu\nu} \hat{J}^{\mu\nu} + \zeta \hat{Q} \right]$$

$$\varpi = 0$$



Пределные случаи



$$\alpha_\mu = 0$$

$$\hat{\rho} = \frac{1}{Z} \exp[-b \cdot \hat{P} + \zeta \hat{Q}]$$

Великое каноническое распределение

$$\hat{\rho} = \frac{1}{Z} \exp \left[-\hat{H}/T_0 + \omega_0 \hat{J}_z/T_0 \right]$$

V.E. Ambrus and E. Winstanley, Rotating fermions inside a cylindrical boundary, Phys. Rev. D 93 (2016) 104014 [arXiv:1512.05239] [INSPIRE].

Среднее значение оператора физической величины

Среднее в терминах континуального интеграла

$$\langle \hat{O}(x) \rangle = \frac{1}{Z} \text{tr}(\hat{\rho} \hat{O}(x))_{\text{ren}}$$

Статистическая сумма: сокращение несвязных корреляторов

Теория возмущений в третьем порядке

$$\begin{aligned} \langle \hat{O}(x) \rangle &= \langle \hat{O}(x) \rangle_{\beta(x)} + \frac{\varpi_{\mu\nu}}{2|\beta|} \int_0^{|\beta|} d\tau \langle T_\tau J_{-i\tau u}^{\mu\nu} \hat{O}(0) \rangle_{\beta(x),c} \\ &+ \frac{\varpi_{\mu\nu} \varpi_{\rho\sigma}}{8|\beta|^2} \int_0^{|\beta|} d\tau_x d\tau_y \langle T_\tau J_{-i\tau_x u}^{\mu\nu} J_{-i\tau_y u}^{\rho\sigma} \hat{O}(0) \rangle_{\beta(x),c} \\ &+ \frac{\varpi_{\mu\nu} \varpi_{\rho\sigma} \varpi_{\alpha\beta}}{48|\beta|^3} \int_0^{|\beta|} d\tau_x d\tau_y d\tau_z \langle T_\tau J_{-i\tau_x u}^{\mu\nu} J_{-i\tau_y u}^{\rho\sigma} J_{-i\tau_z u}^{\alpha\beta} \hat{O}(0) \rangle_{\beta(x),c} + \dots \end{aligned}$$

Упорядочивание по мнимому времени

Связные корреляторы

$$\langle \hat{J} \hat{O} \rangle_c = \langle \hat{J} \hat{O} \rangle - \langle \hat{J} \rangle \langle \hat{O} \rangle$$

- Сокращение членов по завихрённости, начиная с 4 порядка в подходе с функцией Вигнера и в

A. Vilenkin, *Phys. Rev. D* 21 (1980) 2260. doi:10.1103/PhysRevD.21.2260

Аксиальный ток в третьем порядке теории возмущений

Три типа слагаемых допустимых чётностью:

$$\langle \hat{j}_5^\lambda(x) \rangle_3 = A_1 w^2 w^\lambda + A_2 \alpha^2 w^\lambda + A_3 (w\alpha) \alpha^\lambda$$

Нарушает сохранение аксиального заряда

Основные моменты техники вычисления гидродинамических коэффициентов

- Представление тензора энергии импульса в расщеплённом виде (*point splitting*)

$$\hat{T}_{\mu\nu}(X) = \lim_{X_1, X_2 \rightarrow X} \mathcal{D}_{\mu\nu}(\partial_{X_1}, \partial_{X_2}) \bar{\Psi}(X_1) \Psi(X_2)$$

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}(\partial_{X_1}, \partial_{X_2}) = \frac{i^{\delta_{0\mu} + \delta_{0\nu}}}{4} [\tilde{\gamma}_\mu(\partial_{X_2} - \partial_{X_1})_\nu + \tilde{\gamma}_\nu(\partial_{X_2} - \partial_{X_1})_\mu]$$

M. Buzzegoli, E. Grossi and F. Becattini, *JHEP* 1710 (2017) 091
doi:10.1007/JHEP10(2017)091
[arXiv:1704.02808 [hep-th]].

- Суммирование по мацубаровским частотам

$$\frac{1}{\beta} \sum_{\{\omega_n\}} \frac{(\omega_n \pm i\mu)^k e^{i(\omega_n \pm i\mu)\tau}}{(\omega_n \pm i\mu)^2 + E^2}$$

$$= \frac{1}{2E} \left[(-iE)^k e^{\tau E} (\theta(-\tau) - n_F(E \pm \mu)) + (iE)^k e^{-E\tau} (\theta(\tau) - n_F(E \mp \mu)) \right]$$

$$= \frac{1}{2E} \sum_{s=\pm 1} (-isE)^k e^{\tau s E} [\theta(-s\tau) - n_F(E \pm s\mu)]$$

Распределение Ферми

Детали вычислений

Термальный пропагатор фермионов:

M. Buzzegoli, E. Grossi and F. Becattini, JHEP 1710 (2017) 091 doi:10.1007/JHEP10(2017)091 [arXiv:1704.02808 [hep-th]].

$$\langle T_\tau \psi_a(X) \bar{\psi}_b(Y) \rangle = \sum_{\{P\}} e^{iP^+ \cdot (X-Y)} \frac{(-i\not{P}^+ + m)_{ab}}{(P^+)^2 + m^2} = \sum_{\{P\}} e^{iP^+ \cdot (X-Y)} (-i\not{P}^+ + m)_{ab} \Delta(P^+)$$

$$\Delta(P^\pm) = \frac{1}{P^{\pm 2} + m^2}$$

Интегрирование по фазовому пространству и суммирование по мацубаровским частотам

Явная зависимость от координат переписывается в виде производных по импульсу:

$$\int d^3x d^3y d^3z f(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{k}, \mathbf{r}) e^{-i\mathbf{p}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) - i\mathbf{q}(\mathbf{x}-\mathbf{z}) - i\mathbf{k}\mathbf{y} - i\mathbf{r}\mathbf{z}} x^i y^j z^k =$$

$$i \left(\frac{\partial^3}{\partial r^k \partial k^j \partial p^i} + \frac{\partial^3}{\partial r^k \partial k^j \partial k^i} \right) f(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{k}, \mathbf{r}) \Big|_{\substack{\mathbf{q} = -\mathbf{p} \\ \mathbf{k} = \mathbf{p} \\ \mathbf{r} = -\mathbf{p}}}$$

Аксиальный ток в третьем порядке теории возмущений

Аксиальный ток в третьем порядке теории возмущений

$$\langle \hat{j}_5^\lambda(x) \rangle_3 = A_1 w^2 w^\lambda + A_2 \alpha^2 w^\lambda + \cancel{A_3 (w\alpha) \alpha^\lambda}$$

Результаты расчёта коэффициентов

$$A_1 = -\frac{1}{24|\beta|^3\pi^2}$$

$$A_2 = -\frac{1}{8|\beta|^3\pi^2}$$

$$A_3 = 0$$



Аксиальный
заряд
сохраняется

Сравнение с результатом полученным с помощью функции Вигнера

Расчёт на основе оператора плотности в рамках КТП при конечной температуре

$$j_5^\lambda(x) = \left(\frac{T^2}{6} + \frac{\mu^2}{2\pi^2} - \frac{\omega^2}{24\pi^2} - \frac{a^2}{8\pi^2} \right) \omega^\lambda$$

Расчёт на основе функции Вигнера

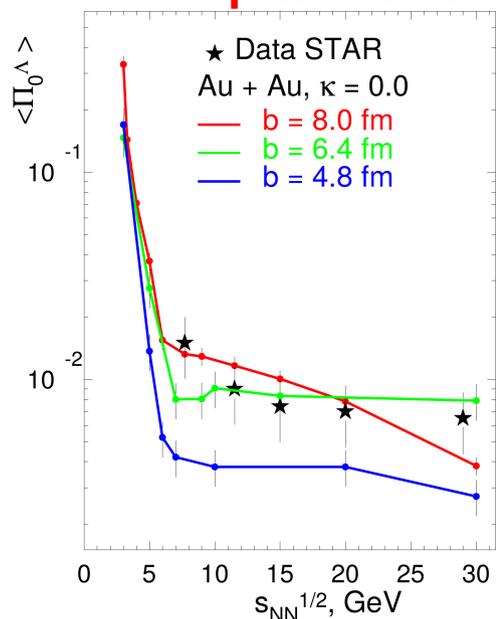
$$\langle : j_\mu^5 : \rangle = \left(\frac{1}{6} \left[T^2 + \frac{a^2 - \omega^2}{4\pi^2} \right] + \frac{\mu^2}{2\pi^2} \right) \omega_\mu + \frac{1}{12\pi^2} (\omega \cdot a) a_\mu$$

- Совпадают кубические члены по завихрённости
- Совпадают линейные члены, соответствующие CVE
- Второй ток имеет слагаемое вдоль вектора ускорения, нарушающее сохранение аксиального заряда
- Различаются коэффициенты перед $a^2 \omega^\lambda$

2 подхода к вычислению поляризации гиперонов

1 подход

Падение поляризации гиперонов с ростом энергии столкновения



- Sorin, Alexander et al. *Phys.Rev. C95* (2017) no.1, 011902 arXiv:1606.08398 [nucl-th]
- M. Baznat, K. Gudima, A. Sorin and O. Teryaev, *EPJ Web Conf.* 138 (2017) 01008. doi:10.1051/epjconf/201713801008; arXiv:1701.00923

Поляризация определяется аксиальным зарядом странных кварков

Согласно CVE

$$c_V = \frac{\mu_s^2 + \mu_A^2}{2\pi^2} + \frac{T^2}{6},$$

$$Q_5^s = N_c \int d^3x C(r) c_V \gamma^2 \epsilon^{ijk} v_i \partial_j v_k$$

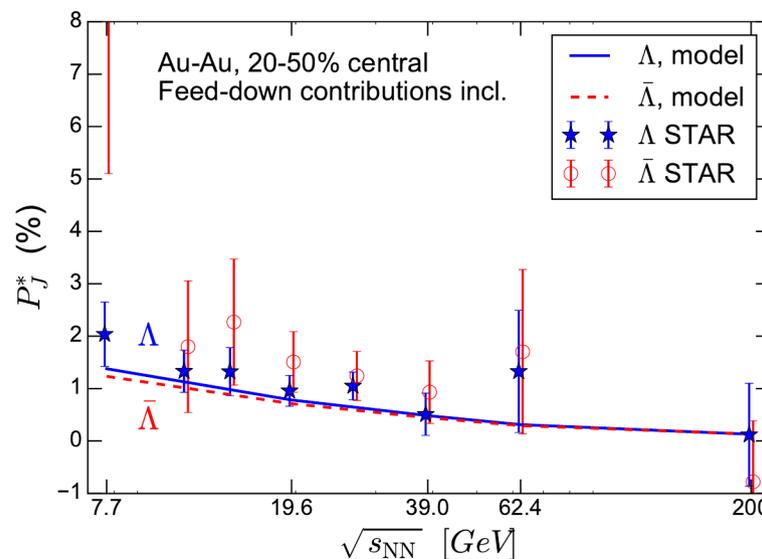
Падение поляризации вызвано уменьшением странного химического потенциала

2 подход

- Karpenko, Iu. et al. *Nucl.Phys. A967* (2017) 764-767 arXiv:1704.02142 [nucl-th]

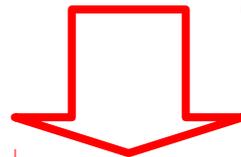
На основе функции Вигнера

$$S^\mu(x, p) = -\frac{1}{8m} (1 - f(x, p)) \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_\sigma \varpi_{\nu\rho}$$



2 подхода к вычислению поляризации гиперонов

- Было доказано, что используемая во втором подходе функции Вигнера приводит к киральному вихревому эффекту.
- При этом Киральный вихревой эффект лежит в основе 1 подхода.
- Таким образом, Киральный вихревой эффект существенен для обоих подходов, что может объяснить одинаковое поведение поляризации в них.



Существует связь между 2 подходами к расчёту поляризации гиперонов.

Основные результаты

- Вывод Кирального вихревого эффекта на основе ковариантной функции Вигнера, предложенной F. Becattini, V. Chandra, L. Del Zanna, E. Grossi.
- На основе функции Вигнера выведена формула для аксиального тока во вращающейся и ускоренной среде за пределами теории возмущений.
- Показано соответствие двух подходов к расчёту поляризации Λ -гиперонов: на основе расчёта аксиального заряда странных и на основе функции Вигнера.
- С помощью квантового оператора плотности F. Becattini рассчитан аксиальный ток в третьем порядке теории возмущений.

Запланированные задачи

- Сравнение двух подходов к расчёту поляризации Λ -гиперонов: вывод связи поляризации с аксиальным током.
- Исследование вопроса о неперенормируемости киральных эффектов в теории поля при конечных температурах.
- Исследование влияния эффектов, связанных с гравитацией и, в частности, с гравитационной аномалией, на физику киральных жидкостей.
- Дополнительная проверка сохранения аксиального заряда.

Спасибо за внимание!

Учёт аксиального химического потенциала в первом порядке теории возмущений

Термальный пропагатор с учётом векторного и аксиального химического потенциалов: случай массы равной нулю

$$\langle T_\tau \Psi_a(X) \bar{\Psi}_b(Y) \rangle_{\beta(x)} = \int_{\{P\}} \left[e^{iP^{+-}(X-Y)} \mathcal{P}_+ \frac{\tilde{\gamma}_\alpha(-iP_\alpha^{+-})}{(P^{+-})^2} + e^{iP^{++}(X-Y)} \mathcal{P}_- \frac{\tilde{\gamma}_\alpha(-iP_\alpha^{++})}{(P^{++})^2} \right]$$

$$\mu_5 \neq 0$$

$$m = 0$$



$$\mathcal{P}_\pm = \frac{1 \pm \gamma_5}{2}$$

$$P^{+-\lambda} = (p_n + i\mu - i\mu_5, \mathbf{p})$$

Аксиальный ток в первом порядке

$$j_5^\lambda(x) = n_5 u^\lambda + \left(\frac{T^2}{6} + \frac{\mu^2 + \mu_5^2}{2\pi^2} \right) \omega^\lambda$$

Векторный ток в первом порядке

$$j^\lambda = n u^\lambda + \frac{\mu\mu_5}{\pi^2} \omega^\lambda$$



Соответствует другим подходам: эффективная теория поля с аксиальными аномалиями и кинетический



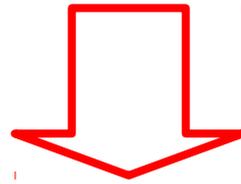
- A. V. Sadofyev, V. I. Shevchenko and V. I. Zakharov, *Phys. Rev. D* 83 (2011) 105025 doi:10.1103/PhysRevD.83.105025 [arXiv:1012.1958 [hep-th]].
- J. H. Gao, Z. T. Liang, S. Pu, Q. Wang and X. N. Wang, *Phys. Rev. Lett.* 109 (2012) 232301 doi:10.1103/PhysRevLett.109.232301 [arXiv:1203.0725 [hep-ph]].

Учёт гравитационной аномалии

K. Landsteiner, E. Megias, F. Pena-Benitez: *Gravitational Anomaly and Transport*. *Phys. Rev. Lett.* 107, 021601 (2011), [arXiv:1103.5006 \[hep-ph\]](https://arxiv.org/abs/1103.5006).

Киральные эффекты в аксиальном токе

$$j_5^\mu = n_5 u^\mu + \left(\frac{\mu^2 + \mu_5^2}{2\pi^2} \right) \omega^\mu + \frac{\mu}{2\pi^2} B^\mu$$



Киральный вихревой эффект (CVE)

$$j_5^\lambda = \left(\frac{T^2}{6} + \frac{\mu^2 + \mu_5^2}{2\pi^2} \right) \omega^\lambda$$

Вычисление следа

- Разложить в ряд Тейлора

$$X = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \exp \left[t(n+l)(\beta \cdot p - \xi - \frac{1}{2} \varpi : \Sigma) \right] =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \exp \left[t(n+l)(\beta \cdot p - \xi) \right] \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} (t(n+l) \left(-\frac{1}{2} \varpi : \Sigma \right))^m$$

- Воспользоваться свойствами гамма-матриц

$$(\varpi : \Sigma)^{2k} = \eta^k \frac{1 + \gamma^5}{2} + \theta^k \frac{1 - \gamma^5}{2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

- Можно взять след в каждом члене ряда

$$\begin{aligned} \text{tr}((\varpi : \Sigma)^{2k+1} \Sigma^{\nu\beta}) &= (\varpi^{\nu\beta} + i\tilde{\varpi}^{\nu\beta})\eta^k + (\varpi^{\nu\beta} - i\tilde{\varpi}^{\nu\beta})\theta^k \\ \text{tr}((\varpi : \Sigma)^{2k} \Sigma^{\nu\beta}) &= 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Вклад частиц

$$\text{tr}(X \Sigma^{\nu\beta})$$

$\xi \rightarrow -\xi$



Общий знак

Вклад античастиц

$$\text{tr}(\bar{X} \Sigma^{\nu\beta})$$



- Просуммировать ряд обратно

$$\begin{aligned} \text{tr}(X\Sigma^{\nu\beta}) = & \left\{ (\exp [(\beta \cdot p - \xi - g_1 + ig_2)] + 1)^{-1} - (\exp [(\beta \cdot p - \xi + g_1 - ig_2)] + 1)^{-1} \right\} \\ & \frac{1}{4(g_1 - ig_2)} [\varpi^{\nu\beta} - i \text{sgn}(\varpi : \tilde{\varpi}) \tilde{\varpi}^{\nu\beta}] + \\ & \left\{ (\exp [(\beta \cdot p - \xi - g_1 - ig_2)] + 1)^{-1} - (\exp [(\beta \cdot p - \xi + g_1 + ig_2)] + 1)^{-1} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C^{\alpha_1\alpha_2|\alpha_3\alpha_4|\alpha_5\alpha_6|\lambda|ijk} = & \frac{1}{|\beta|^3} \int d\tau_x d\tau_y d\tau_z d^3x d^3y d^3z \langle T_\tau \hat{T}^{\alpha_1\alpha_2}(\tau_x, \mathbf{x}) \\ & \hat{T}^{\alpha_3\alpha_4}(\tau_y, \mathbf{y}) \hat{T}^{\alpha_5\alpha_6}(\tau_z, \mathbf{z}) \hat{j}_5^\lambda(0) \rangle_{\beta(x),c} x^i y^j z^k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_1 = & -\frac{1}{6} (C^{02|02|02|3|111} + C^{02|01|01|3|122} + C^{01|02|01|3|212} + \\ & C^{01|01|02|3|221} - C^{01|02|02|3|211} - C^{02|01|02|3|121} - C^{02|02|01|3|112} - C^{01|01|01|3|222}) \end{aligned}$$

$$\langle T_\tau \hat{T}^{\alpha_1 \alpha_2}(\tau_x, \mathbf{x}) \hat{T}^{\alpha_3 \alpha_4}(\tau_y, \mathbf{y}) \hat{T}^{\alpha_5 \alpha_6}(\tau_z, \mathbf{z}) \hat{j}_5^\lambda(0) \rangle_{\beta(x), c} = \lim_{\substack{X_1, X_2 \rightarrow X \\ Y_1, Y_2 \rightarrow Y \\ Z_1, Z_2 \rightarrow Z \\ F_1, F_2 \rightarrow F=0}} \mathcal{D}_{a_1 a_2}^{\alpha_1 \alpha_2}(\partial_{X_1}, \partial_{X_2})$$

$$\mathcal{D}_{a_3 a_4}^{\alpha_3 \alpha_4}(\partial_{Y_1}, \partial_{Y_2}) \mathcal{D}_{a_5 a_6}^{\alpha_5 \alpha_6}(\partial_{Z_1}, \partial_{Z_2}) \mathcal{J}_A^\lambda \langle \bar{\Psi}_{a_1}(X_1) \Psi_{a_2}(X_2) \bar{\Psi}_{a_3}(Y_1) \Psi_{a_4}(Y_2) \bar{\Psi}_{a_5}(Z_1) \Psi_{a_6}(Z_2) \bar{\Psi}_{a_7}(F_1) \Psi_{a_8}(F_2) \rangle_{\beta(x), c}$$

$$\varpi_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} w^\alpha u^\beta + \alpha_\mu u_\nu - \alpha_\nu u_\mu$$



Разложение на генераторы углового момента и сдвига

$$\hat{J}^{\mu\nu} = u^\mu \hat{K}^\nu - u^\nu \hat{K}^\mu - u_\rho \epsilon^{\rho\mu\nu\sigma} \hat{J}_\sigma$$

Аксиальный ток в третьем порядке теории возмущений

Каждый из гидродинамических коэффициентов представляется как сумма величин C

$$A_1 = -\frac{1}{6} (C^{02|02|02|3|111} + C^{02|01|01|3|122} + C^{01|02|01|3|212} + C^{01|01|02|3|221} - C^{01|02|02|3|211} - C^{02|01|02|3|121} - C^{02|02|01|3|112} - C^{01|01|01|3|222})$$

Каждый из этих коэффициентов имеет вид:

$$C^{\alpha_1\alpha_2|\alpha_3\alpha_4|\alpha_5\alpha_6|\lambda|ijk} = \frac{i}{|\beta|^3(2\pi)^3} \int [d\tau] d^3p \left(\frac{\partial^3 D_1}{\partial r^k \partial k^j \partial p^i} + \frac{\partial^3 D_1}{\partial r^k \partial k^j \partial k^i} \right) \Big|_{\substack{\mathbf{q}=-\mathbf{p} \\ \mathbf{k}=\mathbf{p} \\ \mathbf{r}=-\mathbf{p}}} + \dots$$

$$D_1 = \frac{-1}{16E_p E_q E_k E_r} \sum_{\substack{s_1, s_2, s_3, \\ s_4 = \pm 1}} e^{(\tau_x - \tau_y)s_1 E_p + (\tau_x - \tau_z)s_2 E_q + \tau_y s_3 E_k + \tau_z s_4 E_r} A^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\alpha_6\lambda}(\tilde{P}, \tilde{K}, \tilde{Q}, \tilde{R})$$

$$\left(\Theta(-s_1[\tau_x - \tau_y]) - n_F(E_p - s_1\mu) \right) \left(\Theta(-s_2[\tau_x - \tau_z]) - n_F(E_q + s_2\mu) \right) \\ \left(\Theta(-s_3) - n_F(E_k - s_3\mu) \right) \left(\Theta(-s_4) - n_F(E_r + s_4\mu) \right)$$

Многочлен от аргументов

$$C^{02|02|02|3|111} = -C^{01|01|01|3|222} = \frac{29}{80|\beta|^3\pi^2}$$

$$C^{01|02|02|3|211} = C^{02|01|02|3|121} = C^{02|02|01|3|112} = -C^{02|01|01|3|122} =$$

$$-C^{01|02|01|3|212} = -C^{01|01|02|3|221} = \frac{19}{240|\beta|^3\pi^2}$$