

# Четырехфермионное взаимодействие в контексте изучения соударений релятивистских тяжелых ионов

Г.М. Зиновьев, С.В. Молодцов

ИТФ (Киев), ОИЯИ, ИТЭФ

ОИЯИ 21.11.2012

- Четырехфермионное взаимодействие
- Термодинамика кваркового ансамбля
- Ферми жидкость
  - Поверхность раздела газа и жидкости
  - Капли кварковой жидкости
- Цветовая сверхпроводимость
- Фермионный конденсат
- Константа взаимодействия

# Четырехфермионное взаимодействие

$$\mathcal{H} = -\bar{q} (i\gamma\nabla + im) q - \bar{q} t^a \gamma_\mu q \int d\mathbf{y} \bar{q}' t^b \gamma_\nu q' \langle A_\mu^a A_\nu^b \rangle$$

$$\langle A_\mu^a A_\nu^b \rangle = G \delta^{ab} [ \delta_{\mu\nu} F(\mathbf{x} - \mathbf{y}) ]$$

$$F(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x}) \text{ (НИЛ)}, \quad F(\mathbf{p}) = \delta(\mathbf{p}) \text{ (ККБ)}, \quad F(\mathbf{x}) \sim |\mathbf{x}|$$

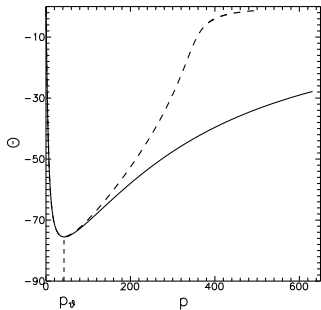
$$q(\mathbf{x}) = \int \frac{d\tilde{\mathbf{p}}}{(2p_0)^{1/2}} [ a(\mathbf{p}, S) u(\mathbf{p}, S) e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}} + b^\dagger(\mathbf{p}, S) v(\mathbf{p}, S) e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}} ]$$

$$p_0 = (\mathbf{p}^2 + m^2)^{1/2}, \quad a|0\rangle = 0, \quad b|0\rangle = 0, \quad d\tilde{\mathbf{p}} = d\mathbf{p}/(2\pi)^3$$

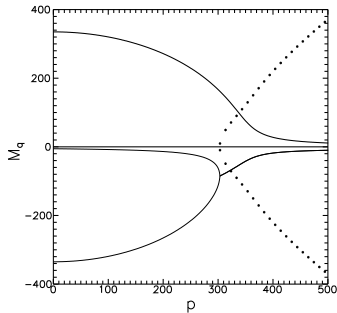
$$\text{Преобразование Боголюбова } T = \prod_{\mathbf{p}, S} \exp [ \varphi_{\mathbf{p}} (a_{\mathbf{p}, S}^+ b_{-\mathbf{p}, S}^+ + a_{\mathbf{p}, S} b_{-\mathbf{p}, S}) ]$$

$$A = T a T^\dagger, \quad |\sigma\rangle = T|0\rangle, \quad E = \min_{\varphi_{\mathbf{p}}} \langle \sigma | H | \sigma \rangle$$

# Четырехфермионное взаимодействие



Равновесный угол  $\theta = 2\varphi$  как функция импульса  $p$  в МэВ. Сплошная линия описывает модель НИЛ, штриховая линия соответствует модели ККБ.



Три ветви решений для динамической массы кварка в МэВ для модели ККБ, как функция импульса (МэВ). Точками показаны мнимые части решений.

# Термодинамика кваркового ансамбля

$$|N\rangle = \prod_{|P| < P_F, S} A_{P;S}^+ |\sigma\rangle, \quad E = \min_{\varphi_P} \langle N|H|N\rangle \quad (T = 0)$$

$$\rho = \langle N|\bar{q}\gamma_0 q|N\rangle = \gamma P_F^3/6\pi^2, \quad \gamma = 2N_c N_f$$

$$\mu = [P_F^2 + M_q^2(P_F)]^{1/2}, \quad P = -dE/dV = -\mathcal{E} + \mu \rho$$

$$\xi = \frac{e^{-\hat{H}_{\text{app}}/T}}{Z_0}, \quad Z_0 = \text{Tr} \{e^{-\hat{H}_{\text{app}}/T}\} \quad (T \neq 0)$$

$$\Omega = E - \mu \bar{Q}_0 - T \bar{S}$$

$$\bar{Q}_0 = \text{Tr}\{\xi Q_0\}, \quad \bar{S} = -\text{Tr}\{\xi S\}, \quad S = -\ln \xi$$

$$P = -dE/dV, \quad d\bar{S}/dV = 0 \rightarrow d\mu/dV, \quad d\bar{Q}_0/dV \neq 0$$

$$\bar{\mu} = \mu, \quad P = -\frac{E}{V} + \frac{\bar{S}T}{V} + \frac{\bar{Q}_0\mu}{V}, \quad \Omega = -P V$$

# Функционал Ландау Ферми жидкости

$$\sin(\theta - \theta_m) = \frac{M_q(\mathbf{p})}{P_0}, \quad P_0 = (\mathbf{p}^2 + M_q^2(\mathbf{p}))^{1/2}$$

$$\sin \theta_m = \frac{m}{\rho_0}, \quad \rho_0 = (\mathbf{p}^2 + m^2)^{1/2}$$

$$M_q(\mathbf{p}) = m + \int d\tilde{\mathbf{q}} F(\mathbf{p} + \mathbf{q}) \tilde{M}(\mathbf{q})$$

$$w = \frac{E}{V\gamma} = \int d\tilde{\mathbf{p}} \rho_0 - \int d\tilde{\mathbf{p}} (1 - n - \bar{n}) P_0 + \frac{1}{4G} \int d\tilde{\mathbf{p}} d\tilde{\mathbf{q}} F(\mathbf{p} + \mathbf{q}) \tilde{M}(\mathbf{p}) \tilde{M}(\mathbf{q})$$

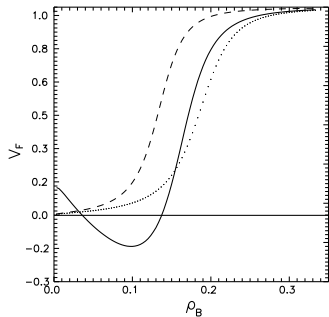
$$\frac{\delta w}{\delta \tilde{M}(\mathbf{p})} \rightarrow M_q = m + 2G \int d\tilde{\mathbf{q}} (1 - n' - \bar{n}') F(\mathbf{p} + \mathbf{q}) \frac{M'_q}{P'_0}$$

$$\frac{\delta w}{\delta n} = P_0, \quad \frac{\delta^2 w}{\delta n^2} = f_0$$

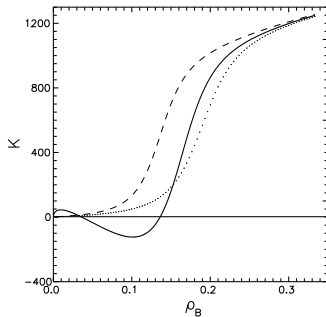
# Функционал Ландау Ферми жидкости

- $v_f = \partial P_0 / \partial \mathbf{p}|_{|\mathbf{p}|=P_F}$  групп. ск. квазч. на п.Ф.  
 $N_F = \gamma \int d\tilde{\mathbf{p}} \delta(P_0 - \mu) = \tilde{N}_F (1 + F_0)^{-1}$  пл. сост. на п.Ф.
- $\tilde{N}_F = \gamma / (2 \pi^2) P_F P_F^0$  пл. сост. идеального газа  
 $F_0 = \tilde{N}_F f_0 = M_q / P_F dM_q / dP_F$
- $K = 9\rho d\mu/d\rho = 3P_F^2/\mu(1 + F_0)$  модуль сжатия
- $C_1^2 = K/(9\mu) = v_F^2/3(1 + F_0)$  скорость первого звука
- $C_V = \frac{1}{3} \pi^2 N_F T$  теплопроводность
- $N_F C_1^2 = \tilde{N}_F \tilde{C}_1^2$  аналог теоремы Латтинжера

# Функционал Ландау Ферми жидкости

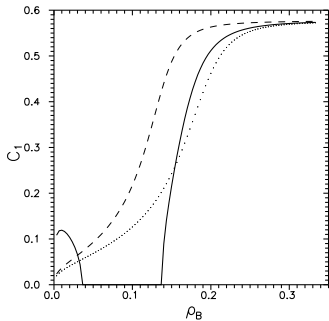


Групповая скорость квазичастиц  $v_F$  на поверхности Ферми. Сплошная линия описывает модель НИЛ, штриховая линия соответствует модели ККБ, точками обозначены данные для модели ККБ, с настройкой на массу  $\pi$ -мезона. Аналог. след. рис.

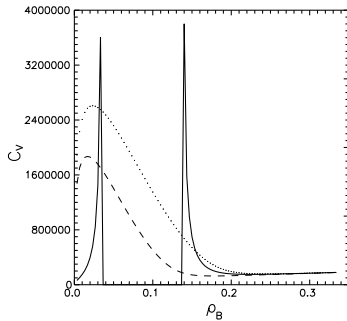


Модуль сжатия  $K$  в МэВ.

# Функционал Ландау Ферми жидкости



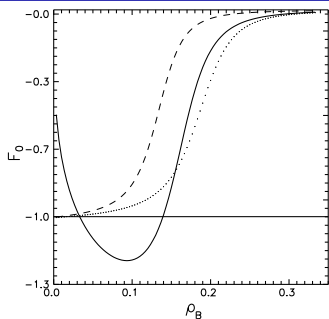
Скорость первого звука  $C_1$ .



Коэфф. наклона при малых темп.  
 $\frac{1}{3}\pi^2 N_F$ ,  $C_V = \frac{1}{3}\pi^2 N_F T$ .



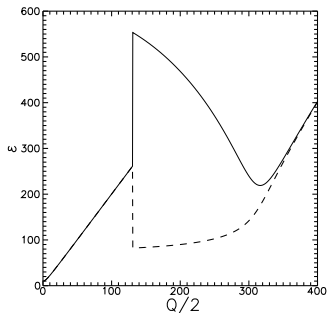
# Функционал Ландау Ферми жидкости



Фактор  $F_0$  теории ферми-жидкости Ландау.

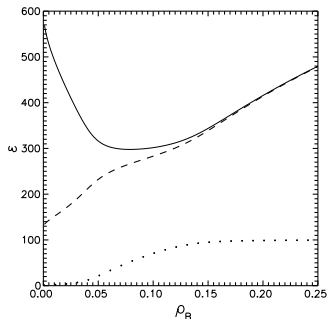
- $F_0 > 0$       отталкивание, колебания нулевого звука
- $-1 < F_0 < 0$       слабое притяжение, затухающий нулевой звук
- $F_0 < -1$       сильное притяжение, неустойчивость

# Функционал Ландау Ферми жидкости



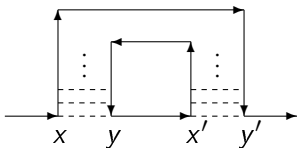
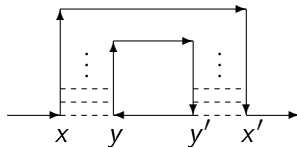
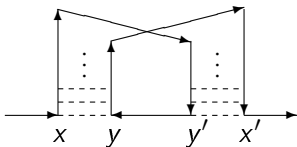
Энергии (МэВ)  $\pi$ -мезона (штриховая линия) и  $\sigma$ -мезона (сплошная линия), как функция импульса  $Q/2$  МэВ ( $T = 0$ ), для газа небольшой барионной плотности, такой что  $P_F \sim 130$  МэВ.

$$\varepsilon_{\pi,\sigma}^2 = (E_p + E_q)^2 - 2G \frac{E_p + E_q}{E_p E_q} (E_p E_q \pm M_p M_q - \mathbf{p}\mathbf{q})$$



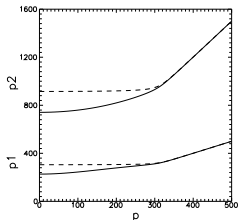
Энергия (МэВ)  $\pi$ -мезона (штриховая линия) и  $\sigma$ -мезона (сплошная линия), как функция барионной плотности ( $T = 0$ ). Точки—ветвь, отвечающая связанному сост. кварка и дырки  $Q_q = -Q_h = 50$  МэВ.

# Связанные состояния. Влияние мезонов

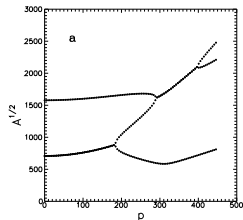


$$S = S + S \Sigma S ,$$

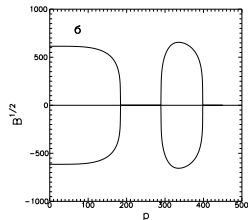
# Связанные состояния. Влияние мезонов



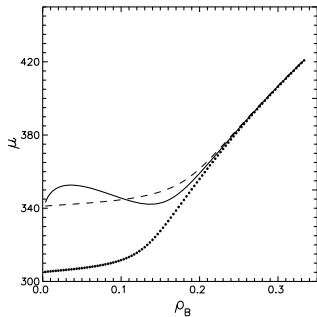
Два положительных корня дисперсионного уравнения  $p_1$ ,  $p_2$  (МэВ) (сплошные кривые), в сравнении с законом дисперсии одного кварка  $E_p$  (штриховые кривые). Верхняя штриховая линия отвечает зависимости  $3E_p$  (чтобы правильно воспроизводить асимптотику корня  $p_2$ ). Импульс кварка дан в МэВ.



Действительные части решений дисперсионного уравнения  $A^{1/2}$  (МэВ) для  $\sigma$ -мезона в дикварковом канале с функцией Грина  $S^{(1)}$ . След. рис.— соответствующие мнимые части  $B^{1/2}$  (МэВ).

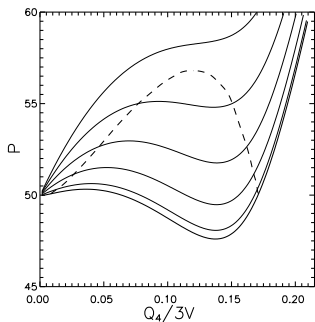


# Термодинамика кваркового ансамбля

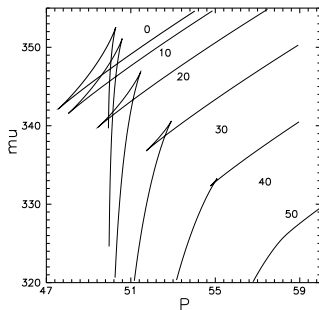


Химический потенциал в МэВ.

# Термодинамика кваркового ансамбля

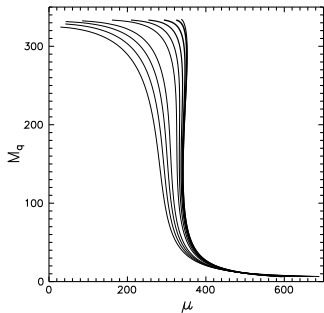


Давление ансамбля  $P$ ,  $\text{МэВ}/\Phi\text{М}^3$ , как функция плотности заряда  $Q_0$  при температурах:  $T = 0 \text{ МэВ}, \dots, T = 50 \text{ МэВ}$ . Самая нижняя кривая —  $T = 0$ . Штриховой кривой показана граница фазового перехода газ—жидкость.

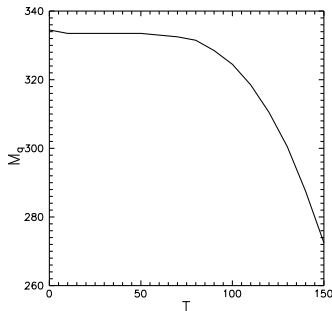


Фрагменты изотерм.  $\mu$ ,  $\text{МэВ}$ , как функция давления,  $P$ ,  $\text{МэВ}/\Phi\text{М}^3$ . Самая верхняя кривая—нулевая изотерма. Далее вниз с шагом 10  $\text{МэВ}$ , до изотермы 50  $\text{МэВ}$  (самая нижняя кривая).  $T_c \sim 46 \text{ МэВ}$ ,  $\bar{Q}_0 \sim 0.12 \text{ з}/\Phi\text{М}^3$ .  $\rho_l = 3 \times 0.19 \text{ з}/\Phi\text{М}^3$ .

# Термодинамика кваркового ансамбля



Динамическая масса кварка  $|M_q|$ , МэВ, как функция химического потенциала  $\mu$ , МэВ, для температур:  $T = 0$  МэВ, ... ,  $T = 100$  МэВ, с шагом  $T = 10$  МэВ. Самая правая кривая отвечает нулевой температуре.



Динамическая масса кварка  $|M_q|$ , МэВ, как функция температуры при малой плотности заряда  $Q_0$ .

$$\rho_g \sim 0, \quad M = 335 \text{ МэВ} \quad \rho_l = 3 \times 0.16 \text{ з/Фм}^3 \quad M^* \approx 70 \text{ МэВ}$$

$$\mathcal{L} = -\bar{q} (\hat{\partial} + M) q - \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma)^2 - U(\sigma) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{m_V^2}{2} V_\mu V_\mu - g_\sigma \bar{q} q \sigma + i g_V \bar{q} \gamma_\mu q V_\mu,$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu, \quad U(\sigma) = m_\sigma^2 \sigma^2 / 2 + b \sigma^3 / 3 + c \sigma^4 / 4 + \dots$$

- Можно ли настроить параметры лагранжиана  $g_\sigma$ ,  $g_V$ ,  $m_\sigma$ ,  $m_V$ ,  $b$ ,  $c$ , и получить аппроксимирующие решения.



# Поверхность раздела газа и жидкости (T=0)

$$\Delta \sigma - m_\sigma^2 \sigma = b \sigma^2 + c \sigma^3 + g_\sigma \rho_s ,$$

$$\Delta V - m_v^2 V = -g_v \rho ,$$

$$(\nabla + \dot{M}^*) q = (E - g_v V) q ,$$

$$\dot{M}^* = M + g_\sigma \sigma, \quad E = \left( \mathbf{p}^2 + \dot{M}^{*2} \right)^{1/2}, \quad V = -iV_4$$

$$\xi(x) = \int^{P_F} \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} q_{\mathbf{p}}(x) \bar{q}_{\mathbf{p}}(x)$$

$$\rho_s(x) = Tr \{ \xi(x), 1 \}, \quad \rho(x) = Tr \{ \xi(x), \gamma_4 \}$$

Приближение Томаса–Ферми,  $P_F(x)$  :

$$\rho = \gamma \int^{P_F} \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} = \gamma P_F^3 / 6\pi^2, \quad \rho_s = \gamma \int^{P_F} \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{M^*}{E}$$

# Поверхность раздела газа и жидкости ( $T=0$ )

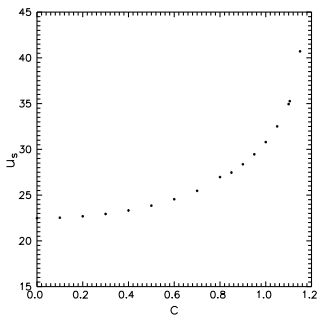
- Интересующие нас настройки и решения существуют, причем параметры аппроксимирующего лагранжиана отвечают сигма модели  $b \sim 1.5 m_\sigma^2 g_\sigma/M$ ,  $c \sim 0.5 m_\sigma^2 (g_\sigma/M)^2$ .
- Основные характеристики: коэфф. пов. натяжения,
- толщина пов. слоя  $t$

$$u_s = 4\pi r_o^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[ e(x) - \frac{\mathcal{E}_l}{\rho_l} \rho(x) \right]$$

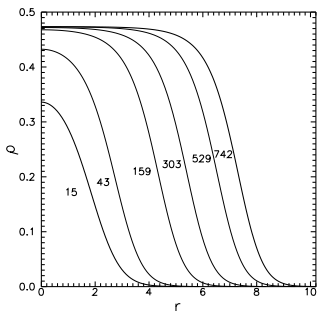
$$e(x) = \mathcal{E}(x)/\rho(x), \quad \mathcal{E}_l, \quad \rho_l$$

$$\mathcal{E}(x) = \gamma \int^{P_F(x)} d\tilde{\mathbf{p}} [\mathbf{p}^2 + M^{*2}(x)]^{1/2} + \frac{1}{2} g_v \rho(x) V(x) - \frac{1}{2} g_\sigma \rho_s(x) \sigma(x)$$

# Поверхность раздела, кварковые капли ( $T=0$ )



Коэффициент пов. нат.  $u_s$   
в МэВ.  $t \sim 1-2$  фм.



Распределение плотности кварков  $\rho$   
( $z/\Phi\text{м}^3$ ) как функция расстояния  $r$  (Фм).

# Капли кварковой жидкости ( $T=0$ )

$$\rho_F(r) = \frac{\tilde{\rho}_0}{1 + e^{(R_0-r)/b}}, \quad \tilde{\rho}_0, R_0, b, t = 4 \ln(3)b \quad R_0 = r_0 N_q^{1/3}$$

$N_q$	$\tilde{\rho}_0$ ( $z/\Phi_M^3$ )	$R_0$ ( $\Phi_M$ )	$t$ ( $\Phi_M$ )	$r_0$ ( $\Phi_M$ )	$m_\sigma$ (МэВ)	$\eta$
15	0.34	1.84	2.24	0.74	351	0.65
43	0.43	2.19	2.28	0.75	384	0.73
159	0.46	4.19	2.29	0.77	409	0.78
303	0.47	5.23	2.29	0.78	417	0.795
529	0.47	6.37	2.27	0.79	423	0.805
742	0.47	7.15	2.27	0.79	426	0.81

$N_q$	$\tilde{\rho}_0$ ( $z/\Phi_M^3$ )	$R_0$ ( $\Phi_M$ )	$t$ ( $\Phi_M$ )	$r_0$ ( $\Phi_M$ )	$m_\sigma$ (МэВ)	$\eta$
18	0.81	1.56	1.63	0.57	524	0.7
46	0.9	2.14	1.63	0.6	557	0.75
169	0.93	3.43	1.6	0.62	586	0.79
278	0.94	4.08	1.6	0.62	594	0.8
525	0.94	5.04	1.6	0.62	603	0.81
776	0.94	5.76	1.6	0.63	607	0.815

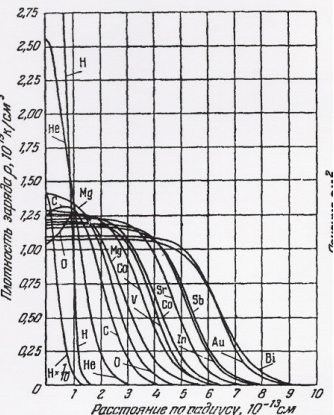


Рис. 6. Сводные аппроксимированные кривые распределения плотности заряда в различных ядрах, изученных с помощью рассеяния электронов.

Плотность заряда в центре ядер — наименее точно определенные участки кривых. Заметьте, кроме того, большое различие между средними плотностями заряда в центре протона и всех остальных ядер. Альфа-частица (He<sup>4</sup>) — также особый случай, плотность заряда в ее центре много больше, чем у более тяжелых ядер.

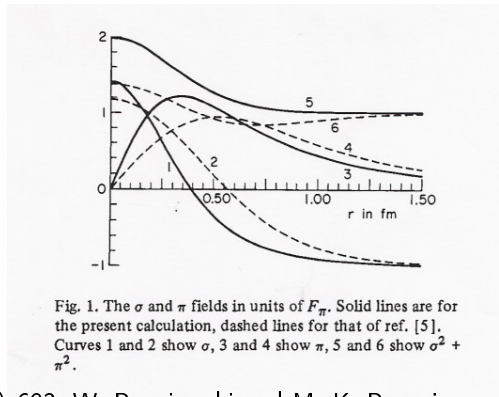


Fig. 1. The  $\sigma$  and  $\pi$  fields in units of  $F_\pi$ . Solid lines are for the present calculation, dashed lines for that of ref. [5]. Curves 1 and 2 show  $\sigma$ , 3 and 4 show  $\pi$ , 5 and 6 show  $\sigma^2 + \pi^2$ .

Р. Хофстадтер, УФН **63** (1957) 693; W. Broniowski and M. K. Banerjee, Phys. Lett. **B158**, 335 (1978)

# Выводы

- Если бы кварковые капли существовали в природе, то по своим свойствам они напоминали бы ядерную материю.
- По-видимому реализован сценарий (частичного) восстановления киральной симметрии и наблюдается смешанная фаза вакуума и барионной материи уже для нормальных условий.
- По своему физическому смыслу лагранжиан Гинзбурга–Ландау описывает баланс прихода и ухода токовых кварков из одной фазы в другую, наподобие молекул воды для находящихся в равновесии жидкости и газа.
- Характерное число формирующей квазичастицы токовых кварков примерно одинаково для вакуума и для заполненных состояний, и определяется, в основном, импульсом обрезания  $\Lambda$ . В этом динамическом смысле вакуум также плотен, как и барионная материя, а наше восприятие только барионного заряда, как плотности материи, может оказаться всего лишь некоторой иллюзией, связанной с измеримостью величины заряда одной из фаз.

# Цветовая сверхпроводимость

$$\mathcal{L} = \bar{q} (i\gamma_\mu \partial_\mu + \hat{\mu} - m) q + G j_\mu^a j_\mu^a$$

Тождество для генераторов цветовой группы SU(3)

$$\lambda_j^i \lambda_l^k = 2 \delta_l^i \delta_j^k - \frac{2}{3} \delta_j^i \delta_l^k$$

тождество с полностью антисимметричным единичным тензором  $\varepsilon$

$$\varepsilon^{\rho ik} \varepsilon_{\rho jl} = \delta_j^i \delta_l^k - \delta_l^i \delta_j^k$$

Выделяем дикварковый канал

$$\lambda_j^i \lambda_l^k = \left( \alpha - \frac{1}{6} \right) \delta_j^i \delta_l^k + \left( \frac{1}{2} - \alpha \right) \delta_l^i \delta_j^k - \alpha \varepsilon_{\rho ik} \varepsilon_{\rho jl}$$

используем тождество Фирца

$$\delta_j^i \delta_l^k = \frac{1}{3} \delta_l^i \delta_j^k + \frac{1}{2} \lambda_l^i \lambda_j^k$$

$$\lambda_j^i \lambda_l^k = \frac{8}{3} \left( \frac{2}{3} - \alpha \right) \delta_l^i \delta_j^k + 2 \left( \alpha - \frac{1}{6} \right) \lambda_l^i \lambda_j^k - 4\alpha \varepsilon^{\rho ik} \varepsilon_{\rho jl}$$

$$\lambda_j^i \lambda_l^k = \frac{8}{3} \left( \frac{2}{3} - \alpha \right) \delta_l^i \delta_j^k + 2 \left( \alpha - \frac{1}{6} \right) \lambda_l^i \lambda_j^k - 4\alpha \varepsilon^{\rho ik} \varepsilon_{\rho jl}$$

Первое слагаемое отвечает синглетному каналу, второе—октетному каналу, третье—дикварковому.  $\alpha = 1/4$

$$\lambda_j^i \lambda_l^k = \frac{10}{9} \delta_l^i \delta_j^k + \frac{1}{6} \lambda_l^i \lambda_j^k - \varepsilon^{\rho ik} \varepsilon_{\rho jl}$$

$$q_c = C \bar{q}^T, \quad \bar{q}_c = q^T C, \quad \bar{Q} = (\bar{q}, \bar{q}_c), \quad Q = \begin{pmatrix} q \\ q_c \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} \bar{Q} [(i\gamma_\mu \partial_\mu - m)\sigma_0 + \hat{\mu}\sigma_3] Q + \\ & + GF^A \left( \frac{5}{72} \bar{Q} \gamma^A \sigma_0 Q' \cdot \bar{Q}' \gamma^A \sigma_0 Q + \frac{1}{24} \bar{Q} \gamma^A \frac{\lambda}{2} \sigma_0 Q' \cdot \bar{Q}' \gamma^A \frac{\lambda}{2} \sigma_0 Q + \right. \\ & \left. + \frac{1}{16} \bar{Q} \varepsilon^\rho \gamma^A C \sigma_1 \bar{Q}'^T \cdot Q'^T \varepsilon^\rho \gamma^A C \sigma_1 Q \right), \end{aligned}$$



## 1. Среднее в скалярном канале

$$\mathcal{L}_{int} \simeq 2G \frac{5}{18} \bar{q}q' \langle \text{Tr} \bar{q}'q \rangle = -\frac{5}{18} G \bar{q}q' \text{Tr}\{iS\}$$

Функция Грина  $S^{-1} = \hat{p} - M_q$

$$M = \frac{5}{9} G \text{Tr} \left\{ \frac{1}{\hat{p} - M_q} \right\} = \frac{10}{3} G \frac{M_q}{E_p}$$

## 2. Скалярный и псевдоскалярный каналы

$$\mathcal{L}_{int} = -\frac{5}{18} G \bar{q} q' \text{Tr}\{iS\} - \frac{5}{18} G \bar{q} i\gamma^5 q' \text{Tr}\{i\gamma^5 iS\},$$

$$\text{Функция Грина } S^{-1} = \hat{p} - M_q - i\gamma^5 C_q$$

$$M = \frac{5}{9} G \text{Tr} \left\{ \frac{1}{\hat{p} - M_q - i\gamma^5 C_q} \right\} = \frac{10}{3} G \frac{M_q}{E_p},$$

$$C = \frac{5}{9} G \text{Tr} \left\{ \frac{i\gamma^5}{\hat{p} - M_q - i\gamma^5 C_q} \right\} = \frac{10}{3} G \frac{C_q}{E_p},$$

$C_q = c + C$ ,  $E_p = (\mathbf{p}^2 + M_q^2 + C_q^2)^{1/2}$ ,  $c$ —затравочная ("токовая") "масса" в псевдоскалярном канале. При  $c \equiv 0$ ,  $C = 0$ , поскольку в общем случае невозможно удовлетворить оба условия для динамических масс  $M$ ,  $C$ . При  $c \equiv 0$ ,  $m \equiv 0$  оказывается невозможным определить фазу динамической массы. Но если положить  $m \rightarrow 0$ ,  $c \equiv 0$ , например, то фаза восстанавливается однозначно. При затравочной псевдоскалярной массе  $c \sim m$ , индуцируемая масса  $C \sim M$ .

# Цветовая сверхпроводимость

3. Скаляр и октетный канал

$$\mathcal{L}_{int} = -\frac{5}{9} G \bar{q} q' \text{Tr}\{iS\} - \frac{1}{12} G \bar{q} \lambda q' \text{Tr}\{\lambda iS\}$$

$$\text{Функция Грина } S^{-1} = \hat{p} - M_q - \lambda \mathbf{O}_q.$$

В  $\mathbf{O}_q$  пусть задействованы только компоненты "изотриплета"  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Тогда функция Грина

$$S = A + \mathbf{B}\lambda,$$

$$A = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\hat{p} - M_q + O_q} + \frac{1}{\hat{p} + M_q + O_q} \right\},$$

$$\mathbf{B} = -\frac{O_q}{O_q} \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\hat{p} - M_q + O_q} - \frac{1}{\hat{p} + M_q + O_q} \right\},$$

$O_q = |\mathbf{O}_q|$ . Откуда можно получить условия самосогласованности

$$M = \frac{5}{9} G \text{Tr} \frac{1}{2} \{A\},$$

$$O_i = \frac{1}{12} G \text{Tr} \{\lambda_i (\mathbf{B}\lambda)\},$$

## 3. Скаляр и октетный канал

$$M = \frac{10}{3} G \frac{1}{2} \left\{ \frac{M^+}{E_{\mathbf{p}}^+} + \frac{M^-}{E_{\mathbf{p}}^-} \right\},$$

$$O = G \frac{1}{2} \left\{ \frac{M^+}{E_{\mathbf{p}}^+} - \frac{M^-}{E_{\mathbf{p}}^-} \right\}.$$

где  $M_{\pm} = M_q \pm O_q$ ,  $\mathbf{O}_q = \mathbf{o} + \mathbf{O}$ , ( $O$  проекция вектора  $\mathbf{O}$  на некоторое выделенное направление),  $E_{\mathbf{p}}^{\pm} = (\mathbf{p}^2 + M_{\pm}^2)^{1/2}$ . Если "токовое" значение вектора  $\mathbf{o}$  равно нулю, то обнаруживается тривиальное решение с нулевым динамическим вектором  $\mathbf{O}$ . При этом,  $M_q^+ = M_q^-$ . Незначительная примесь октетного канала,  $|\mathbf{o}| \ll m$ , приводит к небольшим поправкам для динамической массы кварка.

# Цветовая сверхпроводимость

4. Дикварковая конденсация (цветовая сверхпроводимость)  $\mu \neq 0$ ,  $T = 0$   
В этом случае функцию Грина получаем из соотношения

$$S^{-1} = (\hat{p} - m)\sigma_0 + \hat{\mu}\sigma_3 - M^A\gamma^A - \mathbf{O}^A\gamma^A\lambda\sigma_0 - \Delta_q^{\rho A}\varepsilon^{\rho}\gamma^A\sigma_1.$$

Ограничимся частным случаем скалярных кирального и дикваркового конденсатов:  $\gamma^A = 1$ ,  $|\mathbf{O}| = 0$ .

$$M = \frac{10}{3} G M_q \left[ \frac{\alpha}{(C + 2D)^{1/2}} + \frac{\beta}{(C - 2D)^{1/2}} \right],$$

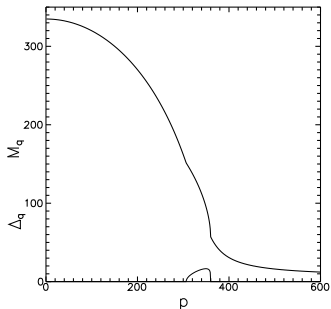
$$\Delta^{\rho} = 2G \Delta_q^{\rho} \left[ \frac{\tilde{\alpha}}{(C + 2D)^{1/2}} + \frac{\tilde{\beta}}{(C - 2D)^{1/2}} \right],$$

$$C = E_{\mathbf{p}}^2 + \mu^2 - 4\Delta_q^2, \quad D = (E_{\mathbf{p}}^2\mu^2 - 4M_q^2\Delta_q^2)^{1/2},$$

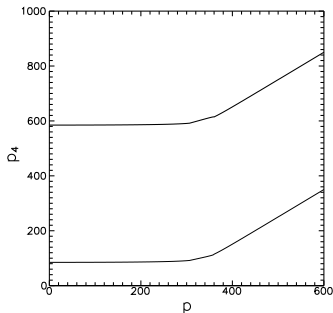
$$\alpha = \frac{1}{2} + \frac{\mu^2 + \Delta_q^2}{2D}, \quad \beta = \frac{1}{2} - \frac{\mu^2 + \Delta_q^2}{2D},$$

$$\tilde{\alpha} = \frac{1}{2} + \frac{M_q^2}{2D}, \quad \tilde{\beta} = \frac{1}{2} - \frac{M_q^2}{2D}.$$

# Цветовая сверхпроводимость

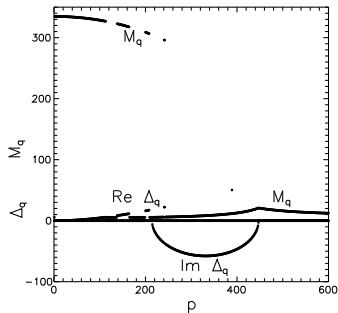


Динамическая масса кварка  $M_q$  и дикварковый конденсат  $\Delta_q$  как функция импульса в модели ККБ при химическом потенциале  $\mu = 0.7 \cdot 3G \sim 250$  МэВ.

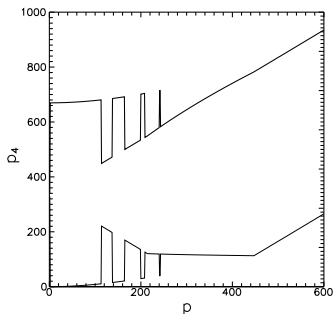


Две ветви решений дисперсионного уравнения ( $Z = 0$ ) на энергию квазичастицы в модели ККБ ( $p_4$  МэВ), при тех же условиях.

# Цветовая сверхпроводимость



Динамическая масса кварка  $M_q$  и дикварковый конденсат  $\Delta_q$ , как функция импульса в модели ККБ при "критическом" химическом потенциале  $\mu \sim 3G \sim 335$  МэВ. Полуовал отрицательных значений отвечает чисто мнимому дикварковому конденсату.



Две ветви решений дисперсионного уравнения ( $Z = 0$ ) на энергию квазичастицы в модели ККБ  $p_4$  МэВ, для критического химического потенциала, при тех же условиях.

# Фермионный конденсат

Ходель В. А., Шагинян В. Р. Письма ЖЭТФ. 1990. Т. 51 С. 488

$$\Omega = E - \mu \bar{Q}_0 - T \bar{S}$$

$$-(1 - n) \frac{M_q}{P_0} + \frac{M}{2G} = 0 ,$$

$$P_0 - \mu - T \ln(n^{-1} - 1) = 0 .$$

При  $T = 0$ . Для ферми-конденсата предлагается в качестве опорного рассматривать второе уравнение системы, и искать решение в виде

$$T \equiv 0 ,$$

$$P_0 = \mu ,$$

вырожденное по энергии (аналогичное поведение демонстрирует и модель ККБ). Откуда для динамической массы кварка имеем

$$M_q = \pm(\mu^2 - \mathbf{p}^2)^{1/2}$$



Стандартная ступенька Ферми

$$n = \frac{1}{e^{\beta(P_0 - \mu)} + 1}, \quad P_0 = [\mathbf{p}^2 + M_q^2(\mathbf{p})]^{1/2}$$

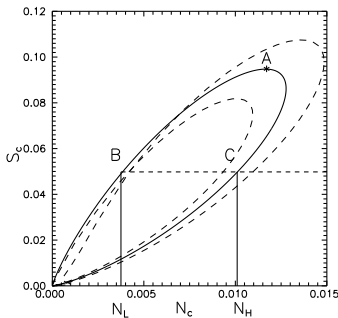
Динамическая масса кварка

$$\begin{aligned} \frac{M_q}{P_0} &= \frac{M}{2G}, \quad n = 0, \quad |\mathbf{p}| > P_F, \\ M &= 0, \quad n = 1, \quad |\mathbf{p}| < P_F. \end{aligned}$$

Для ферми-конденсата

$$n_{\pm} = 1 - \frac{\mu}{2G} \pm \frac{\mu}{2G} \frac{m}{(\mu^2 - \mathbf{p}^2)^{1/2}}$$

# Фермионный конденсат



Плотность энтропии (на  $\Phi\text{м}^3$ ), как функция плотности кваркового ансамбля (на  $\Phi\text{м}^3$ ) для состояния фермионного конденсата. Сплошная кривая получена в киральном пределе.

# Фермионный конденсат

$$n = n_+ = n_- = 1 - \frac{\mu}{2G}$$

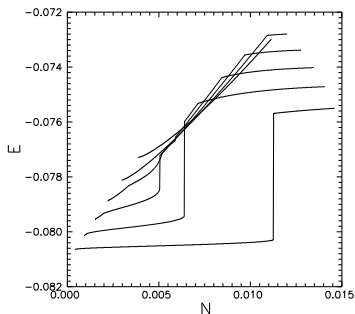
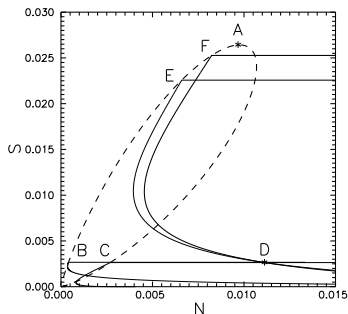
Конденсатное решение возможно только при  $\mu < 2G$ . При этом,  $M_q = M = (\mu^2 - \mathbf{p}^2)^{1/2}$ , и вещественное решение существует только на отрезке  $0 \leq |\mathbf{p}| \leq \mu$ . Помимо конденсатного решения возможно и стандартное:

$$\begin{aligned} M_q = M &= [(2G)^2 - \mathbf{p}^2]^{1/2}, & n = 0, & \quad |\mathbf{p}| > P_F \\ M = 0, & & n = 1, & \quad |\mathbf{p}| \leq P_F. \end{aligned}$$

При наличии фермионного конденсата возможны три варианта заполнения ансамбля фермионным конденсатом и сферой Ферми:

- 1)  $P_F < \mu$ , 2)  $P_F = \mu$ , 3)  $P_F > \mu$
- $\mathcal{S}_1, \mathcal{N}_1, \quad \mathcal{S}_2, \mathcal{N}_2, \quad \mathcal{S}_3, \mathcal{N}_3$

# Фермионный конденсат



Плотность энтропии для некоторых решений с заполнением сферы  $\Phi$ еми, и фермионным конденсатом (все в безразмерном виде).

Плотность энергии, как функция плотности ансам. ("барионного" заряда) при сканировании по энтропии, начиная со значения  $\bar{S} = 2.64 \cdot 10^{-3}$  (в десять раз меньше максимальной плотности энтропии), см. самую нижнюю кривую. Остальные кривые вверх получены при увеличении энтропии с шагом  $\Delta\bar{S} = 2.64 \cdot 10^{-3}$ . При малой плотности энтропии отчетливо виден скачок энергии ансамбля.

# Фермионный конденсат

$$-(1 - n - \bar{n}) \frac{M_q}{P_0} + \frac{M}{2G} = 0 \quad (T \neq 0)$$

$$P_0 - \mu - T \ln(n^{-1} - 1) = 0$$

$$P_0 + \mu - T \ln(\bar{n}^{-1} - 1) = 0$$

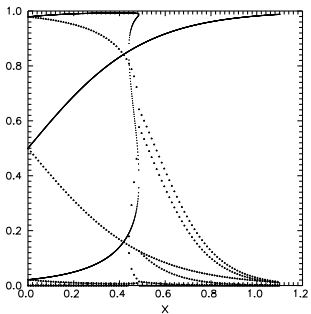
$$(m \rightarrow 0) \quad 1 - n - \bar{n} = \frac{P_0}{2G}$$

Возможны случаи, когда энергия кварка становится отрицательной (связанное состояние квазичастицы). При ненулевой динамической массе  $-2G < P_0 < 2G$ . При  $P_0 > 2G$ ,  $M_q = M = 0$

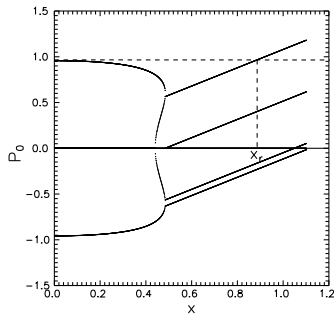
$$(x = \mu/(2G), y = T/(2G)) \quad \bar{n} = \left( e^{2x/y + \ln(n^{-1} - 1)} + 1 \right)^{-1}$$

$$1 - n - \bar{n} = x + y \ln(n^{-1} - 1)$$

# Фермионный конденсат

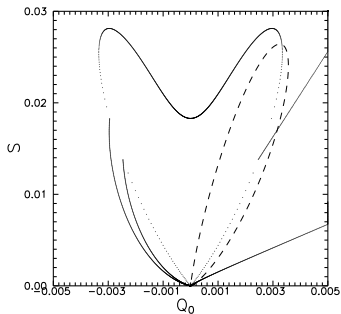


Пять ветвей решений уравнений для плотности кварков и антикварков (которые отвечают кривым с более разреженными точками) с параметром  $y = 0.25$ , как функция параметра  $x$ .



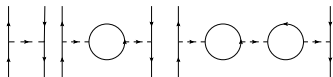
Энергия кварка  $P_0$  для представленных решений. Интересно отметить, что имеются корни, с отрицательной энергией.

# Фермионный конденсат



Плотность энтропии, как функция плотности барионного заряда, при температуре  $y = 0.25$ . Штриховая линия отвечает нулевой температуре.

# Константа взаимодействия



Первые члены ряда теории возмущений для наблюдаемой константы связи.

$$\tilde{\Pi}^{\pi,\sigma} = 4N_c \int \frac{d\tilde{\mathbf{k}}}{E} \frac{-2E^2 + M^2 \mp M^2}{\varepsilon^2/4 - E^2}$$

где  $\varepsilon$ —передаваемая энергия,  $E = [\mathbf{k}^2 + M^2(\mathbf{k})]^{1/2}$ —энергия квазичастицы в петле.  $V$ —объем.

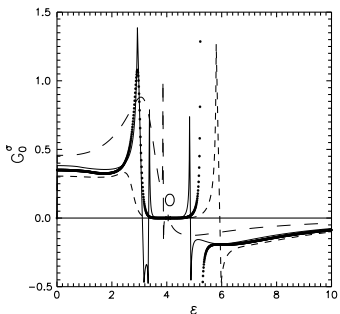
$$G_o = G + VG\tilde{\Pi} + (VG\tilde{\Pi})^2 + \dots$$

$$\Pi = \tilde{\Pi} - \Pi_0$$

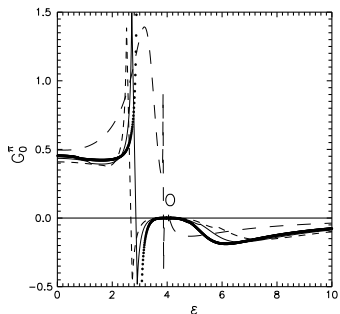
$$G_o^{\pi,\sigma} = \frac{G}{1 - VG^3\Pi^{\pi,\sigma}}$$



# Фермионный конденсат



Наблюдаемая константа связи  $G_0^\sigma$  как функция передаваемой энергии  $\varepsilon$  (в безразмерных переменных). Штриховая кривая получена для  $m = 0.9$ . Точками показан случай  $m = 0.6$ . Сплошная линия отвечает случаю  $m = 0.4$ . Всюду параметр  $V = 1$ . Точка  $O$  показывает место, где  $G_0^{\pi,\sigma} = 0$ . Штриховая кривая с большим шагом отвечает  $m = 0.01$ .



Наблюдаемая константа связи  $G_0^\pi$  как функция передаваемой энергии  $\varepsilon$ . Обозн. аналогичны случаю скалярного мезона.